



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# Procesamiento de Información en Sistemas Cuánticos

POR  
ROBERT PAÚL GUZMÁN ESTRADA

Tesis presentada al Departamento de Física de la Facultad de Ciencia  
de la Universidad de Santiago de Chile, como uno de los requisitos  
para optar al grado académico de Doctor en Ciencias  
con mención en Física

PROFESOR GUÍA : Dr. Juan Carlos Retamal Abarzúa  
COMISIÓN INFORMANTE : Dr. Jorge Gamboa Ríos  
: Dr. Aldo Delgado Hidalgo  
: Dr. Mikhail Pliouchtchai  
: Dr. Carlos E. Saavedra Rubilar

Junio, 2004  
Santiago, Chile

---

## INFORME DE APROBACION DE TESIS DE DOCTORADO

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención Física que la Tesis presentada por el candidato

ROBERT PAUL GUZMAN ESTRADA

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

### Director de Tesis

Dr. Juan Carlos Retamal Abarzúa

\_\_\_\_\_

### Comisión Informante de la Tesis

Dr. Jorge Gamboa Ríos

\_\_\_\_\_

Dr. Aldo Delgado Hidalgo

\_\_\_\_\_

Dr. Mikhail Pliouchtchai

\_\_\_\_\_

Dr. Carlos E. Saavedra Rubilar

\_\_\_\_\_

A  
Mercedes  
Stefano, Erick, Karolina  
por su fortaleza y su eterno cariño,  
pero por sobre todas las cosas por su paciencia infinita

## Agradecimientos

En primer lugar agradezco al Profesor Juan Carlos Retamal, por la confianza y apoyo que depositó en mi desde el comienzo de esta travesía y a lo largo de toda ella, lo que me permitió llegar al final.

## Resumen

Los problemas sustentados en el desarrollo de esta tesis están relacionados con dos nuevas corrientes de investigación conocida con el nombre de Teoría Cuántica de la Información y Teoría Cuántica de la Computación, ya sea en forma directa como es el caso del estudio de la *Tasa de Concurrencia* y la *Realización Física de Compuertas Cuánticas para qutrits*, o indirecta, en el caso de *Generación de estados no clásicos del Campo Electromagnético*.

El objetivo que ha guiado su desarrollo es estudiar los *aspectos físicos* de estos problemas. Es decir, su análisis se enfoca más a la búsqueda de condiciones físicas apropiadas para la realización experimental y posterior aplicación.

En particular, con el desarrollo de métodos para el cálculo de la Concurrencia, como medida de entrelazamiento, se ha investigado la influencia del medio ambiente sobre el entrelazamiento de los estados generados en átomos en interacción con campos ópticos. De esta forma se establece una manera de caracterizar la evolución de los estados entrelazados a tiempos cortos, cualquiera sea el estado inicial de sistemas bipartitos que tienen un espacio de Hilbert asociado de dos dimensiones.

Seguiedo la misma línea se presenta una posible realización física de Computación Cuántica usando, para la codificación de la información, los grados de libertad internos y externos de los iones atrapados. Específicamente se estudia la realización de las compuertas lógicas fundamentales la compuerta CNOT generalizada y la Transformada de Fourier para qutrits en iones atrapados. Especial énfasis se ha puesto en determinar la factibilidad de la realización experimental de estas propuestas.

Adicionalmente se ha estudiado la generación de estados comprimidos del Campo Electromagnético. Esta propuesta tiene una posible realización física gracias a la interacción, controlada, de nubes atómicas con campos electromagnéticos al interior de una cavidad óptica. El campo interno de la cavidad queda preparado en un estado comprimido. La dinámica efectiva de este sistema simula es equivalente a la aplicación de un operador de compresión sobre el estado del campo interno de la cavidad. Por otro lado, mediante el uso de la teoría Input–Output se verifica que las propiedades de compresión del campo interno pueden ser transferidas al campo externo, lo que posibilita su uso en procesos de Computación Cuántica o de Comunicación Cuántica.

## ÍNDICE GENERAL

1..	<i>Introducción</i>	4
2..	<i>Fundamentos</i>	8
2.1.	La Teoría Cuántica y la Teoría de la Información	8
2.1.1.	El operador densidad	10
2.1.2.	La ecuación maestra.	13
2.1.3.	Computación cuántica.	17
2.1.4.	Compuertas cuánticas universales.	21
2.1.5.	El entrelazamiento como recurso del procesamiento de información cuántica	23
2.1.6.	Medidas de entrelazamiento	25
2.2.	Sistemas físicos y la implementación de procesos de Información Cuántica	32
2.2.1.	Interacción Radiación–Atomo.	32
2.2.2.	Iones Atrapados.	36
2.2.3.	Electrodinámica Cuántica de Cavidades.	41
3..	<i>Caracterización de estados entrelazados</i>	44
3.1.	Introducción	44
3.2.	La concurrencia en términos de los invariantes de $R$	45
3.3.	En enfoque perturbativo para la tasa de Concurrencia	48
3.4.	El testigo de entrelazamiento.	51
3.4.1.	Estados de Fock entrelazados.	52
3.4.2.	Disipación de Fase	55
3.4.3.	Estados coherentes entrelazados	56
3.4.4.	Medida del operador testigo de entrelazamiento	57
4..	<i>Computación Cuántica con Qutrits en Iones Atrapados</i>	58
4.1.	Introducción	58
4.2.	Compuerta arbitraria sobre qutrits	59
4.3.	Compuerta condicional entre dos qutrit.	62
4.4.	Transformada de Fourier Cuántica	65
4.4.1.	TFC para qudits	65
4.4.2.	Transformada de Fourier para qubits y qutrits.	67
5..	<i>Generación de estados correlacionados cuánticamente</i>	71
5.1.	Estados Coherentes	71
5.2.	Estados Comprimidos	73
5.2.1.	Incertidumbres de fase y de número	75
5.2.2.	Estado Comprimido Multimodo	76
5.3.	Operador de compresión en cavidades ópticas	77
6..	<i>Discusión y Conclusiones</i>	81
6.1.	Conclusiones.	82

---

<i>Apéndice</i>	84
<i>A.. Hamiltoniano Efectivo y Teoría Input–Output</i>	85
A.1. Teoría perturbativa	85
A.1.1. Hamiltoniano efectivo en nubes atómicas en cavidades ópticas.	87
A.1.2. Hamiltoniano efectivo de cuarto orden	94
A.2. Modelo input–output para los modos de la cavidad.	100
A.2.1. Cuadraturas del campo interno	104
A.2.2. Cuadraturas del campo externo	107
A.3. Estados coherentes de dos fotones.	109
<i>B.. Descomposición de la Transformada de Fourier</i>	116
References	121

