

# Sistemas Dinámicos Degenerados

Tesis entregada a la Universidad de Santiago de Chile, en  
cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física  
(Marzo 2002)

Departamento de Física, Facultad de Ciencia

Joel Saavedra Alvear  
Licenciado en Física Aplicada, Universidad de Santiago de Chile  
(Diciembre 1993).

Director de Tesis: Dr. Jorge Zanelli I.

INFORME DE APROBACION  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con  
mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Joel Saavedra Alvear

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para  
la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

-----  
Director de Tesis: Dr. Jorge Zanelli I

**Comisión Informante de Tesis**

Dr. Jorge Alfaro	-----
Dr. Rodrigo Bamón	-----
Dr. Jorge Gamboa	-----
Dr. Sergio Hojman	-----
Dr. Mikhail Plyushchay	-----

*La concordia hace crecer la pequeñas cosas,  
la discordia destruye las grandes.*

*poeta latino del siglo XIX*

*A mi Esposa e hijos*  
*A mis padres y hermano*  
*A la memoria de Jose Luis Piña (Q.E.P.D)*



## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi compañera de vida, a mi esposa por su entrega, cariño, comprensión, resignación, paciencia y amorosa ayuda tanto en el desarrollo de esta tesis de doctorado, como en los inicios de mi carrera como físico, a mis dos tesoros Bastian e Isidora, que han aportado sus juegos y mucho cariño a este trabajo, sin poder entender a que juega el papá, durante largas horas de escritura y cálculo. También quiero agradecer a mis padres el apoyo que me otorgaron, sobre todo a mi madre cuando tome la decisión de estudiar física.

Un agradecimiento y recuerdo muy especial se merece mi amigo José Luis Piña (Q.E.P.D), del cual estoy muy agradecido por brindarme su amistad, enseñarme acerca de la física, la docencia, la amistad, en fin de la vida misma.

Claramente mis estudios se vieron privilegiados al contar con Jorge Zanelli como profesor guía de tesis, con el cual no sólo se aprende un montón de física, si no que se gana un amigo más. Otro privilegio ha sido compartir mi carrera con el profesor Jorge Gamboa, quién ha sido un motor importante en mi carrera, tanto en el nivel de conocimientos entregado, como en la disponibilidad de entregar su ayuda en todo cuanto necesité en más de una ocasión.

A mis compañeros y amigos de oficina S. Lepe y V. Cárdenas, con los cuales he compartido muy gratos momentos, en lo académico y en lo no académico. A mi compañero y amigo F. Ortega por su amistad y tiempo, los que de una u otra manera han sido parte importante en mi trabajo. Por otro lado he tenido la suerte de compartir con muchos colegas y amigos que han aportado su granito de arena a este trabajo de diversas formas, ya sea por muy buenas discusiones en física o a través de comentarios, F.Mendez (un gran amigo a cual agradezco la lectura y comentarios de los primeros manuscritos de esta tesis), J.Crisóstomo (además de la confección de las figuras de esta tesis y su preocupación), R. Olea, O. Miskovic, M. Bustamante, A. Gomberoff, C.Martínez, M. Plyushchay, C. Leiva, J.Retamal, L. Vergara, G. Palma, J. Rojas, P. Labraña, O. Chandia, A. Amezaga, N. Salinas, J. M. Rojas, pido disculpas si me olvido de alguno, pero la memoria es frágil.

Gracias ha esta tesis he tenido la suerte de conocer y compartir la amistad de un joven y brillante científico R. Troncoso, quien me brindó su amistad en el sentido más amplio de la palabra, compartió sus conocimientos los cuales ayudaron a formalizar esta tesis y como

si fuera poco, me hospedó en su casa durante mis viajes a Valdivia.

También quiero agradecer la hospitalidad brindada en dos ocasiones por el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza y especialmente a los académicos M. Asorey, J. Cariñena, J. L. Cortes, y J. López (amigo y alumno del doctorado) los cuales de una u otra forma influyeron en esta tesis a través de sus comentarios y sesiones de trabajo. Si de instituciones se trata no puede quedar fuera de mis agradecimientos el Centro de Estudios Científicos (CECS) quien me acogió desde los inicios de esta tesis en Santiago hasta su término en la ciudad de Valdivia, brindándome un muy grato ambiente de trabajo, con las mejores condiciones científicas y humanas, a su personal administrativo que siempre ha tenido una excelente predisposición, entre ellos cabe mencionar, A.Navia, C. Pardo, U. Thimmermann, A. Thimmermann, P. Flores y H. Bravo.

A mi casa de estudios que me entregó la formación científica y valórica que marcará mi camino hacia el futuro. Especialmente al departamento de física de nuestra universidad, acá también he contando con personal administrativo muy diligente y dispuesto a ayudar en los eternos trámites de la universidad, entre ellos puedo nombrar la Sra. G. Bustamante (ex secretaria de pos-grado) quien nos ayudaba a agilizar las becas y finalmente nos enseñaba a esperar con paciencia la burocracia universitaria, la Sra. Alicia (bibliotecaria del departamento) -a pesar de nuestras diferencias-, quien siempre ha brindado una muy buena atención.

Esta tesis ha sido financiada parcialmente por la dirección general de graduados de la USACH, a través de diversas becas de arancel, ayuda económica, para asistencia a congresos, conferencias o estadas de investigación.

Financiamiento parcial por parte del Centro de Estudios Científicos a través de una Beca Doctoral del Proyecto ICM P-99-046-F, el centro de estudios es un Instituto Milenio.

Financiamiento parcial por parte de FONDECYT a través del proyecto para estudiantes de doctorado número 2000027 del año 2000.

## Resumen

En este trabajo de tesis se analizan sistemas que tienen la particularidad de tener una forma simpléctica que puede degenerarse en alguna región del espacio de fase del sistema. Demostramos que para un sistema con un número finito de grados de libertad, tipo mecánica clásica, esta degeneración ocurre en paredes de dominios que dividen el espacio de fase en un conjunto de regiones causalmente desconectadas. La caracterización de estas superficies viene dada por el signo de la densidad de flujo de Liouville sobre ellas, comportándose como fuentes o sumideros de órbitas. En este último caso, una vez que el sistema ha llegado a la pared de dominio, adquiere una nueva invarianza de gauge y un grado de libertad es dinámicamente congelado, mientras el resto de los grados de libertad evoluciona regularmente.



## Abstract

Dynamical systems whose symplectic structure degenerates, becoming noninvertible in some regions along the orbits are analyzed. It is shown that for systems with a finite number of degrees of freedom, like in classical mechanics, the degeneracy occurs on domain walls that divide phase space into nonoverlapping regions each one describing a nondegenerate system, causally disconnected from each other. These surfaces are characterized by the sign of the Liouville's flux density on them, behaving as sources or sinks of orbits. In this latter case, once the system reaches the domain wall, it acquires a new gauge invariance and one degree of freedom is dynamically frozen, while the remaining degrees of freedom evolve regularly thereafter.

## Contents

<b>Introducción</b>	1
<b>1. Capítulo I</b>	4
1.1. Formalismo Hamiltoniano	4
1.2. Geometría Simpléctica	5
<b>2. Capítulo II</b>	7
2.1. Introducción	7
2.1.1. Formalismo de 2° orden	9
2.2. Lagrangianos de primer orden y sus formas simplécticas	11
2.2.1. Sistema Hamiltoniano regular sin vínculos	13
2.2.2. Sistemas Hamiltoniano con vínculos	14
2.2.3. Sistemas dinámicos degenerados	14
<b>3. Capítulo III</b>	16
3.1. Caracterización de los sistemas dinámicos degenerados	16
3.1.1. Superficies de degeneración $\Sigma$	16
3.1.2. Teorema de Darboux	16
3.2. Caracterización del flujo de fase cerca de $\Sigma$	18
3.2.1. Teorema de Liouville	20
<b>4. Capítulo IV</b>	23
4.1. Evolución hacia $\Sigma^{(-)}$	23
4.2. Estructura de vínculos	23
<b>5. Capítulo V</b>	26
5.1. Un ejemplo simple de sistemas dinámico degenerado	26
5.2. Sistema dinámico degenerado acoplado con uno regular	28
5.2.1. Caso cuando el sistema regular es un oscilador armónico	30
<b>6. Capítulo VI</b>	33
Discusión y comentarios	33
6.1. Propiedades clásicas	33

6.2.	Algunas palabras acerca de la cuantización	33
6.2.1.	Partícula cargada en un campo magnético constante	34
6.2.2.	Efecto Hall y geometría no conmutativa	35
6.2.3.	Sistemas Dinámicos Degenerados Cuánticos	35
6.3.	Cuantización	36
6.3.1.	Corriente de Probabilidad	39
<b>7.</b>	<b>Capítulo VII</b>	41
7.1.	Conclusiones	41
<b>A.</b>	<b>Sistemas dinámicos autónomos</b>	42
a.	Clasificación de Poincaré	44
b.	Teorema de Liouville	52
<b>B.</b>	<b>Programa de Dirac</b>	54
<b>C.</b>	<b>Simpléctomorfismos</b>	58
<b>D.</b>	<b>Dinámica de Vórtices</b>	60
	<b>Referencias</b>	63

## Introducción

Numerosos sistemas dinámicos de interés físico poseen una forma simpléctica que depende de los campos, luego, estas formas simplécticas tienen la posibilidad de degenerarse, es decir para ciertas configuraciones de las variables dinámicas, la forma simpléctica deja de ser invertible. Sistemas físicos tan diversos como por ejemplo la interacción de vórtices en fluidos [1] y teorías de gravitación en dimensiones mayores que 4 y que contienen términos cuadráticos en la curvatura en el Lagrangiano, exhiben esta característica [2]. Modelos de esta naturaleza se originan en física de altas energías desde campos como la cosmología y el escenario de espacio-tiempos [3, 4], hasta teorías de cuerdas y la teoría-M [5, 6, 13].

El problema que aborda esta tesis es cómo describir la evolución de los sistemas cerca de una configuración degenerada y, si tal estado es alcanzado, cómo evoluciona de ahí en adelante. Las hipótesis estándar en los tratamientos de sistemas dinámicos excluyen la posibilidad de que la forma simpléctica tenga rango no constante a través del espacio de fase, incluso en mecánica clásica [14, 21].

Como una primera etapa para el entendimiento general del problema, analizamos sistemas dinámicos degenerados en mecánica clásica. En esta tesis mostramos que es posible dar una caracterización completa de la evolución de estos sistemas.

Un punto importante que es necesario enfatizar es que esta degeneración es independiente de la clasificación de Poincaré de las singularidades del flujo de fase. Una singularidad de Poincaré ocurre en los puntos críticos del Hamiltoniano, que son genéricamente aislados, mientras que la forma simpléctica degenera en superficies que son genéricamente paredes de dominio. Este tipo de superficies no se pueden entender como un conjunto denso de singularidades de Poincaré. En líneas generales, la degeneración en la forma simpléctica es la contraparte de las singularidades de Poincaré en las que, el gradiente del Hamiltoniano es nulo (en la forma canónica corresponde al lado derecho de las ecuaciones de Hamilton), mientras que las primeras pueden ser interpretadas como singularidades infinitas en el lado derecho de las ecuaciones de movimiento (para un detalle de la clasificación de Poincaré ver apéndice A).

El punto anterior puede ser explicado, con un ejemplo de sistema degenerado en dos

dimensiones, cuyo flujo de fase satisface

$$\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde  $H(x_1, x_2)$  es el Hamiltoniano del sistema y además se cumple que  $\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} \neq 0$ , claramente este flujo degenera en  $x_2 = 0$ . Una formulación equivalente en la región donde  $x_2 \neq 0$  es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

en este esquema la degeneración del flujo de fase en  $x_2 = 0$  corresponde a una singularidad infinita en el lado derecho de las ecuaciones (2) cuando  $x_2 \rightarrow 0$ . Cabe notar que el cambio de coordenadas requerido para obtener (2) a partir de (1) no es invertible en todo el espacio de fase.

Estas singularidades son de un tipo que no ha sido estudiado, tanto desde un punto de vista físico como matemático. Los siguientes capítulos consideran estos estudios.

En el capítulo I, se discute el formalismo simpléctico en mecánica clásica, se muestran las definiciones básicas y algunas propiedades interesantes en este contexto.

En el capítulo II, damos una descripción general de como aparece este problema en el contexto físico, examinamos qué ocurre en el formalismo de segundo orden y finalmente escribimos las ecuaciones del sistema que estudiaremos y definimos el problema de manera concreta.

En el capítulo III, se describe un sistema degenerado usando coordenadas tipo Darboux, y se muestra que las superficies donde ocurre la degeneración de la forma simpléctica, son paredes de dominio, que dividen el espacio de fase. Se obtiene una caracterización de estas singularidades respecto del flujo de fase, discutimos la violación del teorema de Liouville para estos sistemas y finalmente encontramos un criterio para dar esta caracterización.

En el capítulo IV, discutimos el comportamiento dinámico del sistema una vez que se ha alcanzado la superficie donde la forma simpléctica se degenera, estudiamos la estructura de vínculos de la teoría en todo el espacio de fase y demostramos que ocurre un fenómeno de congelamiento dinámico de grados de libertad.

El capítulo V, esta dedicado al estudio de ejemplos de estos sistemas. Se estudia también un modelo en cual este sistema degenerado se acopla con otro regular y analizamos la dinámica del sistema en todo el espacio de fase.

En el capítulo VI, se realiza una discusión de las características encontradas y una visión muy general de aplicaciones en otro contexto, que pueden ser eventuales problema abiertos.

Finalmente el capítulo VII, está dedicado a las conclusiones.

# 1. CAPÍTULO I

## 1.1. Formalismo Hamiltoniano

Una descripción de la mecánica clásica, es el formalismo Hamiltoniano, el ingrediente básico en este formalismo es el Hamiltoniano del sistema  $H = H(p, q)$  que es una función de los momenta y coordenadas generalizadas. En esta descripción la dinámica esta gobernada por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q^i},\end{aligned}\tag{3}$$

en casos sencillos, este sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden es equivalente al sistema de  $n$  ecuaciones de segundo orden provenientes de un Lagrangiano  $L = L(q^i, \dot{q}^i)$  en cual se reemplazan las velocidades por los momenta definidos por  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ .

La descripción dinámica de un sistema con  $n$  grados de libertad se realiza ahora en el espacio de  $2n$  dimensiones, en el que las coordenadas de un punto son  $n$  coordenadas generalizadas ( $q$ ) y  $n$  momenta canónicos ( $p$ ). La evolución del sistema viene descrita por curvas que llenan el espacio de fase.

Un sistema conservativo se define como aquel en que la energía es una cantidad conservada, esto es

$$\dot{H} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial t} = 0.\tag{4}$$

Una definición importante en este formalismo es el paréntesis de Poisson, el cual para dos magnitudes cualesquiera  $f$  y  $g$ , viene dado por

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}.\tag{5}$$

Este paréntesis satisface una serie de propiedades interesantes (ver [15]). Una de estas propiedades, es que la evolución temporal de una función cualquiera  $f(p, q)$  puede ser escrita de la siguiente forma

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}.\tag{6}$$

En particular, si  $f$  es una cantidad conservada que no depende explícitamente del tiempo, se cumple que su paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano del sistema es nulo.

Para nuestros intereses nos basta con estos elementos, una discusión mas exhaustiva del formalismo Hamiltoniano se puede encontrar en [14][15][16]. A fin de conducir la discusión en el lenguaje usado en esta tesis, necesitamos introducir de manera general la geometría simpléctica.

## 1.2. Geometría Simpléctica

Al escarbar en la superficie del formalismo Hamiltoniano, es posible notar la estructura geométrica del espacio de fase. En efecto, el espacio de fase de un sistema Hamiltoniano de  $n$  grados de libertad esta descrito por una variedad  $\Gamma$  de  $2n$  dimensiones dotada de una 2-forma cerrada no degenerada, la matriz simpléctica  $(\Omega_{ij})$ [16][22], El espacio de fase  $\Gamma$  es una variedad simpléctica. La forma simpléctica cumple una función análoga a la métrica  $(g_{\mu\nu})$  de la geometría Rimanniana, en el sentido que podemos usar  $\Omega_{ij}$  para “bajar” y “subir” indices en la variedad simpléctica. Así la noción de distancia descrita por la métrica  $g_{\mu\nu}$  ( $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ), en el contexto de la geometría simpléctica es cambiada por la noción de área ( $\Omega = \Omega_{ij}dx^i dx^j$ ).

