

# INDICE

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Transformaciones y Simetría Conforme</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Simetría Conforme de Sistemas Relativistas y No Relativistas</b>	<b>9</b>
3.1	Simetría Conforme de una Partícula No Relativista . . . . .	9
3.2	Simetría Conforme de una Partícula Relativista Sin Masa . . . . .	16
3.2.1	Partícula Relativista sin Masa en $d + 2$ . . . . .	19
3.2.2	Cuantización del modelo de Partícula Relativista sin Masa en $d + 2$ . . . . .	24
3.3	Relación canónica entre una partícula masiva no relativista y una relativista . . . . .	25
3.3.1	Cuantización del modelo de Partícula No Relativista . . . . .	30
3.4	Correspondencia AdS/CFT . . . . .	31
3.4.1	Sistema Relativista . . . . .	31
3.4.2	Sistemas No Relativistas . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Simetría Superconforme y Supersimetría No Lineal</b>	<b>36</b>
4.1	Introducción del Spin en un modelo de Mecánica Clásica . . . . .	36
4.2	Mecánica Lineal Superconforme . . . . .	38

4.2.1	Partícula Libre . . . . .	38
4.2.2	Modelo de Mecánica Superconforme . . . . .	40
4.3	Mecánica Superconforme No Lineal . . . . .	41
4.4	Cuantización del Modelo . . . . .	44
4.4.1	Estructura No Lineal del Algebra Superconforme Cuántica . . . . .	45
4.4.2	Sistemas Caracterizados Por Dos Simetrías Superconformes . . . . .	48
4.4.3	Operador de Casimir de la Simetría Superconforme . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Simetría Dinámica del Sistema Fermión-Monopolo</b>	<b>52</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>7</b>	<b>APENDICE: Vínculos y Grados de Libertad</b>	<b>61</b>

# Aspectos No Lineales de las Simetrías Conforme y Superconforme

Carlos Leiva

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física  
Universidad de Santiago de Chile

## **Abstract**

## **RESUMEN**

En la presente tesis se estudian los aspectos no lineales de las simetrías conforme y superconforme. En una primera etapa se investiga la relación de la simetría conforme de sistemas relativistas y no relativistas. En segundo lugar, se estudia la realización no lineal de la simetría conforme, a partir de su realización lineal, usando una reducción dimensional para una partícula relativista no masiva que se mueve en un espacio de dos dimensiones más. Luego, se realiza una generalización no lineal de la supersimetría conforme y se investiga, desde este punto de vista, el modelo de mecánica superconforme. Finalmente, se estudia la simetría  $osp(2|2)$  del sistema fermión-monopolo, vía comparación con el modelo de mecánica superconforme.

# 1 Introducción

El estudio de las propiedades físicas de un sistema se puede simplificar considerablemente si se conoce el conjunto completo de simetrías que lo caracterizan, ya que se pueden observar las propiedades del sistema sin la obligación de resolver completamente las ecuaciones que lo describen. En altas energías por ejemplo los principios de simetría han ayudado a enfrentar problemas como la falta de conocimiento preciso de las fuerzas entre partículas, y por otro el análisis de modelos matemáticos que se vuelven prácticamente intratables cuando los modelos pretenden acercarse a la realidad.

Entre las simetrías que aportan información no visible en un primer análisis de un sistema merecen mencionarse las simetrías dinámicas, también conocidas como "escondidas". La más conocida de ellas es probablemente la asociada con el vector de Laplace-Runge-Lenz en el problema de Kepler, la cual es responsable del carácter cerrado de las órbitas finitas, fijando la orientación de las mismas. En otro ámbito ésta también da una explicación a la degeneración del espectro cuántico en el átomo de Hidrógeno.

La presente tesis está dedicada al estudio de la Simetría Conforme. Actualmente existe un renovado interés en esta simetría pues aparece en diversos ámbitos. Desde que Jackiw en los años setenta [1] llamó la atención sobre la importancia de las simetrías de escala en aplicaciones tales como los experimentos de altas energías desarrollados en SLAC y el National Accelerator Laboratory, pasando por el desarrollo del modelo mecánico conforme desarrollado como teoría de campo en  $0 + 1$  dimensiones por V. de Alfaro, S. Fubini y G. Furlan [2], su extensión supersimétrica [?] [?], desarrollado por Akulov y Pashnev [3] por un lado y por Fubini y Rabinovici [4] por otro, hasta observaciones hechas en el contexto de la correspondencia AdS/CFT [5] de que la dinámica de una superpartícula cerca del horizonte de un agujero negro de Reissner-Nordström extremo está gobernada por una acción que se reduce a un modelo mecánico superconforme en el límite de un agujero negro masivo [6].

Pero no solamente es este tipo de problema el que se ha visto enriquecido con las propiedades de la simetría conforme pues también en Mecánica de Fluidos como lo mostraron L. O’Raifeartaigh y V.V. Sreedhar [8] lo cual ha sido fundamental en la explicación teórica de experimentos de explosión-implosión apuntados por L. O’C. Drury y J. T. Mendonca. En sus publicaciones comentan que las ecuaciones de Euler de la dinámica de un gas ideal posee una simetría que permite relacionar expansiones y contracciones de los sistemas lo cual permite mapear un problema de expansión a uno dual de implosión y vice versa. Esto ha sido aplicado en simulación de explosiones de supernovas a través de implosión en plasma en el laboratorio [9].

Por otro lado, Hamiltonianos con potenciales del tipo  $1/x^2$  [10], han aparecido en el estudio de diversos sistemas que poseen un muy rica estructura matemática, por ejemplo en el estudio de la captura electrónica por moléculas con momentos dipolares permanentes o en el caso de intentos por comprender el decaimiento de agujeros negros usando este formalismo [11].

Los principales problemas abiertos a tratar en el presente trabajo son:

- Realización no lineal de la simetría conforme de una partícula sin masa a partir de la realización lineal en dos dimensiones más.
- Generalización no lineal de la supersimetría conforme.
- Investigación desde este punto de vista de la mecánica superconforme.
- Investigación del conjunto completo de simetrías del sistema constituido por una partícula con spin en el campo de un monopolo magnético.

La tesis está organizada de la siguiente forma:

En el capítulo II se presenta una breve introducción sobre las transformaciones conformes.

En el tercer capítulo se estudia la simetría conforme presente en sistemas puramente bosónicos tanto relativistas como no relativistas. En la primera parte del tercer capítulo se hace un extenso estudio de la simetría escondida de una partícula no relativista haciendo hincapié en la existencia de generadores de simetría relacionados con transformaciones conformes y que completan el grupo de invariancia de este tipo de sistema, luego se hace una breve discusión de la simetría conforme de una partícula relativista no masiva y dentro de este contexto, se explica la característica no lineal de las transformaciones especiales conformes, en  $d$  dimensiones, como consecuencia del proceso de reducción dimensional desde un espacio  $d + 2$  dimensional. En seguida, se hace mención a que este proceso da una explicación natural a las simetrías de la ecuación de Klein-Gordon sin masa y de la ecuación de Schrödinger. Dentro de este mismo capítulo se da cuenta de la relación canónica que existe entre una partícula relativista y una no relativista. Finalmente se utilizan los resultados ya obtenidos para estudiar la relación que existe entre estos sistemas clásicos en el contexto de la correspondencia AdS/CFT.

En el cuarto capítulo se estudia la mecánica superconforme a la luz de la supersimetría no lineal [23]. Existe gran interés en la generalización no lineal de la mecánica cuántica supersimétrica por el aspecto soluble y cuasisoluble de su construcción (ver por ejemplo [18]), de modo que se hace un análisis exhaustivo de las propiedades no lineales que se introducen en el modelo superconforme al modificar la constante de acoplamiento bosón fermión con un simple cambio  $\alpha \rightarrow n\alpha$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

En el quinto y último capítulo se ha estudiado en detalle la existencia de la simetría  $osp(2|2)$  en el sistema Fermión-Monopolo primero estudiado por Jackiw [21] a la luz de las simetrías encontradas en el modelo superconforme [19], [22] en el capítulo anterior ya que sorprendentemente a pesar de la similitud entre ambos modelos en la construcción de D'Hoker y Vinet [20] se menciona una simetría del tipo  $osp(1|2)$

Los resultados de esta tesis, resumidos en las Conclusiones, fueron publicados en:

- Conformal Symmetry of Relativistic and Nonrelativistic Systems and AdS/CFT Correspondence . C. Leiva and Mikhail S. Plyushchay. *Annals of Physics* 307 0310 (2003) 372-391. arXiv:hep-th/0301244.
- Superconformal mechanics and nonlinear supersymmetry. C. Leiva and Mikhail S. Plyushchay. *JHEP* 0310 (2003) 069. arXiv:hep-th/0304257.
- "Nonlinear superconformal symmetry of a fermion in the field of a Dirac monopole", C. Leiva and Mikhail S. Plyushchay. *Phys. Lett. B* 582 (2004) 135-143. arXiv:hep-th/0311150.



## 2 Transformaciones y Simetría Conforme

Las transformaciones conformes aparecen como primera instancia en la Teoría de Números Complejos. Se dice que una transformación  $w = f(z)$ ,  $z$  y  $w$  complejos, es conforme en  $z_0$  si conserva la magnitud y el sentido del ángulo de intersección de dos curvas cualesquiera que se intersectan en  $z_0$ . Por otro lado una transformación que es conforme en todo punto de un dominio  $D$  se dice que es conforme en ese dominio. Es posible demostrar que una transformación es conforme en un dominio  $D$  si ella es analítica en ese dominio con tal que su derivada sea distinta de cero.

Un caso particular de mucha aplicación en Física es la transformación bilineal definida por:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.1)$$

también conocida como transformación lineal fraccional o transformación de Möbius, La utilidad de esta transformación es que transforma rectas y círculos en ellos mismos.

La ecuación (2.1) define un valor finito  $w$  para todo  $z \neq -d/c$ . En general se supone que

$$ad \neq bc.$$

Si se toma  $ad = bc$ , se puede demostrar que (2.1) se reduce a un valor constante de  $w$ , en este caso la transformación no es conforme pues transforma todos los puntos del plano  $z$  en un solo punto del plano  $w$ .

En general de (2.1) se tiene:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}, \quad (2.2)$$

que es distinto de cero si  $ad \neq bc$ .

La transformación inversa de la ecuación (2.1) se obtiene despejando  $z$  de esta ecuación:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (2.3)$$

que es también una transformación bilineal que define un valor finito de  $z$  para todo  $w \neq a/c$ .

En general se usan los planos  $w$  y  $z$  extendidos, es decir, los planos  $w$  y  $z$  provistos de los "puntos"  $z = \infty$  y  $w = \infty$  para definir las transformaciones de este tipo.

Considerando la ecuación (2.1) en el caso  $c = 0$ . Se tiene:

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad (2.4)$$

que define un valor de  $w$  para todo valor finito de  $z$ . Cuando  $|z| \rightarrow \infty$  se tiene  $|w| \rightarrow \infty$  por lo tanto,  $z = \infty$  se transforma en  $w = \infty$

Sin embargo suponiendo que  $c \neq 0$  en la ecuación (2.1), cuando  $z \rightarrow -d/c$ , se tiene  $|w| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $z = -d/c$  se transforma en  $w = \infty$ . Si  $|z| \rightarrow \infty$ , se tiene  $w \rightarrow a/c$ . Así,  $z = \infty$  se transforma en  $w = a/c$ .

Considerando nuevamente la transformación inversa (2.3), si  $c = 0$  se tiene:

$$z = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a},$$

lo que también indica que  $z = \infty$  y  $w = \infty$  son imágenes recíprocas (cuando  $c = 0$ ). Si  $c \neq 0$ , la ecuación (2.3) muestra que  $w = \infty$  tiene por imagen  $z = -d/c$ , mientras que la imagen de  $w = a/c$  es  $z = \infty$ . En resumen la ecuación (2.1) es una transformación biunívoca del plano  $z$  extendido al plano  $w$  extendido.

Finalmente es posible gracias a la discusión anterior, extender el concepto de círculo para incluir a las rectas infinitas y establecer ahora la propiedad que dice que una transformación bilineal siempre transforma círculos en círculos.

Como ejemplo de aplicación física, consideremos la siguiente transformación de la coordenada temporal y espacial:

$$\tau = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad (2.5)$$

$$q = \frac{x}{\gamma t + \delta}, \quad (2.6)$$

claramente ellas son del tipo de transformaciones bilineales.

Los generadores de estas transformaciones, definidos a través de los paréntesis de Poisson  $\delta_A x = \epsilon\{x, A\}$  son:

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.7)$$

$$D = p\left(x - \frac{tp}{m}\right),$$

$$K = \frac{(tp - mx)^2}{2m},$$

donde  $p = m\dot{x}$  y  $H$ ,  $D$  y  $K$  están relacionadas con traslaciones en el tiempo, dilataciones y expansiones respectivamente, ellas son conocidas como los generadores del grupo conforme  $so(1,2)$  de transformaciones. En el próximo capítulo se verá que ellas son integrales de movimiento de varios sistemas no relativistas.

Por otro lado consideremos un espacio de Minkowski con métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , entonces la transformación:

$$g_{\mu\nu} = s(x^\mu)\eta_{\mu\nu},$$

es conforme pues deja la estructura del cono de luz ( $ds^2 = 0$ ) y los "ángulos" entre cuadrivectores, invariantes. Se ve que el grupo de Poincaré cumple con este tipo de requerimiento pero además es posible definir las siguientes transformaciones que también cumplen con lo

anterior:

$$D(\rho)x^\mu = e^\rho x^\mu, \quad (2.8)$$

$$K(c)x^\mu = \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2cx + c^2 x^2}, \quad (2.9)$$

que constituyen el análogo relativista de las transformaciones conformes mencionadas en (2.7).

## 3 Simetría Conforme de Sistemas Relativistas y No Relativistas

### 3.1 Simetría Conforme de una Partícula No Relativista

Consideremos una partícula libre no relativista de masa unitaria, su Hamiltoniano está dado por:

$$H = \frac{1}{2}p_i^2. \quad (3.1)$$

Las integrales de movimiento obvias son las que generan el Grupo de Galileo:  $H$ ,  $p_i$ ,  $X_i$  y  $M_{ij}$ , donde  $M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$  y  $X_i = p_i t - x_i$ . El Grupo de Galileo está caracterizado por 10 parámetros que corresponden a tres parámetros de rotación asociados con  $M_{ij}$ , uno de traslación temporal asociado con  $H$ , tres de traslaciones espaciales relacionados con  $p_i$  en  $3d$  y tres boosts de Galileo relacionados con  $X_i$  en  $3d$ .

Las soluciones de las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$x_i = p_i t + x_{0i}, \quad (3.2)$$

$$p_i = p_{0i}, \quad (3.3)$$

donde  $x_{0i}$  y  $p_{0i}$  son constantes de integración dadas por las condiciones iniciales.