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Compuertas lógicas . . . . .	19
2.2. Circuito de entrelazamiento . . . . .	20
2.3. Entrelazamiento de formación y concurrencia . . . . .	27
2.4. Acoplamiento átomo–campo . . . . .	32
2.5. Trampa de Paul . . . . .	36
2.6. Partícula en una trampa de Paul . . . . .	37
2.7. Esquema Raman . . . . .	39
2.8. Esquema de Enfriamiento Raman. . . . .	41
4.1. Configuración Raman . . . . .	59
4.2. Estructura de niveles en ión atrapado . . . . .	60
4.3. Transformada de Fourier Cuántica . . . . .	68
5.1. Representación de las incertidumbres en el espacio de las fases . . . . .	73
5.2. Efecto del operador de compresión . . . . .	75
5.3. Estado comprimido en el espacio de las fases . . . . .	75
5.4. Interacciones en un átomo de tres niveles . . . . .	77



## 1. INTRODUCCIÓN

La Mecánica Cuántica constituye uno de los planteamientos teóricos más novedosos y a la vez controvertidos de la ciencia moderna. Este cuerpo de conceptos ha sido ampliamente difundido y usado en la explicación y predicción de fenómenos físicos del mundo microscópico, es decir, fenómenos que ocurren en el régimen de las dimensiones atómicas (longitudes de onda del orden de los 400 Å). Su aplicación se extiende también a la explicación de algunos fenómenos macroscópicos particulares como superconductividad, superfluidés etc.

A pesar de que, en la actualidad, una gran variedad de experimentos realizados en diferentes regímenes de energía verifican la validez de este formalismo, en los inicios de la Teoría Cuántica, las limitaciones tecnológicas existentes para la realización de experimentos motivó discrepancias entre los científicos de la época frente este nuevo marco teórico conceptual y sus planteamientos radicales. Estas discrepancias se centraron, principalmente, en como interpretar conceptos tales como mediciones, localidad, no localidad, etc. La principal razón para esto es que la Teoría Cuántica propone una interpretación probabilista del comportamiento de los sistemas físicos. Esta interpretación resultaba en contraposición a la forma de explicar los fenómenos macroscópicos cotidianos que los científicos tenían. La descripción de los fenómenos clásicos tiene un carácter determinista.

Cuando se comparan las concepciones que las dos perspectivas tienen de *partícula* se entiende mejor la diferencia entre los términos *determinista* y *probabilista*[1]. En *Mecánica Clásica* el estado de una partícula está objetivamente determinado por la *posición*  $\mathbf{r}$  en la que se encuentra y el *momentum*  $\mathbf{p}$  que lleva (o equivalentemente por un punto del *espacio de fases*[2]). Este estado puede ser determinado completamente a través de mediciones de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , las cuales puede realizarse sin ninguna restricción fundamental a la incerteza. Cualquier otra magnitud física medible puede determinarse a partir del conocimiento del estado en el que se encuentra el sistema.

Por otro lado, cuando el sistema está constituido de muchas partículas se considera que, en principio, pueden medirse objetivamente la posición y el momentum de cada partícula. Por lo tanto, se pueden hacer ciertas suposiciones acerca de como se encuentran distribuidas las partículas en el espacio de las fases. Usando esta distribución se deduce el comportamiento *macroscópico*, calculando para ello promedios efectuados en estas distribuciones de las cantidades físicas relevantes del sistema. En cualquier caso un observador puede predecir, con exactitud, cuales serán los resultados de la medición de una u otra cantidad observable del sistema. Adicionalmente, *la medición no perturba el estado del sistema* y por lo tanto, la evolución del estado estará gobernada por ecuaciones que lo determinan con exactitud arbitraria en cada instante de tiempo.

Cuánticamente el estado de una partícula está dado por una *función de onda*  $\psi(x, y, z, t)$  (o más abstractamente por un elemento  $|\psi\rangle$  del *espacio de Hilbert* asociado al sistema). Las cantidades físicas que describen la partícula se representan por *operadores autoadjuntos* (llamados *observables*) definidos en el espacio de Hilbert del sistema. Los resultados de una medición sólo pueden ser los autovalores del observable asociado a la cantidad física que se mide. Esta teoría no proporciona una forma de predecir con exactitud cuales serán los resultados de la medición, lo que si proporciona es un regla para determinar con qué probabilidad puede obtenerse uno u otro resultado de una medición de dicha cantidad física. Así mismo, el estado del sistema se ve afectado drásticamente por la medición, luego de la cual el estado tiene que ser el autovector asociado al resultado obtenido[3]. Es esta nueva forma de interpretar los resultados de las mediciones la que motivó las contradicciones mencionadas antes.

Experimentalmente hablando, desde su formulación hasta la fecha, se han realizado muchos experimentos en diferentes sistemas físicos que permiten validar las predicciones hechas por esta

teoría.

La Física Atómica[4], la Electrodinámica Cuántica[4], son ejemplos de la aplicación de la Teoría Cuántica en la construcción de nuevas formulaciones teóricas específicas. Los experimentos en diversos sistemas físicos como átomos, iones atrapados, fotones, etc., proporcionan evidencia diaria de los logros que ha obtenido esta teoría y por lo tanto de su validez.

A medida que los avances tecnológicos han permitido experimentar con sistemas microscópicos, que se asemejan cada vez más a los objetos con los cuales la teoría trata, ha sido posible confrontar los fundamentos mismos de la Mecánica Cuántica. Ejemplos de estos sistemas que permiten examinar los fundamentos de la Mecánica Cuántica, constituyen: los *iones atrapados*[78], *las cavidades ópticas y de microondas*[5], *átomos atrapados*[6], etc.

El éxito de la Mecánica Cuántica es tal que muchos de los avances tecnológicos actuales le deben su desarrollo de una u otra forma. Entre estos avances pueden enumerarse, los láseres, la posibilidad de hacer análisis espectroscópicos de diferentes materiales, dispositivos de almacenamiento de datos (memorias), dispositivos electrónicos.

El éxito de la Mecánica Cuántica es tal que muchos de los avances tecnológicos actuales le deben su desarrollo de una u otra forma. Entre estos avances pueden enumerarse, los láseres, la posibilidad de hacer análisis espectroscópicos de diferentes materiales, dispositivos de almacenamiento de datos (memorias), dispositivos electrónicos.

La Mecánica Cuántica ha salido adelante de todos los test que se le han impuesto hasta ahora, por lo tanto constituye el mejor modelo disponible, en la actualidad, para el estudio del comportamiento de los sistemas a nivel microscópico.

Tomando como punto de partida la seguridad de las afirmaciones anteriores anterior, se han desarrollado diversas aplicaciones de la Mecánica Cuántica para resolver problemas en otras ramas de la ciencia. En particular, una corriente de investigación que empezó en la década de los 90 se orienta hacia lo que actualmente se conoce como *Teoría Cuántica de la Información*[7]. Dentro de ésta se destacan dos subáreas fundamentales: la *Teoría Cuántica de la Computación* y la *Teoría Cuántica de la Comunicación*. La motivación fundamental para su desarrollo está en la permanente miniaturización de los componentes de los computadores modernos y su consecuente elevación en capacidad de cálculo y velocidad, así como la manipulación de gran cantidad de datos. Esta tendencia indica que tarde o temprano los dispositivos computacionales y de comunicación tendrán dimensiones para los cuales las leyes cuánticas deberán ser consideradas en la descripción de los sistemas físicos en que se procesa y transmite información[8]. Entonces la pregunta natural que surge es ¿qué implicancias tiene la naturaleza cuántica de los sistemas de procesamiento de información?.