Al dotar a esta variedad con una forma simpléctica, esta dotada también con un paréntesis de Poisson, esto es, para cualquier par de funciones  $f$  y  $g$  en  $M$ , su parétesis viene dado por

$$\{f, g\} = \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad (7)$$

donde  $\Omega^{ij}$  es la inversa de la forma simpléctica  $\Omega^{ik}\Omega_{kj} = \delta_j^i$ , y la variedad ahora es un variedad de Poisson.

Con este cuadro podemos estudiar desde un punto de vista geométrico las propiedades dinámicas de nuestro sistema. Para esto es necesario introducir un elemento extra, este es el Hamiltoniano del sistema, que en este lenguaje corresponde a estudiar un campo vectorial sobre la variedad. Las ecuaciones (3) que determinan la dinámica del sistema, pueden ser escritas, como

$$\dot{x}^i = \Omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (8)$$



donde al usar coordenadas canónicas  $(q, p)$ , la forma simpléctica tiene la forma canónica, dada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

La matriz  $I$  representa la identidad de  $n$  dimensiones (para un discusión completa de la geometrización de la mecánica clásica ver [16][21][22]).

Finalmente, podemos decir respecto de la forma simpléctica que no sólo gobierna la geometría del espacio de fase. De acuerdo con (8) también define la dinámica del sistema. En coordenadas no-canónicas, podríamos tener una forma simpléctica que dependa de las coordenadas y como veremos su influencia sobre la dinámica del sistema puede ser dramática. Los siguientes capítulos de esta tesis están dedicados a estudiar esta influencia.

## 2. CAPÍTULO II

### 2.1. Introducción

Existe una amplia gama de sistemas físicos cuya densidad Lagrangiana es una forma de Chern-Simons (CS). Algunos ejemplos se pueden encontrar en modelos de turbulencias en fluidos, y modelos efectivos en teoría cuántica de campos en  $2 + 1$  dimensiones. En particular son de interés las teorías de gravedad [7] y supergravedad [8] en tres dimensiones. En dimensiones impares superiores las teorías de (super)gravedad son ejemplos de sistemas de Chern-Simons [9–13].

Un sistema de CS en  $D = 2s + 1$  dimensiones está descrito por la acción:

$$S[A] = \int_{M_{2s+1}} \sum_{p=0}^s \alpha_p \text{Tr} [A^{2s-2p+1} (dA)^p] , \quad (10)$$

donde el campo  $A$  es la 1-forma de conexión que toma valores en el álgebra de Lie de un grupo  $G$ , y el producto cuña es asumido.

Por otra parte, el comportamiento dinámico de los sistemas de CS presenta un número de complicaciones que no se encuentran en teorías de gauge estándar, a saber:

- (i) El sistema se presenta de manera natural como uno de primer orden. De esta forma el lagrangiano ya está en la forma Hamiltoniana: los  $2s + 1$  campos  $A$  representan las coordenadas, sus momenta canónicos conjugados y el Hamiltoniano canónico. El sistema se presenta de manera natural como uno de primer orden. De esta forma la acción ya está en la forma Hamiltoniana: los  $2s + 1$  campos  $A$  representan las coordenadas, sus momenta canónicos conjugados y el Hamiltoniano canónico. Para ver explícitamente esto consideremos una teoría de CS abeliana en 5 dimensiones descrita por la acción

$$\begin{aligned} S_{CS}^5 &= \int F \wedge F \wedge A \\ &= \int F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} A_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma , \end{aligned} \quad (11)$$

que al ser separada en su parte espacial y temporal se ve de la siguiente forma

$$S_{CS}^5 = \int \int (l^i(A)\dot{A}_i + \beta(A))d^4xdt , \quad (12)$$

y la forma simpléctica para esta acción se lee

$$\Omega^{ij} = \frac{\delta l^j}{\delta A_i} - \frac{\delta l^i}{\delta A_j} , \quad (13)$$

donde los índices  $i, j = 1, \dots, 2s$ .

- (ii) El rango de la forma simpléctica ( $r(\Omega)$ ), no es maximal debido a que la teoría tiene vínculos de primera clase (los generadores de los difeomorfismos espaciales)[24].
- (iii) Las reparametrizaciones temporales no son independientes de la otras simetrías de gauge de la teoría[24].
- (iv) Para  $D \geq 3$  la forma simpléctica ( $\Omega$ ) es una función de los campos i.e.  $\Omega = \Omega(A)$ .

Este último punto es de particular importancia dado que de acuerdo al comportamiento dinámico de la forma simpléctica, un sistema CS puede describir diferentes sistemas físicos.

Los casos donde la forma simpléctica es invertible en todo el espacio de fase ( $\Gamma$ ) con rango maximal ( $r(\Omega) = M$ ), o bien es no invertible en todo  $\Gamma$ , pero tiene rango constante ( $r(\Omega) = M' < M$ , no maximal), han sido estudiados extensivamente en la literatura. En el primer caso –sistemas sin vínculos–, todos los grados de libertad de la acción son dinámicamente independientes y propagantes; estos corresponden a sistemas clásicos discutidos en libros estándar [14–16]. La segunda categoría –sistemas con vínculos–, llamaron la atención de la comunidad en la segunda mitad del siglo pasado, después de los primeros trabajos de Dirac. Este caso corresponde a sistemas donde algunas de las coordenadas en la acción son redundantes o describen grados de libertad de gauge, y por lo tanto, no rotulan estados físicos diferentes [17–20].

El hecho que en una teoría de CS  $\Omega$  dependa de los campos, nos da la posibilidad de iniciar la evolución de nuestro sistema con una configuración donde la forma simpléctica sea invertible ( $\Omega$  tiene rango máximo  $M$ ) y la evolución dinámica nos conduzca a una región en el espacio de fase donde  $r(\Omega) = \tilde{M} \leq M$  (i.e.  $\Omega$  es ahora una matriz degenerada). La degeneración de la forma simpléctica es concomitante con el hecho que la transformación

de Legendre  $(q, \dot{q}) \longrightarrow (q, p)$  es también no invertible. Este problema ha sido detectado, por ejemplo, en gravitación para  $D > 4$  [2].

En este caso la evolución de la geometría para una condición inicial genérica puede comenzar a ser impredecible. En este problema el paso de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana no está globalmente definido y por lo tanto, ambas formulaciones no son necesariamente equivalentes. El mapeo de Legendre está bien definido sólo en parches y una integral funcional Hamiltoniana bien comportada debiera poder definirse, para poder estudiar el comportamiento cuántico de estos sistemas [23]. Sin embargo, el límite clásico de estos sistemas cuánticos tiene una semejanza con el sistema clásico original y la pregunta que aun sobrevive es ¿Cuál es el significado de la acción clásica original?.

Finalmente en los casos donde  $r(\Omega)$  no es constante en el espacio de fase el orden de las ecuaciones de evolución es reducido en alguna subvariedad de  $\Gamma$ . A continuación estudiaremos como aparecen estas características en una formulación de segundo orden.

### 2.1.1. Formalismo de 2º orden

Es interesante notar que las características antes vistas de los sistemas de CS, también se pueden encontrar en los sistemas mecánicos clásicos de  $n$  grados de libertad, cuyas ecuaciones de Lagrange vienen dadas por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^i} = 0, \quad (14)$$

con  $i = 1, \dots, n$ , estas ecuaciones pueden ser escritas en la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^i} = 0. \quad (15)$$

Esta ecuación puede reescribirse como:

$$W_{ij} \ddot{q}^j = V_i, \quad (16)$$

donde

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \\ V_i &= -\frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (17)$$

Es posible ver que las ecuaciones (16) contienen tres casos diferentes, de acuerdo a la invertibilidad de la matriz hessiana ( $W_{ij}$ );

- (1) Matriz Hessiana invertible:  $\det(W_{ij}) \neq 0$  y rango constante (maximal,  $r(W_{ij}) = n$ ).

Las ecuaciones (16) describen un sistema regular; las aceleraciones están determinadas unívocamente en función de las velocidades y las posiciones a través de

$$\ddot{q}_i = W_{ij}^{-1} V^j \quad (18)$$

- (2) Matriz Hessiana no invertible:  $\det(W_{ij}) = 0$  y de rango constante (pero no maximal,  $r(W_{ij}) = n' < n$ ).

Las ecuaciones (16) describen un sistema singular, no podemos determinar unívocamente las aceleraciones en función de las velocidades y las posiciones. La solución de las ecuaciones de movimiento debe contener funciones arbitrarias del tiempo, estos sistemas son los conocidos sistemas con vínculos como las teorías de gauge o bien la teoría presenta incompatibilidades.

- (3) Matriz Hessiana no invertible y rango de  $W_{ij}$  variable a lo largo de la evolución dinámica del sistema

En este caso partiendo desde una configuración inicial donde  $\det(W_{ij}) \neq 0$  ( $r(W_{ij}) = n$ , maximal), sólo por los efectos dinámicos, el sistema podría llegar a una región donde  $\det(W_{ij}) = 0$  ( $r(W_{ij}) = n' < n$ , no maximal). En esta región, el orden de las ecuaciones de movimiento es reducido y la dinámica del sistema esta gobernada por ecuación de primer orden y segundo orden.

Este último caso es excluído de los tratamientos usuales de ecuaciones diferenciales y, desde un punto de vista físico, nunca ha sido estudiado.

Como se ha dicho en los párrafos anteriores, al estudiar gravitación de CS, irremediablemente aparece este tipo de situaciones y se espera que estos sistemas, que de ahora en adelante llamaremos “**Sistemas Dinámicos Degenerados**” [25], contengan información física no sólo en el caso de gravitación si no también en la descripción clásica de estos sistemas mecánicos.

Las siguientes secciones están abocadas a caracterizar estos sistemas.

## 2.2. Lagrangianos de primer orden y sus formas simplécticas

Para entender el problema que se origina debido a la degeneración de la forma simpléctica estudiaremos un caso sencillo. Consideremos un sistema de CS descrito por una acción de primer orden de la forma (10) en cero dimensiones espaciales ( $s = 0$ ) para la cual la invarianza bajo difeomorfismos es obviamente satisfecha. En este caso la acción es justamente la integral de una 1- forma en un espacio tiempo de  $(0 + 1)$  dimensiones *i.e* una línea mundo. En tal sistema el campo  $A$  no tiene término cinético y por lo tanto no hay grados de libertad que se propaguen. Aún así podemos obtener un interesante contenido dinámico en la acción si incrustamos la línea mundo en un espacio de  $(2n + 1)$  dimensiones con signatura  $(-, +, +, \dots, +)$ . Si  $z^\mu$  son las coordenadas de la inmersión y suponemos que  $A_\mu(z)$  son funciones prescritas de  $z^\mu$ , la acción para una trayectoria entre el estado  $z_1$  y  $z_2$  es,

$$S[z; 1, 2] = \int_1^2 A_\mu dz^\mu . \quad (19)$$

Esta teoría de CS en  $0 + 1$  dimensiones es, en realidad, un sistema mecánico ordinario en forma Hamiltoniana pero disfrazado: los campos  $A_\mu$  no son componentes dinámicas de una conexión sino un conjunto de funciones prescritas de las  $2n + 1$  coordenadas  $z$ . La acción puede ser escrita usando un parámetro afín  $\tau$  como

$$S[z; 1, 2] = \int_1^2 A_\mu \dot{z}^\mu d\tau . \quad (20)$$

Esta acción es invariante bajo reparametrizaciones del parámetro afín ( $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ ) y por su carácter intrínsecamente geométrico, también es insensible a las transformaciones generales de coordenadas (difeomorfismo),

$$z^\mu \rightarrow z'^\mu(z) . \quad (21)$$

Entre estos difeomorfismos los simplectomorfismos (ver apéndice C), es decir transformaciones canónicas, que dejan la 2- forma  $\Omega = dA$  invariante, son particularmente importantes.

Si identificamos el parámetro afín con la coordenada temporal de la inmersión, se tiene,  $z^0 = t$ ,  $z^i = z^i(t)$ , y la acción se transforma en

$$S[z; 1, 2] = \int_{t_1}^{t_2} [A_i \dot{z}^i - A_0] dt . \quad (22)$$

Luego, la evolución del sistema queda descrita por el flujo de las coordenadas  $z^i$  en un espacio de fase de  $2n$  dimensiones. La acción (22) puede escribirse en forma Hamiltoniana estándar en un entorno abierto de cualquier punto del espacio de fase, ya que las  $2n$  coordenadas  $z$  pueden ser consideradas como  $n$  pares canónicos conjugados  $(p, q)$ , lo que está garantizado por el teorema de Darboux [16]. Luego, debe existir un parche local de coordenadas donde podemos realizar la siguiente identificación

$$\begin{aligned} z^i &= q^i , \\ z^{i+n} &= p^i = A^i , \end{aligned} \tag{23}$$

con  $A_{i+n} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , y de aquí  $q^i$  y  $p_i$  representan las coordenadas y los momentos canónicos, respectivamente, y  $-A_0$  es el Hamiltoniano de la acción (22) [27]. Sin embargo para un espacio genérico realizar la identificación (23) a lo largo de toda la órbita es en la práctica, un problema tan difícil como el de integrar las ecuaciones de movimiento mismas [28].

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción (19) son

$$\Omega_{ij} \dot{z}^j - E_i = 0 , \tag{24}$$

donde hemos usado la definición estándar dada por

$$\begin{aligned} E_i &\equiv \partial_i A_0 - \partial_0 A_i , \\ \Omega_{ij} &\equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i . \end{aligned} \tag{25}$$

Si  $\Omega_{ij}$  es invertible estas ecuaciones describen un sistema dinámico autónomo

$$\dot{z}^i = \Omega^{ij} E_j , \tag{26}$$

donde  $\Omega^{ij} \Omega_{jk} = \delta_k^i$ .

En la identificación antes mencionada,  $\Omega_{ij}$  corresponde a la forma simpléctica y las ecuaciones (24) son las ecuaciones de Hamilton que son integrables en cualquier abierto donde  $\Omega^{ij} E_j$  sean funciones suficientemente bien comportadas.

Por otro lado, considerando la acción (22) en forma Lagrangiana, ésta describe un sistema con vínculos, los momenta  $p_i = \partial L / \partial \dot{z}^i$  son funciones de las coordenadas y por lo tanto, de acuerdo a la clasificación de Dirac,  $2n$  vínculos primarios provenientes de la definición de los momenta canónicos conjugados,

$$\phi_i(z, p) \equiv p_i - A_i(z, t) = 0 . \tag{27}$$

Siguiendo el procedimiento de Dirac, el Hamiltoniano canónico  $H_c = -A_0$  debe ser reemplazado por el Hamiltoniano extendido

$$H = H_c + \lambda_i \phi^i, \quad (28)$$

donde  $\lambda_i$  son multiplicadores de Lagrange; la condición de consistencia de los vínculos (27) demanda

$$\dot{\phi}_i = \Omega_{ij} \lambda^j + E_i = 0, \quad (29)$$

donde  $\Omega_{ij} = [\phi_i, \phi_j]$ .

Podemos observar que el requerimiento para resolver las condiciones de consistencia (29) para los multiplicadores de Lagrange es el mismo que necesitamos para integrar (24) esto es, invertibilidad de  $\Omega_{ij}$ .

A este punto es recomendable detenerse para estudiar qué significa este requisito. Podemos distinguir tres casos diferentes de acuerdo a la invertibilidad de  $\Omega_{ij}$  tal como en el formalismo de segundo orden.

### 2.2.1. Sistema Hamiltoniano regular sin vínculos

En este caso pedimos  $\det(\Omega_{ij}) \neq 0$ , lo que implica tener rango maximal para  $\Omega_{ij}$ ,  $r(\Omega_{ij}) = 2n$  en todo el espacio de fase  $\Gamma$ . Las ecuaciones (29) pueden ser resueltas para  $\lambda^i$ , y no entregan vínculos adicionales (secundarios, de acuerdo a Dirac). Los  $2n$  vínculos primarios  $\phi_i = 0$  reflejan el hecho que el sistema tiene un espacio de fase de  $2n$  dimensiones, contrariamente a las  $4n$  dimensiones sugeridas por la acción (19); bajo el cambio de las coordenadas  $z^i$  a las  $(p_i(z), q^i(z))$  la mitad de los  $z^i$  son las coordenadas y el resto son sus momenta canónicos conjugados. En el programa de Dirac, los  $\phi$  son de segunda clase, y el espacio físico se obtiene al imponer fuertemente que estos vínculos sean iguales a cero. Además, se debe reemplazar el paréntesis de Poisson por el paréntesis de Dirac. Entonces, las coordenadas  $z^i$  del espacio de fase tienen una estructura simpléctica no-canónica (paréntesis de Dirac) dada por

$$\{z^i, z^j\}^* = \Omega^{ij}. \quad (30)$$

Este es un camino poco usual para describir sistemas sin vínculos, pero es completamente equivalente a la estructura Hamiltoniana estándar[27] (una relación equivalente con



formulación Lagrangiana de segundo orden se discute en[29]).