Como ya se dijo en la introducción, es importante conocer el conjunto completo de simetrías que caracterizan a un sistema, por ello se busca, ahora, construir dos integrales más a partir de las ecuaciones de movimiento:

$$D = \frac{1}{2}x_{0i}p_i = \frac{1}{2}x_i p_i - Ht = \frac{1}{2}X_i p_i, \quad (3.4)$$

$$K = \frac{1}{2}x_{0i}^2 = \frac{1}{2}x_i^2 - 2Dt - Ht^2 = \frac{1}{2}X_i^2. \quad (3.5)$$

Las transformaciones infinitesimales correspondientes a cada una de estas integrales son:

**D:**

$$\delta_D x^i = \beta x^i, \quad \delta_D t = 2\beta t. \quad (3.6)$$

**K:**

$$\delta_K x^i = \gamma x^i t; \quad \delta_K t = \gamma t^2, \quad (3.7)$$

mientras que las transformaciones finitas correspondientes son:

**D:**

$$t' = e^{2\beta} t, \quad x'_i = e^\beta x_i.$$

**K:**

$$t' = \frac{t}{1 - \gamma t}, \quad x'_i = \frac{x_i}{1 - \gamma t}.$$

se puede observar que estas transformaciones son claramente del tipo conforme pues tienen estructura bilineal. La acción de este sistema está descrita en términos del Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}_i^2. \quad (3.8)$$

Al variar la acción  $A = \int L dt$  con estas transformaciones se obtiene:

$$\delta_D A = \int \frac{d}{dt} (\beta \dot{x}^2 t) dt, \quad (3.9)$$

$$\delta_K A = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma \dot{x}^2 t^2}{2} - \gamma \frac{x^2}{2} \right) dt, \quad (3.10)$$

siendo el Lagrangiano cuasi invariante ante estas transformaciones pues la variación de la acción depende de términos de borde que con la elección apropiada aseguran que  $\delta A = 0$ .

Las integrales  $H$ ,  $D$  y  $K$  forman el álgebra de simetría conforme  $so(1, 2)$ :

$$\{D, H\} = H, \quad \{D, K\} = -K, \quad \{H, K\} = -2D, \quad (3.11)$$

efectivamente si se identifica:

$$J_{01} = \frac{1}{2}(H - K), \quad J_{02} = \frac{1}{2}(H + K), \quad J_{12} = D,$$

se obtiene el álgebra de rotaciones en  $d = 1 + 2$ :

$$\{J_{AB}, J_{LN}\} = g_{AL}J_{BN} - g_{BL}J_{AN} + g_{AN}J_{LB} - g_{BN}J_{LA} \quad (3.12)$$

con  $A, B = 0, 1, 2$ , y  $g_{AB} = \text{diag}(-1, +1, -1)$ . El Casimir de esta álgebra es

$$C = \frac{1}{2}J_{AB}J^{AB} = -D^2 + HK = \frac{1}{8}M_{ij}^2. \quad (3.13)$$

Se puede demostrar que la inclusión de  $D$  y  $K$ , se completa el grupo de invariancia de la partícula libre. Un buen ejemplo de demostración de esto fue dada por Jahn y Sreedhar [7]. Por otro lado el que la partícula libre posea esta simetría ha resultado de gran importancia en el estudio de la dualidad explosión implosión en fluidos. O’Raifeartaigh y Sreedhar mostraron [8] que la acción de un sistema fluido sin viscosidad, isentrópico e irrotacional se puede escribir en términos de la función de Hamilton-Jacobi de una partícula libre, siendo posible ampliar este resultado a una configuración más general. Este resultado dio un marco teórico a los experimentos de simulación de sistemas astrofísicos como explosión de supernovas a través de experimentos de implosión en plasma realizados en laboratorio [9].

Esta simetría (3.11) lo es también del modelo mecánico conforme dado por el Lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - \frac{\alpha}{2x_i^2} \quad (3.14)$$

El espacio de configuración en este caso debe restringirse a  $\mathbb{R}^d - \{0\}$ . En el caso de  $d = 1$ , el modelo describe un sistema de Calogero [10], de dos partículas en una dimensión,

es decir partículas que interactúan en una dimensión a través de un potencial  $\frac{1}{x^2}$ , modelos que son atractivos pues son totalmente integrables y además admiten la introducción de estadística de exclusión. En dos dimensiones este tipo de sistema describe un gas de anyones (partículas que tienen spin y estadística arbitrarias), los cuales son interesantes ya que el estudio de su estadística fraccional podría estar relacionada con la superconductividad a altas temperaturas [8]). En este tipo de modelo  $P_i$  y  $X_i$  no son más integrales de movimiento pero  $D$  y  $K$  en conjunto con el Hamiltoniano de la forma:

$$H = \frac{1}{2m}P_i^2 + \frac{\alpha}{2x_i^2} \quad (3.15)$$

son integrales de movimiento y forman el álgebra  $so(1,2)$ . En este caso el valor del Casimir, calculado a través de (3.13), de  $so(1,2)$  queda dado por:

$$C = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}M_{ij}^2 + \alpha m\right) \quad (3.16)$$

Otro sistema que posee la simetría conforme es el que corresponde a una partícula moviéndose en el campo de una fuente gravitacional puntual en dos dimensiones [12]. El lagrangiano que describe tal sistema es:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \sigma^2 r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (3.17)$$

Aquí se ha usado la siguiente parametrización del cono:

$$x_1 = \sigma r \cos \varphi, \quad x_2 = \sigma r \sin \varphi, \quad x_3 = r\sqrt{1 - \sigma^2}, \quad 0 < \sigma < 1., \quad (3.18)$$

donde  $\sigma$  es  $\sin \theta$  y  $\theta$  el ángulo del cono. En términos de las variables canónicas conjugadas  $(r, p_r)$  y  $(\varphi, J)$  los generadores del correspondiente grupo  $so(1,2)$  están dados por:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\sigma^{-2}J^2}{2mr^2}, \quad D = \frac{1}{2}rp_r - Ht, \quad K = \frac{m}{2}r^2 - 2Dt - Ht^2, \quad (3.19)$$



y el valor del Casimir de  $so(1, 2)$  (calculado a través de 3.13), es  $\mathcal{C} = \frac{1}{4}\sigma^{-2}J^2$ , el cual queda fijo por el valor de la integral de momento angular  $J$ .

Otros sistemas interesantes que poseen la simetría conforme  $so(1,2)$  son el de una partícula moviéndose en dos dimensiones en el campo de un vórtice magnético [21] y el que describe la dinámica de una carga en el campo de un monopolo magnético en tres dimensiones [31]. Ambos poseen el Lagrangiano.

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + qA_i(x)\dot{x}_i \quad (3.20)$$

El potencial magnético está dado por:

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B = \frac{\Phi}{2\pi}\delta^2(x_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad (3.21)$$

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk}B_k, \quad B_i = g\frac{x_i}{(x_j^2)^{3/2}}, \quad x_i \in \mathbb{R}^3 - \{0\}. \quad (3.22)$$

para los casos mencionados respectivamente. En ambos, sin embargo, el Hamiltoniano puede ser representado en una forma única:

$$H = \frac{1}{2m}\mathcal{P}_i^2, \quad (3.23)$$

con  $\mathcal{P}_i = p_i - qA_i(x)$ . En términos de  $\mathcal{P}_i$ , la integral momento angular del sistema carga monopolo,  $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} = \epsilon_{ijk}x_j p_k$ , toma la forma:

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}x_j \mathcal{P}_k - qgn_i, \quad n_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2}}, \quad (3.24)$$

y la integral momento angular del sistema carga-vórtice,  $J = \epsilon_{ij}x_i p_j$ , es

$$J = \epsilon_{ij}x_i \mathcal{P}_j + \frac{q\Phi}{2\pi}.$$

El Hamiltoniano (3.15), y  $D$  y  $K$  dadas por las ecuaciones (3.4), (3.5) con  $p_i$  substituido por  $\mathcal{P}_i$ , son las integrales de movimiento que generan la simetría dinámica conforme

$so(1, 2)$ . En estos casos, el valor del Casimir resulta  $\mathcal{C} = \frac{1}{4}(J - \frac{q\Phi}{2\pi})^2$ , para el sistema carga vórtice y  $\mathcal{C} = \frac{1}{4}(J_i^2 - q^2g^2)$  para el sistema carga-monopolo.

Se ha mostrado entonces que la simetría conforme de los sistemas no relativistas (3.8), (3.14), (3.17) y (3.20) junto con la simetría de rotación hace que sus dinámicas sean muy similares. Por ejemplo la ecuación (3.24), implica que la trayectoria de la carga en el campo del monopolo está confinada al cono  $\vec{J} \cdot \vec{n} = -qg$ , y debido a las ecuaciones  $\ddot{x}_i = -qgr^{-1}\epsilon_{ijk}x_j\dot{x}_k$ ,  $r = \sqrt{x_l^2}$ , su movimiento sobre el cono es libre[31]. La posición de la partícula al ser proyectada al plano ortogonal a  $\vec{J}$  preservando la distancia desde el origen está dada por

$$\vec{X} = r\vec{\mathcal{N}}, \quad \vec{\mathcal{N}} = \frac{\vec{n}_\perp}{|\vec{n}_\perp|}, \quad \vec{n}_\perp = \vec{n} - \vec{J}\frac{\vec{n}\cdot\vec{J}}{J^2},$$

el cual obedece las mismas ecuaciones de movimiento que el vector  $\vec{x}$  de la partícula en el sistema (3.14) con  $\alpha = -q^2g^2/m < 0$ ,

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\alpha}{m} \frac{\vec{x}}{(\vec{x}^2)^2}.$$

El origen de tal similitud se basa en la estructura de los correspondientes Hamiltonianos los cuales al ser escritos en términos de las correspondientes variables canónicas radiales  $r = \sqrt{x_i^2}$  and  $p_r = r^{-1}p_i x_i$  toman la forma general

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathcal{J}^2}{2mr^2}, \quad (3.25)$$

donde  $\mathcal{J}^2$  es igual a  $(\frac{1}{2}M_{ij}^2)$  para la partícula libre en  $\mathbb{R}^d$ , a  $(\frac{1}{2}M_{ij}^2 + \alpha m)$  para el modelo (3.14), a  $(\sigma^{-2}J^2)$  para la partícula en un cono<sup>1</sup>, a  $(J - \frac{q\Phi}{2\pi})^2$  para el sistema en dos dimensiones carga vórtice, y a  $(\vec{J}^2 - q^2g^2)$  para la partícula cargada en el campo de un monopolo.

La unificación de estos sistemas es uno de los resultados importantes y sorprendidos de esta tesis y es ampliamente discutida en [35].

---

<sup>1</sup>Para este caso una definición ligeramente diferente (3.18) se ha usado para la variable radial; sin embargo, el Hamiltoniano toma la misma forma (3.19) si se parametriza el cono en términos de la variable radial usual en el plano,  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , y entonces se realiza la transformación canónica  $r \rightarrow \sigma^{-1}r$ ,  $p_r \rightarrow \sigma p_r$ .

## 3.2 Simetría Conforme de una Partícula Relativista Sin Masa

Considérese la siguiente transformación de la métrica:  $ds^2 \rightarrow ds'^2 = e^{2\sigma} ds^2$ , en un espacio Minkowski  $d$ -dimensional, con métrica

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2.$$

Esta transformación tiene la ventaja que mantiene la estructura del cono de luz pues la condición  $ds^2 = 0$  se mantiene inalterada y además mantiene los ángulos entre los vectores. Las transformaciones infinitesimales que generan este tipo de transformación están dadas por:

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu + \beta x^\mu + 2(x\gamma)x^\mu - x^2\gamma^\mu. \quad (3.26)$$

Aquí los parámetros  $\omega^\mu{}_\nu$ ,  $\alpha^\mu$ , corresponden a las transformaciones del Grupo de Poincaré ( rotaciones y traslaciones espacio-tiempo), mientras que  $\beta$  and  $\gamma^\mu$  son transformaciones de escala y conformes especiales. La última resulta ser no lineal en términos de  $x^\mu$ , la versión finita de estas transformaciones es:

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - \gamma^\mu x^2}{1 - 2\gamma x + \gamma^2 x^2}. \quad (3.27)$$

Resulta que no es definida globalmente<sup>2</sup>, y para estar bien definida requiere compactificar  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  incluyendo los puntos en el infinito (para una discusión de los aspectos de globalidad etc. Ver [29], [30], [14]).

En el espacio de fase clásico, con paréntesis de Poisson canónicos entre las variables de fase  $\{x_\mu, p_\nu\} = g_{\mu\nu}$ ,  $\{x_\mu, x_\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = 0$ , las transformaciones (3.26) son generadas por las integrales:

---

<sup>2</sup>La transformación (3.27) es singular en  $x^\mu = \gamma^\mu/\gamma^2$  cuando  $\gamma^2 \neq 0$ , y cuando  $x\gamma = 1/2$  para  $\gamma^2 = 0$ .

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad P_\mu = p_\mu, \quad D = x^\mu p_\mu, \quad K_\mu = 2x_\mu(xp) - x^2 p_\mu. \quad (3.28)$$

Los generadores (3.28) forman el álgebra conforme

$$\begin{aligned} \{M_{\mu\nu}, M_{\sigma\lambda}\} &= g_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda}M_{\sigma\nu} - g_{\nu\lambda}M_{\sigma\mu}, \\ \{M_{\mu\nu}, P_\lambda\} &= g_{\mu\lambda}P_\nu - g_{\nu\lambda}P_\mu, \quad \{M_{\mu\nu}, K_\lambda\} = g_{\mu\lambda}K_\nu - g_{\nu\lambda}K_\mu, \\ \{D, P_\mu\} &= P_\mu, \quad \{D, K_\mu\} = -K_\mu, \\ \{K_\mu, P_\nu\} &= 2(g_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}), \\ \{D, M_{\mu\nu}\} &= \{P_\mu, P_\nu\} = \{K_\mu, K_\nu\} = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Esta álgebra es isomorfa al álgebra de rotaciones en un espacio de dos dimensiones más, en este caso  $so(2, d)$ , lo cual puede ser asegurado identificando:

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad J_{\mu d} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad J_{\mu(d+1)} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad J_{d(d+1)} = D. \quad (3.30)$$

Para el álgebra (3.12) ahora se define:  $A, B = 0, 1, d, d+1$ , y

$$g_{AB} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1, -1). \quad (3.31)$$

Sin embargo, es de notar que el vínculo que describe una partícula relativista libre  $\varphi_m = p^2 + m^2$  es invariante bajo las transformaciones de Poincaré, pero los generadores  $D$  y  $K$  conmutan débilmente con él, en el sentido de paréntesis de Poisson, sólo en el caso no masivo  $m = 0$ :  $\{D, \varphi_0\} = 2\varphi_0 = 0$ ,  $\{K_\mu, \varphi_0\} = 4x_\mu\varphi_0 = 0$ . Esto significa que el Lagrangiano invariante bajo  $D$  y  $K$  es :

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2e}, \quad (3.32)$$

donde  $\dot{x}_\mu = \frac{d}{d\tau}x_\mu$ , y  $e = e(\tau)$

Las transformaciones de simetría especial conforme ( $K$ ) y de escala ( $D$ ), actúan de manera no trivial tanto sobre  $x^\mu$  como sobre  $e$ :

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - \gamma^\mu x^2}{1 - 2\gamma x + \gamma^2 x^2}, \quad e' = \frac{e}{(1 - 2x\gamma + \gamma^2 x^2)^2}. \quad (3.33)$$

en el caso de  $K$  y

$$x'^\mu = \exp \beta \cdot x^\mu, \quad e' = \exp 2\beta \cdot e. \quad (3.34)$$

en el caso de  $D$ .