Los estudios teóricos preliminares[9] y algunos resultados experimentales[78, 10, 11, 12] muestran que si se utiliza las propiedades cuánticas de los sistemas microscópicos como recurso para el procesamiento de información, se obtienen algunas ventajas respecto al uso de recursos basados en sistemas clásicos. Por ejemplo, la posibilidad de evaluar simultáneamente varios valores de una función, este fenómeno se conoce como *paralelismo cuántico*[13]. La *teleportación*[9] de información entre dos personas que se comunican y que están separados una gran distancia, es otra de las promesas de la Teoría de la Comunicación Cuántica. Al usar la naturaleza cuántica de los sistemas se abre la posibilidad de realizar encriptación de información, que es también una subárea de investigación conocida como Criptografía Cuántica[14]. Existen diversas empresas que comercializan productos de criptografía cuántica

Las ventajas que hemos mencionado anteriormente están fundamentadas en la existencia de una propiedad de los estados de sistemas cuánticos compuestos de varios subsistemas (sistema multipartito). Esta propiedad se conoce como *entanglement*[15, 16] (en español *entrelazamiento*) que puede expresarse como la propiedad de los estados de sistemas multipartitos que evidencian una correlación a pesar de estar separados grandes distancias. Lo que resulta diferente de este tipo de correlaciones es que no pueden ser generadas con interacciones que involucren únicamente a uno de los subsistemas del sistema global. Necesariamente tiene que haber una interacción que involucre a los subsistemas que lo integran (llamadas *interacciones no locales*). Un estado que no está entrelazado se llama *separable*[17], y se manifiesta por el hecho matemático de que este tipo

de estados se pueden escribir como el producto directo de dos estados puros que corresponden a cada uno de los subsistemas que componen el sistema global. Los estados separables pueden presentar algún tipo de correlación, sin embargo, esta correlación puede generarse interactuando independientemente con cada sistema individual, es decir, mediante *operaciones locales* sobre los componentes.

El uso del *entrelazamiento como recurso* permite que la Computación Cuántica y la Comunicación Cuántica[7] presenten ventajas respecto a sus análogos clásicos. La caracterización de este recurso ha sido una de las preocupaciones principales en los estudios relacionados con esta temática. Hasta ahora, se conocen varias formas de caracterizar el entrelazamiento en el caso de sistemas bidimensionales bipartitos. Para ello, se han establecido lo que se conocen como *medidas de entrelazamiento*, que son cantidades que pueden ser calculadas a partir del conocimiento del estado del sistema global. A esta categoría pertenecen *la concurrencia*[18], *la negatividad*[17], y una generalización a mayores dimensiones de la concurrencia conocida como *Tangle*[19]. Estas resultan ser, por ahora, las más aceptadas por la comunidad. Por otro lado, está lo que se conoce como *criterios de separabilidad* los cuales permiten determinar a partir del conocimiento del estado bipartito un borde de separabilidad, es decir, permiten saber bajo que condiciones un estado dado es separable o no. Siguiendo esta línea, dos son los criterios más aceptados, la búsqueda de violación de desigualdades de Bell[16], y el criterio de la *Transpuesta Parcial Positiva*[20, 22].

La primera parte de esta tesis estará orientada a la caracterización de los estados entrelazados a tiempos cortos usando para ello como medida de entrelazamiento la *Concurrencia*[18]. Más exactamente se trata de determinar a tiempo corto como se comportan los estados de un sistema bipartito sometidos a una dinámica unitaria y a un proceso disipativo debido al contacto con fuentes de ruido. Cuando sobre un sistema actúan tanto una interacción no local unitaria y una fuente de ruido, se evidencia una competición entre estas dos acciones, en la cual la primera trata de mantener o aumentar el entrelazamiento del sistema y la segunda de destruir este entrelazamiento mediante la introducción de la decoherencia. Para el estudio de estos efectos se han introducido conceptos como *tasa de entrelazamiento*[23], o lo que es equivalente la *tasa de concurrencia*[24]. Adicionalmente, se estudia la evolución del borde de separabilidad de estados entrelazados usando el criterio de la transpuesta parcial positiva PPT (Positive Partial Transpose) que conduce al concepto de operador testigo de entrelazamiento (Entanglement Witness operator).

Otro aspecto de la Teoría de la Información Cuántica es la *realización física* de computación cuántica[7, 25]. La Teoría de la Computación Cuántica es un modelo matemático de cálculo universal que toma como punto de partida los conceptos y leyes de la Teoría Cuántica. A partir de ésta se construye un modelo de *máquina de cálculo* que permite implementar *eficientemente* un conjunto de problemas computacionales suficientemente amplio, en lo posible más amplio que el conjunto de problemas que se resuelven usando el modelo clásico de computación. La primera pregunta que surge es ¿el conjunto de problemas que el computador cuántico puede resolver eficientemente es, efectivamente, más grande que el de la computación clásica?. Las investigaciones realizadas hasta ahora nos dicen que son del mismo tamaño. Sin embargo, el uso de computadores cuánticos puede hacer que ciertos problemas que en computación clásica eran muy complejos, vean reducida esta complejidad grandemente. Entre los ejemplos más populares de este tipo de propuestas están los algoritmos de búsqueda y los de computación paralela. El lenguaje de la Teoría de la Computación Cuántica ha introducido lo que se conoce como *circuitos cuánticos*[26], los mismos que usan *compuertas lógicas*[26, 27]. Los objetos elementales de la computación cuántica son los *qubits*, que se definen como estados de sistemas bi-dimensionales (o matemáticamente los elementos de un espacio de Hilbert bi-dimensional)

El desarrollo teórico del modelo de Computación Cuántica ha sido muy prolífico durante la década pasada. Sin embargo en los últimos años surgió la natural preocupación por saber hasta que punto este modelo puede ser implementado en un sistema físico real, o alternativamente, qué sistemas físicos de la realidad son los más óptimos para llevar a la práctica estos modelos de Computación Cuántica. Se ha demostrado que para que un sistema físico pueda usarse como un computador cuántico universal debe poder construirse, cualquier compuertas lógicas que actúan

sobre un qubit y una compuerta condicional entre dos qubits conocida como *C-NOT*[27] (análogo cuántico de la compuerta XOR clásica). Cualquier operación lógica entre que se realice sobre un determinado número de qubits puede descomponerse en té

En este contexto, implementar computación cuántica (o cualquier proceso de información cuántica) en determinado sistema físico significa, establecer como se puede realizar estas compuertas en ese sistema. En principio, eso sería suficiente, de no ser por el hecho que los sistemas físicos no existen aislados sino en permanente interacción con su medio ambiente, cualquier computador cuántico físico tiene que estar diseñado para trabajar bajo esas condiciones adversas impuestas por el ruido[29].