### 2.2.2. *Sistemas Hamiltoniano con vínculos*

En este caso pedimos que  $\det(\Omega_{ij}) = 0$ , pero, rango de  $\Omega_{ij}$  es constante y no maximal, ( $r(\Omega_{ij}) = 2m < 2n$  a través de todo  $\Gamma$ ). Las ecuaciones (29) pueden resolverse para  $2m$  de los  $2n$  multiplicadores de Lagrange ( $\lambda^i$ ), dejando los restantes  $2(n - m)$  indeterminados. El requerimiento adicional de consistencia de los vínculos puede traer nuevos vínculos que también deben satisfacer la condición de consistencia –si el sistema es consistente–, este proceso terminará después de un número finito de iteraciones (ver apéndice B). Este caso fue analizado completamente por Dirac[17–20] y también discutido, en la formulación de primer orden que nosotros hemos adoptado en esta tesis en las referencias [27].

### 2.2.3. *Sistemas dinámicos degenerados*

Estos sistemas se caracterizan por que el determinante de  $\Omega_{ij}$  se anula en una subvariedad ( $\Sigma$ ) del espacio fase definida por el conjunto

$$\Sigma = \{z \in \Gamma / \det(\Omega_{ij}(z)) = 0\} . \quad (31)$$

En esta tesis nos concentraremos en el estudio de estos sistemas dinámicos degenerados, que han sido tradicionalmente dejados de lado en la literatura, bajo las siguientes suposiciones:

- Que las superficies  $\Sigma$  no son densas en el espacio de fase i.e.localmente en una vecindad abierta se encuentra solo una de estas superficies.
- Fuera de  $\Sigma$  la forma simpléctica  $\Omega_{ij}$  tiene rango constante  $2n$ , y la estructura dinámica corresponde a la un sistema dinámico regular. ( El caso cuando  $r(\Omega_{ij})$  no es maximal en el complemento de  $\Sigma$ , corresponde a una combinación de un sistema con vínculos y un sistema dinámico degenerado. El considerar esta complicación es directo, pero por simplicidad no lo analizaremos en esta tesis.)

Bajo estas premisas, nada impide que el sistema, partiendo desde una configuración genérica en la cual  $\det(\Omega_{ij}) \neq 0$ , se encuentre con un punto en  $\Sigma$  después de un tiempo finito. Teniendo este escenario en mente, caracterizaremos el comportamiento dinámico de estos sistemas, respondiendo las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de degeneración?,
- ¿Bajo qué condiciones las órbitas clásicas intersectan las singularidades?,
- ¿Es posible clasificar la forma en que la intersección puede ocurrir?,
- ¿Es posible definir un sistema sobre la la superficie de degeneración?,
- ¿Qué contenido dinámico tiene el sistema cuando la superficie de degeneración es alcanzada?,
- ¿Cuál es el comportamiento cuántico de tales sistemas?.

### 3. CAPÍTULO III

#### 3.1. Caracterización de los sistemas dinámicos degenerados

En este capítulo nos concentraremos en el estudio de las principales propiedades clásicas de estos sistemas y responderemos las interrogantes antes planteadas en el capítulo anterior.

##### 3.1.1. Superficies de degeneración $\Sigma$

Como es bien sabido, una matriz  $\Omega_{ij}(z)$  antisimétrica de  $2n \times 2n$  se puede llevar a una forma diagonal por bloques por una transformación ortogonal. Así, en un conjunto abierto, la 2-forma  $\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{ij}dz^i \wedge dz^j$  puede ser diagonalizada en bloques bajo una transformación local de coordenadas  $z^i \rightarrow x^i(z)$  de  $O(2n)$ ,

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & & & & & & & & & \\ \omega_1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 0 & -\omega_n & & & \\ & & & & & & \omega_n & 0 & & & \end{bmatrix}, \quad (32)$$

y por lo tanto,

$$\Omega = \sum_{r=1}^n \omega_r(z) dx^{2r-1} \wedge dx^{2r},$$

esto en principio está asegurado por el siguiente teorema.

##### 3.1.2. Teorema de Darboux

Este teorema permite caracterizar localmente variedades dotadas de una forma simpléctica no degenerada [16] [21],

- **Teorema:** Si  $\Omega$  es una forma simpléctica en una variedad diferenciable  $M$ , para cada punto  $x \in M$  hay una carta local de coordenadas en torno a  $x$  en el cual las coordenadas de  $\Omega$  son constantes.

- **Corolario:** Sea  $(M, \Omega)$  una variedad simpléctica (esto nos asegura que  $\Omega$  es invertible), de  $2n$  dimensiones. Entonces, alrededor de cada punto  $x \in M$  existe en una vecindad  $U$ , provista de un sistema de coordenadas  $\{p_a, q^b\}$  ( $a, b = 1, 2, \dots, n$ ), tal que

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i , \quad (33)$$

este resultado se usó en un capítulo anterior. Para una demostración ver [16].

Sin embargo, *en un conjunto abierto que contenga puntos de la superficie de degeneración, las coordenadas tipo Darboux  $x^i$  no pueden ser llevadas a la forma canónica (33) ya que al menos uno de los  $\omega_r$ 's en (32) es nulo sobre  $\Sigma$  (ya que  $\det(\Omega_{ij}) = \prod_1^n \omega_r^2$ )*. Por lo tanto, no se puede realizar un rescalamiento (finito) para normalizar las  $\omega_r$ 's a 1.

Una consecuencia directa de esto, es que el conjunto  $\Sigma$  es la unión de superficies  $\Sigma_r$  de  $(2n - 1)$  dimensiones con

$$\Sigma_r = \{z \in \Gamma / \omega_r(z) = 0\} , \quad (34)$$

esto es,

$$\Sigma = \cup_{r=1}^n \Sigma_r , \quad (35)$$

el número de superficies  $\Sigma_r$  depende del número de  $\omega_r$ 's que tomen valores nulos a través de  $\Sigma$ .

Por otra parte, si consideramos la identidad de Biachi ( $d\Omega = 0$ ), que en representación de coordenadas puede escribirse en la forma

$$\partial_i \Omega_{jk} + \partial_j \Omega_{ki} + \partial_k \Omega_{ij} = 0 , \quad (36)$$

y el hecho que podemos separar  $\Omega_{ij}$  al menos en bloques tal como en (32), permite demostrar que cada uno de los  $\omega_r(x)$  depende solo del par de coordenadas conjugadas  $(x^{2r-1}, x^{2r})$ . Esto significa que las superficies de degeneración son constantes en las otras coordenadas. Por otro lado, esto es una ventaja en la caracterización ya que el análisis de la degeneración de  $\Omega$  puede restringirse a la subvariedad  $(x^{2r-1}, x^{2r})$ . Nosotros asumiremos que las  $\omega_r$ 's son funciones suaves de Morse<sup>1</sup> en el correspondiente plano

---

<sup>1</sup> Una función de Morse es una función infinitamente diferenciable que tiene un número finito de puntos críticos aislados, distintos y no degenerados.

$(x^{2r-1} - x^{2r})$ , lo que asegura que ellas tienen ceros simples en puntos aislados; los casos donde  $\omega_r$  tiene ceros de orden superior puede pensarse como la fusión de ceros simples. Por lo tanto, las curvas de nivel  $\omega_r(x^{2r-1}, x^{2r}) = 0$  dividen el  $(x^{2r-1} - x^{2r})$ -plano en regiones que no se traslapan y podemos resumir este primer resultado en el siguiente lema

- **Lema 1:** El lugar geométrico de las superficies de degeneración  $\Sigma$  corresponde a una colección de paredes de dominio, que dividen el espacio de fase  $\Gamma$  en un número finito de regiones que no se intersectan.

### 3.2. Caracterización del flujo de fase cerca de $\Sigma$

Genéricamente, en la superficie  $\Sigma_r$ , el rango  $r(\Omega_{ij})$  se reduce en 2, y en los puntos donde  $k$  de estas superficies se intersectan,  $r$  se reduce en  $2k$ . En una vecindad lo suficientemente pequeña de la superficie  $\Sigma_r$ , el comportamiento dinámico del sistema es dominado por las variables dinámicas  $x^\alpha = (x^{2r-1} - x^{2r})$ , sus correspondientes ecuaciones de movimiento se pueden obtener de la ecuación (24) como

$$\epsilon_{\alpha\beta}\omega(x)\dot{x}^\beta = -E_\alpha, \quad (37)$$

donde sin pérdida de generalidad, hemos fijado  $r = 1$ , de modo que  $\alpha$  y  $\beta = 1, 2$  y  $\omega := \omega_1$ . Cerca de la superficie de degeneración  $\Sigma_r$ , el resto de las variables dinámicas  $z^a$ , ( $a = 3, \dots, 2n$ ), se comporta como coordenadas del espacio de fase de un sistema regular.

Aquí supondremos también que  $E_\alpha$ , tiene un valor finito y no es idénticamente cero en  $\Sigma_1$  (i.e., las posibles singularidades de Poincaré que podría tener el sistema se supone que están localizadas fuera de  $\Sigma$ ). Por lo tanto, las ecuaciones (37) implican que la velocidad se hace tangente al plano  $(x^1 - x^2)$ , debido a que el valor de  $|\dot{x}^\alpha|$  crece sin cota a medida que las órbitas se aproximan a  $\Sigma_1$ , mientras las otras componentes  $(\dot{z}^a)$  permanecen finitas.

Debido al hecho que  $\omega$  tiene un cero simple en  $\Sigma_1$ ,  $\dot{x}^\alpha$  cambia de signo al cruzar la superficie de degeneración. Como consecuencia, podemos ver que el flujo de fase evoluciona en direcciones opuestas a cada lado de  $\Sigma$ . Así, en una vecindad local de  $\Sigma$ , una de las siguientes tres situaciones puede ocurrir:

- (a) El flujo de las órbitas va hacia  $\Sigma$  y termina allí.

- (b) Las órbitas se originan en la superficie de degeneración y fluyen fuera de ésta.
- (c) Las órbitas corren paralelas a  $\Sigma$ , pero en direcciones opuestas a cada lado.

Por lo tanto, las superficies actúan como fuentes o sumideros de las órbitas en los casos (a) y (b) respectivamente, esto sugiere naturalmente una clasificación de la naturaleza local de  $\Sigma$  en  $\Sigma^{(-)}$ ,  $\Sigma^{(+)}$ , y  $\Sigma^{(0)}$  para los casos (a), (b) y (c), respectivamente (ver Fig. (1)).

En ninguno de los tres casos hay flujo que cruce las superficies de degeneración, y por lo tanto podemos escribir el siguiente lema,

- **Lema 2:** Las regiones a cada lado de  $\Sigma$  están causalmente desconectadas y son dinámicamente independientes una respecto de la otra.

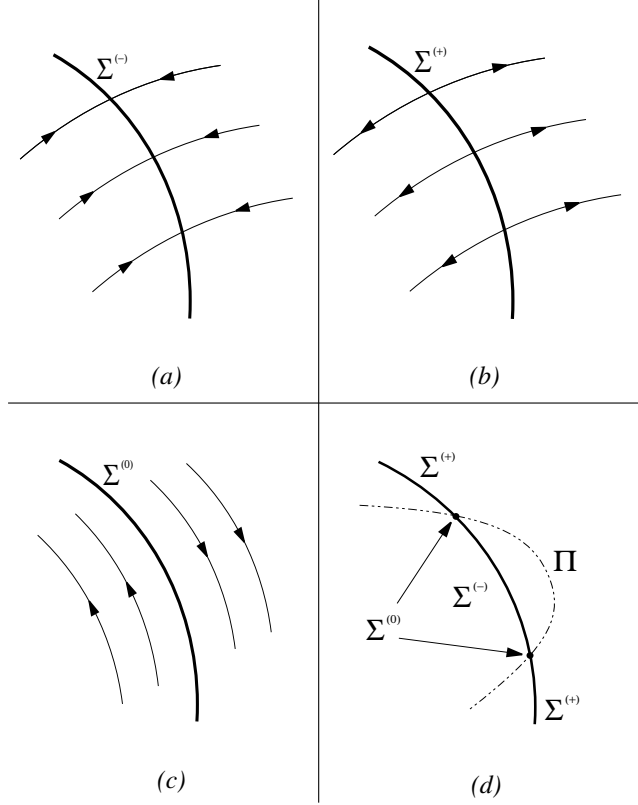


Figura 1: Figuras (a), (b) and (c) muestran el comportamiento local del flujo de las órbitas, en una vecindad en torno  $\Sigma^{(+)}$ ,  $\Sigma^{(-)}$  y  $\Sigma^{(0)}$ , respectivamente. La estructura global de las superficies de degeneración se muestra en la figura (d).

### 3.2.1. Teorema de Liouville

Una consecuencia inmediata del resultado anterior, es la violación del teorema de Liouville en las superficies de degeneración, curiosamente esta violación ocurre en un sistema que es Hamiltoniano y el cual además conserva la energía, esta última afirmación se demuestra directamente al multiplicar las ecuaciones de movimiento (24) por  $\dot{z}^i$

$$\Omega_{ij}\dot{z}^i\dot{z}^j = \partial_i A_0 \dot{z}^i = \frac{dH}{dt} = 0, \quad (38)$$

así recordando que  $A_0$  representa el Hamiltoniano del sistema el cual no depende explícitamente del tiempo, la ecuación anterior nos muestra la conservación de la energía.

La conservación del volumen  $\rho = \sqrt{\Omega}$  viene descrita por

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} , \quad (39)$$

si consideramos que no hay dependencia explícita del tiempo, solo el segundo termino contribuye y usando las ecuaciones de movimiento (24) se puede demostrar directamente que

$$\frac{d\rho}{dt} = \partial_i(\sqrt{\Omega}z^i) , \quad (40)$$

luego la validez del teorema de Liouville fuera de las superficies de degeneración esta relacionado directamente con la divergencia de las corrientes

$$j^i = \sqrt{\Omega}z^i . \quad (41)$$

Estas corrientes tienen divergencia nula fuera de  $\Sigma$ , la demostración de esto está basada en las ecuaciones de movimiento y en la siguiente identidad

$$\partial_i(\sqrt{\Omega}\Omega^{ij}E_j) = 0 , \quad (42)$$

con  $F^{ij}F_{jk} = \delta_k^i$ . Esta identidad se obtiene desarrollando el lado derecho en la forma

$$\partial_i(\sqrt{\Omega}\Omega^{ij})E_j + \sqrt{\Omega}\Omega^{ij}\partial_i(E_j) . \quad (43)$$

Claramente si consideramos un sistema Hamiltoniano ( $E_i = \partial_i A_0$ ) el segundo término de (43) es nulo por antisimetría y la identidad  $\partial_i(\sqrt{\Omega}\Omega^{ij}) = 0$  es consecuencia de la identidad de Bianchi, lo que demuestra la identidad (43).