Es posible encontrar la expresión formal de las cargas de Noether que provienen de imponer la invariancia de la acción:

$$D = xp + 2ep_e, \quad K_\mu = 2x_\mu(xp + 2ep_e) - x^2 p_\mu. \quad (3.35)$$

Sin embargo, es claro que al hacer la reducción del sistema al espacio físico, el vínculo  $p_e = 0$  se transforma en una identidad y por ello estas expresiones coinciden con (3.28).

Es interesante, por otro lado, notar que  $D$  y  $K$  pueden ser expresados en términos de los generadores del álgebra de Poincaré:

$$D = \frac{1}{P^0} J_{0\nu} P^\nu, \quad K_\mu = \frac{1}{(P^0)^2} (2J_{\mu\nu} P_0 - J_{0\nu} P_\mu) J^{0\nu}.$$

### 3.2.1 Partícula Relativista sin Masa en $d + 2$

Como ya se ha dicho, el álgebra conforme en  $(1, d - 1)$  es isomorfa al álgebra de rotaciones en  $(2, d)$ . Ahora se intentará encontrar un método formal para obtener los generadores conformes en  $(1, d - 1)$  a partir de los generadores de rotaciones en  $(2, d)$ . Para ello se considerará el espacio de  $d+2$  dimensiones con variables espaciales  $\eta^A$ , y  $g_{AB} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1, -1)$ . Además se introducirán momentos canónicos conjugados  $\pi_A$  de modo que  $\{\eta^A, \pi_B\} = g_{AB}$ .

Los generadores de  $so(2, d)$  son entonces:

$$\tilde{\mathfrak{J}}_{AB} = \eta_A \pi_B - \eta_B \pi_A \quad (3.36)$$

Lo que se quiere es reducir el sistema de modo que evolucione en un espacio físico de cuatro dimensiones de fase menos (dos del espacio configuracional), entonces es necesario introducir dos vínculos de primera clase además del que describe la condición  $m = 0$  de la partícula [17], tenemos entonces:

$$\phi_0 \equiv \pi_A \pi^A = 0, \quad (3.37)$$

$$\phi_1 \equiv \eta^A \eta_A = 0, \quad \phi_2 \equiv \eta^A \pi_A = 0. \quad (3.38)$$

Las relaciones  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_0 = 0$  pueden ser tratadas como vínculos sólo si las hipersuperficies  $\eta_0 = \eta_1 = \dots = \eta_{d+1} = 0$  y  $\pi_0 = \pi_1 = \dots = \pi_{d+1} = 0$  son excluidas del espacio de fase, sólo en este caso las órbitas de gauge generadas por  $\phi_1$  and  $\phi_0$  son regulares (ver fig 1.1 y 1.2).<sup>3</sup>

Es interesante notar que los vínculos  $\phi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , generan también el álgebra del grupo conforme  $so(1, 2)$  lo que es evidente de su forma que es la misma de los generadores conformes de la partícula no relativista para el momento  $t = 0$ .

---

<sup>3</sup>Para la partícula no masiva en  $\mathbb{R}^{1, d-1}$ , los puntos con  $p_0 = p_1 = \dots = p_{d-1} = 0$ , corresponden a una representación trivial del grupo de Poincaré y tienen que ser excluidas del espacio de fase por las mismas razones.

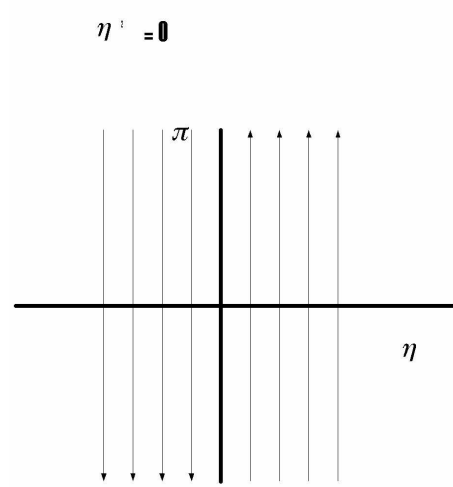


Figure 1: Orbitas de gauge generadas por el vínculo  $\eta^A \eta_A = 0$

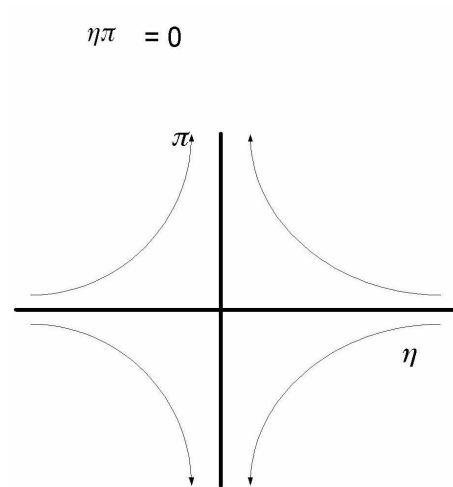


Figure 2: Orbitas de gauge generadas por el vínculo  $\eta^A \pi_A = 0$



Por otro lado, en este espacio  $d + 2$ , también es posible introducir generadores  $D$  y  $K$  de la forma (3.28) y ellos podrían tener alguna expresión no trivial en el espacio reducido  $(1, d - 1)$ , sin embargo es posible ver que tienen la forma:

$$\tilde{D} = \eta^A \pi_A, \quad \tilde{K}_A = 2\eta_A(\eta^B \pi_B) - \eta^B \eta_B \pi_A, \quad (3.39)$$

pero ellos son proporcionales a los vínculos de modo que se reducen a simetrías de gauge cuando estos vínculos son introducidos y son idénticamente nulos en el espacio físico reducido. En cambio los generadores del álgebra  $so(2, d)$  tienen carácter escalar y conmutan con los vínculos por lo que resultan ser observables.

Los vínculos introducidos representan una partícula sin masa ( $\pi^2 = 0$ ), moviéndose en un cono  $(d + 1)$  dimensional ( $\eta^2 = 0$ ) y con simetría de escala local ( $\eta\pi = 0$ ). Se puede construir entonces, el Lagrangiano que corresponde a tal partícula en alguna de las siguientes formas:

$$L = \frac{\dot{\eta}^2}{2e} + \frac{v}{2}\eta^2, \quad (3.40)$$

o

$$L = \frac{(\dot{\eta} - u\eta)^2}{2e} + \frac{v}{2}\eta^2, \quad (3.41)$$

donde  $e$ ,  $v$ ,  $u$  son multiplicadores escalares de Lagrange. El Lagrangiano (3.40) produce los tres vínculos (3.37), (3.38) como vínculos secundarios, mientras que en (3.41) el vínculo  $\phi_2 = 0$  aparece como terciario.

Es conveniente buscar una expresión sencilla para los vínculos  $\phi_2$ , y  $\phi_3$  pues de ese modo resulta fácil discriminar entre las variables que son observables (aquellas que conmutan con los vínculos) y las que no lo son haciéndose así más evidente la relación entre el sistema en  $(d + 2)$ , caracterizado por los vínculos  $\phi_i$  para el cual la simetría  $so(2, d)$  es la simetría

de Lorentz y el sistema  $d$  dimensional para el cual esta simetría juega el rol de simetría conforme. Para ello se define:

$$\eta^\pm = \eta^d \pm \eta^{d+1}, \quad \pi_\pm = \frac{1}{2} (\pi_d \pm \pi_{d+1}), \quad (3.42)$$

con paréntesis de Poisson no triviales  $\{\eta^+, \pi_+\} = \{\eta^-, \pi_-\} = 1$ . Los generadores de  $so(2, d)$  (3.36) toman la forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{\mu\nu} &= \eta_\mu \pi_\nu - \eta_\nu \pi_\mu, & \mathfrak{J}_{d(d+1)} &= \eta^+ \pi_+ - \eta^- \pi_-, \\ \mathfrak{J}_{\mu+} &\equiv \mathfrak{J}_{\mu d} + \mathfrak{J}_{\mu(d+1)} = 2\eta_\mu \pi_+ - \pi_\mu \eta^-, & \mathfrak{J}_{\mu-} &\equiv \mathfrak{J}_{\mu d} - \mathfrak{J}_{\mu(d+1)} = 2\eta_\mu \pi_- - \pi_\mu \eta^+. \end{aligned} \quad (3.43)$$

La forma simpléctica del sistema queda:

$\Omega = d\pi_A \wedge d\eta^A = d\pi_\mu \wedge d\eta^\mu + d\pi_+ \wedge d\eta^+ + d\pi_- \wedge d\eta^-$ , de modo que el sector de las variables  $\eta^\mu$  y  $\pi_\mu$  está totalmente separado del sector  $\eta^\pm$  y  $\pi_\pm$ . Sin pérdida de generalidad se considerará  $\eta^- \neq 0$ , lo cual puede ser obtenido a través de una transformación de Lorentz adecuada, entonces se pueden definir nuevas variables en términos de las cuales la forma simpléctica puede ser representada equivalentemente:

$$\Omega = d\tilde{\pi}_\mu \wedge d\tilde{\eta}^\mu + d\tilde{\pi}_+ \wedge d\tilde{\eta}^+ + d\tilde{\pi}_- \wedge d\tilde{\eta}^-,$$

donde

$$\tilde{\eta}^\mu = -\frac{\eta^\mu}{\eta^-}, \quad \tilde{\eta}^+ = \frac{\eta_A \eta^A}{\eta^-}, \quad \tilde{\eta}^- = \eta^-, \quad (3.44)$$

$$\tilde{\pi}_\mu = \mathfrak{J}_{\mu+}, \quad \tilde{\pi}_+ = \pi_+, \quad \tilde{\pi}_- = \frac{1}{\eta^{-2}} (\eta^- \pi_A \eta^A - \pi_+ \eta_A \eta^A). \quad (3.45)$$

La transformación  $(\eta^A, \pi_A) \rightarrow (\tilde{\eta}^A, \tilde{\pi}_A)$  es canónica y su inversa es:

$$\begin{aligned} \eta_\mu &= -\tilde{\eta}^- \tilde{\eta}_\mu, & \eta^- &= \tilde{\eta}^-, & \eta^+ &= \tilde{\eta}^+ - \tilde{\eta}^- \tilde{\eta}_\mu \tilde{\eta}^\mu, \\ \pi_\mu &= -\frac{\tilde{\pi}_\mu}{\tilde{\eta}^-} - 2\pi_+ \tilde{\eta}_\mu, & \pi_+ &= \tilde{\pi}_+, & \pi_- &= \tilde{\pi}_- - \tilde{\pi}_+ \tilde{\eta}_\mu \tilde{\eta}^\mu - \frac{\tilde{\eta}_\mu \tilde{\pi}^\mu}{\tilde{\eta}^-}. \end{aligned}$$

En términos de las nuevas variables los vínculos quedan:

$$\phi_0 = \tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu + 4 \frac{\tilde{\pi}_+}{\tilde{\eta}^{-2}} (\tilde{\eta}^- \phi_2 - \tilde{\pi}_+ \phi_1) = 0, \quad (3.46)$$

$$\phi_1 = \tilde{\eta}^+ \tilde{\eta}^- = 0, \quad \phi_2 = \tilde{\eta}^+ \tilde{\pi}_+ + \tilde{\eta}^- \tilde{\pi}_- = 0, \quad (3.47)$$

y los generadores de Lorentz (3.43) toman la forma:

$$\mathfrak{J}_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_\mu \tilde{\pi}_\nu - \tilde{\eta}_\nu \tilde{\pi}_\mu, \quad \mathfrak{J}_{\mu+} = \tilde{\pi}_\mu, \quad \mathfrak{J}_{d(d+1)} = \tilde{\eta}_\mu \tilde{\pi}^\mu + 2 \frac{\tilde{\pi}_+}{\tilde{\eta}^-} \phi_1 - \phi_2, \quad (3.48)$$

$$\mathfrak{J}_{\mu-} = 2(\tilde{\eta}_\nu \tilde{\pi}^\nu) \tilde{\eta}_\mu - (\tilde{\eta}_\nu \tilde{\eta}^\nu) \tilde{\pi}_\mu + \frac{1}{\tilde{\eta}^{-2}} (\tilde{\pi}_\mu + 4\tilde{\pi}_+ \tilde{\eta}^- \tilde{\eta}_\mu) \phi_1 - 2\tilde{\eta}_\mu \phi_2.$$

Los vínculos forman la superficie

$$\tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu = 0, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\eta}^+ = 0, \quad \tilde{\pi}_- = 0. \quad (3.50)$$

Esta forma de los vínculos permite observar inmediatamente que las variables  $\tilde{\eta}^\mu$  y  $\tilde{\pi}_\mu$  son observables con respecto a los vínculos  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , mientras que  $\tilde{\eta}^- = \eta^-$  y  $\tilde{\pi}_+ = \pi_+$  son variables puras de gauge que se pueden eliminar introduciendo los vínculos:

$$\phi_3 = \eta^- + 1 = 0, \quad \phi_4 \equiv \pi_+ = 0 \quad (3.51)$$

que actúan como condiciones de gauge para  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

Al reducir el espacio de fase del sistema a la superficie generada por el conjunto de vínculos de segunda clase  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  y  $\phi_4$ , se han excluido completamente de la teoría las variables  $\eta^\pm$  y  $\pi_\pm$  y con ello las variables  $\tilde{\eta}^\mu$  y  $\tilde{\pi}_\mu$  se reducen a  $\eta^\mu$  y  $\pi_\mu$ . Finalmente los generadores de Lorentz (3.48), del sistema en  $(d+2)$  dimensiones se han reducido a la forma de los generadores de simetría conforme del sistema  $d$  dimensional. Por otro lado, ahora la estructura cúbica de  $K$  (en términos de las variables de fase), puede ser explicada como consecuencia de la no linealidad de la transformación canónica aquí introducida.

### 3.2.2 Cuantización del modelo de Partícula Relativista sin Masa en $d + 2$

Desde el punto de vista de la teoría de vínculos, no hay razón para preferir a priori  $\phi_1, \phi_2$  como los vínculos primarios y  $\phi_3$  y  $\phi_4$  como las condiciones de gauge, de hecho si se elige a la inversa, se puede considerar un Lagrangiano:

$$L = \frac{\dot{\mathfrak{X}}_A \dot{\mathfrak{X}}^A}{2e} - v(\mathfrak{X}^- + 1). \quad (3.52)$$

La elección del Lagrangiano (3.52), permite la realización directa de una formulación de campos usando los vínculos de primera clase  $\phi_3$  y  $\phi_4$  de acuerdo al precepto de Dirac, entonces de acuerdo a las ecuaciones (3.51) y (3.49), el campo  $\Phi(\mathfrak{X}_A)$  satisface las ecuaciones

$$(\mathfrak{X}^- + 1)\Phi(\mathfrak{X}_A) = 0, \quad \partial_+ \Phi(\mathfrak{X}_A) = 0, \quad \partial_B^2 \Phi(\mathfrak{X}_A) = 0,$$

donde  $\partial_B = \partial/\partial\mathfrak{X}^B$ ,  $\partial_+ = \partial/\partial\mathfrak{X}^+$ . La solución es  $\Phi(\mathfrak{X}_A) = \delta(\mathfrak{X}^- + 1)\varphi(\mathfrak{X}_\nu)$  con el campo  $\varphi(\mathfrak{X}_\nu)$  satisfaciendo la ecuación  $d$ -dimensional de Klein-Gordon sin masa  $\partial_\mu^2 \varphi(\mathfrak{X}_\nu) = 0$ ,  $\partial_\mu = \partial/\partial\mathfrak{X}^\mu$  lo que da una explicación natural a las simetrías de un campo escalar sin masa como análogos cuánticos de las integrales de movimiento (3.28).