Se han estudiado diversas realizaciones de computación cuántica, usando qubits, en varios sistemas como iones atrapados[10, 30], fotones gemelos, resonancia magnética nuclear[31, 32, 33], puntos cuánticos[34, 35, 36], junturas Josephson[37, 38, 39, 40, 41, 42], Electrodinámica Cuántica de cavidades[5, 43, 44, 45], condensados de Bose–Einstein[46, 47], entre los más difundidos. En este trabajo se discutirán dos sistemas físicos; el primero lo constituyen los iones atrapados, sistema en el cual se ha logrado generar las compuertas elementales para computación cuántica, tanto teóricamente como experimentalmente. También discutiremos la preparación de estados correlacionados cuánticamente en sistemas de Electrodinámica Cuántica de cavidades, principalmente lo que se refiere a la generación estados entrelazados y estados comprimidos del campo electromagnético.

El uso de sistemas de dimensionalidad más alta que dos, para realizar procesamiento de información es un planteamiento nuevo que ha tomado vuelo a raíz de que se demostró que puede evitarse el ataque simétrico en la distribución de claves cuánticas[32]. Dentro de este contexto, los qutrits resultan la generalización más inmediata de los qubits, y en consecuencia una de las preguntas que surge inmediatamente es si es posible hacer computación cuántica universal en sistemas de tres niveles cuánticos. Esto implica que deben poder realizarse las compuertas lógicas que actúan sobre qutrits individuales y adicionalmente una compuerta condicional actuando entre dos qutrits, esto resulta ser la generalización de la compuerta lógica de C-NOT para qubits[48].

Precisamente otro de los tópicos abordados, en esta tesis es la realización de computación cuántica en qutrits que utiliza los iones atrapados como soporte físico. Adicionalmente, se presenta la realización física, en este tipo de sistemas, de la transformada de Fourier Cuántica[49], una compuerta fundamental en la realización de algoritmos cuánticos como el de *búsqueda* [49] y *factorización*[50].

Esta tesis se ha estructurado de la siguiente forma: en el segundo capítulo se presenta una introducción de los principales conceptos que se usan en Teoría de la Información Cuántica. En el tercer capítulo, se discute una forma de caracterizar el entrelazamiento, ya sea usando una medida de tiempo corto como la tasa de concurrencia o para establecer criterios de separabilidad en el caso del operador testigo de entrelazamiento[51]. El capítulo cuatro presenta una realización de computación cuántica en iones atrapados usando qutrits así como también la realización de la transformada de Fourier[52]. En el quinto capítulo, presentamos un esquema para generar estados comprimidos del campo en una cavidad [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61] y estados correlacionados en cavidades ópticas, estos últimos tienen su importancia por el uso como recurso en el procesamiento de información, principalmente en la repartición de entrelazamiento. Finalmente presentamos una discusión breve de los resultados de esta tesis y algunas conclusiones, basadas en dichos resultados.

Los resultados presentados en los capítulos 3 y 4 han sido publicados en dos artículos *R. Guzmán, J. L. Romero, J. C. Retamal y C. Saavedra, Phys. Lett. A, 323, 382(2004)* y *A. B. Klimov, R. Guzmán, J. C. Retamal y Carlos Saavedra, Phys. Rev. A. 67, 062313(2003)* respectivamente. Los resultados presentados en el el capítulo 5 se presenta en *R. Guzmán, J. C. Retamal, N. Zagury, E. Solano* en preparación para su publicación.

## 2. FUNDAMENTOS

En este capítulo presentamos los conceptos teóricos, que serán usados en la presentación y discusión de los resultados de esta tesis. La presentación está basada en gran parte en los apuntes del profesor J. Preskill y el libro de Nielsen y Chuang [7, 62],

### 2.1. La Teoría Cuántica y la Teoría de la Información

El punto de vista general es que la Teoría Cuántica constituye un modelo matemático del mundo, por lo tanto constituye un conjunto completo de reglas que permiten describir los resultados de las mediciones que se efectúan en un sistema microscópico. Esta teoría parte de algunos postulados que permiten caracterizar el modelo. La misión de estos postulados es introducir los conceptos elementales de la teoría y la forma como estos se relacionan con los aspectos físicos.

En general, se considera que los sistemas físicos se encuentran en un *estado particular* en la naturaleza. La misión de la física es obtener información del estado de éstos sistemas, usando *mediciones*. Las mediciones permiten establecer las *propiedades* físicas de este sistema en un determinado estado. Pero también la física debe hacer predicciones de como evoluciona el estado del sistema en presencia de otros sistemas con los cuales interactúan. De tal forma que cuando un observador mida en el futuro las propiedades del sistema en un determinado estado sus resultados coincidan con los predichos por la teoría, entonces el modelo será considerado como válido.

Los postulados de la mecánica cuántica establecen una correspondencia entre los conceptos: estados, propiedades susceptibles de ser medidas, mediciones, evolución de los sistemas microscópicos con un conjunto de conceptos matemáticos como: elementos de un espacio de Hilbert, operadores, probabilidades, etc.

**Estados** El estado de un sistema cuántico particular se representa mediante un rayo de un espacio vectorial complejo llamado Espacio de Hilbert. Se usa la notación de Dirac  $|\psi\rangle$ , para representar un estado particular.

Un espacio de Hilbert:

- a) Es un espacio vectorial definido sobre los complejos, es decir, cumple con las propiedades que definen un espacio vectorial cuyo campo es el conjunto de los complejos.
- b) En este espacio es posible definir un producto interno,  $\langle\psi|\varphi\rangle$  que no es más que un mapeo de un par ordenado de vectores en el campo complejo asociado al espacio, y que satisface las siguientes propiedades
  - Positividad:  $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ , la igualdad se cumple sólo si  $|\psi\rangle = 0$ .
  - Linealidad:  $\langle\psi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\psi|\psi_1\rangle + b\langle\psi|\psi_2\rangle$
  - simetría:  $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$
- c) Es completo en la norma  $\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle^{1/2}$ . Esto es importante en los espacios funcionales de dimensiones infinitos; asegura la convergencia de ciertas expansiones en autofunciones, el análisis de Fourier de los vectores.

El rayo es una clase de equivalencia de vectores que difieren por la multiplicación por un escalar complejo. El estado del sistema está determinado por un representante de esta clase de equivalencia cuyo módulo es

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \tag{2.1}$$

Entonces,  $|\psi\rangle$  describe el mismo estado físico que  $e^{i\alpha}|\psi\rangle$  pues  $|e^{i\alpha}| = 1$ . Este hecho matemático se expresa diciendo que la fase global de un estado es físicamente irrelevante al trabajar en espacios proyectivos. Sin embargo, la fase relativa de una combinación lineal de estados del espacio de Hilbert tiene significado físico. Es decir que el estado  $a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$  es equivalente al  $e^{i\alpha}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle)$  pero no al  $a|\psi_1\rangle + e^{i\alpha}b|\psi_2\rangle$ . La razón para esto es que una fase global no puede ser medida de ninguna forma, pero una fase relativa se puede detectar por un experimento de interferencia.