Luego, el teorema de Liouville es válido fuera de  $\Sigma$ , donde el comportamiento dinámico de sistema es descrito por uno regular. Por otro lado,  $j^i$  tiene un límite finito cuando el sistema se aproxima a la superficie de degeneración, y las únicas componentes no nulas a cada lado de  $\Sigma$  son

$$j^\alpha = |\omega|x^\alpha = \text{sgn}(\omega)\epsilon^{\alpha\beta}E_\beta . \quad (44)$$

La divergencia de  $j^\alpha$  sobre la superficie de degeneración  $\Sigma$ , puede ser evaluada como el flujo de  $j^i$  que cruza una caja que encierre una porción de  $\Sigma$  (ver figura 2). El flujo  $\Phi = j^i n_i$  que cruza una de las tapas de la caja esta dada por una proyección  $j^i$  a lo largo de la normal a la superficie  $n_i = \partial_i \Omega^{1/2}$ . Dado que las únicas componentes no nulas del vector normal son  $n_\alpha = \partial_\alpha |\omega|$ , se tiene,

$$\Phi = -\Omega^{1/2}\Omega^{ij}E_j\partial_i\Omega^{1/2} = \partial_\alpha\omega\epsilon^{\alpha\beta}E_\beta . \quad (45)$$



Nótese que  $\Phi$  no solamente es finita en  $\Sigma$  si no que también es continua y podemos escribir el siguiente lema

- **Lema 3:** El carácter local de las superficies de degeneración esta dado por  $\Sigma^{(\eta)}$  con  $\eta = \text{sgn}(\Phi)$ . por lo tanto, en general,  $\Sigma$  es globalmente atractiva ( $\Sigma^{(-)}$ ) o repulsiva ( $\Sigma^{(+)}$ ) por regiones, y el tipo  $\Sigma^{(0)}$  ocurren en la intersección con las superficies  $\Pi = \{z \in \Gamma / \Phi(z) = 0\}$  (ver figura 1)

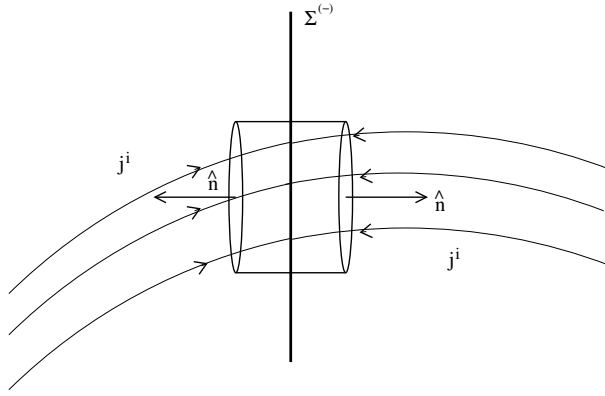


Figura 2: La figura muestra el flujo  $j^i$  que cruza una caja en torno a  $\Sigma^{(-)}$ .

De aquí vemos que la superficies,  $\Sigma^{(0)}$  corresponden genéricamente, a fronteras entre los tipos  $\Sigma^{(-)}$  y  $\Sigma^{(+)}$  (esto es,  $\Sigma^{(0)} = \partial\Sigma^{(-)}$ ) que es un conjunto de codimensión 2 en el espacio de fase. En el caso particular, cuando ambas superficies  $\Sigma$  y  $\Pi$  coinciden en un abierto,  $\Sigma$  es globalmente del tipo  $\Sigma^{(0)}$ . Esto ocurre, por ejemplo, si

$$E_i|_{\Sigma^{(0)}} = \partial_i(h(z^i)\Omega^{1/2}) , \quad (46)$$

cuyas únicas componentes no nulas son de la forma  $E_\alpha = \tilde{h}(z^a)\partial_\alpha\omega$  para funciones  $h$  y  $\tilde{h} \neq 0$  arbitrarias. Esta violación del teorema de Liouville, nos lleva a la conclusión que en la superficie de degeneración existe una fuente de órbitas, que correspondería a una carga sobre la superficie análogamente a lo que ocurre con el electromagnetismo, por otro lado si damos la posibilidad (excluida en este trabajo) de agregar cierta dinámica a la superficie singular como por ejemplo  $\omega = \omega(x, t)$ , es decir la superficie singular puede cambiar su ubicación, más un término de carácter cinético es de esperar que el teorema de Liouville se restablezca.

## 4. CAPÍTULO IV

### 4.1. Evolución hacia $\Sigma^{(-)}$

Las superficies de degeneración  $\Sigma^{(+)}$  y  $\Sigma^{(-)}$  representan un conjunto de estados iniciales y finales del sistema, respectivamente. Configuraciones en la superficie  $\Sigma^{(+)}$  son inestables frente a pequeñas perturbaciones, y se puede ver que es improbable preparar un sistema en ella. Por otro lado, si uno considera el sistema en  $\Sigma^{(-)}$ , una perturbación pequeña para moverlo fuera de la superficie requiere una aceleración infinita. En este sentido, las superficies  $\Sigma^{(-)}$  representa un estado final estable para la evolución del sistema, y cualquier configuración inicial suficientemente cerca de la superficie de degeneración esta condenada a caer en ella. Entonces, la pregunta si el sistema puede ser definido de forma consistente en  $\Sigma^{(-)}$ , aparece de manera natural.

Por un criterio de simplicidad, nosotros consideraremos un sistema que posee solo una superficie de degeneración que es globalmente del tipo  $\Sigma^{(-)}$ . Nosotros mostraremos que cuando el sistema llega a  $\Sigma^{(-)}$ , dos coordenadas comienzan a ser no dinámicas; el sistema adquiere una nueva simetría de gauge en la superficie de degeneración la cual corresponde a los desplazamientos a lo largo de  $\Sigma^{(-)}$ , y el sistema reduce sus grados de libertad en uno.

### 4.2. Estructura de vínculos

Siguiendo el procedimiento de Dirac para sistemas con vínculos [17, 20], vemos que la acción (22) posee  $2n$  vínculos primarios que vienen de la definición de los momenta canónicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i},$$
$$\phi_i(z, p) \equiv p_i - A_i(z, t) \approx 0, \quad (47)$$

cuyos paréntesis de Poisson son

$$\{\phi_i, \phi_j\} = \Omega_{ij}. \quad (48)$$

Fuera de  $\Sigma^{(-)}$ , la invertibilidad de  $\Omega_{ij}$  implica que los vínculos  $\phi_i$  son de segunda clase. Sin embargo, en la superficie de degeneración, el rango de  $\Omega_{ij}$  es reducido por dos, así, dos de los  $\phi$ 's tienen paréntesis de Poisson nulo.

Aunque la estructura de vínculos cambia abruptamente en  $\Sigma^{(-)}$ , después que el sistema

llega a esta superficie, su evolución dinámica puede ser descrita por un sistema con vínculos estándar, como se puede observar a través de un adecuado cambio de base para los vínculos  $\phi_i$ .

Este cambio de variables viene dado por la combinación lineal de la forma

$$\varphi_{(\alpha)} = e^i_{(\alpha)} \phi_i , \quad (49)$$

que puede ser de primera clase si  $e^i_{(\alpha)}$  son vectores nulos de  $\Omega$ , en efecto si miramos el álgebra que generan estos, sobre las superficies de los vínculos  $\phi_i$

$$\{\varphi_{(\alpha)}, \varphi_{(\beta)}\} = e^i_{(\alpha)} \Omega_{ij} e^j_{(\beta)} , \quad (50)$$

vemos que si  $e^i_{(\alpha)}$  es un vector nulo de  $\Omega_{ij}$  los vínculos son de primera clase.

Esto puede ocurrir solamente en la superficie de degeneración, donde tenemos dos de estos vectores nulos. Ellos se pueden escoger en todo el espacio de fase, tales que uno de ellos sea tangente y el otro normal a las superficies  $\Omega = \text{constante}$ , particularmente,

$$\begin{aligned} e^i_{(1)} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \partial_j \Omega , \\ e^i_{(2)} \Omega_{ij} &= \Omega_{ij} \delta^{ik} \partial_k \sqrt{\Omega} . \end{aligned} \quad (51)$$

En coordenadas tipo Darboux, las únicas coordenadas no nulas son

$$\begin{aligned} e^\alpha_{(1)} &= \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \omega , \\ e^\alpha_{(2)} &= \delta^{\alpha\beta} \partial_\beta \omega , \end{aligned} \quad (52)$$

con  $\alpha = 1, 2$ .

En esta base los vínculos  $\phi_i$  pueden ser descompuestos como

$$\phi_i = \{\varphi_{(\alpha)}; \phi_a\} , \quad (53)$$

con  $a = 3, \dots, 2n$ , el álgebra de vínculos es

$$\{\varphi_{(\alpha)}, \varphi_{(\beta)}\} \approx \frac{1}{4} \epsilon_{(\alpha)(\beta)} \Omega^{-\frac{1}{2}} (\partial_i \Omega)^2 = \omega \epsilon_{(\alpha)(\beta)} |\partial \omega|^2 ,$$

$$\begin{aligned}\{\varphi_{(\alpha)}, \phi_b\} &\approx e_{(\alpha)}^i \Omega_{ib} = 0, \\ \{\phi_a, \phi_b\} &= \Omega_{ab}.\end{aligned}\tag{54}$$

De esta álgebra es evidente que, en la superficie  $\Sigma^{(-)}$ , los vínculos  $\varphi_{(\alpha)}$  tienen paréntesis de Poisson nulo, y por lo tanto son candidatos a ser vínculos de primera clase.

Para examinar si los vínculos  $\varphi_{(\alpha)}$  son de primera o segunda clase en la superficie de degeneración ( $\omega = 0$ ), es necesario calcular sus paréntesis de Poisson con  $\omega$ . El único paréntesis no nulo, que involucra a  $\omega$  es

$$\{\omega, \varphi_{(2)}\} = e_{(2)}^\alpha \partial_\alpha \omega = |\partial_\alpha \omega|^2,\tag{55}$$

que no puede ser nulo en  $\Sigma^{(-)}$  porque, por hipótesis,  $\omega$  tienen un cero simple en  $\Sigma^{(-)}$ .

Esto nos permite concluir que de todo el conjunto  $\varphi_{(\alpha)}$ , sólo  $\varphi_{(1)}$  es de primera clase, mientras,  $(\omega, \varphi_{(2)})$  forman un par conjugado de vínculos de segunda clase.

La transformación de gauge generada por  $\varphi_{(\alpha)}$  corresponde a  $\delta z^a = 0$ , y

$$\delta x^\alpha = \{x^\alpha, \xi^{(\beta)} \varphi_{(\beta)}\} = \xi^{(\beta)} e_{(\beta)}^\alpha = \xi^\alpha.\tag{56}$$

Así, los vínculos  $\varphi_{(1)}$  y  $\varphi_{(2)}$  generan desplazamientos tangente y normales a  $\Sigma^{(-)}$ , respectivamente, como era de esperar de acuerdo a la discusión realizada arriba. Por consiguiente,  $\omega \approx 0$  puede ser visto como la condición de fijación de gauge asociada con el “generador de gauge”  $\varphi_{(2)}$ . Esto lo resumiremos en el siguiente lema

- Lema 4:** En la superficie de degeneración  $\Sigma^{(-)}$ , el sistema adquiere una nueva invarianza de gauge, puesto que el vínculo de segunda clase  $\varphi_{(1)}$  se transforma en primera clase, mientras que el número de vínculos de segunda clase  $(\omega, \varphi_{(2)}, \phi_a)$  sigue siendo el mismo ( $2n$ ) ya que quitamos uno pero agregamos el vínculo que define la superficie de degeneración  $\omega = 0$ . Dado que cada vínculo de primera clase elimina un grado de libertad, nosotros concluimos que un grado de libertad es dinámicamente congelado en la superficie de degeneración y el número de grados de libertad es ahora  $(n-1)$ .

Finalmente hemos realizado una caracterización completa de los sistemas dinámicos degenerados, respondiendo las preguntas realizadas al comienzo. Ilustraremos estos resultados en el siguiente capítulo que esta abocado a discutir algunos ejemplos de este tipo de sistemas.

## 5. CAPÍTULO V

### 5.1. Un ejemplo simple de sistemas dinámico degenerado

Como una aplicación de las discusiones previas consideremos el siguiente ejemplo de un sistema dinámico degenerado

$$L_D = A_\alpha \dot{x}^\alpha + A_0 , \quad (57)$$

donde

$$A_1 = 0 , \quad (58)$$

$$A_2 = x_1 x_2 ,$$

$$A_0 = -\nu x_1 ,$$

siendo  $\nu$  es una constante. La forma simpléctica

$$\Omega_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} x_2 , \quad (59)$$

degenera en la superficie  $x_2 = 0$  , que es del tipo  $\Sigma^{(\eta)}$ , con  $\eta = \text{sgn}(\nu)$ . Las órbitas corren perpendicular a  $\Sigma^{(\eta)}$  y se requiere un tiempo finito para conectar un punto de la superficie con un punto que no pertenezca a  $\Sigma$  (ver figura (3)).

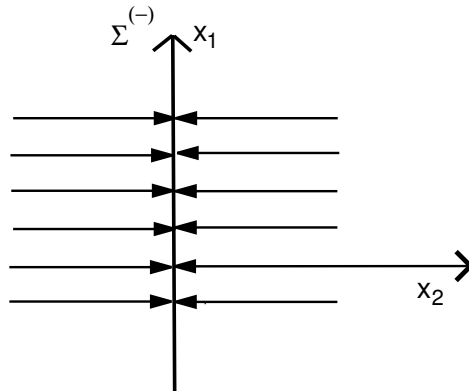


Figura 3: La figura muestra el retrato de fase para el sistema descrito por el Lagrangiano (57) y la definición de los campos dada en (58), con  $\nu < 0$ .

Este ejemplo captura la esencia del comportamiento de cualquier sistema degenerado en una vecindad de la superficie de degeneración del tipo  $\Sigma^{(+)}$  ó  $\Sigma^{(-)}$ .

En particular, un ejemplo de soluciones de ondas de choque de la ecuación de Burger,

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u, \quad (60)$$

que es relevante en el contexto de turbulencias, exhibe este comportamiento. Estas soluciones son de la forma

$$u(x, t) = -2\nu \sum_{k=1}^{2n} (x - z_k(t))^{-1}, \quad (61)$$

donde  $z_k(t)$  son coordenadas complejas que vienen como un par conjugado y satisface una ecuación tipo vórtices[31] (ver apéndice D). Las correspondientes ecuaciones de movimiento para los  $z_k(t)$  puede ser obtenida desde una acción de la forma (22), que para  $n = 1$  y  $z = x_1 + ix_2$  son

$$\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

cuyo Lagrangiano asociado es precisamente dado por (57). Estas soluciones describen ondas de choque unidimensionales centradas en  $x = x_1$ , con picos en  $x = x_1 \pm x_2(t)$  de altura  $\mp 2\nu/x_2(t)$ , viajando hacia afuera desde  $x_1$ , situación que se puede observar en la figura (4).

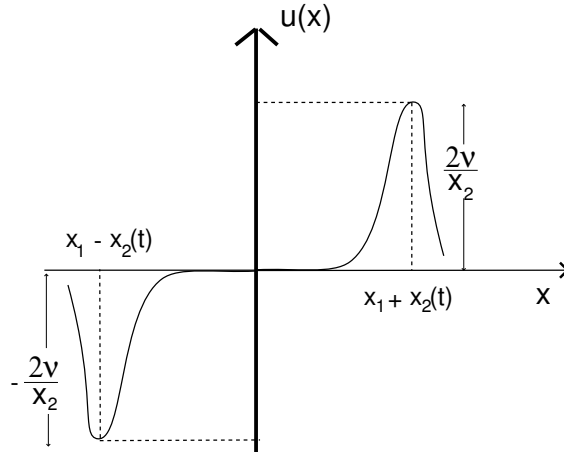


Figura 4: La figura muestra las soluciones de las ecuaciones (62), donde podemos ver dos ondas de choque viajando en direcciones opuestas, que corresponden a un par vórtice y antivórtice.

Por otro lado, solo al cambiar la elección de  $A_0$  en las ecuaciones (58) que definen los campos  $A$ , por

$$A_0 = -\nu x_2$$

las respectivas ecuaciones de movimiento

$$\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix},$$

nos muestran que el caracter de la superficie de degeneración ha cambiado y ahora se comporta como una superficie  $\Sigma^{(0)}$ , ver figura (5)

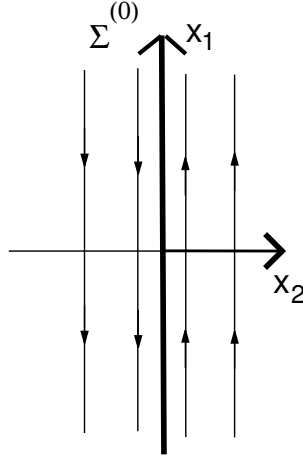


Figura 5: La figura muestra la superficie  $\Sigma^0$  que se obtiene a partir del ejemplo simple al cambiar  $A_0$ .