### 3.3 Relación canónica entre una partícula masiva no relativista y una relativista

A continuación se demostrará que una partícula masiva no relativista está canónicamente relacionada con una partícula sin masa, relativista, esto será útil en la interpretación que se hará en el próximo capítulo en términos de la correspondencia AdS/CFT.

En primer lugar, se mostrará que ambas partículas están relacionadas por una identificación casi directa entre sus lagrangianos. Para ello se considerará una partícula masiva no relativista en  $\mathbb{R}^1$ , de trayectoria  $x(t)$ ; cambiando la parametrización  $x^1(t) \rightarrow x^1(t(\tau))$ ,  $\dot{t}(\tau) = \frac{dt}{d\tau} > 0$ , e introduciendo la notación  $t = x^0$ , se pasa de (3.8) al Lagrangiano invariante ante reparametrización

$$L = \frac{m}{2} \frac{\dot{x}_\mu^2}{\dot{x}^0}. \quad (3.53)$$

Aquí  $\dot{x}_\mu^2 = \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}$ ,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1)$  Además, se ha agregado la derivada total  $(-\frac{m}{2}\dot{x}^0)$ , de modo de escribir el Lagrangiano de la partícula no relativista de una forma similar al de la partícula relativista sin masa (3.32), esta similitud formal será útil para demostrar la equivalencia canónica de este sistema con el relativista en  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Las ecuaciones de movimiento de (3.53) son:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^0} \right) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^0} \right)^2 = 0, \quad (3.54)$$

y su solución puede ser representada en la forma:  $x^1 = x^1(x^0)$ ,

$$x^1(x^0) = vx^0 + a, \quad (3.55)$$

donde  $a$  y  $v$  son constantes de integración. Esta solución puede ser comparada con las ecuaciones de movimiento

$$(\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^0)^2 = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^1}{e} \right) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^0}{e} \right) = 0$$

para la partícula sin masa en  $(1 + 1)$  dimensiones, cuyas soluciones son:

$$x^1(x^0) = \epsilon x^0 + b, \quad e = M^{-1} \dot{x}^0, \quad (3.56)$$

donde  $\epsilon = \pm$ ,  $b$  y  $M$  son constantes de integración. La única diferencia formal entre (3.55) and (3.56) es la velocidad de las partículas: para el primer sistema ella puede ser arbitraria, mientras que para el segundo es la velocidad de la luz. Sin embargo se ve claro que formalmente, para  $v \neq 0$  la solución (3.55) puede ser reducida a (3.56) simplemente por un reescalamiento de  $x^0$ .

Es posible construir un Lagrangiano que relacione ambos sistemas;

$$L = \frac{\dot{x}^{\mu 2}}{2e} + \frac{\lambda}{l}(e - M^{-1} \dot{x}^0), \quad (3.57)$$

donde  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange y  $l$  es un parámetro numérico. Las ecuaciones resultantes para  $\lambda$  y  $e$  son puramente algebraicas:

$$e - M^{-1} \dot{x}^0, \quad (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^0)^2 - \frac{\lambda}{l} e^2 = 0, \quad (3.58)$$

la ecuación para  $x^1$  tiene la misma forma que para la partícula sin masa y para  $x^0$  la ecuación es:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \dot{x}^0 + \frac{\lambda}{2Ml} \right) = 0.$$

Las ecuaciones para  $\lambda$  y  $e$  pueden ser usadas para expresar el Lagrangiano en términos de las otras variables y con la identificación  $M = m$ , éste se reduce a la forma (3.53)). Por otro lado, en el límite  $l \rightarrow \infty$  es posible reproducir el sistema (3.32).

En segundo lugar, es posible comparar ambos sistemas desde el punto de vista de sus integrales de movimiento, para ello es conveniente pasar a variables de cono de luz. En el caso de la partícula no masiva, con  $x^{\pm} = x^0 \pm x^1$ ,  $p_{\pm} = \frac{1}{2}(p_0 \pm p_1)$ ,  $\{x^+, p_+\} = \{x^-, p_-\} = 1$ ,

ahora los generadores  $so(2, 2)$  en  $R^{1,1}$  pueden ser representados en la forma

$$\mathfrak{D}_+ = \frac{1}{2}(D + M^{01}) = x^+ p_+, \quad \mathfrak{H}_+ = \frac{1}{2}(P_0 + P_1) = p_+, \quad \mathfrak{K}_+ = \frac{1}{2}(K^0 + K^1) = x^{+2} p_+, \quad (3.59)$$

$$\mathfrak{D}_- = \frac{1}{2}(D - M^{01}) = x^- p_-, \quad \mathfrak{H}_- = \frac{1}{2}(P_0 - P_1) = p_-, \quad \mathfrak{K}_- = \frac{1}{2}(K^0 - K^1) = x^{-2} p_-.$$

Estos dos conjuntos de generadores  $\mathfrak{D}_+$ ,  $\mathfrak{H}_+$ ,  $\mathfrak{K}_+$  por un lado y  $\mathfrak{D}_-$ ,  $\mathfrak{H}_-$ ,  $\mathfrak{K}_-$  por el otro conmutan entre sí, mostrando explícitamente la estructura de suma directa  $so(2, 2) = so(1, 2) \oplus so(1, 2)$ . Como el vínculo  $p^2 = -\frac{1}{4}p_+p_- = 0$  significa que  $p_+ = 0$  o  $p_- = 0$ , uno de los dos conjuntos de generadores resulta ser una simetría de gauge pura que al realizar la reducción del sistema a la superficie física resulta idénticamente cero, dejando sólo una simetría  $so(1, 2)$ .

Por otro lado el sistema no relativista (3.53) está caracterizado por el vínculo

$$\varphi = p_0 + \frac{p_1^2}{2m} = 0. \quad (3.60)$$

Esta forma esconde el desplazamiento  $p_0 + \frac{m}{2} \rightarrow p_0$  que permite escribir el vínculo en forma condensada y además no es otra cosa que la transformación canónica consistente en omitir la derivada total  $(-\frac{m}{2}\dot{x}^0)$  en el Lagrangiano (3.53). Las cantidades

$$T = p^0, \quad D = \frac{1}{2}p_1x^1 + p_0x^0, \quad K = \frac{m}{2}x_1^2 - p_0(x^0)^2 - x^0p_1x^1. \quad (3.61)$$

son las integrales de movimiento de la simetría conforme  $so(1, 2)$ .

Es posible escribir las integrales (3.61) en términos del vínculo:

$$T = H - \varphi, \quad D = \frac{1}{2}x^1p_1 - Hx^0 + x^0\varphi, \quad K = \frac{m}{2}x_1^2 - 2Dx^0 - H(x^0)^2 + (x^0)^2\varphi.$$

de esta forma se ve claro que con la identificación  $x^0 = t$ , ellos tienen la misma forma de la formulación tradicional de la partícula no relativista (3.1) hasta términos proporcionales al vínculo.

Las otras dos integrales corresponden a traslaciones y boost de Galileo

$$P_1 = p_1, \quad X_1 = x_1 - \frac{x^0}{m}p_1, \quad (3.62)$$

a partir de las cuales se puede construir otro conjunto de generadores de  $so(1, 2)$ ,

$$\bar{T} = \frac{P_1^2}{2m}, \quad \bar{D} = \frac{1}{2}X_1P_1, \quad \bar{K} = \frac{m}{2}X_1^2. \quad (3.63)$$

sin embargo sólo uno de ellos es independiente ya que se puede escribir:

$$T - \bar{T} = \varphi, \quad D - \bar{D} = x^0\varphi, \quad K - \bar{K} = (x^0)^2\varphi,$$

de modo que resultan idénticos para el sistema reducido a la superficie física.

Por lo tanto, se ha demostrado que ambos sistemas está caracterizados por la simetría  $so(2, 2)$ , que en realidad corresponde a una estructura de suma directa  $so(2, 2) = so(1, 2) \oplus so(1, 2)$ .

Finalmente se construye una transformación canónica que relaciona ambos sistemas directamente. Ello se logra suponiendo que  $p_1 \neq 0$ , y definiendo la transformación canónica:

$$\tilde{x}_1 = \epsilon m \frac{x_1}{p_1}, \quad \tilde{p}_1 = \epsilon \frac{p_1^2}{2m}, \quad \tilde{x}_0 = x_0, \quad \tilde{p}_0 = p_0, \quad (3.64)$$

donde  $\epsilon = p_1/|p_1|$ . El vínculo (3.60) toma la forma  $\varphi = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 = 0$  para  $\tilde{p}_1 > 0$  y  $\varphi = \tilde{p}_0 - \tilde{p}_1 = 0$  para  $\tilde{p}_1 < 0$ . En términos de estas variables los generadores  $so(2, 1)$  (3.61) resultan:

$$T = \tilde{p}_0, \quad D = \tilde{x}^\mu \tilde{p}_\mu, \quad K = 2\tilde{x}_0(\tilde{x}_\mu \tilde{p}^\mu) - \tilde{x}_\mu^2 \tilde{p}_0 + \tilde{x}_\mu^2 \varphi,$$

los que pueden ser comparados directamente con  $P^0$ ,  $D$  and  $K_0$  (3.28) para la partícula sin masa. Además, los generadores (3.63) pueden ser reescritos como:

$$\bar{T} = \epsilon p_1, \quad \bar{D} = \epsilon(\tilde{x}_0 \tilde{p}_1 - \tilde{x}_1 \tilde{p}_0 + \tilde{x}_1 \varphi), \quad \bar{K} = \epsilon(2\tilde{x}_1 \tilde{x}^\mu \tilde{p}_\mu - \tilde{p}_1 \tilde{x}_\mu^2 + 2\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \varphi),$$



que se relacionan directamente con  $P_1$ ,  $M_{01}$  y  $K_1$  del sistema (3.28). De modo que a través de la transformación canónica (3.64)  $\bar{D}$  corresponde al generador de boost de Lorentz  $M_{01}$  mientras que  $\bar{K}$  es mapeado a  $K_1$  con una estructura cúbica en las variables canónicas de la partícula no masiva.

La transformación canónica (3.64) requiere que  $p_1 \neq 0$  lo cual en términos del vínculo (3.60) significa que el punto  $p_1 = p_0 = 0$  debe ser excluido, sin embargo este punto también es excluido del sistema relativista pues corresponde a una representación trivial del grupo de Poincaré en  $(1 + 1)$  dimensiones.

### 3.3.1 Cuantización del modelo de Partícula No Relativista

La cuantización del sistema se puede obtener nuevamente a través de un vínculo de primera clase, en este caso (3.60) que en términos de formulación de teoría de campos cuantizados se transforma en la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial x^0}\psi(x^0, x^1) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi(x^0, x^1).$$

De esta forma la simetría conforme escondida de la ecuación de Schrödinger obtiene una explicación natural como análogo cuántico de las integrales de movimiento (3.61) del modelo de una partícula libre en su formulación invariante a reparametrizaciones.

## 3.4 Correspondencia AdS/CFT

La conjetura de Maldacena [5] concierne a teorías de cuerda o teoría M. Ella establece que la teoría de cuerda (o M), en un espacio  $AdS_{d+1}$  es matemáticamente equivalente (o dual), a una teoría cuántica de campos invariante conforme en un espacio-tiempo de dimensión  $d$ , el cual se interpreta como el borde del espacio  $AdS_{d+1}$ . Aunque esto parece alejado del tratamiento llevado a cabo en este trabajo, que es puramente clásico y más adelante pseudo clásico, lo que interesa aquí es que la correspondencia AdS/CFT establece un isorfismo entre simetrías de espacio tiempos dimensionalmente distintos.

Por otro lado, como ya se ha podido establecer la relación entre la simetría conforme de una partícula relativista en  $(1, d - 1)$ , con la simetría de rotaciones de un espacio  $(2, d)$  y considerando que es usual concebir un espacio  $AdS_{d+1}$ , como una hipersuperficie embebida en un espacio pseudoeuclidiano  $(2, d)$ , es tentador investigar los sistemas ya estudiados a la luz de la correspondencia  $AdS/CFT$ .

### 3.4.1 Sistema Relativista

El sistema  $(d + 2)$  dimensional (3.37) y (3.38) puede ser reinterpretado como una partícula no masiva que se mueve en el borde de un espacio  $AdS_{d+1}$  de radio infinito, cuyas isometrías corresponden a la simetría conforme de una partícula no masiva en  $d$  dimensiones.

Una partícula en  $AdS_{d+1}$  de radio R puede ser descrita por

$$\phi_0 \equiv \pi_A \pi^A = 0, \quad \phi_1 \equiv \eta^A \eta_A + R^2 = 0, \quad (3.65)$$

el paréntesis de Poisson entre los vínculos (3.65) es  $\{\phi_1, \phi_0\} = 4\eta^A \pi_A$ . Para que el sistema corresponda a una partícula no masiva se debe tener que  $\phi_0$  debe ser de primera clase, lo

cual significa elegir

$$\phi_2 = \eta^A \pi_A = 0 \quad (3.66)$$

El vínculo (3.66) genera transformaciones de escala local. Como

$$\{\phi_2, \phi_1\} = -\phi_1 + R^2 \neq 0,$$

$\phi_1$  puede ser entendido como una condición de gauge para (3.66).

Realizando la transformación canónica  $(\eta^A, \pi_A) \rightarrow (\tilde{\eta}^A, \tilde{\pi}_A)$ ,

$$\tilde{\eta}^A = \frac{\eta^A}{R^{1+\epsilon}}, \quad \tilde{\pi}_A = \pi_A R^{1+\epsilon} \quad (3.67)$$

con  $\epsilon > 0$  y tomando el límite  $R \rightarrow \infty$ ,  $\eta^A \rightarrow \infty$ ,  $\pi_A \rightarrow 0$ , de tal forma que las variables (3.67) se mantengan finitas, los vínculos (3.65) toman la forma de los vínculos de primera clase (3.37) y (3.38) y el sistema original es reproducido en un cono. Es de notar que este procedimiento ha producido un cambio de clase de los vínculos (3.65) que son originalmente de segunda clase pues ahora resultan ser de primera clase.