**Observables** Las propiedades físicas medibles están representadas por un *operador autoadjunto* definido en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Un operador definido en el espacio  $\mathcal{H}$  es un mapeo que toma elementos de éste y le asocia otro elemento que pertenece también al espacio, es decir:

$$A : |\psi\rangle \in \mathcal{H} \rightarrow A|\psi\rangle \in \mathcal{H},$$

y cumple

$$A(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle) = aA|\psi\rangle + bA|\phi\rangle,$$

El adjunto del operador  $A$  se define por

$$\langle\varphi|A\psi\rangle = \langle\varphi A^\dagger|\psi\rangle \quad \forall \quad |\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}.$$

$A$  es autoadjunto si cumple  $A = A^\dagger$ .

La importancia del operador autoadjunto  $A$  radica en el hecho que el espacio  $\mathcal{H}$  tiene una representación en los autoestados de  $A$ . Esta representación es posible debido a que siempre se puede construir una base del espacio de Hilbert con los autoestados comunes de un conjunto completo de observables. El operador  $A$  puede escribirse siempre como

$$A = \sum_n a_n P_n, \quad (2.2)$$

esta expresión se conoce como *descomposición espectral* del operador  $A$  si los  $a_n$  son los autovalores de  $A$  y  $P_n$  son los proyectores ortogonales en el subespacio asociado al autovalor  $a_n$ . Los proyectores son operadores que cumplen con  $P_n P_m = \delta_{n,m} P_n$  y  $P_n = P_n^\dagger$ ,  $\sum_n P_n = \mathbf{1}$ .

**Mediciones** La mecánica cuántica establece una relación entre los posibles resultados de la medición de una propiedad física del sistema y los autovalores del observable que la representa. Más exactamente:

- *los únicos resultados posibles de la medición de una propiedad física de un sistema son los autovalores del observable correspondiente.*

Más aún

- *el estado del sistema inmediatamente después de la medición será el autoestado asociado al autovalor que se obtuvo como resultado de tal medición.*

Si se sabe que el sistema está en un estado  $|\psi\rangle$  no se puede predecir con exactitud cual será el resultado de la medición del observable  $A$ . La probabilidad con la que se puede obtener un resultado  $a_n$  luego de la medición de  $A$  está dada por

$$\Pr(a_n) = \|P_n|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|P_n|\psi\rangle \quad (2.3)$$

y el estado inmediatamente después de la medición será

$$\frac{P_n|\psi\rangle}{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}. \quad (2.4)$$

**Dinámica** La evolución de un sistema está determinado, naturalmente, por la evolución del estado. En mecánica cuántica, la evolución de este estado está determinado por un operador autoadjunto  $H$  llamado *Hamiltoniano del sistema* y gobernada por una ecuación fundamental, la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (2.5)$$

Resolviendo formalmente esta ecuación se tiene que

$$|\psi(t)\rangle = U |\psi(0)\rangle$$

donde  $|\psi(0)\rangle$  es el estado al tiempo  $t = 0$  y si  $H$  no depende del tiempo  $U = \exp(-iHt/\hbar)$ .  $U$  se conoce con el nombre de *operador de evolución*. Y cumple

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

Una primera observación de la evolución de los estados en mecánica cuántica es que la ecuación de Schrödinger es lineal, lo cual valida el principio de superposición, por lo tanto los estados son capaces de interferir. Por otro lado, vemos que hay dos formas por las cuales pueden cambiar los estados

- Determinísticamente, mediante la evolución unitaria expresada por la ecuación de Schrödinger.
- Probabilísticamente, mediante las mediciones. La teoría asigna únicamente probabilidades a los resultados de las mediciones y por lo tanto al estado en que estará el sistema luego de la medición.

Una de las preguntas más controversiales sobre mecánica cuántica es precisamente ¿por qué el proceso de medición debe estar gobernado por las leyes físicas diferentes a las que gobiernan la evolución del estado?. Este aspecto peculiar hace que la mecánica cuántica sea, por decir menos, misteriosa.

### Qubits y bits

A pesar de que hemos dicho que existe actualmente una tendencia hacia la generalización de los protocolos basados en sistemas de dimensionalidad más grande que 2, en este capítulo presentaremos la conexión entre Teoría Cuántica e información usando los sistemas con un espacio de Hilbert de dos dimensiones. La discusión de las implicaciones que estos resultados tienen en sistemas de dimensiones mayores la posponemos para más adelante.

La unidad de la Teoría de la Información Clásica es el *bit* que puede tomar los valores  $\{1, 0\}$ . El correspondiente cuántico es el “bit cuántico” o *qubit*, que es el estado de un sistema con un espacio de Hilbert asociado de dos dimensiones. El estado normalizado más general en este espacio (escrito en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ) está dado por

$$a |0\rangle + b |1\rangle, \tag{2.6}$$

con  $a, b$  complejos que satisfacen

$$|a|^2 + |b|^2 = 1,$$

una fase global que es irrelevante. Esto significa que se puede hacer una medición que proyecta en el estado  $|0\rangle$  con probabilidad  $|a|^2$ , y en el estado  $|1\rangle$  con probabilidad  $|b|^2$ . Cuando  $a = 0$  o  $b = 0$ , el estado es un autoestado del observable que va a medirse por lo tanto (el estado) no cambia luego de hacer la medición. Obviando estos casos, el estado del qubit cambia después de ser medido, lo que es más el sistema queda preparado en uno de los dos estados lógicos  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$ . Por lo tanto, si se desconoce inicialmente el qubit no puede conocerse con una sola medida de estas, ni con ninguna otra que se pueda concebir.

#### 2.1.1. El operador densidad

Una visión más cercana a la realidad es considerar que el sistema de interés es un componente de un sistema más grande, como, por ejemplo, cuando nos interesa el efecto del medio ambiente. Cuando nos limitamos a estudiar una parte de un sistema más grande entonces, los axiomas que se enunciaron anteriormente tienen que ser modificados, debido a que en este caso

1. Los estados ya no son rayos, es decir, en general no son estados con una fase perfectamente definida.
2. Las mediciones no se describen a través de proyecciones ortogonales del estado del sistema.
3. La evolución no es unitaria.

Para entender mejor este problema consideremos el caso más simple, el caso en el que el sistema global está formado de dos qubits y las observaciones se realizan sobre uno de los qubits mientras el otro es inaccesible para el observador.

Si se consideran dos qubits, el qubit  $A$  al que se tiene acceso y por tanto se pueden hacer mediciones sobre él y malipularlo a voluntad. Pero el qubit  $B$  es inaccesible para los aparatos de medición que se tienen a disposición. Se supone que el sistema de estos dos qubits está en un estado cuántico y se quieren caracterizar las mediciones que pueden hacerse en el qubit  $A$ .