## 5.2. Sistema dinámico degenerado acoplado con uno regular

El siguiente ejemplo examina explícitamente el comportamiento de un sistema degenerado cuando la superficie  $\Sigma^{(-)}$  es alcanzada. Un Lagrangiano simple para el que ocurre esto es de la forma

$$L = L_D(x^\alpha) + L_R(z^a) - V_\lambda(x^\alpha, z^a). \quad (63)$$

Aquí,

$$L_D(x^\alpha) = A_\alpha \dot{x}^\alpha - H_D(x^\alpha), \quad (64)$$

con  $\alpha = 1, 2$ , es el Lagrangiano de algún sistema degenerado en dos dimensiones, que posee una superficie de degeneración globalmente del tipo  $\Sigma^{(-)}$  en  $\omega(x^\alpha) = 0$ ;  $L_R(z^a)$  es un sistema Hamiltoniano regular con Hamiltoniano  $H_R(z^a)$ , y  $V_\lambda(x^\alpha, z^a)$  es un término de acoplamiento de la forma

$$V_\lambda = \lambda\omega(x^\alpha)H_R(z^a) . \quad (65)$$

Este acoplamiento debe ser escogido tal que sea nulo en  $\Sigma^{(-)}$  y no cambie la densidad de flujo  $\Phi$ , además el caracter de la superficie de degeneración no debe depender de la constante de acoplamiento  $\lambda$ . Notemos que este acoplamiento debiera ser trivial en el caso de sistemas no degenerados. Adicionalmente, la presencia de  $H_R$  en el acoplamiento implica que, además de la conservación del Hamiltoniano total

$$H = H_D + H_R + V_\lambda , \quad (66)$$

las ecuaciones de movimiento de la parte regular

$$\dot{z}^a = (1 + \lambda f(x))\Omega^{ab}\partial_b H_R , \quad (67)$$

dan origen a una ley de conservación para  $H_R$ , en efecto

$$\dot{H}_R = \dot{z}^a \partial_a H_R = 0 . \quad (68)$$

A su vez , esto implica que las ecuaciones de movimiento restantes para el sistema degenerado

$$\epsilon_{\alpha\beta}\omega(x)\dot{x}^\beta = \partial_\alpha(H_D + \lambda\omega(x)H_R) , \quad (69)$$

pueden ser integradas como un sub-sistema autónomo en dos dimensiones.

Una vez que estas ecuaciones han sido resueltas, y sus soluciones se sustituyen en (67), es evidente que las soluciones de las ecuaciones (67) describen las mismas órbitas que en el caso desacoplado ( $\lambda = 0$ ) pero con un tiempo reparametrizado,

$$z^a(t) = z^a_{(\lambda=0)}(\tau) ,$$

con

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \lambda\omega(x(t)) .$$

Notese que como las órbitas se aproximen a la superficie  $\Sigma^{(-)}$ , esta reparametrización temporal permanece finita.



Una vez que el sistema llega a la superficie de degeneración ( $\omega(x) \rightarrow 0$ ), ambas coordenadas temporales comienzan a ser idénticas y, en  $\Sigma^{(-)}$ , todo vestigio del subsistema degenerado desaparece, incluyendo la información acerca de sus condiciones iniciales  $x^\alpha(t_0)$ .

Así desde el momento en que la superficie de degeneración es alcanzada, el sistema se convierte en uno regular, descrito por el Lagrangiano  $L_R(z^a)$ , y los grados de libertad del sistema degenerado han desaparecido para siempre.

### 5.2.1. Caso cuando el sistema regular es un oscilador armónico

Para ilustrar todo este punto en un ejemplo más específico, consideraremos el Lagrangiano degenerado dado por la ecuación (57) con  $\nu < 0$ , acoplado con un oscilador armónico unidimensional de acuerdo con la forma (65), así el correspondiente Lagrangiano viene dado por

$$L = x_1 x_2 \dot{x}_2 - \nu x_1 + z_1 \dot{z}_2 - \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) - \frac{1}{2}\lambda x_2(z_1^2 + z_2^2), \quad (70)$$

donde las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  describen la parte degenerada (que presenta una superficie  $\Sigma^{(-)}$  en  $x_2 = 0$ ) y las coordenadas  $z_1$  y  $z_2$  describen al oscilador. Las respectivas ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} x_2 \dot{x}_2 &= \nu, \\ x_2 \dot{x}_1 &= \frac{1}{2}\lambda(z_1^2 + z_2^2), \end{aligned} \quad (71)$$

para el sistema degenerado, y

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2(1 + \lambda x_2), \\ \dot{z}_2 &= -z_1(1 + \lambda x_2), \end{aligned} \quad (72)$$

para el oscilador.

De la ecuación (71) podemos observar que las órbitas del sistema degenerado han sido modificadas debido a la inclusión del término de acoplamiento, en las figuras (6) y (7), podemos ver cual es el efecto que tiene el acoplamiento en este caso.

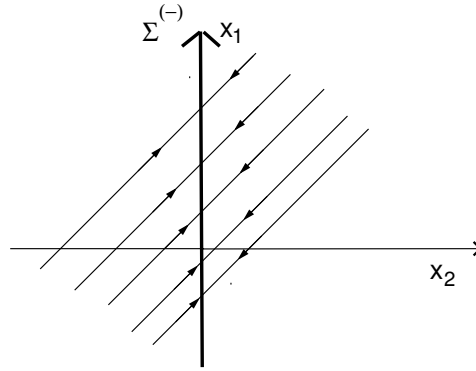


Figura 6: La figura muestra el retrato de fase del ejemplo simple, al comparar con la figura 3, claramente se observa el cambio en las órbitas debido al termino de acoplamiento, pero el caracter de la singularidad no cambia ( $x_2 = 0$ , sigue comportándose como una superficie  $\Sigma^{(-)}$  ).

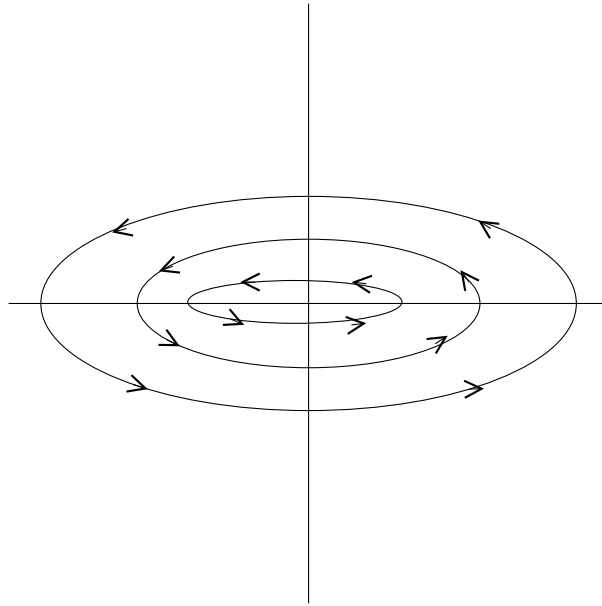


Figura 7: La figura muestra el retrato de fase para el oscilador armónico en el plano  $z_1 z_2$ , cabe notar que la forma de las órbitas no se ve alterada debido al acoplamiento. (independientemente de cual sea el sistema degenerado en consideración)

En este caso, la energía total es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R(1 + \lambda x_2) + \nu x_1 , \quad (73)$$

donde  $\mathcal{E}_R$  es la energía del oscilador armónico, que es conservada separadamente. La ecuación

(69) es integrada fácilmente como

$$x_2(t) = \pm \sqrt{2\nu t + (x_2(t_0))^2}, \quad (74)$$

para

$$t < \frac{(x_2(t_0))^2}{2\nu}, \quad (75)$$

y

$$x_2(t) = 0, \quad (76)$$

para

$$t > \frac{(x_2(t_0))^2}{2\nu}, \quad (77)$$

Por lo tanto, las coordenadas del oscilador armónico  $Z = z^1 + iz^2$  evolucionan de acuerdo a

$$Z(t) = Z_0 \exp(i\tau), \quad (78)$$

con  $|Z_0|^2 = 2\mathcal{E}_R$ , donde el tiempo reparametrizado esta dado por

$$\tau = t + \frac{\lambda}{3\nu} [2\nu t + (x_2(t_0))^2]^{3/2}, \quad (79)$$

para

$$t < \frac{(x_2(t_0))^2}{2\nu}, \quad (80)$$

y

$$\tau = t, \quad (81)$$

para

$$t > \frac{(x_2(t_0))^2}{2\nu}.$$

Los ejemplos mencionados anteriormente claramente encierran todas las propiedades de los sistemas degenerados discutidas en capítulos anteriores

## 6. CAPÍTULO VI

### Discusión y comentarios

#### 6.1. Propiedades clásicas

La degeneración de la forma simpléctica en un sistema dinámico Hamiltoniano abre la posibilidad de una violación del teorema de Liouville. En efecto, la divergencia de las corrientes de Liouville  $j^i = \sqrt{\Omega} \dot{z}^i$ , como se puede ver en la siguiente expresión

$$\partial_i j^i = -\partial_i [\sqrt{\Omega} \Omega^{ij}] \partial_j A_0 - \sqrt{\Omega} \Omega^{ij} \partial_i \partial_j A_0 . \quad (82)$$

Si  $A_0 = -H$  es una función continua y diferenciable, el segundo termino en el lado derecho de (82) es idénticamente cero. Sin embargo, el primer término da origen a una contribución no nula, responsable del salto del flujo al cruzar  $\Sigma$ . En este sentido, el problema tratado en esta tesis es la contraparte del estudio clásico de singularidades en el flujo de fase hecho por Poincaré. Ambos casos corresponden a diferentes clases de posibles singularidades en el flujo de fase, y por lo tanto, las superficies de degeneración no pueden ser entendidas como un conjunto denso de singularidades de Poincaré.

Es razonable esperar que la extensión de nuestro análisis a teoría de campos debiera abrir la posibilidad que la forma simpléctica degenerare para algunas configuraciones de campo donde algunos grados de libertad debieran ser congelados y las respectivas componentes del campo comienzan ser no dinámicas. En el caso de gravitación en altas dimensiones, esto significa que al llegar a la superficie de degeneración, algunas componentes de la métrica comienzan a ser redundantes, y nosotros conjeturamos que esto debiera corresponder a un nuevo **Mecanismo de Reducción Dimensional Dinámica**.

#### 6.2. Algunas palabras acerca de la cuantización

El estudio de las propiedades cuánticas de los sistemas dinámicos degenerados tiene especial interés por ejemplo en su aplicación al efecto Hall cuántico, especialmente en lo que concierne a la proyección en el nivel más bajo de Landau [32], como también una posible aplicación en la geometría no conmutativa. Por otro lado de acuerdo con los Lemas 1 y 2, aprendemos que las superficies de degeneración dividen el espacio de fase en regiones

desconectadas causalmente (hojas simplécticas), naturalmente surge la pregunta de si esta desconexión se mantendría a nivel cuántico o bien la mecánica cuántica es capaz de suavizar estas singularidades de la forma simpléctica a través de un efecto túnel entre cada lado del espacio de fase separados por una superficie de degeneración. En la siguiente sección trataremos de dar una luz en las respuestas a estas interrogantes; cabe notar que la versión cuántica de estos sistemas ha sido una tarea dura de realizar, por lo cual presentaremos resultados preliminares que en cierta medida muestran el estado de avance y al mismo tiempo la técnica utilizada para abordar estos problemas.

### 6.2.1. Partícula cargada en un campo magnético constante

El movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo magnético perpendicular al plano del movimiento es un viejo problema de la mecánica cuántica que se conoce con el nombre de problema de Landau [33]. Cabe notar que este problema tiene un variado espectro de aplicación como por ejemplo problemas de astrofísica, efecto Hall cuántico[34]. El Lagrangiano que describe este sistema viene dado por

$$L = \frac{1}{2}m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) , \quad (83)$$

donde  $e$  y  $c$  corresponden a la carga del electrón y la velocidad de la luz respectivamente. El Hamiltoniano asociado

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 , \quad (84)$$

además escogemos un potencial vector tal que el campo magnético sea constante

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(x_1\hat{e}_2 - x_2\hat{e}_1) , \quad (85)$$

el Hamiltoniano se escribe ahora como

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}mw^2(x_1^2 + x_2^2) - wL_3 , \quad (86)$$

donde  $w = \frac{eB_0}{2mc}$ , y  $L_3 = x_1p_2 - x_2p_1$  es el momentum angular en el plano  $x_1x_2$ . Tal que el sistema se ve como un oscilador armónico bidimensional con un potencial generalizado

adicional dado por  $-wL_3(x_1, x_2, p_1, p_2)$ , usando operadores de creación y aniquilación se pueden obtener los llamados niveles de Landau.

### 6.2.2. Efecto Hall y geometría no conmutativa

Si consideramos además un término de campo eléctrico en (83), obtenemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + V(r),$$

el límite de campo magnético fuerte o equivalentemente el límite de masa pequeña, proyecta al nivel de Landau más bajo, que es justo la conexión con el efecto Hall cuántico y también con la geometría no conmutativa[35, 37, 38]

En este límite y considerando el potencial vectorial como sigue

$$\mathbf{A} = B_0 x_1 \hat{e}_2, \tag{87}$$

el Lagrangiano viene dado por

$$L = \frac{eB_0}{c}x_1\dot{x}_2 - V(x_1, x_2), \tag{88}$$

usando el programa de Dirac obtenemos que el paréntesis de Dirac entre las coordenadas es distinto de cero, esto es

$$\{x^i, x^j\} = -\frac{eB_0}{c}\epsilon^{ij}. \tag{89}$$

Esta discusión nos muestra que en los límites anteriores, las coordenadas espaciales no conmutan (geometría no conmutativa). Para una discusión detallada ver [38][40]

### 6.2.3. Sistemas Dinámicos Degenerados Cuánticos

Claramente nos podemos dar cuenta que si nosotros consideramos la acción (22), la analogía entre nuestros sistemas y los discutido en la sección anterior es directa, la diferencia sustancial en que en nuestro caso el campo magnético no es constante, es de esperar una diferencia entre los resultados de ambos casos. Por ejemplo si consideramos el paréntesis (30)

$$\{z^i, z^j\}^* = F^{ij}$$

y lo comparamos con (89), nuestro caso corresponde a la situación donde la geometría es no conmutativa pero esta no conmutatividad es variable, si escogemos que la superficie de degeneración este ubicada en  $y_2 = 0$ , podemos ver esto con mayor precisión al considerar los límites  $y_2 \rightarrow \infty$  (lejos de  $\Sigma$ ), en este caso la no conmutatividad desaparece, el otro límite que podemos considerar es  $z \rightarrow 0$ , aquí los efectos no-conmutativos se hacen cada vez más intensos y el sistema se vuelve cada vez más no conmutativo.

### 6.3. Cuantización

En esta sección se describirán algunos ingredientes de como realizar el programa de cuantización canónica para este tipo de sistemas y se mostrarán algunos ejemplos de aplicación.

El ingrediente básico para realizar la cuantización canónica es el dar una prescripción de operadores que nos permita preservar el paréntesis de Poisson a nivel cuántico y pasarlo al estatus de operador

$$\{q, p\} = 1 \rightarrow [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (90)$$

una vez que tenemos esa prescripción, otra cantidad importante es la hermiticidad de los operadores en especial del Hamiltoniano, para poder definir los observables de la teoría.[41][42]

Miraremos estos ingredientes con un ejemplo sencillo. Consideraremos un sistema dinámico degenerado descrito por:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= x\epsilon_{ij} , \\ H &= \nu y = -A_0 , \\ L &= -xy\dot{x} - \nu y . \end{aligned} \quad (91)$$

La prescripción de operadores es la siguiente

$$\begin{aligned}\hat{x} &:= x, \\ \hat{y} &:= -\frac{i}{x}\partial_x,\end{aligned}\tag{92}$$

con el operador  $\hat{y}$  actuando sobre funciones de onda de cuadrado integrable entre  $(-\infty, \infty)$ , ésta prescripción se ha escogido tal que

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \frac{i}{x},$$

para ver la hermiticidad tenemos que definir un producto interno entre funciones, el producto que podemos considerar, casi de manera natural es

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int dx \sqrt{\Omega} \psi^* \phi,\tag{93}$$

este producto cumple con las propiedades requeridas, por la definición de producto interno. En el ejemplo que estamos considerando

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-a}^a dx |x| \psi^* \phi,\tag{94}$$

donde se ha asumido que el sistema yace en una caja de lado  $2a$ , tal que la función de onda es normalizable en este intervalo esto implica que el operador  $\hat{y}$  actúa sobre funciones  $L^2(-a, a)$ .