### 3.4.2 Sistemas No Relativistas

Una partícula libre no masiva en un espacio  $AdS_2$  de radio  $R$  con métrica

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dx_0^2}{z^2}$$

puede ser descrita por el Lagrangiano

$$L = R^2 \frac{\dot{z}^2 - \dot{x}_0^2}{2ez^2}, \quad (3.68)$$

donde  $z > 0$  o  $z < 0$ . Es fácil ver que (3.68) se puede reducir a (3.32) a través de cambiar el multiplicador de Lagrange,  $ez^2R^{-2} \rightarrow e$ , e identificando  $z$  con  $x^1$ , de modo que una partícula masiva no relativista puede ser asociada canónicamente con una partícula no masiva en  $AdS_2$  vía la identificación canónica con una partícula relativista no masiva en un espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,1}$

Por otro lado, es posible escribir el Lagrangiano de una partícula masiva en  $AdS_2$ , agregando un término "cosmológico"  $-\frac{e}{2}\mathcal{M}^2$  al Lagrangiano (3.68). Esto genera un vínculo que corresponde a una partícula masiva de la forma  $\phi_M = P^2 + \mathcal{M}^2 = 0$  que es también el vínculo que caracteriza al sistema no relativista conforme invariante (3.14) identificando  $m\alpha$  con  $\mathcal{M}^2R^2$ . La relación entre los dos sistemas puede ser establecida explícitamente a través de la identificación de  $z$  con  $x_1$  y redefiniendo el multiplicador de Lagrange  $ez^2R^{-2} \rightarrow e$ :

$$L = \frac{\dot{x}_1^2 - \dot{x}_0^2}{2e} - \frac{e}{2} \frac{\mathcal{M}^2 R^2}{x_1^2}. \quad (3.69)$$

Este Lagrangiano puede ser comparado con

$$L = m \frac{\dot{x}_\mu^2}{2\dot{x}^0} - \frac{\dot{x}^0}{2} \frac{\alpha}{x_1^2} \quad (3.70)$$

que es la versión invariante de reparametrización del Lagrangiano (3.14). Ahora con la identificación  $m\alpha = \mathcal{M}^2 R^2$ , la equivalencia del sistema no relativista y la partícula masiva relativista en  $AdS_2$  puede ser obtenida de la misma forma en que fue hecho entre la partícula no relativista y la relativista sin masa.

La generalización para los sistemas conforme invariante no relativista en  $d$  dimensiones se puede realizar a través del Lagrangiano que describe a una partícula relativista en  $AdS_2 \times S^{d-1}$ :

$$L = R^2 \frac{\sigma^2 \dot{\vec{N}}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}{2e} - \frac{e}{2} \mathcal{M}^2 + \mathfrak{F}_d(\hat{\vec{N}}). \quad (3.71)$$

Aquí  $\hat{N}_i = N_i / \sqrt{\vec{N}^2}$ ,  $\vec{N} \in \mathcal{R}^d$ , es un vector unitario,  $\vec{N}^2 = 1$ , y  $\mathfrak{F}_d(\hat{\vec{N}})$  es un término topológico no trivial cuya forma para  $d = 2$  y  $d = 3$  se especifica más adelante. El caso de una partícula libre no relativista in  $\mathcal{R}^d$  está dado por  $\sigma = 1$ ,  $\mathcal{M} = 0$ ,  $\mathfrak{F}_d(\hat{\vec{N}}) = 0$ . La elección  $0 < \sigma < 1$ ,  $\mathcal{M} = 0$ ,  $\mathfrak{F}_d(\hat{\vec{N}}) = 0$  corresponde a la generalización de  $d$ -dimensional de la partícula norelativista en el cono (3.17) lograda a través de la substitución  $\sigma^2 r^2 \dot{\varphi}^2 \rightarrow \sigma^2 r^2 \dot{\vec{n}}^2$ ,  $\vec{n} \in S^{d-1}$ . El caso con  $\sigma = 1$ ,  $\mathfrak{F}_d(\hat{\vec{N}}) = 0$  y  $\mathcal{M} \neq 0$  corresponde al sistema (3.14) con  $\alpha > 0$ ; el caso con  $\alpha < 0$  se obtiene por el cambio  $\mathcal{M}^2 \rightarrow -\mathcal{M}^2$  in (3.71) (partícula taquiónica en  $AdS_2 \times S^{d-1}$ ).

Finalmente, los sistemas carga-vórtice y carga-monopolo corresponden a la elección  $\sigma = 1$ ,  $\mathcal{M} = 0$  y

$$\mathfrak{F}_2(\hat{\vec{N}}) = \frac{q\Phi}{2\pi} \epsilon_{ij} \hat{N}_i \dot{\hat{N}}_j, \quad \mathfrak{F}_3(\hat{\vec{N}}) = -\frac{qg}{\dot{\vec{N}}^2} \epsilon_{ijk} \hat{N}_i \dot{\hat{N}}_j \ddot{\hat{N}}_k.$$

respectivamente.

El caso general del Lagrangiano invariante bajo  $so(1, 2) \oplus so(d-1)$  (3.71) corresponde a la superposición del sistema no relativista considerado en la sección 3.1. E.g., el caso  $d = 2$  con  $0 < \sigma < 1$ ,  $\mathcal{M} \neq 0$  y  $\mathfrak{F}_2$  que describe una carga en un cono en presencia de un

potencial escalar  $1/r^2$  y un vórtice magnético ubicado en el apex del cono. El caso  $d = 3$  del Lagrangiano (3.71) con  $\sigma = 1/2$ ,  $\mathcal{M} \neq 0$  and  $\sigma = 1/2$ ,  $\mathcal{T}_3 = 0$  describe la dinámica de una partícula cargada cerca del horizonte de un agujero negro Reissner-Nordström [6].

## 4 Simetría Superconforme y Supersimetría No Lineal

### 4.1 Introducción del Spin en un modelo de Mecánica Clásica

Es posible introducir grados de libertad fermiónicos en un modelo clásico a través del uso de variables de Grassman  $\vec{\psi}$ . Para ello se analizará el siguiente modelo:

$$L = \frac{i}{2}\vec{\psi}\dot{\vec{\psi}} - \frac{i}{2}(\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}})\vec{V}(\vec{x}) - \tilde{V}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2. \quad (4.1)$$

en que  $\vec{V}(\vec{x})$  y  $\tilde{V}(\vec{x})$  son funciones arbitrarias. La ecuación de Lagrange para la variable  $\vec{\psi}$  es:

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi} = \vec{\psi} \times \vec{V}.$$

Ahora, es posible introducir

$$\vec{S} = -\frac{i}{2}(\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\psi_j\dot{\psi}_k. \quad (4.2)$$

Es fácil demostrar que

$$\vec{S} \times \vec{\psi} = 0,$$

de modo que en este sentido es posible decir que  $\vec{S} \parallel \vec{\psi}$  además resulta que la ecuación de movimiento de  $\vec{S}$  es:

$$\frac{d}{dt}\vec{S} = \vec{S} \times \vec{V},$$

de modo que tiene la misma evolución de  $\vec{\psi}$ .

El momento canónico asociado a  $\vec{\psi}$  es

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} = \frac{-i}{2}\dot{\psi}_i.$$



Es posible encontrar la ecuación de vínculo

$$\chi_i = \pi_i + \frac{i}{2}\psi_i \approx 0,$$

que con los paréntesis de Poisson canónicos

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \{\pi_i, \pi_j\} = 0,$$

$$\{\psi_i, \pi_j\} = -\delta_{ij},$$

determinan el paréntesis de Dirac

$$\{\psi_i, \psi_j\}_D = -i\delta_{ij},$$

el cual se considerará el paréntesis usual a partir de ahora entre las variables de Grassman.

Finalmente, es posible escribir el Hamiltoniano para este modelo:

??

$$H = \frac{p^2}{2} + \tilde{V}(\vec{x}) + \frac{i}{2}(\vec{\psi} \times \vec{\psi})\vec{V}. \quad (4.3)$$

La cuantización se realiza a través del precepto de Dirac, asociando a cada paréntesis de Poisson un conmutador para las variables pares y un anticonmutador para las variables impares cuyo valor es el del paréntesis clásico multiplicado por  $i\hbar$ , así:

$$\left[ \hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j \right]_+ = \hbar \delta_{ij}.$$

La realización de estos operadores se puede hacer como

$$\hat{\psi}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sigma_i,$$

donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. Como consecuencia de que el spin de la partícula es  $\vec{S} = -\frac{i}{2}(\vec{\psi} \times \vec{\psi})$  y su operador asociado es  $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ , entonces  $\hat{S}$  resulta ser el operador de spin de la partícula.

## 4.2 Mecánica Lineal Superconforme

### 4.2.1 Partícula Libre

Como se vio en 3.1 una partícula no relativista libre posee la simetría  $so(1, 2)$ , ahora se verá lo que ocurre si se incluyen grados de libertad de Grassmann.

Considerando el modelo unidimensional:

$$L_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{i}{2}\dot{\psi}_\alpha\psi_\alpha.$$

donde  $\alpha = 1, 2$ .

Se puede observar que su Hamiltoniano tiene la misma forma de la partícula libre bosónica (3.1), de modo que posee las mismas integrales de movimiento pares  $p$ ,  $X = x - pt$  de primer grado y  $H$ ,  $D$  y  $K$  de segundo grado en las variables del espacio de fase, pero se pueden encontrar ahora las integrales:

$$\Sigma = -i\psi_1\psi_2, \tag{4.4}$$

$$Q_a = p\psi_a \quad S_a = X\psi_a = x\psi_a - tQ_a, \tag{4.5}$$

la primera integral tiene paridad de Grassmann cero y las dos siguientes son impares.

La integral  $\Sigma$  genera las transformaciones  $u(1)$  de las variables de Grassman y las integrales impares generan supertransformaciones.

Los paréntesis de Poisson no triviales entre estas integrales son:

$$\begin{aligned}
\{H, K\} &= -2D, & \{D, H\} &= H, & \{D, K\} &= -K, \\
\{Q_a, Q_b\} &= -2i\delta_{ab}H, & \{S_a, S_b\} &= -2i\delta_{ab}K, \\
\{S_a, Q_b\} &= -2i\delta_{ab}D + i\epsilon_{ab}\Sigma, \\
\{H, S_a\} &= -Q_a, & \{K, Q_a\} &= S_a, \\
\{D, Q_a\} &= \frac{1}{2}Q_a, & \{D, S_a\} &= -\frac{1}{2}S_a, \\
\{\Sigma, Q_a\} &= \epsilon_{ab}Q_b, & \{\Sigma, S_a\} &= \epsilon_{ab}S_b.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Estas relaciones constituyen el superálgebra  $osp(2|2)$  donde es posible observar que las integrales  $Q_a$  y  $S_a$  tienen el sentido de raíces cuadradas de  $H$  y  $K$  respectivamente y  $H$ ,  $K$  y  $D$ , aún conforman el álgebra  $so(1,2)$ .

### 4.2.2 Modelo de Mecánica Superconforme

En este caso se considera para el Lagrangiano (4.1) la formulación siguiente:

$$V(x) = \frac{i\alpha}{x^2} \quad \tilde{V}(x) = \frac{\alpha^2}{2x^2}$$

con lo cual el Hamiltoniano se puede escribir de la forma

$$H = \frac{1}{2} \left( p^2 + \frac{1}{x^2} \alpha (\alpha + 2i\psi_1\psi_2) \right). \quad (4.7)$$

Ahora las variables de orden uno  $p$  y  $X = x - pt$  no son más integrales de movimiento pero existen los análogos de las integrales cuadráticas que forman la misma álgebra (4.6). Los generadores del subálgebra  $so(1, 2) \times u(1)$  son el Hamiltoniano (4.7) y

$$D = \frac{1}{2} xp - tH, \quad K = \frac{1}{2} x^2 - 2tD - t^2H, \quad (4.8)$$

$$\Sigma = \alpha - i\psi_1\psi_2.$$

Los generadores impares de  $osp(2|2)$  toman la forma:

$$Q_a = p\psi_a + \frac{\alpha}{x} \epsilon_{ab} \psi_b, \quad (4.9)$$

$$S_a = (x - tp)\psi_a - \frac{\alpha}{x} t \epsilon_{ab} \psi_b. \quad (4.10)$$

### 4.3 Mecánica Superconforme No Lineal

Es interesante investigar el hecho de que realizando un pequeño cambio en la constante de acoplamiento bosón-fermión,  $2\alpha \rightarrow 2\alpha n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  con lo cual el Hamiltoniano se transforma a:

$$H_n = \frac{1}{2} \left( p^2 + \frac{1}{x^2} \alpha (\alpha + 2in\psi_1\psi_2) \right), \quad (4.11)$$

en lugar del álgebra  $osp(2|2)$  el sistema (4.11) queda caracterizado por la misma subálgebra par  $so(1, 2) \oplus u(1)$  pero la parte impar incluye  $2(n+1)$  integrales cuyos paréntesis de Poisson resultan ser polinomios de los generadores pares.

Para el análisis subsecuente es conveniente definir las siguientes variables:

$$z = \frac{\alpha}{x} + ip, \quad \bar{z} = \frac{\alpha}{x} - ip, \quad \{z, \bar{z}\} = 2i \frac{\alpha}{x^2},$$

en términos de las cuales el Hamiltoniano toma la forma:

$$H_n = \frac{1}{2} (z\bar{z} + in\{z, \bar{z}\}\psi^+\psi^-).$$

Además del Hamiltoniano se tiene la carga nilpotente:

$$\Sigma = \psi^+\psi^-, \quad (4.12)$$

donde  $\psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \pm i\psi_2)$ ,  $\{\psi^+, \psi^-\} = -i$ . El sistema (4.11) está caracterizado por las integrales pares  $D_n$  y  $K_n$  de la forma (4.8) (con el Hamiltoniano(4.11)). Pero ahora es posible definir:

$$S_{n,0}^+ = z^n \psi^+, \quad S_{n,0}^- = \bar{z}^n \psi^-. \quad (4.13)$$

Además de integrales impares que dependen explícitamente del tiempo:

$$S_{n,1}^+ = (x + itz) z^{n-1} \psi^+, \quad S_{n,1}^- = (x - it\bar{z}) \bar{z}^{n-1} \psi^-. \quad (4.14)$$

Se puede observar que para  $n = 1$  las integrales (4.13), (4.14) toman la forma de combinaciones lineales de (4.9), (4.10):  $Q^+ = \frac{i}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2)$ ,  $S^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + iS_2)$ . Las integrales impares (4.14) difieren de las integrales (4.13) en el factor:

$$\frac{x}{z} + it = \frac{\alpha - 2iD_n}{2H_n}$$

y su complejo conjugado las cuales son también integrales de movimiento explícitamente dependientes del tiempo. Se puede extender entonces el conjunto de integrales impares (4.13) y (4.14) agregando las integrales de la forma:

$$S_{n,l}^+ = (x + itz)^l z^{n-l} \psi^+ = \left( \frac{\alpha - 2iD_n}{2H_n} \right)^l S_{n,0}^+, \quad S_{n,l}^- = (S_{n,l}^+)^*, \quad (4.15)$$

donde  $l = 2, \dots, n$ .