Sean  $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$  y  $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$  las bases de los qubits  $A$  y  $B$  respectivamente. Un estado cuántico interesante de dos qubits está dado por

$$|\psi\rangle_{AB} = \alpha |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

entonces los sistemas  $A$  y  $B$  están correlacionados. Esta correlación es tal que si se mide el qubit  $A$  proyectando sobre la base  $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ , se obtiene el resultado  $|0\rangle_A$ , con probabilidad  $|\alpha|^2$  y después de la medición se prepara el estado

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B.$$

En forma equivalente, se obtiene el resultado  $|1\rangle_A$  con probabilidad  $|\beta|^2$  y la medición prepara el estado

$$|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B,$$

si a continuación se mide el estado de  $B$  encontraremos (con probabilidad uno)  $|0\rangle_B$  si lo que se obtuvo en la primera medición fue  $|0\rangle_A$ , mientras que se obtendrá  $|1\rangle_B$  si lo que se obtuvo en la primera medición fue  $|1\rangle_A$ . En este sentido, los resultados de las mediciones  $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$  y  $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$  están perfectamente correlacionadas en el estado  $|\psi\rangle_{AB}$ .

En general, un observable que sólo actúa en el qubit  $A$  puede expresarse

$$\mathbf{M}_A \otimes 1_B,$$

donde  $\mathbf{M}_A$  es un operador autoadjunto que opera sobre  $A$ , y  $1_B$ , la identidad de  $B$ . el valor de espectación de este observable en el estado  $|\psi\rangle$  es:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{M}_A \otimes 1_B | \psi \rangle &= (\alpha^* \langle 0|_A \otimes \langle 0|_B + \beta^* \langle 1|_A \otimes \langle 1|_B) \mathbf{M}_A \otimes \\ &\quad 1_B (\alpha |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\ &= |\alpha|^2 \langle 0 | \mathbf{M}_A | 0 \rangle_A + |\beta|^2 \langle 1 | \mathbf{M}_A | 1 \rangle_A, \end{aligned}$$

el cual puede expresarse en la forma

$$\langle \mathbf{M}_A \rangle = \text{tr}(\mathbf{M}_A \rho_A), \quad (2.7)$$

con

$$\rho_A = |\alpha|^2 |0\rangle_A \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle_A \langle 1|, \quad (2.8)$$

donde  $\text{tr}(\cdot)$  denota la *traza* y  $\rho_A$  se llama *operador densidad* del qubit  $A$  y contiene toda la información del estado de en el que se encuentra  $A$ . El operador  $\rho_A$  es autoadjunto, positivo (sus autovalores son no negativos) y tiene traza igual a la unidad. Cualquiera sea el operador  $\mathbf{M}_A$  su valor medio puede expresarse siempre en la forma (2.7). Por esta razón se dice que  $\rho_A$  representa un *ensemble* de los estados cuánticos posibles donde cada uno ocurre con una probabilidad especificada. Esto significa que se obtendría el mismo resultado para  $\langle \mathbf{M}_A \rangle$  si se considera que el



sistema  $A$  está en un ensemble formado por dos estados cuánticos, el estado cuántico  $|0\rangle_A$ , con probabilidad  $p_0 = |\alpha|^2$  y el estado  $|1\rangle_A$  con probabilidad  $p_1 = |\beta|^2$ . La probabilidad de obtener el resultado  $a$ , con  $a$  autoestado de  $\mathbf{M}_A$ , después de medir el observable  $\mathbf{M}_A$ , está dada por el valor medio del proyector ortogonal  $\mathbf{E}_A(a)$ . Es decir:

$$\Pr(a) = p_{0A} \langle 0 | \mathbf{E}_A(a) | 0 \rangle_A + p_{1A} \langle 1 | \mathbf{M}_A(a) | 1 \rangle_A$$

que puede también interpretarse como la probabilidad de obtener  $a$  sumada sobre todo el *ensemble* y pesada por la probabilidad de cada estado en el ensemble.

Hay una diferencia esencial entre una superposición coherente de los estados  $|0\rangle_A$  y  $|1\rangle_A$ , y el ensemble probabilístico en el cual los estados  $|0\rangle_A$  y  $|1\rangle_A$  ocurren cada uno con probabilidades específicas. Por ejemplo, cuando se considera que los qubits están codificados en estados de una partícula con espín  $1/2$ , los estados que corresponden a la orientación del espín de la partícula con respecto a un eje determinado (generalmente el eje  $z$ ) generan un espacio de Hilbert de dos dimensiones, por lo tanto, sus elementos pueden usarse como qubits para procesar información cuánticamente. En este caso el qubit  $|0\rangle$  está definido por el estado de espín paralelo  $|\uparrow_z\rangle$  y el qubit  $|1\rangle$  por el estado de espín antiparalelo  $|\downarrow_z\rangle$ . Si se mide el espín a lo largo del eje  $x$  aplicando el operador  $\sigma_x$  en el estado  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle_A + |\downarrow_z\rangle_A)$  del sistema  $A$ , la Mecánica Cuántica establece que se obtendrá el resultado  $|\uparrow_x\rangle_A$  con probabilidad uno. Pero, como se ha dicho, un ensemble en el cual el estado  $|\uparrow_z\rangle_A$  y  $|\downarrow_z\rangle_A$  pueden ocurrir con probabilidad  $\frac{1}{2}$  está representado (ver Ec. (2.8)) por

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (|\uparrow_z\rangle \langle \uparrow_z| + |\downarrow_z\rangle \langle \downarrow_z|) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1} \end{aligned}$$

y la proyección en  $|\uparrow_x\rangle$  tiene un valor esperado

$$\text{tr}(|\uparrow_x\rangle \langle \uparrow_x| \rho) = \frac{1}{2},$$

lo que es más, esto puede ocurrir a lo largo de un eje con orientación arbitraria, es decir

$$\text{tr}(|\psi(\theta, \varphi)\rangle \langle \psi(\theta, \varphi)| \rho) = \frac{1}{2},$$

donde  $\theta$  y  $\varphi$  definen la orientación de este eje con respecto a los ejes inicial  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

En conclusión, si se prepara el estado  $\rho_{AB}$ , que se definió arriba, con  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$ , y medimos solamente el espín de  $A$  a lo largo de cualquier eje, sin tener conocimiento de lo que sucede con el espín de  $B$ , obtendremos un resultado completamente aleatorio, puede ocurrir el espín *up* o espín *down* con la misma probabilidad  $\frac{1}{2}$ , por ello se dice que  $\rho_A$  en la Ec. (2.8) representa un estado maximalmente mezclado.