Luego de la condición de simetría del Hamiltoniano, que nos basta para asegurarnos que nuestro sistema tenga un espectro real

$$\langle \psi | H | \phi \rangle = \langle \psi | H^\dagger | \phi \rangle.\tag{95}$$

De aquí se puede observar que este requisito de simetría del Hamiltoniano, nos obliga a imponer condiciones de frontera sobre la función de onda, las que en nuestro caso vienen dadas por

$$\psi^*(a)\phi(a) + \psi^*(-a)\phi(-a) - 2\psi^*(0)\phi(0) = 0.\tag{96}$$

Podemos notar que la condición (96), no es del carácter que usualmente encontramos en una teoría cuántica estándar, involucra tres puntos y es de una naturaleza más débil ya que restringe el módulo de las funciones.



Por otro lado la ecuación de Schroedinger dada por

$$H\psi = i\partial_t\psi ,$$

se puede escribir en su forma estacionaria

$$H\psi = E\psi , \tag{97}$$

que en nuestro ejemplo se puede encontrar su solución

$$\psi_n = \frac{1}{2a^2} \exp(i\frac{E_n}{2\nu}x^2) , \tag{98}$$

que esta normalizada de acuerdo a (94). Satisfaciendo

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle := \delta_{nm} .$$

De acuerdo a la condición de hermiticidad (96), podemos obtener los niveles de energías del sistema, que corresponde a un espectro discreto dado por

$$E_n = \frac{4\pi\nu}{a^2}n + E_0 , \tag{99}$$

con  $n \in Z$ , y  $E_0$  una constante arbitraria ya que la hermiticidad nos determina la diferencia entre niveles de energía, quedando como resultado final esta constante arbitraria. Creemos que esta constante está relacionada con las llamadas extensiones autoadjuntas del Hamiltoniano. A este punto notemos que nuestro sistema definido por (57) y (58) posee una simetría clásica discreta  $x \rightarrow -x$ , la cual esta presente en la función de onda (98). Por otro lado la presencia de esta simetría clásica nos obliga a dar más especificaciones acerca de la clase de funciones de onda, sobre las cuales actúa la realización (92). Es tentador de acuerdo con (58) el usar la variable  $\rho = x^2 \geq 0$  en lugar de  $x$  para remover estos problemas, en este caso el operador  $\hat{y}$  tiene la misma interpretación que el operador momentum conjugado a la variable que vive en la semilínea, y el problema de la cuantización se reduce a un conocido esquema de cuantización, en este esquema el sistema debiera entenderse en correspondencia con un sistema en una variedad con bordes . Pero esta correspondencia se pierde si uno considera otra definición de  $A_0$  en (58), por ejemplo

$$A_0 = -\nu y + V(x) ,$$

donde la simetría ya no esta presente y además el usar la variable  $\rho$  puede contener perdida de información, por otro lado el considerar  $x = 0$  como un borde no es correcto ya que toda la información acerca de la singularidad y uno de los sistemas a un lado de está seria perdida por la imposición de esta regla de superselección.

### 6.3.1. Corriente de Probabilidad

El mirar las corrientes de probabilidad en un esquema cuántico es de vital importancia, ya que nos da una luz de los resultados que uno debiera esperar al realizar una medición del valor esperado de algún operador hermitico. En nuestro caso la densidad de probabilidad está dada por

$$\rho(x) := |x||\psi|^2, \quad (100)$$

que esta normalizada a 1, esto es  $\int \rho dx = 1$ .

Un punto notable es que de acuerdo a la ecuación de Schroedinger, la densidad  $\rho$  satisface una ecuación de continuidad con un sumidero, esto es

$$\partial_t \rho + \partial_x J = f, \quad (101)$$

donde la corriente de probabilidad  $J$  y la intensidad del sumidero, estan dadas por

$$J = -v \operatorname{sgn}(x) |\psi|^2, \quad (102)$$

$$f = -2v \delta(x) |\psi|^2. \quad (103)$$

Como es bien sabido la conservación de la probabilidad esta asociada con la hermiticidad del operador Hamiltoniano, en nuestro caso debiéramos esperar que nuestro Hamiltoniano no fuera hermitico ya que tiene un sumidero de la probabilidad, es decir el operador Hamiltoniano tiene un autovalor complejo y por tanto el sistema presenta absorción. Contrariamente nuestro Hamiltoniano es hermitico, y la corriente de probabilidad tiene un sumidero, es de esperar que si el procedimiento descrito an las línea anteriores es correcto, que este resultado tenga una posible aplicación en fenómenos que involucren absorción.

Algunos puntos a destacar, que se pueden considerar como problemas abiertos en esta descripción:

- (i) Es fácil ver que  $\rho(0) = 0$ , sin embargo  $\langle \psi(x_0, t = 0) | \psi(x = 0, T) \rangle \neq 0$ . Esto significa que existe una probabilidad no nula para que un estado inicial genérico, fuera de  $\Sigma^{(-)}$  pueda propagarse hasta la superficie de degeneración.
- (ii) Para  $E_0 = 0$ , la función de onda  $\psi_{-n}$  es equivalente a  $\psi_n$  bajo inversión temporal ( $t \rightarrow -t$ ) y ( $\nu \rightarrow -\nu$ ). Esta simetría discreta del espectro podría interpretarse como si en el sistema existieran dos tipos de excitaciones, las que tienen energía positiva (excitaciones) y las que tienen energía negativa (antiexcitaciones).
- (iv) Por otro lado,  $\psi_{-n}$  es equivalente a  $\psi_n$  bajo la conjugación ( $\psi_{-n}^* = \psi_n$ ), que es análogo a la “conjugación de carga”. Esto último se podría interpretar como una explicación de la existencia de excitaciones y antiexcitaciones que hay en el sistema, tal como en el caso de la ecuación de Dirac.
- (v) Un punto interesante, sería poder evaluar,  $\langle \psi(x_0, t = 0) | \psi(-x_0, T) \rangle$ , y así poder responder la pregunta acerca de si realmente los sistemas que viven a cada lado de la superficie  $\Sigma$ , siguen estando desconectados cuánticamente.
- (vi) La inclusión de un potencial de la forma  $V(x)$  es directa, como también el considerar ceros de orden superior.

Finalmente un problema que es de interés físico mayor es uno descrito por el siguiente Lagrangiano

$$L = -\tanh(x)y\dot{x} - \frac{\nu}{2}y^2, \quad (104)$$

éste tiene la particularidad que lejos de la superficie de degeneración se comporta como una partícula libre, ya que su operador Hamiltoniano ahora es de segundo orden, lo que nos permitiría sortear los obstáculos antes encontrados de una manera mas efectiva al mismo tiempo un mayor poder de aplicación en situaciones físicas de interés real. Actualmente este un problema que esta en desarrollo, como así el tratamiento cuántico de estos sistemas.[43]

## 7. CAPÍTULO VII

### 7.1. Conclusiones

Principalmente las conclusiones de este trabajo se basan, en la descripción clásica de los sistemas dinámicos degenerados [25], donde hemos logrado caracterizar completamente la evolución dinámica de estos sistemas, dichas conclusiones la resumiremos de la siguiente forma:

- Las superficies de degeneración corresponden a paredes de dominio que dividen el espacio de fase en regiones desconectadas causalmente una de las otras.
- Clasificación del carácter de las singularidades respecto del flujo de las órbitas. Esta clasificación nos muestra que existen tres tipos de superficies degeneradas, donde las órbitas terminan, donde empiezan y donde corren paralelamente,  $\Sigma^{(-)}$ ,  $\Sigma^{(+)}$  y  $\Sigma^{(0)}$  respectivamente.
- Podemos definir un sistema en la singularidad, quedando un sistema completamente regular.
- El estudio de la estructura de vínculos del sistema, nos muestra que este sistema esta dotado de un mecanismo de reducción dinámica de grados de libertad, resultado que es de interés, bajo una adecuada generalización a gravitación de CS, en dimensiones superiores.

**Apéndice A: SISTEMAS DINÁMICOS AUTÓNOMOS**

Como fue mencionado en el capítulo II un sistema dinámico autónomo está descrito por una ecuación de primer orden en que no aparece explícitamente el tiempo; este tipo de sistemas son de interés en física debido a su variado campo de aplicación, desde la mecánica a la cosmología, pasando por la física no lineal, caos ...etc [16] [30]. Además las ecuaciones diferenciales no lineales, que en muchos casos no pueden ser resueltas explícitamente, admiten un cambio de variables mediante el cual pueden ser vistas como un sistema dinámico autónomo, del cual se puede obtener una gran cantidad de información cualitativa y estudiar por ejemplo, límites asintóticos para  $t \rightarrow \infty$ .

En esta discusión daremos una visión general de estos sistemas concentrándonos en aquellos que provienen de un Hamiltoniano, es decir son sistemas dinámicos Hamiltonianos.

Sin pérdida de generalidad, consideremos un sistema dinámico autónomo definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) , \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) , \end{aligned} \tag{A1}$$

donde  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son funciones continuamente diferenciables definidas en una región del plano  $xy$ .

Es interesante notar que estas ecuaciones también se pueden ver como un límite de las ecuaciones discutidas en el capítulo II cuando la matriz  $\Omega_{ij}$  es una matriz constante y

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{\partial A_0}{\partial y} , \\ Q(x, y) &= -\frac{\partial A_0}{\partial x} , \end{aligned} \tag{A2}$$

con esta identificación las ecuaciones (24) se transforman en (A1).

Como es bien sabido en el estudio de las ecuaciones diferenciales, para cualquier condición inicial  $(x_0, y_0)$  en algún valor  $t_0$  ( $t$  es un parámetro de evolución y no necesariamente representa el tiempo) existe una única solución  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  de (A1) tal que cumpla con la

condición inicial dada. El plano  $xy$  corresponde al espacio de fase y la solución  $y = y(x)$  se conoce como órbita o retrato de fase, y pueden entenderse como un flujo de partículas en el plano  $xy$  con velocidad en el punto  $(x, y)$  dada por:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y = P(x, y)\hat{e}_x + Q(x, y)\hat{e}_y , \quad (\text{A3})$$

donde  $\hat{e}_x$  y  $\hat{e}_y$  representan vectores unitarios a lo largo de las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. Conociendo el valor de esta velocidad en un punto  $(x, y)$  podemos determinar completamente la evolución dinámica del sistema dada una condición inicial, siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones

- No exista cruce de órbitas en el espacio de fase,
- La velocidad no toma un valor nulo a lo largo de la evolución.

Un valor nulo de esta velocidad corresponde a un punto crítico del sistema autónomo y en el caso Hamiltoniano a una singularidad del flujo Hamiltoniano, estas singularidades fueron completamente estudiadas por Poincaré en el siglo XIX y se le conoce como la clasificación de Poincaré (de ahora en adelante la discusión se concentrará en sistemas Hamiltonianos), y consiste en el estudio de los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} P(x', y') &= \left. \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \right|_{(q', p')} = 0 , \\ Q(x', y') &= \left. -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \right|_{(q', p')} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Para estudiar este sistema, consideremos una vecindad en torno al punto singular, esto es,

$$(q', p') \rightarrow (q' + u, p' + v) , \quad (\text{A5})$$

tal que  $u$  y  $v$  sean perturbaciones pequeñas. Las ecuaciones (A1) determinan la dinámica de  $u$  y  $v$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial H(q' + u, p' + v)}{\partial p} , \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H(q' + u, p' + v)}{\partial q} , \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

y como hemos asumido que  $\frac{\partial H(q,p)}{\partial p}$  y  $\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}$  son funciones diferenciables y continuas, sus desarrollos de Taylor en torno al punto crítico estan dados por

$$\frac{\partial H(q' + u, p' + v)}{\partial p} = \left. \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \right|_{(q', p')} + u \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial q} \right|_{(q', p')} + v \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial p} \right|_{(q', p')} + \vartheta(u^2, v^2), \quad (\text{A7})$$

$$\frac{\partial H(q' + u, p' + v)}{\partial q} = \left. \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \right|_{(q', p')} + u \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial q} \right|_{(q', p')} + v \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial p} \right|_{(q', p')} + \vartheta(u^2, v^2),$$

entonces el sistema se lee

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial q} \right|_{(q', p')} + v \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial p} \right|_{(q', p')}, \\ \frac{dv}{dt} &= -u \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial q} \right|_{(q', p')} - v \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial p} \right|_{(q', p')}. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Finalmente podemos escribir (A9) en forma matricial definiendo el Hessiano del sistema como la matriz formada por las segundas derivadas del Hamiltoniano evaluadas en el punto crítico del sistema que se esta estudiando, con el requisito de que esta matriz sea invertible

$$M = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial q} \right|_{(q', p')} & \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial p \partial p} \right|_{(q', p')} \\ - \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial q} \right|_{(q', p')} & - \left. \frac{\partial^2 H(q, p)}{\partial q \partial p} \right|_{(q', p')} \end{pmatrix}. \quad (\text{A10})$$

Finalmente el problema se reduce a un sistema dinámico autónomo linealizado en torno a la singularidad. Este estudio nos permite entender como es el comportamiento dinámico del sistema en la vecindad de un punto crítico, dicho comportamiento viene determinado por los autovalores de la matriz Hessiana ( $M$ ) y corresponde a la clasificación de Poincaré, que geoméricamente corresponde a la clasificación de los puntos críticos de un campo vectorial. Es fácil ver que dichos puntos críticos son aislados, es decir siempre existe una vecindad en torno a un punto crítico, que no contiene otros puntos críticos, esto es consecuencia directa de haber pedido que el Hessiano tenga inversa.

#### a. Clasificación de Poincaré

Tal como se dijo antes esta clasificación depende de la naturaleza de los autovalores del Hessiano evaluado en el punto crítico, estos puntos también pueden ser vistos como puntos

de equilibrio del sistema y de aquí vemos que tienen una enorme cantidad de información física.

Así, de acuerdo a la naturaleza de estos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  encontramos la siguiente clasificación[16]

(1) Autovalores Reales:

<b>Caso</b>	<b>Tipo</b>	<b>Estabilidad</b>	
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nodo	asintóticamente estable	
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	nodo	inestable	(A11)
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	punto silla	inestable	
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	nodo	asintóticamente estable	
$0 < \lambda_1 = \lambda_2$	nodo	inestable	

(2) Autovalores Complejos:  $\lambda = a + ib$ ,  $\lambda^* = a - ib$

<b>Caso</b>	<b>Tipo</b>	<b>Estabilidad</b>	
$a = Re(\lambda) < 0$	espiral	asintóticamente estable	(A12)
$a = Re(\lambda) > 0$	espiral	Inestable	
$a = Re(\lambda) = 0$	centro	estable	

ver figuras (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16).

Una propiedad notable de los puntos críticos de un campo vectorial sobre una variedad simpléctica de dos dimensiones es su conexión con una cantidad con la cual uno no esperaría que este relacionada, esta es la llamada característica de Euler ( $\chi = V - E + F$ : ( $N^\circ$  de vértices) - ( $N^\circ$  de aristas) + ( $N^\circ$  de caras)) que es de naturaleza intrínsecamente topológica, para una variedad. Para ver esta conexión recordemos que los puntos críticos de un campo vectorial a una variedad, están relacionados con la capacidad de distribuir el campo vectorial sobre la variedad (peinar), por ejemplo si la variedad es una esfera ( $S^2$ ), es bien sabido que no se puede peinar debido a la existencia de puntos críticos en el campo vectorial sobre la esfera. En este sentido la característica de Euler dice en que forma puede ser puesto un campo vectorial sobre la variedad, así es necesario asignar un índice cada tipo de puntos críticos del campo vectorial. La relación viene dada por el Teorema de Poincaré-Hopf, que se puede



enunciar de la siguiente manera. Sea  $M$  una variedad compacta de  $2n$  dimensiones, conexa, y orientable. Si  $V$  es un campo vectorial tangente a ella, que tiene puntos críticos aislados la suma de los índices de los puntos críticos es igual a  $\chi(M)$ . Para entender la definición de este índice, primero dibujamos un circunferencia en torno al punto crítico, algunos de los vectores yacen sobre la circunferencia (ver figura 7), as el índice se define como el número de vueltas completas hechas por estos vectores al realizar un recorrido antihorario en la circunferencia, este número puede tener un signo positivo (+), si el vector gira en sentido antihorario, o un signo negativo (-) si el vector gira en sentido horario.