Es posible observar que la parte bosónica del superálgebra (4.6) no cambia:

$$\{H_n, K_n\} = -2D_n, \quad \{D_n, H_n\} = H_n, \quad \{D_n, K_n\} = -K_n. \quad (4.16)$$

Ahora, con el resultado  $\{S_{n,0}^+, S_{n,0}^-\} = -i(2H)^n$ , y las relaciones

$$4(D_n^2 - K_n H_n) - 2n\alpha\Sigma = -\alpha^2, \quad (4.17)$$

$$S_{n,0}^+ S_{n,0}^- = (2H_n)^n \Sigma, \quad (4.18)$$

se puede construir el resto del álgebra cuyos paréntesis no triviales son:

$$\{D_n, S_{n,l}^\pm\} = \left( \frac{n}{2} - l \right) S_{n,l}^\pm, \quad \{\Sigma, S_{n,l}^\pm\} = \mp i S_{n,l}^\pm, \quad (4.19)$$

$$\{H_n, S_{n,l}^\pm\} = \pm i l S_{n,l-1}^\pm, \quad \{K_n, S_{n,l}^\pm\} = \pm i(n-l) S_{n,l+1}^\pm, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \{S_{n,m}^+, S_{n,l}^-\} = & -i(2H_n)^{n-m}(2K_n)^l (\alpha - 2iD)^{m-l} - i\Sigma(2H_n)^{n-m-1}(2K_n)^{l-1} \times \\ & (\alpha - 2iD_n)^{m-l} (n(m-l)(\alpha - 2iD_n) + 4\alpha l(n-m)), \quad m \geq l. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Los paréntesis  $\{S_{n,m}^+, S_{n,l}^-\}$  para  $m \leq l$  pueden ser obtenidos a partir de (4.21) por conjugación y aplicando la relación  $\{B^*, A^*\} = -(\{A, B\})^*$  válida para funciones arbitrarias  $A$  y  $B$  de paridad definida en las variables del espacio de fase.

De acuerdo a las relaciones (4.20) el Hamiltoniano actúa sobre los  $S_{n,l}^\pm$  de modo que reduce en uno el índice  $l$  y aniquila a  $S_{n,0}^\pm$ . Por otro lado  $K$  aumenta el valor de  $l$  de las integrales  $S_{n,l}^\pm$  y aniquila a  $S_{n,n}^\pm$  de modo que si se tiene cualquiera de las integrales impares (en especial los casos  $S_{n,0}^\pm$  que no dependen del tiempo), es posible reconstruir el conjunto completo de integrales impares.

Finalmente es importante hacer notar que para  $l = 0$  y  $m = n$  el término proporcional a  $\Sigma$  en la ecuación (4.21) contiene un factor no polinomial, sin embargo un cálculo directo muestra que en estos dos casos se puede reducir los paréntesis a las formas polinomiales:

$$\{S_{n,m}^+, S_{n,0}^-\} = -i(2H_n)^{n-m}(\alpha - 2iD_n)^{m-1}((\alpha - 2iD_n) + nm\Sigma), \quad (4.22)$$

$$\{S_{n,n}^+, S_{n,l}^-\} = -i(2K_n)^l(\alpha - 2iD_n)^{n-l-1}((\alpha - 2iD_n) + n(n-l)\Sigma). \quad (4.23)$$

## 4.4 Cuantización del Modelo

El análogo cuántico del Hamiltoniano (4.11) es de la forma:

$$H_n = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x^2} (a_n + b_n \sigma_3) \right), \quad (4.24)$$

$$a_n = \alpha_n^2 + \frac{1}{4}(n^2 - 1), \quad b_n = -n\alpha_n, \quad \alpha_n = \alpha - \frac{1}{2}(n - 1), \quad (4.25)$$

donde  $\Delta_1 = a_n - \alpha^2$  y  $\Delta_2 = b_n + n\alpha$  son correcciones cuánticas introducidas para garantizar la conservación de la supersimetría conforme no lineal y cuyo origen puede ser entendido a partir de una reducción desde un modelo dimensionalmente superior [27].

Por otra parte, los análogos cuánticos de los generadores (4.8), (4.12) de la simetría clásica bosónica  $so(1, 2) \times u(1)$  son:

$$D_n = \frac{1}{4}[x, p]_+ - tH_n, \quad K_n = \frac{1}{2}x^2 - 2tD_n - t^2H_n, \quad \Sigma = \frac{1}{2}[\psi^+, \psi^-] = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad (4.26)$$

que son integrales de movimiento del sistema (4.24) pues cumplen con la ecuación de movimiento:

$$i\frac{\partial I_n}{\partial t} - [H_n, I_n] = 0. \quad (4.27)$$

El sistema cuántico admite también el conjunto de integrales impares análogos de las integrales clásicas  $S_{n,l}^\pm$ ,  $l = 0, 1, \dots, n$ . Es posible construirlas a partir de las siguientes relaciones:

$$S_{n,0}^+ = \mathcal{P}_{\alpha,n}\psi^+, \quad (4.28)$$

$$S_{n,l}^+ = (x + it\mathcal{D}_{\alpha-n+1})(x + it\mathcal{D}_{\alpha-n+2})\dots(x + it\mathcal{D}_{\alpha-n+l+1})\mathcal{P}_{\alpha,n-l}\psi^+, \quad l = 1, \dots, n, \quad (4.29)$$

donde

$$\mathcal{P}_{\alpha,n} = \mathcal{D}_{\alpha-n+1}\mathcal{D}_{\alpha-n+2}\dots\mathcal{D}_{\alpha-1}\mathcal{D}_\alpha, \quad \mathcal{D}_\gamma = \frac{d}{dx} + \frac{\gamma}{x}, \quad \psi^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2).$$

Es posible demostrar explícitamente que ellas son integrales de movimiento a través de un método de inducción como el descrito en detalle en la referencia [27].



#### 4.4.1 Estructura No Lineal del Algebra Superconforme Cuántica

Ahora se mostrará que las integrales enunciadas con anterioridad en la sección anterior forman efectivamente un álgebra no lineal de la forma como sus análogos clásicos lo hacen.

Los operadores bosónicos (4.26) del subálgebra  $so(2, 1) \oplus u(1)$  satisfacen las siguientes relaciones no triviales:

$$[H_n, K_n] = -2iD_n, \quad [D_n, H_n] = iH_n, \quad [D_n, K_n] = -iK_n. \quad (4.30)$$

Usando la forma explícita de las integrales impares es posible encontrar la forma del análogo cuántico del elemento de Casimir (4.17):

$$2(H_n K_n + K_n H_n) - 4D_n^2 + 2n\alpha_n \Sigma = \alpha_n^2 + \frac{1}{4}n^2 - 1, \quad (4.31)$$

donde  $\alpha_n$  está dado por (4.25).

Los conmutadores no triviales entre las integrales pares e impares son:

$$[\Sigma, S_{n,l}^\pm] = \pm S_{n,l}^\pm, \quad [D_n, S_{n,l}^\pm] = i \left( \frac{n}{2} - l \right) S_{n,l}^\pm, \quad (4.32)$$

$$[H_n, S_{n,l}^\pm] = \mp l S_{n,l}^\pm, \quad [K_n, S_{n,l}^\pm] = \mp (n - l) S_{n,l+1}^\pm. \quad (4.33)$$

A partir de los conmutadores de las integrales impares con  $D_n$  es posible encontrar que los anticonmutadores entre ellas coinciden hasta factores de ordenamiento y correcciones cuánticas de  $\alpha$  (por ejemplo (4.31)), con las relaciones clásicas (4.21).

Aunque una forma condensada para el caso general  $n$  es muy compleja de encontrar, es posible calcular directamente casos específicos como el caso no lineal más simple  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}
[S_{2,0}^+, S_{2,0}^-]_+ &= (2H_2)^2, & [S_{2,2}^+, S_{2,2}^-]_+ &= (2K_2)^2, & [S_{2,1}^+, S_{2,1}^-]_+ &= (2D_2)^2 + \alpha_2^2, \\
[S_{2,2}^+, S_{2,0}^-]_+ &= (2iD_2 - \alpha_2)(2iD_2 - \alpha_2 - 4\Sigma), & [S_{2,2}^-, S_{2,0}^+]_+ &= ([S_{2,2}^+, S_{2,0}^-]_+)^{\dagger}, \\
[S_{2,1}^+, S_{2,0}^-]_+ &= -2i(D_2H_2 + H_2D_2) + 2H_2(\alpha_2 + 2\Sigma), & [S_{2,1}^-, S_{2,1}^+]_+ &= ([S_{2,1}^+, S_{2,0}^-]_+)^{\dagger}, \\
[S_{2,2}^+, S_{2,1}^-]_+ &= -2i(D_2K_2 + K_2D_2) + 2K_2(\alpha_2 + 2R), & [S_{2,2}^-, S_{2,1}^+]_+ &= ([S_{2,2}^+, S_{2,1}^-]_+)^{\dagger},
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_2$  está dado por (4.25) con  $n = 2$ . Al comparar con las relaciones clásicas, parece que las relaciones de anticonmutación pueden ser obtenidas a partir de los correspondientes paréntesis de Poisson (4.21), (4.22), (4.23) con el simple precepto de simetrización de los productos de aquellos generadores de  $so(1,2)$  que no conmutan entre sí y realizando el reemplazo  $\alpha \rightarrow \alpha - \frac{1}{2}$ . Sin embargo, como se verá inmediatamente este precepto no es aplicable al caso general.

Para el caso general es posible encontrar algunas relaciones de anticonmutación en forma relativamente fácil:

$$[S_{n,n}^+, S_{n,n}^-]_+ = (2K_n)^n, \quad (4.34)$$

$$[S_{n,n}^+, S_{n,n-1}^-]_+ = -i(D_n(2K_n)^{n-1} + (2K_n)^{n-1}D_n) + (2K_n)^{n-1}(\alpha_n + n\Sigma). \quad (4.35)$$

De acuerdo a la relación (4.35), el análogo cuántico de los paréntesis de Poisson se puede obtener a través del precepto antes descrito para el caso  $n = 2$ , sin embargo comparando la relación cuántica:

$$\begin{aligned}
[S_{n,n-1}^+, S_{n,n-1}^-]_+ &= \frac{1}{2}(2H_n(2K)^{n-1} + (2K_n)^{n-1}2H_n) + (n-1)(n-2)(2K_n)^{n-2} \\
&\quad + 4(n-1)(2K)^{n-2}\alpha_n\Sigma,
\end{aligned} \quad (4.36)$$

con la correspondiente relación clásica (4.21) para  $m = l = n-1$ , se puede concluir que debido a la presencia del segundo término este precepto no funciona para el caso general. Claramente

este término es idénticamente cero para el caso  $n = 2$ . Complicaciones similares aparecen al intentar establecer explícitamente la estructura general de los otros anticonmutadores entre las integrales impares del caso general  $n$ .

Por último siempre es posible encontrar que el anticonmutador entre las integrales de orden  $l = 0$  (aquellas que no dependen explícitamente del tiempo) es el análogo cuántico de la relación clásica correspondiente, es decir:

$$[S_{n,0}^+, S_{n,0}^-]_+ = (2H_n)^n. \quad (4.37)$$

#### 4.4.2 Sistemas Caracterizados Por Dos Simetrías Superconformes

Uno de los resultados sorprendentes de la construcción vista en las dos secciones anteriores es que gracias a las correcciones cuánticas al parámetro  $\alpha$  es posible escribir:

$$H_n = H_{n-1} + (n - \alpha - 1) \frac{1}{x^2} \Pi_+, \quad (4.38)$$

donde  $\Pi_+ = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)$ ,  $\Pi_+ \psi^+ = \psi^+$ ,  $\psi^+ \Pi_+ = 0$ . Entonces, para el caso  $\alpha = n - 1$  se produce la igualdad  $H_n = H_{n-1}$ , lo cual quiere decir que el sistema está caracterizado por dos simetrías superconformes no lineales de orden  $n$  y  $n - 1$  simultáneamente.

Es posible estudiar el caso más general que requiere que el sistema sea representado alternativamente por dos Hamiltonianos de distinto orden es decir:

$$H_n(\alpha) = H_{n'}(\alpha'). \quad (4.39)$$

La ecuación (4.39) puede ser satisfecha de dos formas:  $H_n^\pm(\alpha) = H_{n'}^\pm(\alpha')$ , o  $H_n^\pm(\alpha) = H_{n'}^\mp(\alpha')$ , donde  $+$  ( $-$ ) corresponden a los sub espacios propios  $+1$  ( $-1$ ) de  $\sigma_3$ , Entonces es posible distinguir entre los siguientes casos

$$\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}(n + n' - 1), \quad (4.40)$$

$$\alpha = -(\alpha' + 1) = \frac{1}{2}(n - n' - 1). \quad (4.41)$$

En estos casos el Hamiltoniano está dado por:

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(n \pm n')^2 - 1}{4x^2} \mp \frac{nn'}{x^2} \Pi_+ \right), \quad (4.42)$$

donde los signos superior e inferior corresponden a los casos (4.40) y (4.41) respectivamente.

Otros dos casos están dados por las relaciones:

$$\alpha - n = -(\alpha' + 1) = \frac{1}{2}(n + n' + 1), \quad (4.43)$$

$$\alpha - n = \alpha' = \frac{1}{2}(n - n' + 1), \quad (4.44)$$

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(3n + 2 \pm n')^2 - 1}{4x^2} - \frac{n(2n + 2 \pm n')}{x^2} \Pi_+ \right). \quad (4.45)$$

El Hamiltoniano (4.45) se puede obtener a partir del (4.42) a través del cambio formal  $n' \rightarrow n' \pm 2(n + 1)$ . El caso  $n' = n - 1$  en (4.40) reproduce el mencionado caso  $H_n = H_{n-1}$ . Es importante notar que en todos los casos (4.40), (4.41), (4.43), (4.44) el parámetro  $\alpha$  ( $\alpha'$ ) toma valores enteros.

No todas la simetrías adicionales son significativas esto es fácil de ver en algunos ejemplos simples. Si  $n' = 0$ , el último término en (4.42) es cero y el Hamiltoniano toma una forma puramente bosónica:

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{n^2 - 1}{4x^2} \right). \quad (4.46)$$

Este sistema reproduce el sistema (4.24) con las ecuaciones (4.25) que toma una forma puramente bosónica ( $b_n = 0$ ) cuando  $\alpha = \frac{1}{2}(n - 1)$ , es decir cuando  $\alpha$  toma valores enteros o semienteros. Para el caso  $n = 2p$  la integral  $S_{2p,0}^+$  es igual a  $(-2H)^p \psi^+$ . De la misma forma el resto de las integrales impares toma una forma de productos de las integrales triviales  $\psi^\pm$  y las integrales pares  $H$ ,  $D$  y  $K$  de modo que en este caso la simetría adicional de orden  $n$  es trivial. Sin embargo cuando  $n = 2p + 1$  resulta que la integral de movimiento  $\mathcal{P}_{p,2p+1}$  que es factor de  $S_{2p+1,0}^+$  resulta ser el Hamiltoniano en orden  $p + \frac{1}{2}$ . Un ejemplo simple de ello es:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{2,5})^2 &= \mathcal{D}_{-2} \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 (\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_{-2}) \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{-2} \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 (\mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_1) \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \\ &\mathcal{D}_{-2} \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0^2 \mathcal{D}_0^2 \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{-2} \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0^6 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{-2} \mathcal{D}_{-1} (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{-1})^3 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \\ &\mathcal{D}_{-2} (\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_{-2})^4 \mathcal{D}_2 = (\mathcal{D}_3 \mathcal{D}_{-3})^5 = (-2H)^5 \end{aligned} \quad (4.47)$$

De la misma forma, los operadores  $S_{n,l}^\pm$ ,  $l = 1, \dots, n$ , resultan ser productos de potencias semienteras de  $H$ .