La generalización al caso de sistemas bipartitos de cualquier dimensión es directa. Sea  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  donde  $\mathcal{H}_A$  ( $\mathcal{H}_B$ ) es el espacio de Hilbert del sistema  $A$  ( $B$ ). Esto significa que si  $\{|i\rangle_A\}$  y  $\{|\mu\rangle_B\}$  son las bases de  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  respectivamente, entonces el conjunto  $\{|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B\}$  es una base ortonormal en  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . De esta forma cualquier estado puro del sistema compuesto puede expandirse como

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i,\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$$

con  $\sum_{i,\mu} |a_{i,\mu}|^2 = 1$ . El valor esperado del observable  $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B$  que actúa, no trivialmente, sólo en el sistema  $A$  es

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_A \rangle &= {}_{AB} \langle \psi | \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B | \psi \rangle_{AB} \\ &= \sum_{j,\nu} a_{j,\nu}^* ({}_A \langle j | \otimes {}_B \langle \nu |) (\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B) \sum_{i,\mu} a_{i,\mu} (|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B) \\ &= \sum_{i,j,\mu} a_{j,\mu}^* a_{i,\mu} {}_A \langle j | \mathbf{M}_A | i \rangle_A \\ &= \text{tr}(\mathbf{M}_A \rho_A) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\rho_A &= \text{tr}_B (|\psi\rangle_{AB} \langle\psi|) \\ &\equiv \sum_{i,j,\mu} a_{j,\mu}^* a_{i,\mu} |i\rangle_{AA} \langle j|\end{aligned}$$

Esto significa que el operador densidad del sistema  $A$  se obtiene, a partir del estado puro de un sistema global, trazando el operador densidad asociado a este estado sobre los grados de libertad del sistema  $B$ .  $\rho_A$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $\rho_A$  es autoadjunta:  $\rho_A = \rho_A^\dagger$ .
2.  $\rho_A$  es positiva: o sea, se tiene  ${}_A \langle\psi| \rho_A |\psi\rangle_{AB} = \sum_\mu |\sum_i a_{i\mu} {}_A \langle\psi|i\rangle_A|^2 \geq 0$  para cualquier  $|\psi\rangle_A$ .
3.  $\text{tr}(\rho_A) = 1$ . De la normalización de  $|\psi\rangle_{AB}$  sigue inmediatamente que  $\text{tr}(\rho_A) = \sum_{i,\mu} |a_{i,\mu}|^2 = 1$ .

De donde se sigue que  $\rho_A$  puede ser diagonalizado, los autovalores son todos reales y no negativos, y que la suma de los autovalores es uno. Si el estado del sistema puede representarse como un rayo del espacio de Hilbert asociado, se llama *estado puro*, en caso contrario se llama *estado mezcla* y está representado por un operador densidad. Una consecuencia evidente es que si el estado  $|\psi\rangle_A$  es puro, el operador densidad  $\rho_A = |\psi\rangle_{AA} \langle\psi|$  es un *proyector* sobre el subespacio generado por  $|\psi\rangle_A$ . Entonces el operador densidad de un estado puro tiene la propiedad  $\rho^2 = \rho$ .

El operador densidad puede ser escrito en la base en la cual éste es diagonal como

$$\rho_A = \sum_a p_a |\psi_a\rangle \langle\psi_a|,$$

donde  $0 < p_a \leq 1$  y  $\sum_a p_a = 1$ . En general  $\text{tr}(\rho_A^2) = \sum_a p_a^2 < \sum_a p_a = 1$ . Lo que significa que, en general, el sistema  $A$  no está en un estado puro, es decir, que la fase relativa de los autoestados  $|\psi_a\rangle$  es experimentalmente inaccesible. En este caso  $\rho_a$  se dice que representa una *superposición incoherente* de los estados  $\{|\psi_a\rangle\}$ .

Nuevamente cualquier observable  $\mathbf{M}$  que actúa en el subsistema tiene un valor medio dado por

$$\langle\mathbf{M}\rangle = \text{tr}(\mathbf{M}\rho) = \sum_a p_a \langle\psi_a| \mathbf{M} |\psi_a\rangle.$$

Se ve que también en el caso general  $\rho$  puede describirse como un ensemble de estados puros, en los cuales cada estado  $|\psi_a\rangle$  ocurre con probabilidad  $p_a$ . Cuando todos los  $p_a$  son todos iguales a  $1/D$ , donde  $D$  es la dimensión del espacio de Hilbert de  $A$ , las fases relativas son completamente aleatorias, y el sistema estará en un *estado maximalmente mezclado*.

### 2.1.2. La ecuación maestra.

Al estudiar el comportamiento de los sistemas cuánticos en interacción con su medio ambiente surgen algunas dificultades. La primera dificultad es que la evolución ya no es unitaria, puesto que el sistema en este caso pasa a ser un sistema abierto. Esto significa que el sistema y el medio ambiente pueden intercambiar información permanentemente. En este intercambio, el sistema entrega información al medioambiente provocando disipación del sistema y el medioambiente puede retroalimentar parte de esa información al sistema y provocar fluctuaciones de las variables dinámicas del sistema. Entonces al describir el comportamiento de sistemas cuánticos abiertos deben tomarse en cuenta estos efectos debido a la presencia del medio. La evolución del sistema está descrita por el operador densidad  $\rho_S$ . La evolución de este operador densidad se describe, en una buena aproximación, mediante una ecuación diferencial. La ecuación diferencial que obedece el operador densidad del sistema se conoce como *ecuación maestra*.

En principio, la evolución del sistema puede describirse de forma unitaria, extendiendo el espacio de Hilbert para que incluya las variables del medioambiente, entonces la evolución será unitaria en

un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ . En estas condiciones la evolución del conjunto sistema y medio ambiente estará descrita por la ecuación de Schrödinger. Dado que el medio ambiente posee una gran cantidad de variables no se tiene una descripción completa de sus condiciones iniciales, por tanto la única información disponible que se tiene inicialmente es la contenida en  $\rho_S(t)$ .

Adicionalmente a esta dificultad se debe tomar en cuenta que el operador densidad a un tiempo posterior  $\rho_S(t+dt)$  depende no sólo de la condición inicial  $\rho_S(t)$ , sino también del operador densidad del sistema en tiempos anteriores. La razón para esto es que el medio ambiente  $R$  retiene una *memoria* del estado del sistema a tiempos anteriores y puede transferir esta información al sistema  $S$  en un tiempo posterior a  $t$ . Un sistema abierto, ya sea clásico o cuántico, es *disipativo* debido a que la transferencia de información en forma de energía ocurre desde el sistema hacia el medio ambiente. Como el sistema es abierto también puede fluir información hacia el sistema lo que provoca *fluctuaciones* no Markovianas del sistema (éste es el contenido del *teorema de fluctuación-disipación*) [28].

Las fluctuaciones son inevitables, por tanto el sistema no evoluciona de una forma Markoviana en ningún caso exacto. Sin embargo, en muchos contextos, la descripción tipo Markov es una buena aproximación. Para determinar las circunstancias bajo las cuales es aceptable una descripción de tipo markoviana del sistema, debe establecerse un régimen en cual haya una separación clara entre el tiempo típico de correlación de las fluctuaciones y la escala de evolución temporal que queremos seguir. Si se supone que  $(\Delta t)_{amb}$  es el tiempo que le toma al reservorio “olvidar” la información que adquirió del sistema, es decir que después de este tiempo puede considerarse que la información del sistema se perdió para siempre y se puede desprestigiar la posibilidad de que sea retroalimentada al sistema influyendo en la evolución dinámica subsecuente.