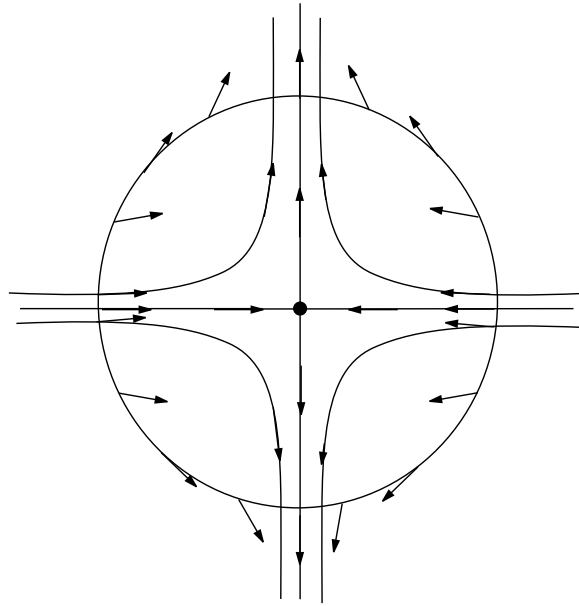


Figura 8: La figura muestra la circunferencia en torno al punto crítico (punto silla) donde se puede ver la vuelta completa de los vectores que yacen sobre ella, obteniéndose de acuerdo a la definición un índice de -1

Cabe notar que también se puede calcular la característica de Euler, en términos de los autovalores del Hessiano, a través de la siguiente expresión

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k c_k \sum_u (-1)^{idx(u)} , \tag{A13}$$

donde  $c_k$  es el número de puntos críticos con índice  $k$ , y  $idx(u)$  es el número de autovalores negativos del Hessiano en torno a un punto crítico  $u$ .

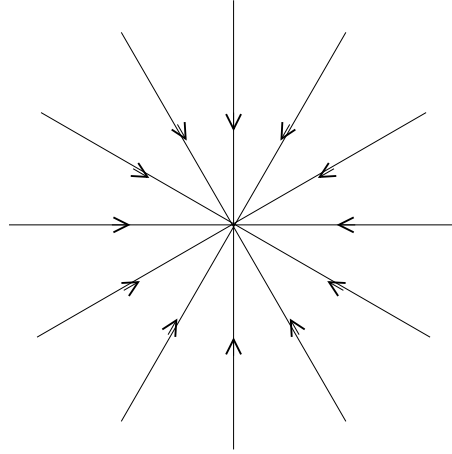


Figura 9: La figura muestra un nodo asintóticamente estable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores reales con  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , con índice  $+1$ .

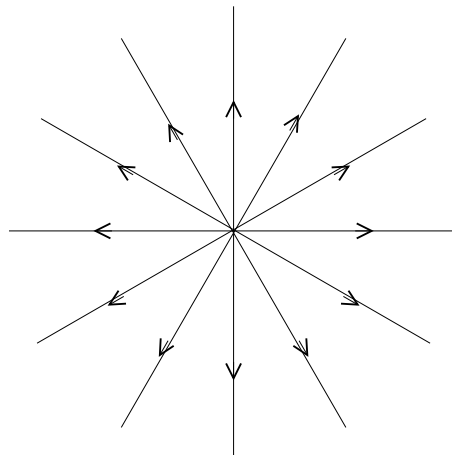


Figura 10: La figura muestra un nodo inestable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores reales con  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , con índice  $+1$ .

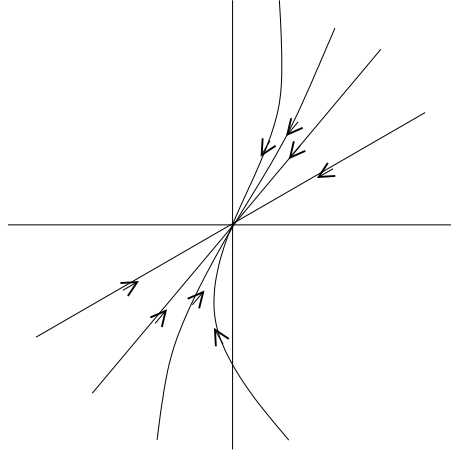


Figura 11: La figura muestra un nodo asintóticamente estable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores reales con  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ , con índice  $+1$ .

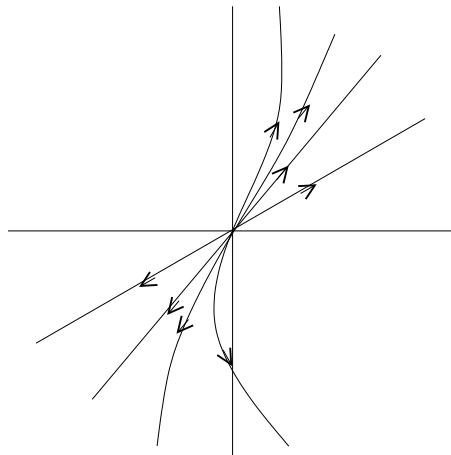


Figura 12: La figura muestra un nodo inestable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores reales con  $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ , con índice  $+1$ .

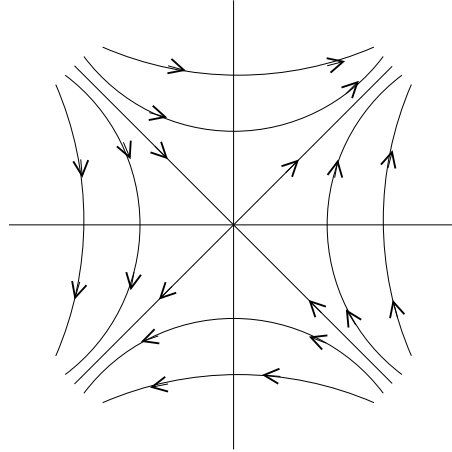


Figura 13: La figura muestra un punto silla inestable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores reales con  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , con índice -1.

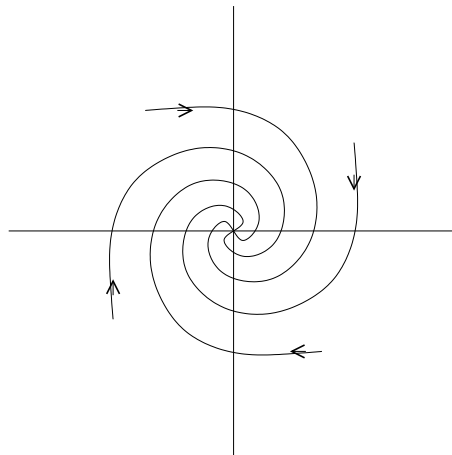


Figura 14: La figura muestra un punto espiral asintóticamente estable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores complejos con  $a = \text{Re}(\lambda) < 0$ , con índice +1.

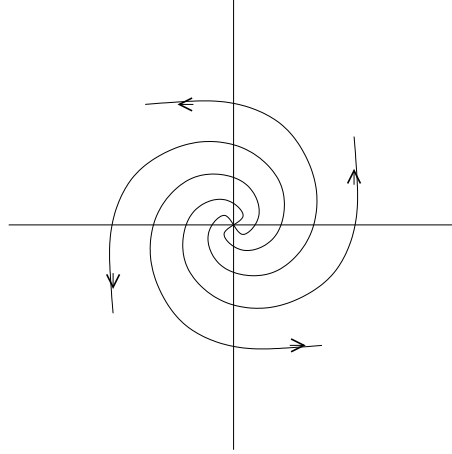


Figura 15: La figura muestra un punto espiral inestable en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores complejos con  $a = \text{Re}(\lambda) > 0$ , índice  $+1$ .

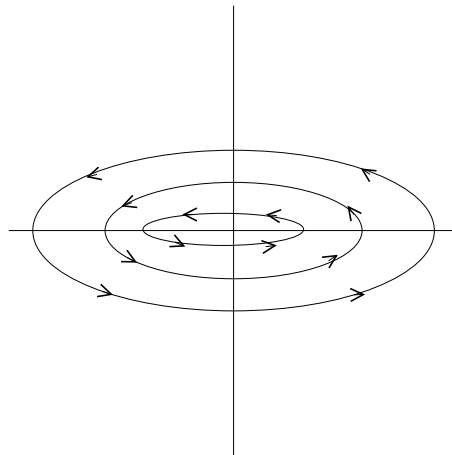


Figura 16: La figura muestra un punto centro en torno al punto crítico  $(0,0)$  en el plano  $xy$ , este corresponde al caso de autovalores complejos con  $a = \text{Re}(\lambda) = 0$ , índice  $+1$ .

b. *Teorema de Liouville*

Al decir que el sistema es Hamiltoniano, las ecuaciones (A1) se transforman en las conocidas ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q},\end{aligned}$$

donde se cumple el siguiente teorema

- **Teorema:** “*El flujo de fase de las ecuaciones de Hamilton preserva el volumen del espacio de fase*”.

Que en la visión de un fluido que llena el espacio de fase corresponde a la incompresibilidad de dicho fluido.

Para demostrar este teorema recordemos que el flujo de fase o flujo Hamiltoniano viene dado por una transformación uniparamétrica de un grupo  $g$  tal que

$$g^t : (q(0), p(0)) \rightarrow (q(t), p(t)), \quad (\text{A14})$$

donde  $q(t)$  y  $p(t)$  son las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Luego lo que uno debe probar es

$$\text{volumen}(g^t D) = \text{volumen}(g^0 D) \quad (\text{A15})$$

donde  $D$  es cualquier región en el espacio de fase.

Una forma compacta de escribir las ecuaciones de Hamilton es

$$\dot{x}^i = \epsilon^{ij} \partial_j H, \quad (\text{A16})$$

con  $\{i, j\} = \{q, p\}$ . Si miramos la coordenada  $x^i(t)$  a lo largo de su evolución (aplicamos la acción del grupo)  $x^i(t + \delta t)$ , y obtenemos el Jacobiano de esta transformación de coordenadas (que no es nada más que la evolución de las ecuaciones de Hamilton)

$$J(x^i(t + \delta t), x^j(t)) = \left| \frac{\partial x^i(x^j(t))}{\partial x^j(t)} \right| = \left| \delta_j^i + \partial_j(\epsilon^{ik} \partial_k H) \delta t \right|, \quad (\text{A17})$$

entonces el volumen en estas nuevas coordenadas es

$$V(t + \delta t) = V(t) + (\partial_i(\epsilon^{ik} \partial_k H)) \delta t, \quad (\text{A18})$$

y como el sistema es Hamiltoniano se cumple que

$$\partial_i(\epsilon^{ik} \partial_k H) = 0, \quad (\text{A19})$$

lo que muestra la conservación del volumen, demostrado el Teorema de Liouville



## Apéndice B: PROGRAMA DE DIRAC

Al usar un esquema de cuantización canónica es necesario pasar del esquema Lagrangiano a la formulación Hamiltoniana, existen casos donde este paso no esta bien definido debido a la presencia de vínculos en el sistema, lo que provoca que las soluciones a las ecuaciones de movimiento incluya funciones arbitrarias, debido a la presencia de vínculos lo que conlleva a la existencia de grados de libertad redundantes. EL realizar el conteo de los grados de libertad en el sistema para así tener una teoría cuántica bien definida se transforma en un problema difícil de resolver. Para salvar este obstáculo es necesaria la utilización del programa de Dirac [17, 20] para sistemas con vínculos, el cual detallaremos a continuación

Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \tag{B1}$$

con  $i = 1, \dots, N$ . El pasar al formalismo Hamiltoniano, implica definir los momenta canónicos conjugados a las coordenadas, por medio de

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} , \tag{B2}$$

para poder despejar todas las velocidades en términos de variables del espacio de fase,  $\dot{q}_i = q_i(q, p)$ , es necesario que la matriz

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} , \tag{B3}$$

sea invertible, en caso contrario no todos los momenta son independientes, existiendo relaciones dadas por

$$\phi_m(q, p) = 0 , \tag{B4}$$

donde  $m = 1, \dots, M$ , a estas  $M$  relaciones de acuerdo con el programa de Dirac se les llama vínculos primarios. Ellas definen una superficie de  $2N - M$  dimensiones, la superficie de vínculos primarios  $\Gamma_p$ .

El Hamiltoniano canónico definido por la transformación de Legendre

$$H_c(p^i, q^i) = p^i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) , \tag{B5}$$

ahora no es único y de hecho debe ser cambiado por el Hamiltoniano total, dado por

$$H_E = H_c + u_m \phi_m(q, p) . \quad (\text{B6})$$

donde  $u_m$  son multiplicadores indeterminados de Lagrange.

Como en el formalismo Lagrangiano estos vínculos deben ser consistentes con la evolución temporal. Si inicialmente  $(q, p)$  están sobre  $\Gamma_p$  debieran permanecer sobre ella después que haya pasado un tiempo  $t$ .

Esto significa que las ecuaciones de movimiento debieran preservar los vínculos y esto da origen a las relaciones de consistencia

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_E\} = \{\phi_m, H\} + u_n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0 . \quad (\text{B7})$$

Si la teoría es inconsistente, estas relaciones no pueden satisfacerse, por ejemplo consideramos una teoría descrita por el Lagrangiano,  $L = \dot{q} - q$ , que conduce al Hamiltoniano  $H = q$  y  $\phi = p - 1$ , la relación (B7) se lee de la siguiente forma  $1 \approx 0$ , mostrando que la teoría es inconsistente y la acción no tiene puntos estacionarios.

Si la teoría es consistente tenemos dos posibilidades. La primera es cuando la ecuación (B7) no nos entrega información nueva, simplemente impone restricciones en la forma de las  $u_m$  y no hay nuevos vínculos en el sistema. La segunda posibilidad se da cuando las relaciones (B7) nos entregan nuevas relaciones entre las  $q$ 's y los  $p$ 's. Estos son los vínculos secundarios  $\phi_k$  con  $k = 1, \dots, K$ , estos deben ser agregados a los vínculos primarios. Repetimos el proceso para estos nuevos vínculos, viendo si se generan vínculos terciarios, la iteración termina una vez que no aparecen nuevos vínculos. Así finalmente hemos quedado con  $K + M$  vínculos, que se resumen en un conjunto completo como

$$\phi_j(q, p) \approx 0 , \quad (\text{B8})$$

con  $j = 1, \dots, K + M = R$

Luego, la consistencia de todos los vínculos requiere que existan soluciones para  $u_m$  como funciones de  $q$  y  $p$  de la ecuación

$$\{\phi_j, H\} + \{\phi_j, \phi_m\} u^m \approx 0 \quad (\text{B9})$$

tal que el Hamiltoniano extendido es expresable en termino de  $q$  y  $p$ ,

$$H_E = H_E(q, p) . \quad (\text{B10})$$

La clasificación entre vínculos primarios y secundarios sera de importancia menor en la forma final de la teoría Hamiltoniana. Una clasificación de mayor jerarquía, es la separación en vínculos de primera clase y de segunda clase, que juega un rol principal en esta descripción. Para ver esta clasificación consideremos la matriz  $C_{nm} = \{\phi_n, \phi_m\}$ , que aparece en las relaciones de consistencia (B7). Si consideramos la base de vectores  $v_a$  que pertenecen al núcleo de la matriz  $C_{nm}$

$$\{\phi_j, \phi_m\} v_a^m \approx 0 , \quad (\text{B11})$$

donde  $a = 1, \dots, \dim \text{Ker} C = M - \text{rank} C$ .

La solución general para los multiplicadores  $u$  en la ecuación (B9) es de la forma

$$u = \tilde{u} + \mu^a v_a , \quad (\text{B12})$$

donde  $\tilde{u}$  es una solución particular de la ecuación no homogénea. Tenemos separada la parte de  $u$  que permanece indeterminada por la consistencia, esta parte contiene  $M - \text{rank} C$  funciones libres  $\mu^a$ .