En los casos generales (4.40), (4.41), (4.43) y (4.44) con  $n' \neq 0$ ,  $n > n'$ ,  $S_{n,0}^+$  es proporcional a  $S_{n',0}^+$ . Cuando  $n - n' = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , esta relación es simplemente  $S_{n,0}^+ = (-2H)^k S_{n',0}^+$ , y así la supersimetría de mayor orden es simplemente una transformación trivial de la de orden menor. En cambio, los casos (4.40), (4.41), (4.43) y (4.44) con  $n' \neq 0$ ,  $n - n' = 2k + 1$  resultan en que ambas supersimetrías son no triviales.

Como un ejemplo se puede observar que para  $n' = 1$  y  $n = 2p$ , pertenece al tipo de sistema con Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p}{x^2} (p - \sigma_3) \right), \quad p \in \mathbb{N}$$

el cual es el análogo cuántico directo de (4.11) con  $\alpha = p$ . Este sistema, además de la supersimetría de orden  $n' = 1$ , posee la supersimetría no lineal de orden  $n = 2p$ , aquí los generadores impares tiene una estructura proporcional a grados semienteros de los generadores bosónicos de  $so(1, 2) \times u(1)$  (ver detalles en [26]).

### 4.4.3 Operador de Casimir de la Simetría Superconforme

A partir de (4.17) es posible construir el Casimir:

$$C = 4(D^2 - KH) - 2\alpha\Sigma + \alpha^2 \quad (4.48)$$

de la superálgebra  $osp(2|2)$ . Ya que el sistema está caracterizado por dos variables de Grassmann independientes ( $\psi_1$  y  $\psi_2$ ), no todas las integrales impares pueden ser independientes. Ellos deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$\alpha Q_a + 2\epsilon_{ab}(Q_b D - S_b H) = 0, \quad \alpha S_a + 2\epsilon_{ab}(Q_b K - S_b D) = 0, \quad (4.49)$$

Clásicamente estas ecuaciones constituyen un sistema homogéneo cuya condición para no tener solución trivial es que el determinante sea  $\Delta = 0$  lo cual fija el valor del Casimir:  $C = 0$ . En el análogo cuántico de estas relaciones la condición de existencia de soluciones no triviales se reduce a la ecuación:

$$\left(\hat{C} - \frac{3}{4}\hbar^2\right) \left(\hat{C} - \frac{3}{4}\hbar^2 + 8\hbar\alpha\sigma_3\right) = 0,$$

lo cual fija el valor del análogo cuántico del elemento de Casimir:

$$\hat{C} \equiv 4\hat{D}^2 - 2(\hat{K}\hat{H} + \hat{H}\hat{K}) + \alpha(\alpha - \sigma_3) = \frac{3}{4}\hbar^2. \quad (4.50)$$

## 5 Simetría Dinámica del Sistema Fermión-Monopolo

Se vio en (3.1) que el sistema fermión-monopolo posee la simetría  $so(2,1)$  ahora se verá que al considerar el caso de un fermión en presencia del campo de un monopolo magnético, aparece una estructura isomorfa a la simetría superconforme vista en el capítulo anterior.

El sistema tridimensional fermión Monopolo está descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}P_i^2 - eB_iS_i \quad (5.1)$$

con  $P_i = p_i - eA_i$ ,  $B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k = gx_i/|x|^3$ ,  $|x| = \sqrt{x_i x_i}$ ,  $S_j = -\frac{i}{2}\epsilon_{jkl}\psi_k\psi_l$ , y por los paréntesis fundamentales  $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ ,  $\{\psi_j, \psi_k\} = -i\delta_{jk}$ . El Hamiltoniano (5.1) y las cantidades:

$$D = \frac{1}{2}X_i P_i + etB_i S_i = \frac{1}{2}x_i P_i - tH, \quad (5.2)$$

$$K = \frac{1}{2}X_i^2 - et^2 B_i S_i = \frac{1}{2}x_i^2 - 2tD - t^2 H \quad (5.3)$$

junto con el momento angular  $J_i$ , definido por las relaciones:

$$J_i = L_i - \nu n_i + S_i, \quad L_i = \epsilon_{ijk}x_j P_k, \quad n_i = \frac{x_i}{|x|}, \quad \nu = eg,$$

constituyen el conjunto de integrales de movimiento que genera la simetría  $so(1,2) \oplus so(3)$ .

El elemento de Casimir es:

$$C = 4(D^2 - KH) + \mathcal{J} - 2\mathcal{Q}_L = 0, \quad (5.4)$$

donde

$$\mathcal{J} = J_i^2 - \nu^2, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{Q}_L = L_i S_i. \quad (5.6)$$

La integral de movimiento  $\mathcal{Q}_L$  además de conmutar con todos los elementos generadores del algebra  $so(1,2) \oplus so(3)$ , produce una extensión de ella a  $so(1,2) \oplus so(3) \oplus u(1)$ .



De las ecuaciones descritas en la sección (4.1), podemos observar que las relaciones entre  $S_i$  y  $\psi_i$  son

$$\{S_i, \psi_j\} = -i\epsilon_{ijk}\psi_k, \quad \{S_i, S_j\} = -i\epsilon_{ijk}S_k, \quad \psi_i S_j = \frac{1}{3}\delta_{ij}(S_k\psi_k),$$

y sus ecuaciones de evolución están dadas por

$$\frac{d}{dt}\psi_i = e\epsilon_{ijk}\psi_j B_k, \quad \frac{d}{dt}S_i = e\epsilon_{ijk}S_j B_k. \quad (5.7)$$

Además es conveniente notar que  $S_i$  es una cantidad par nilpotente en tres dimensiones, es decir  $S_i^2 = 0$ . Es posible ahora, definir entonces una integral impar dada por:

$$Q_S = S_i\psi_i. \quad (5.8)$$

Como los operadores análogos cuánticos de  $S_i$  y  $\psi_i$  pueden ser realizados ambos en términos de matrices de Pauli,  $\hat{\psi}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sigma_i$ ,  $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ , el análogo cuántico de (5.8) se reduce a una constante de carácter puramente cuántico:  $\hat{Q}_S = 3(\hbar/2)^{3/2}$ .

Siguiendo a Plyushchay [22], es posible definir el vector  $X_i = x_i - tP_i$ , el cual en el caso libre se reduce al generador de boost de Galileo, es posible al igual que en el caso superconforme definir cantidades de segundo orden en las variables de fase que resultan ser integrales de movimiento impares:

$$Q_P = P_i\psi_i, \quad Q_X = X_i\psi_i, \quad (5.9)$$

con los paréntesis de Poisson:

$$\{Q_P, Q_P\} = -2iH, \quad \{Q_X, Q_X\} = -2iK, \quad \{Q_X, Q_P\} = -2iD. \quad (5.10)$$

Las integrales  $Q_P$  y  $Q_X$ , son análogos de las integrales  $Q_a$  and  $S_a$  del modelo superconforme. En este caso se tiene además la integral clásica impar (5.8). Para obtener un

álgebra completa es necesario incluir las integrales que se generan a partir de los paréntesis de Poisson entre las integrales anteriores y ella, obteniéndose así las nuevas integrales pares:

$$Q_P = P_i S_i, \quad Q_X = X_i S_i. \quad (5.11)$$

Es interesante observar que aunque clásicamente las cantidades (5.9) son de paridad de Grassmann impar y distintas de las cantidades (5.11), sus análogos cuánticos coinciden hasta el factor numérico  $\sqrt{\hbar/2}$

La contraparte impar de (5.6) es:

$$Q_L = L_i \psi_i, \quad (5.12)$$

que también es una integral de movimiento.

Con el fin de construir una integral de movimiento que sea la raíz cuadrada (en términos de paréntesis de Poisson), del momento angular total  $\mathcal{J}$ , se puede introducir una combinación lineal de  $Q_L$  y  $Q_S$ ,

$$Q_Y = Q_L + \frac{2}{3} Q_S, \quad (5.13)$$

que satisface la relación:

$$\{Q_Y, Q_Y\} = -i\mathcal{J}.$$

Esta integral tiene la característica de tener paréntesis nulo con todas las integrales impares y en nivel cuántico anticonmuta con ellas. Por otra parte es necesario seguir incluyendo las integrales generadas ahora por la conmutación (en términos de paréntesis de Poisson), con la integral  $Q_L$  y así se generan las integrales:

$$\{Q_L, Q_P\} = Q_P, \quad \{Q_L, Q_X\} = Q_X,$$

donde

$$Q_P = \mathcal{P}_i \psi_i, \quad Q_X = \mathcal{X}_i \psi_i, \quad (5.14)$$

$$\mathcal{P}_i = \epsilon_{ijk} L_j P_k + \frac{2}{3} \nu |x|^{-1} S_i, \quad \mathcal{X}_i = \epsilon_{ijk} L_j X_k - \frac{2}{3} t \nu |x|^{-1} S_i. \quad (5.15)$$

Los paréntesis de las integrales (5.14) con (5.8) produce sus contrapartes pares:

$$\mathcal{Q}_P = \mathcal{P}_i S_i, \quad \mathcal{Q}_X = \mathcal{X}_i S_i.$$

En la tabla siguiente se muestran todos los paréntesis necesarios para dar cuenta del álgebra completa.

Paréntesis de Poisson entre las integrales de movimiento nilpotentes.

Aquí  $\Lambda \equiv \mathcal{Q}_L + \mathcal{J}$ ,  $Q_+ \equiv Q_Y + \frac{1}{3} Q_S$ .

	$Q_X$	$Q_P$	$Q_X$	$Q_P$	$Q_Y$	$\mathcal{Q}_X$	$\mathcal{Q}_P$	$\mathcal{Q}_X$	$\mathcal{Q}_P$
$Q_X$	$-2iK$	$-2iD$	0	$i\Lambda$	0	0	$Q_+$	$2KQ_Y$	$2DQ_Y$
$Q_P$	$-2iD$	$-2iH$	$-i\Lambda$	0	0	$-Q_+$	0	$2DQ_Y$	$2HQ_Y$
$Q_X$	0	$-i\Lambda$	$-2i\mathcal{J}K$	$-2i\mathcal{J}D$	0	$-2KQ_Y$	$-2DQ_Y$	0	$\mathcal{J}Q_+$
$Q_P$	$i\Lambda$	0	$-2i\mathcal{J}D$	$-2i\mathcal{J}H$	0	$-2DQ_Y$	$-2HQ_Y$	$-\mathcal{J}Q_+$	0
$Q_Y$	0	0	0	0	$-i\mathcal{J}$	$Q_X$	$Q_P$	$-\mathcal{J}Q_X$	$-\mathcal{J}Q_P$
$\mathcal{Q}_L$	$Q_X$	$Q_P$	$-\mathcal{J}Q_X$	$-\mathcal{J}Q_P$	0	$\mathcal{Q}_X$	$\mathcal{Q}_P$	$-\mathcal{J}\mathcal{Q}_X$	$-\mathcal{J}\mathcal{Q}_P$
$Q_S$	$-3i\mathcal{Q}_X$	$-3i\mathcal{Q}_P$	$-3i\mathcal{Q}_X$	$-3i\mathcal{Q}_P$	$-3i\mathcal{Q}_L$	0	0	0	0
$\mathcal{Q}_X$	0	$Q_+$	$2KQ_Y$	$2DQ_Y$	$-Q_X$	0	$\mathcal{Q}_L$	$2K\mathcal{Q}_L$	$2D\mathcal{Q}_L$
$\mathcal{Q}_P$	$-Q_+$	0	$2DQ_Y$	$2HQ_Y$	$-Q_P$	$-\mathcal{Q}_L$	0	$2D\mathcal{Q}_L$	$2H\mathcal{Q}_L$
$\mathcal{Q}_X$	$-2KQ_Y$	$-2DQ_Y$	0	$-\mathcal{J}Q_+$	$\mathcal{J}Q_X$	$-2K\mathcal{Q}_L$	$-2D\mathcal{Q}_L$	0	$\mathcal{J}\mathcal{Q}_L$
$\mathcal{Q}_P$	$-2DQ_Y$	$-2HQ_Y$	$\mathcal{J}Q_+$	0	$\mathcal{J}Q_P$	$-2D\mathcal{Q}_L$	$-2H\mathcal{Q}_L$	$-\mathcal{J}\mathcal{Q}_L$	0

Las cantidades  $Q_S$ ,  $Q_Y$  y  $\mathcal{Q}_L$  tienen paréntesis de Poisson nulo con los generadores de  $so(1,2)$  (5.1), (5.2), (5.3), mientras que los paréntesis no triviales de las integrales impares con los generadores de  $so(1,2)$  son:

$$\{D, Q_P\} = \frac{1}{2} Q_P, \quad \{D, Q_X\} = -\frac{1}{2} Q_X, \quad \{K, Q_P\} = Q_X, \quad \{H, Q_X\} = -Q_P. \quad (5.16)$$

Los pares  $(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{X}})$ ,  $(\mathcal{Q}_P, \mathcal{Q}_X)$ , y  $(\mathcal{Q}_{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{X}})$ , así como el par  $(Q_P, Q_X)$ , forman las representaciones de spin-1/2 de  $so(1,2)$ , i.e. sus paréntesis con  $H$ ,  $K$  y  $D$  tienen una forma similar a (5.16).

Las integrales impares  $Q_P$ ,  $Q_X$ ,  $Q_{\mathcal{P}}$  y  $Q_{\mathcal{X}}$  satisfacen relaciones análogas a las relaciones (4.49):

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P}}\mathcal{J} + 2(Q_{\mathcal{P}}D - Q_{\mathcal{X}}H) &= 0, & Q_X\mathcal{J} - 2(Q_XD - Q_{\mathcal{P}}K) &= 0, \\ Q_{\mathcal{P}} - 2(Q_{\mathcal{P}}D - Q_{\mathcal{X}}H) &= 0, & Q_X + 2(Q_XD - Q_{\mathcal{P}}K) &= 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P}}Q + 2iH\mathcal{Q}_L &= 0, & Q_XQ_{\mathcal{X}} + 2iK\mathcal{Q}_L &= 0, & Q_{\mathcal{P}}Q_X + 2i\mathcal{Q}_L &= 0, \\ Q_{\mathcal{P}}Q_{\mathcal{X}} - i\mathcal{Q}_L\mathcal{J} &= 0, & Q_{\mathcal{P}}Q_{\mathcal{X}} - 2i\mathcal{Q}_LD &= 0, & Q_{\mathcal{P}}Q_X + 2i\mathcal{Q}_LD &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Considerando esta similitud y comparando la estructura de los paréntesis de Poisson de  $Q_P$ ,  $Q_X$ ,  $Q_{\mathcal{P}}$ ,  $Q_{\mathcal{X}}$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $D$  y  $\mathcal{Q}_L$  del sistema fermion-monopolo con aquellas de las integrales del sistema superconforme  $Q_a$ ,  $S_a$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $D$  y  $\Sigma$  es posible decir que el primer conjunto es una generalización no lineal del álgebra superconforme  $osp(2,2)$ .

Ya que  $\mathcal{J}$  tiene paréntesis de Poisson nulo con todas las integrales, juega el rol de carga central de esta simetría, análogamente al rol jugado por  $\alpha^2$  en el modelo superconforme. Para  $L_i^2 \neq 0$ , el reescalamiento:

$$Q_{\mathcal{P}} \rightarrow Q_{\mathcal{P}}\mathcal{J}^{-1/2}, \quad Q_{\mathcal{X}} \rightarrow Q_{\mathcal{X}}\mathcal{J}^{-1/2}, \quad \mathcal{Q}_L \rightarrow \mathcal{Q}_L\mathcal{J}^{-1/2}, \quad (5.19)$$

transforma el álgebra superconforme no lineal del sistema fermión-monopolo en la superálgebra de Lie  $osp(2,2)$ , en la cual el rol del parámetro  $\alpha$  es jugado por  $\mathcal{J}^{1/2}$ .

El rol del operador cuántico de spin de  $osp(2|2)$  aquí es jugado por:

$$\hat{\mathcal{Q}}_L = \frac{\hbar}{2} \left( \hat{L}_i \sigma_i + \hbar \right). \quad (5.20)$$

En correspondencia con las relaciones clásicas él predice una rotación de las supercargas:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_L, \hat{Q}_X] &= i\hbar\hat{Q}_X, & [\hat{Q}_L, \hat{Q}_P] &= i\hbar\hat{Q}_P, \\ [\hat{Q}_L, \hat{Q}_X] &= -i\hbar\hat{\mathcal{J}}\hat{Q}_X, & [\hat{Q}_L, \hat{Q}_P] &= -i\hbar\hat{\mathcal{J}}\hat{Q}_P. \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde

$$\hat{\mathcal{J}} = \hat{J}_i^2 - \nu^2 + \frac{1}{4}\hbar^2$$

es el análogo cuántico de (5.5) con  $\nu$  cuantizado,  $|\nu| = n/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y los análogos cuánticos de  $Q_X$  y  $Q_P$  son obtenidos de (5.14), (5.15) por antisimetrización de los factores que no conmutan  $\hat{L}_j$  y  $\hat{P}_k$ , o  $\hat{L}_j$  y  $\hat{X}_k$ .

La única diferencia entre el superálgebra no lineal formada por las integrales del sistema fermion-monopolo y la versión cuántica del superálgebra  $osp(2|2)$  del sistema superconforme de la sección 4.4 consiste en la presencia del factor adicional  $\hat{\mathcal{J}}$  en los conmutadores (5.21) y en los anticommutators de  $\hat{Q}_P$  y  $\hat{Q}_X$ .

Finalmente el análogo cuántico de la relación (5.4) es:

$$\hat{C} = 4\hat{D}^2 - 2(\hat{K}\hat{H} + \hat{H}\hat{K}) + \hat{\mathcal{J}} - 2\hat{Q}_L = \frac{3}{4}\hbar^2.$$

Esta relación fija el valor de  $\hat{C}$  y aparece como condición de soluciones no triviales para las ecuaciones análogas cuánticas de (5.17).

En una representación diagonal de  $\hat{J}_i^2$  donde  $\hat{J}_i^2 = j(j+1)\hbar^2$ ,  $j + \frac{1}{2} = |\nu| + m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , se tiene  $\hat{\mathcal{J}} = (|\nu| + m)^2 - \nu^2$ . Para los estados  $m > 0$  los operadores  $\hat{Q}_L$ ,  $\hat{Q}_X$  y  $\hat{Q}_P$  (ver eq. (5.19)) junto con el resto de las integrales de movimiento generan la superálgebra  $osp(2|2) \oplus su(2)$ . Hay que considerar sin embargo, que la normalización (5.19) tiene una no localidad escondida debida a la presencia del operador  $\hat{\mathcal{J}}$  elevado a un exponente negativo. En el sector  $m = 0$ , la simetría del sistema se reduce a la simetría conforme  $so(1,2)$ .

## 6 Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado un amplio estudio de la simetría conforme en sus más variadas realizaciones, interesantes resultados se han obtenido en la primera parte al aprender que una partícula no masiva en  $(1, d - 1)$  puede ser tratada como una partícula en una hipersuperficie  $(d + 1)$  dimensional inmersa en un espacio  $(2, d)$  en que se excluye el punto  $\{0\}$ . Desde este punto de vista la simetría conforme  $so(2, d)$  del sistema no masivo se origina a partir de las isometrías del espacio  $(2, d)$ . Este hecho está además en la base del carácter no lineal de las transformaciones especiales conformes.

Por otro lado se ha visto que diversos sistemas no relativistas (3.8), (3.14), (3.17) y (3.20) pueden ser "unificados" a través de un Hamiltoniano genérico y que ellos comparten las características de la simetría conforme.

Se ha dado también una visión de las simetrías encontradas en términos de la correspondencia AdS/CFT que permite encontrar interpretaciones alternativas para las propiedades de estos sistemas.

Además, la cuantización de estos sistemas da una explicación natural a las simetrías observadas en las ecuaciones de Schrödinger y Klein Gordon sin masa.

Por otro lado se ha hecho una super extensión de la simetría conforme y se ha encontrado una generalización no lineal que arranca de una modificación muy simple del modelo superconforme lineal.

Finalmente de los sistemas "unificados" en el segundo capítulo se ha estudiado el sistema Fermión Monopolo por ser un modelo muy simple que hasta ahora se había resistido a un análisis exhaustivo de sus de simetrías, encontrándose una fuerte similitud con el sistema superconforme estudiado en el capítulo anterior y encontrando su álgebra de simetría a través de la comparación directa con este último.

Resumiendo, los resultados obtenidos son:

- Realización no lineal de la simetría conforme como consecuencia natural de la reducción de un sistema en dos dimensiones extras, que posee simetría lineal.
- Se mostró que una partícula sin masa en un espacio de Minkowsky  $d$  dimensional puede ser tratada como un sistema confinado en el borde de un espacio  $AdS_{d+1}$  de radio infinito.
- Varios sistemas no relativistas pueden ser canónicamente relacionados a una partícula relativista en  $AdS_2 \times S^{d-1}$ . Estos sistemas corresponden al carga-vórtice en dos dimensiones, el sistema fermión-monopolo en tres dimensiones, el de una partícula moviéndose en un campo gravitacional plano de una fuente puntual y el modelo conforme asociado con una partícula cargada moviéndose cerca del horizonte de un agujero negro extremo Reissner-Nordström.
- Se mostró que un simple cambio de la constante de acoplamiento bosón-fermión  $2\alpha \rightarrow 2\alpha n, n \in \mathbb{N}$ , en el modelo superconforme produce un cambio radical de la simetría, siendo ahora los sistemas clásico y cuántico caracterizados por una simetría superconforme no lineal.
- Se encontró que el sistema modificado con un valor entero del parámetro  $\alpha$  posee dos simetrías superconformes no lineales de órdenes desplazados relativamente en un número impar.

Se encontró simetría superconforme escondida en modelo superconforme original para valores enteros de constante de acoplamiento bosón-fermión.

- Se investigaron las simetrías del sistema fermión-monopolo encontrándose que se puede tratar como una generalización no lineal de  $osp(2|2) + su(2)$ .

Algunos de los interesantes problemas abiertos aún son:

- \* Investigar la relación entre sistemas relativistas y no relativistas en el ámbito de las correspondientes teorías de campo.
- \* Investigar si el sistema supersimétrico de  $N$  partículas de Calogero [15] [16] admite una generalización para el caso de simetría superconforme no lineal.
- \* Investigar la realización geométrica de la simetría superconforme no lineal descrita en el superespacio apropiado.
- \* consecuencias de la simetría superconforme escondida en el modelo superconforme.
- \* Investigar cuáles son las consecuencias físicas de la simetría superconforme no lineal, teniendo en cuenta las consecuencias que existen de la simetría del problema de Kepler asociada con el vector de Laplace-Runge-Lenz, sería interesante mirar el problema de scattering fermión-monopolo [33] desde el punto de vista de la simetría encontrada.



## 7 APENDICE: Vínculos y Grados de Libertad

Cuando un sistema es llevado del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano [17], es necesario trabajar en el llamado espacio de fase, en él el sistema está definido por sus coordenadas y los momentos canónicos del sistema:

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i},$$

con  $i = 1, \dots, N$  para poder despejar todas las velocidades en función de las variables del espacio de fase es necesario que la matriz:

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j},$$

sea invertible, en caso contrario aparecen relaciones entre las coordenadas y los momentos canónicos de la forma:

$$\phi_m(q, p) = 0,$$

donde  $m = 1, \dots, M$ , denominados vínculos primarios los cuales definen una superficie de  $2N - M$  dimensiones La existencia de ellos implica que existe una arbitrariedad en el proceso de obtención de las velocidades a partir de los momenta. Estos vínculos deben ser consistentes con la evolución temporal del sistema por lo cual su derivada temporal total debe anularse, en general esto provoca la aparición de nuevos vínculos denominados secundarios. El proceso se repite hasta que no aparezcan nuevos vínculos.

De entre estos vínculos es posible distinguir aquellos que son de primera clase, aquellos que tienen paréntesis de Poisson nulos en la superficie de todos los vínculos y aquellos en que su paréntesis no es trivial, denominados de segunda clase.

La existencia de estos vínculos significa que el sistema no ocupa todo el espacio de fase en su evolución si no que está restringido a una hipersuperficie de menor dimensión.

Para describir el sistema con sus grados reales de libertad es necesario realizar lo que se denomina reducción a la superficie física o de vínculos de segunda clase más condiciones de gauge. En orden de realizar esto es necesario eliminar la arbitrariedad de gauge introducida por los vínculos de primera clase a través de una relación conocida simplemente como condición de gauge para el vínculo en consideración. Una vez introducidas todas las condiciones de gauge necesarias es posible reducir el sistema a la hipersuperficie generada por ellos y usando la matriz

$$\Delta_{ij} = \{\chi_i, \chi_j\},$$

donde los  $\chi_i$  son los vínculos, ahora todos de segunda clase, es posible definir entonces una nueva formulación del sistema en base a nuevos paréntesis conocidos como Paréntesis de Dirac dados por:

$$\{A, B\}_d = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} \Delta^{\alpha, \beta} \{\chi_\beta, B\}.$$

Como se puede ver entonces cada vínculo de segunda clase elimina un grado de libertad del espacio de fase y cada vínculo de primera clase elimina dos pues es necesario introducir los gauges correspondientes quedando el sistema finalmente con:

$$N_L = 2N - V_2 - 2V_1,$$

donde  $N_L$  son los grados de libertad resultantes,  $V_2$  es el número de vínculos de segunda clase y  $V_1$  es el número de vínculos de primera clase.

## BIBLIOGRAFIA

### References

- [1] R. Jackiw, *Physics Today* **25** (1972) 23.
- [2] V. de Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, *Nuovo Cim. A* **34** (1976) 569.
- [3] V. P. Akulov and A. I. Pashnev, *Theor. Math. Phys.* **56** (1983) 862 [*Teor. Mat. Fiz.* **56** (1983) 344].
- [4] S. Fubini and E. Rabinovici, *Nucl. Phys. B* **245** (1984) 17.
- [5] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [*Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].
- [6] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P. K. Townsend and A. Van Proeyen, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4553 [arXiv:hep-th/9804177].
- [7] O. Jahn, V. V. Sreedhar, *The Maximal Invariance Group of Newtons's Equations for a Free Point Particle*, [arXiv:math-ph/0102011].
- [8] L. O'Raiheartaigh and V. V. Sreedhar, *Annals Phys.* **293** (2001) 215 [arXiv:hep-th/0007199].
- [9] L. O'C. Drury, J. T. Mendonca, *Explosion Implosion Duality and the Laboratory Simulation of Astrophysical Systems*, *Physics of Plasmas* (2000) Vol 7, pp 5148-5152.
- [10] F. Calogero, *J. MathPhys.* 10 (1969) 2192; *J. Math.Phys.* 10(1969) 2197.
- [11] Kumar S. Gupta, Siddhartha Sen, *Black Hole Decay as Geodesic Motion*, *Phys.Lett. B* **526** (2002) 121-126.

- [12] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, *Annals Phys.* **152** (1984) 220.
- [13] M. S. Plyushchay, *Nucl. Phys. B* **589** (2000) 413 [arXiv:hep-th/0004032].
- [14] S. W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1973
- [15] G. W. Gibbons, P. K. Townsend, *Phys. Lett, B* **454** (1999)187 [hep-th/9812034]
- [16] D. Z. Freedman, P. F. Mende, *Nucl. Phys. B* **344** (1990) 317
- [17] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press (1992).
- [18] S. M. Klishevich and M. S. Plyushchay, *Nucl. Phys. B* **606** (2001) 583 [arXiv:hep-th/0012023].
- [19] V. P. Akulov and A. I. Pashnev, *Teor. Mat. Fiz.* **56** (1983) 344.
- [20] E. D'Hoker and L. Vinet, *Phys. Lett. B* **137** (1984) 72.
- [21] R. Jackiw, *Annals Phys.* **129** (1980) 183.
- [22] M. S. Plyushchay, *Phys. Lett. B* **485** (2000) 187 [arXiv:hep-th/0005122].
- [23] Para una discusión de varios aspectos de (super)simetrías no lineales ver :  
 J. de Boer, F. Harmsze and T. Tjin, *Phys. Rept.* **272** (1996) 139 [arXiv:hep-th/9503161];  
 A. V. Borisov and I. S. Mamaev, "Poisson structures and Lee algebras in Hamiltonian mechanics", Izhevsk, 1999;  
 M. Plyushchay, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 3679 [arXiv:hep-th/9903130].
- [24] E. A. Ivanov, S. O. Krivonos and V. M. Leviant, *J. Phys. A* **22** (1989) 4201.

- [25] G. Papadopoulos, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 3715 [arXiv:hep-th/0002007].
- [26] C. Leiva and M. S. Plyushchay, *JHEP* 0310 (2003) 069 [arXiv:hep-th/0304257].
- [27] A. Anabalón and M. S. Plyushchay, *Phys. Lett. B* **572** (2003) 202 [arXiv:hep-th/0306210].
- [28] Y. Kazama, C. N. Yang and A. S. Goldhaber, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2287.
- [29] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150].
- [30] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [arXiv:hep-th/9905111].
- [31] M. S. Plyushchay, *Nucl. Phys. B* **589** (2000) 413 [arXiv:hep-th/0004032].
- [32] H. J. Lipkin, W. I. Weisberger and M. Peshkin, *Ann. Phys. (N. Y.)* **53** (1969) 203.
- [33] Y. Kazama, C. N. Yang and A. S. Goldhaber, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2287.
- [34] R. Jackiw, *Phys. Lett. B* **154** (1985) 303.
- [35] C. Leiva and Mikhail S. Plyushchay. *Annals of Physics* 307 0310 (2003) 372-391. arXiv:hep-th/0301244.