Luego la combinación de vínculos de la forma

$$\phi_a = v_a^m \phi_m , \quad (\text{B13})$$

que conmuta con todos los otros vínculos

$$\{\phi_j, \phi_a\} = 0$$

con  $j = 1, \dots, R$ , nos conduce al concepto de vínculos de primera clase. Una función  $F(q, p)$  se dice de primera clase si conmuta con todos los vínculos, es fácil ver que  $H_E$  es de primera clase. Las funciones que no son de primera clase son llamadas de segunda clase y para este caso los respectivos  $u$  estan completamente determinados. La notación usual es denotar los vínculos de primera clase por  $\gamma_a$  y los de segunda clase por  $\chi_\alpha$ . Para que los vínculos sean de segunda clase debe cumplirse que la matriz

$$\Delta_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} , \quad (\text{B14})$$

no sea singular, para teorías sin variables de Grassmann, esto es asegurado si el número de vínculos de segunda clase es par ya que el determinante de una matriz antisimétrica impar es cero.

El programa no ha terminado aún ya que tenemos las funciones  $\mu^a$ , que aún permanecen indeterminadas, esta arbitrariedad encierra información importante del sistema, que corresponde a una simetría de la acción, esta simetría es la libertad de gauge, luego los vínculos de primera clase se pueden ver como generadores de transformaciones de gauge dadas por

$$\delta F = \epsilon \{F, \gamma_a\} , \quad (\text{B15})$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro de gauge.

Los vínculos de segunda clase son eliminados de la teoría por cambiar el paréntesis de Poisson por el de Dirac, dado por

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} \Delta^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} , \quad (\text{B16})$$

donde  $\Delta^{\alpha\beta}$  satisface  $\Delta^{\alpha\zeta} \Delta_{\zeta\beta} = \delta_\beta^\alpha$ .

Finalmente el conteo de los grados de libertad reales del sistema se hace de la siguiente forma

$$\# \text{grados de libertad} = 2N - \# N^\circ \text{Vínculos de } 2^{\text{da}} \text{ clase} - 2\# \text{Vínculos de } 1^{\text{ra}} \text{ clase}.$$

## Apéndice C: SIMPLÉCTOMORFISMOS

Para entender que representan los simpléctomorfismos recordemos que la acción escrita en (19) es en realidad la integral de una forma, esto es

$$S = \int A , \quad (\text{C1})$$

luego usaremos el lenguaje de las formas diferenciales para entender el significado de los Simpléctomorfismos. Si

$$v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ,$$

es un campo vectorial y

$$\Theta = \frac{1}{k!} \Theta_{\beta_1 \dots \beta_k} dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_k} ,$$

es una  $k$ -forma, donde el operador  $d$  es la derivada exterior, se define la  $(k-1)$ - forma  $i_v \Theta$  mediante la contracción de  $\Theta$  y  $v$  de la siguiente manera

$$i_v \Theta = \frac{1}{(k-1)!} v^\alpha \Theta_{\alpha \beta_1 \dots \beta_{k-1}} dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_{k-1}} . \quad (\text{C2})$$

Por otra parte, la derivada de Lie de  $\Theta$  a lo largo de  $v$  es

$$(\mathcal{L}_v \Theta)_{\beta_1 \dots \beta_k} = v^\alpha \partial_\alpha \Theta_{\beta_1 \dots \beta_k} + \partial_{\beta_1} v^\alpha \Theta_{\alpha \beta_2 \dots \beta_k} + \dots + \partial_{\beta_k} v^\alpha \Theta_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \alpha} , \quad (\text{C3})$$

finalmente recordando la identidad de homotopía

$$\mathcal{L}_v = i_v d + di_v , \quad (\text{C4})$$

podemos escribir la variación de de la acción (C1) de la siguiente forma

$$\delta_\xi S = \int \mathcal{L}_\xi A = \int (dI_\xi A + I_\xi \Omega)$$

donde  $\Omega = dA$ , como esta acción es dejada invariante por esta variación, se debe cumplir la siguiente condición

$$\delta_\xi \Omega = \mathcal{L}_\xi \Omega = (dI_\xi + I_\xi d)\Omega = dI_\xi \Omega = 0 . \quad (\text{C5})$$

Luego, por el lema de Poincaré, podemos escribir localmente

$$I_\xi \Omega = d\alpha \rightarrow S , \quad (C6)$$

esta condición define los simpléctomorfismo, que son transformaciones que dejan invariante la forma simpléctica y en el lenguaje de la mecánica clásica corresponden a las transformaciones canónicas Por otro lado,

$$\delta_\xi A = \mathcal{L}_\xi A = dI_\xi A + I_\xi \Omega = d(I_\xi A + \alpha) = d\Lambda , \quad (C7)$$

lo que nos muestra que las transformaciones de gauge de la acción (C1) dadas por

$$I_\xi \Omega = 0 \rightarrow K , \quad (C8)$$

$$I_\xi \Omega = d\alpha \neq 0 \rightarrow S/K ,$$

las primeras tienen carga de Noether nula, y cualquier combinación lineal de vínculos de la forma  $\phi = \xi^\mu \phi_\mu$  si  $\xi \in K$ , da como resultado vínculos de primera clase, y si  $\xi \in S/K$ , entonces  $\phi$  es de segunda clase. Un estudio detallado de las simetrías de la acción (19) y otras de sus propiedades se puede ver en la referencia [26]

## Apéndice D: DINÁMICA DE VÓRTICES

Actualmente la dinámica de vórtices es un activo campo de estudios, que va desde la mecánica fluidos, plasma, astrofísica, teoría cuántica de campos, etc. Por otro lado, la evolución de la vorticidad, y el movimiento de los vórtices, son ingredientes principales prácticamente de cualquier flujo real, teniendo una profunda importancia en la practica. Desde un punto de vista matemático, el movimiento de los vórtices, constituye una sofisticada área de la mecánica de fluidos, que continuamente nos invita aplicar nuevas técnicas analíticas para su descripción [1][44].

En mecánica de fluidos la vorticidad tiene un rol principal en la descripción de cualquier situación real. Como es bien sabido, cualquier campo de velocidades  $\mathbf{V}$ , puede ser descompuesto en dos partes, una que tenga idéntica divergencia  $\mathbf{V}$ , pero que su rotor sea cero, y otra en la cual su rotor sea igual al de  $\mathbf{V}$  y su divergencia sea nula. En un flujo incomprensible, la primera parte es irrotacional y libre de divergencias, luego esto nos conduce a un problema lineal en el flujo. La segunda parte, se deriva directamente de la vorticidad  $\zeta = \nabla \times \mathbf{V}$  del campo de velocidades, es justamente la dinámica de esta parte la que define el problema de interés. Respecto de la dinámica de vórtices mucho se puede decir, sin embargo para los interés de este trabajo de tesis, nos concentraremos en una pequeña porción de este vasto campo, para un detalle ver [31][44][45].

Consideremos la ecuación de Burger para el campo complejo  $u(x, t)$ .

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u , \quad (\text{D1})$$

esta ecuación admite soluciones tipo ondas de choque que son relevantes en el contexto de la turbulencia, estas soluciones son de la forma

$$u(x, t) = -2\nu \sum_{\alpha=1}^N (x - z_\alpha(t))^{-1} , \quad (\text{D2})$$

tal que el polo complejo  $z_\alpha(t)$ , evoluciona de acuerdo a

$$\dot{z}_\alpha = -2\nu \sum_{\beta=1}^N (z_\alpha - z_\beta)^{-1} , \quad (\text{D3})$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática, además  $\alpha \neq \beta$  y  $N$  puede ser cualquier entero [1][31]. Este importante resultado muestra que la ecuación de campo (D1) puede ser llevada a un

problema tipo muchos cuerpos. Además la ecuación (D3), puede ser vista como una ecuación tipo interacción de vórtices, pero con vórtices puntuales, situación que difiere de la realidad ya que los vórtices tienen un tamaño finito. Por otro lado si  $u(x, t)$  es real, como usualmente es asumido,  $N$  debe ser par y las  $z_\alpha$  constituyen un conjunto de  $\frac{N}{2}$  pares complejos conjugados (vórtices y antivórtices).

Para ver la relación de la ecuación (D3) con la dinámica de vórtices puntuales, consideremos la ecuación generalizada de la vorticidad dada por [45]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{\zeta, \psi\} = 0, \quad (\text{D4})$$

donde  $\zeta$  es la vorticidad y  $\psi(x, y, t)$  es la función de corriente para un flujo incompresible en dos dimensiones y el paréntesis es el usual de Poisson entre ambas cantidades, En un sistema real las vorticidad y la función de corrientes están relacionadas de la siguiente forma  $\zeta = F(\psi)$ , esta relación en particular depende del problema físico que estemos considerando, en el caso de la ecuación de Euler (nuestro caso) esta relación corresponde a  $\zeta = -\nabla^2 \psi$ , además considerando las relaciones existentes entre el campo de velocidades, la vorticidad y la función de corriente la ecuación (D4) puede ser escrita como una ecuación de Schroedinger no lineal

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi \quad (\text{D5})$$

Motivados en el hecho, que el flujo gobernado por la ecuación (D5) esta dominado por regiones de vorticidad concentrada, tal que estas regiones exhiben propiedades tipo partículas, podríamos realizar una descomposición análoga a la realizada con la ecuación de Burger. Problema difícil de resolver y lo mejor que podemos considerar es un esquema de descomposición de polos, en termino de un sistema de vórtices puntuales. Donde la vorticidad esta dada por

$$\zeta = -\nabla^2 \psi = \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha \delta(x - x_\alpha(t)) \delta(y - y_\alpha(t)), \quad (\text{D6})$$

donde se puede ver que esta vorticidad singular corresponde a una suma de funciones  $\delta$  una por cada vórtice, estos están ubicados en la posición  $(x_\alpha, y_\alpha)$  y tienen circulación  $\kappa_\alpha$ . La ecuaciones de movimiento para estos vórtices puntuales, son



$$\dot{z}_\alpha^* = (2\pi i)^{-1} \sum_{\beta=1}^N \kappa_\beta (z_\alpha - z_\beta)^{-1} , \quad (\text{D7})$$

el asterisco denota conjugación compleja, esta ecuación nos muestra claramente la analogía entre vórtices puntuales y las soluciones de la ecuación (D3). Estas últimas ecuaciones pueden ser obtenidas en el formalismo Hamiltoniano, este resultado fue obtenido por Kirchhoff (1876), el cual mostro que las ecuaciones de movimiento de vórtices puntuales en un plano infinito definen un sistema dinámico Hamiltoniano, en efecto las ecuaciones (D7), pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \dot{x}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} , \\ \kappa_\alpha \dot{y}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} , \end{aligned} \quad (\text{D8})$$

y el Hamiltoniano viene dado por

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \kappa_\alpha \kappa_\beta \log |z_\alpha - z_\beta| , \quad (\text{D9})$$

este Hamiltoniano recibe el nombre de energía cinética de interacción. Las cantidades  $\kappa_\alpha x_\alpha$  y  $y_\alpha$  son las coordenadas y el momenta canónico conjugado respectivamente. También es sabido que podemos extender el dominio en el cual yace el fluido no solo al plano infinito y siguen siendo ecuaciones de hamilton.

Por otro lado la integrabilidad de un sistema de vórtices interactuantes depende de dos cantidades, por una lado del número de vórtices  $N$ , y la forma del dominio, ocupado por el fluido. Para un dominio específico existe un número máximo de vórtices ( $N_{\text{máx}}$ ) bajo el cual el sistema es integrable, sobre este número el movimiento de los vórtices se vuelve caótico. Por ejemplo un sistema de tres vórtices en un plano infinito es siempre integrable, no así cuatro vórtices, donde se puede observar una tendencia al caos, así  $N_{\text{máx}}(R^2) = 3$ , para un semiplano este número se reduce a dos, esto se debe a que se han reducido las simetría del sistema [1, 46].

- 
- [1] H. Aref, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 345 (1983).
- [2] C. Teitelboim and J. Zanelli, *Class. Quant. Grav.* **4** (1987)L125; and in *Constraint Theory and Relativistic Dynamics*, G. Longhi and L. Lussana, eds., World Scientific, Singapore (1987).
- [3] N. Deruelle and T. Dolezel, *Phys. Rev.* **D62**, 103502 (2000).
- [4] S.W. Hawking, T. Hertog and H.S. Reall, *Phys. Rev.* **D62**, 043501 (2000).
- [5] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B258**, 46 (1985).
- [6] M. Green and P. Vanhove, *Phys. Lett.* **B408**, 122 (1997).
- [7] E. Witten, *Nucl.Phys.* **B311** (1988) 46.
- [8] A. Achúcarro and P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B180** (1986) 89.
- [9] A. Chamseddine, *Phys. Lett.* **B233** (1989) 291; *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 213.
- [10] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli *Phys. Rev. D* **49** (1994) 975.
- [11] J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 490.
- [12] M. Bañados, R. Troncoso and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 2605.
- [13] R. Troncoso and J. Zanelli, *New Gauge Supergravity in Seven and Eleven Dimensions*, *Phys. Rev. D* **58-R** 101703 (1998). hep-th/9710180; O.Chandía, R. Troncoso, and J. Zanelli, in *Trends in Theoretical Physics*, E. Gamboa-Saraví, F. Schaposnik, eds. APS Conference Proceedings (1999), hep-th/9903204.
- [14] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison- Wesley, Reading, Mass. (1950).
- [15] L.Landau and E.M.Lifshitz, *Classical Mechanics*, NAUKA, Moscow (1973).
- [16] V.I.Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York(1978).
- [17] P.A.M.Dirac, *Canadian J.of Mathematics*, **2**,147 (1950); *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University. Academic Press, New York (1964).
- [18] J.A.Hanson, T.Regge and C.Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia dei Lincei, Rome (1976).
- [19] M. Henneaux and C.Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1993)
- [20] K. Sundermayer, *Constrained Dynamics*, Springer Lecture. Notes 169.(1982)
- [21] J. F. Cariñena, *Formulación geométrica de la mecánica lagrangiana*. Monografía Universidad de Zaragoza.

- [22] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, London, 1978
- [23] M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev.* **A36** (1987) 4417.
- [24] M. Bañados, L. Garay and M. Henneaux, *Phys. Rev.* **D53** (1996) R593; *Nucl. Phys.* **B476** (1996) 611.
- [25] J.Saavedra, R. Troncoso and J.Zanelli, *J. Math. Phys.* **42** (2001)4383-4390.
- [26] R. Floreanini, R. Percacci and E. Sezgin, *Nucl. Phys.* **B322**,255 (1989).
- [27] La utilidad de la forma de primer orden para la acción fue notado por vez primera por Hojman and Urrutia en, S. Hojman and L. F. Urrutia, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1896., y posteriormente por Faddeev and Jackiw donde muestran además que el método de primer orden es más simple que el método de Dirac. , en L.D.Faddeev and R.Jackiw, *Phys.Rev.Lett.* **60**, 1692 (1988).
- [28] R. Jackiw, (*Constrained*) *Quantization Without Tears* , in Proceedings of the meeting on Constraint Theory and Quantization Methods, Montepulciano 1993 hep-th/9306075.
- [29] R.Hojman and J.Zanelli, *Phys.Rev.* **D 35**, 3825, (1987).
- [30] M.C.Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Interdisciplinary Applied Mathematics, vol.50, Springer Verlag, Berlin (1991).
- [31] D. V. Choodnovsky and G. V. Choodnovsky, *Nuovo Cim.* **B40**, 339 (1977).
- [32] M.Asorey, comunicación privada.
- [33] L. Landau and E. Lifshitz, *Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Pergamon Press (1975).
- [34] R. B. Laughlin, *The Quantum Hall Effect*, R. R. Prange and S. M Girvin (Eds.).
- [35] A. Connes *Non Commutative Geometry*, Academic Press.(1994)
- [36] G. V. Dunne, R. Jackiw and C. A. Trugenberger, *Phys.Rev.* **D 41**, 661, (1990).
- [37] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J.C. Rojas, *hep-th/0101081*.
- [38] Y.S. Myung, H.W. Lee, *hep-th/9910083*.
- [39] S. Hellerman and Mark Van Raamsdonk, *JHEP* 0110:039,2001.
- [40] R. Jackiw, *hep-th/0110057*.
- [41] H. Matschull, *quant-ph/9606031*.
- [42] N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [43] A. Gomberoff, J. Saavedra, R. Troncoso, J. Zanelli, trabajo actualmente en desarrollo.
- [44] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6<sup>th</sup> Ed.,(Dover, N.Y, 1932).
- [45] X. Leoncini, L. Kuznetsov and G. Zaslavsky, *physics/9908055*.
- [46] E.A. Novikov, Yu. B. Sedov, *Sov. Phys. JETP* **22**, 297 (1979)