Si se incorpora la granularidad temporal (“coarse-graining”) en la descripción del sistema, esto significa que se supone se observa la dinámica a través de un filtro que apantalla las componentes de frecuencias altas del movimiento  $\omega \gg (\Delta t)_{gran}^{-1}$ . Debe ser posible una descripción de tipo Markov si  $(\Delta t)_{amb} \ll (\Delta t)_{gran}$ ; en este caso puede desprestigiar la memoria del reservorio, porque somos incapaces de resolver ese efecto. Esto es lo que se conoce como “aproximación de Markov” y será útil en el caso en el cual la escala de la dinámica que queremos observar es grande comparada con  $(\Delta t)_{gran}$ . Por ejemplo, si la escala de amortiguamiento de un sistema es  $(\Delta t)_{am}$  y ésta satisface

$$(\Delta t)_{am} \gg (\Delta t)_{gran} \gg (\Delta t)_{amb}. \quad (2.9)$$

El medio ambiente se modela por un reservorio a cierta temperatura, por ello usaremos el término *reservorio* en lugar de medio ambiente de aquí en adelante.

Si se quiere aplicar la aproximación de Markov en el caso de la física atómica tenemos que  $(\Delta t)_{res} \sim \hbar/kT \sim 10^{-14}$ s, donde  $T$  es la temperatura a la cual está el reservorio y  $k_B$  es la constante de Boltzman, esta escala de tiempo es varios órdenes de magnitud menor comparada con la tasa de decaimiento del átomo desde un nivel excitado.

La ecuación maestra describe apropiadamente la evolución de un sistema cuántico abierto si se considera que la evolución es *Markoviana*[29]. En este caso la evolución de la matriz densidad  $\rho_S(t)$  está gobernada por una ecuación diferencial en  $t$ , de primer orden, esto implica que la matriz densidad al tiempo  $t+dt$ ,  $\rho_S(t+dt)$  está completamente determinada por la matriz densidad  $\rho_S(t)$ .

El modelo empleado para el reservorio depende del sistema, a continuación esquematizamos algunos de los modelos y la ecuación maestra resultante en cada caso.

**Oscilador Armónico Amortiguado.** En el modelo más simple se considera al sistema como un Oscilador Armónico que interactúa débilmente con un conjunto muy grande de osciladores armónicos. La dinámica del sistema total está determinado por el Hamiltoniano

$$H = H_S + H_R + H_{S-R} \quad (2.10)$$

donde  $H_S$ , es el Hamiltoniano libre del sistema, en este caso está dado por

$$H_S = \hbar\omega a^\dagger a \quad (2.11)$$

$a^\dagger$ ,  $a$  representa los operadores de creación y aniquilación de un cuanto de energía del oscilador.  $H_B$  representa el Hamiltoniano libre del reservorio dado por

$$H_R = \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j \quad (2.12)$$

y los operadores  $b_j^\dagger$  y  $b_j$  representan operadores que crean o destruyen un cuanto de energía en el  $j$ -ésimo oscilador del reservorio. Los operadores del sistema y los del reservorio satisfacen relaciones de conmutación dadas por

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}, \quad [b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk}. \quad (2.13)$$

El acoplamiento sistema–reservorio puede escogerse lo más general posible, pero en este caso suponemos válida la aproximación de onda rotante, en la cual se mantiene solamente los términos contrarotantes, tales como  $a^\dagger b_j$  o  $b_j^\dagger a$ . En esta aproximación se puede escribir el Hamiltoniano de interacción en la forma

$$H_{S-R} = \sum_j \hbar g_j (a^\dagger b_j + a b_j^\dagger), \quad (2.14)$$

con  $g_j$  constantes de acoplamiento reales.

La matriz densidad total la representamos por  $\rho_{SR}$  mientras que la matriz densidad del sistema se encuentra trazando ésta sobre las variables del reservorio, es decir  $\rho_S = \text{Tr}_R(\rho_{SR})$ . Análogamente la matriz densidad del reservorio estará dada por  $\rho_R = \text{Tr}_S(\rho_{SR})$ . El procedimiento para derivar la ecuación maestra puede resumirse en los siguientes pasos

1. Escribir la ecuación de Liouville para  $\rho_{SR}$ , la cual está dada por

$$i\hbar \frac{d\rho_{SR}}{dt} = [H, \rho_{SR}] \quad (2.15)$$

2. Integrar formalmente la ecuación de Liouville y sustituir la solución formal en la ecuación original sujeta a la condición inicial

$$\rho_{SR}(t=0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0) \quad (2.16)$$

Esta condición asume que inicialmente el sistema y el reservorio están no están correlacionados. Adicionalmente, se supone que inicialmente el reservorio es básicamente un baño térmico a temperatura  $T$  que está descrito por

$$\rho_B = \frac{\prod_j \exp(-\hbar\omega_j b_j^\dagger b_j / k_B T)}{\text{tr}_B \prod_j \exp(-\hbar\omega_j b_j^\dagger b_j / k_B T)}.$$

3. Trazar sobre las variables del reservorio tomando para ello en cuenta la aproximación de Markov que en términos de la matriz densidad puede escribirse como

$$\rho_{SR}(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_R(0) \quad (2.17)$$

lo cual expresa el hecho que, en la escala de tiempo de evolución del sistema que se consideran, el reservorio no ha evolucionado.

Este procedimiento es estándar para la derivación de cualquier ecuación maestra, en el caso del oscilador armónico amortiguado por el baño de osciladores se obtiene [29, 63]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S}{dt} = & -\frac{\gamma}{2} (1 + \bar{n}(\omega)) (\rho_S a^\dagger a + a^\dagger a \rho_S - 2a \rho_S a^\dagger) \\ & -\frac{\gamma}{2} \bar{n}(\omega) (\rho_S a a^\dagger + a a^\dagger \rho_S - 2a^\dagger \rho_S a) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $\gamma = 2\pi g^2(\omega)D(\omega)$  es la tasa de amortiguamiento del oscilador armónico, que en general depende de la frecuencia.  $D(\omega)$  es la función densidad de energía, que debe introducirse para pasar de las variables discretas del baño al continuo.  $\bar{n}(\omega)$  es el número medio de fotones térmicos presentes en el reservorio.

Un caso particular muy usado se obtiene cuando  $T = 0$  en ese caso  $\bar{n}(\omega) = 0$ , entonces

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \frac{\gamma}{2} \left( 2a\rho_S a^\dagger - \rho_S a^\dagger a - a^\dagger a \rho_S \right) \quad (2.19)$$

La estructura que se ve en el segundo miembro de las Ec. (2.18) y (2.19) es típica de los sistemas disipativos descritos por ecuaciones maestras, y se llama *estructura tipo Limblad*.

**Atomo de dos niveles en un baño térmico.** El procedimiento en este caso es similar, lo que es diferente son las variables del sistema, que en este caso estará descrito por operadores atómicos. Es decir, se tiene un átomo de dos niveles interactuando con un reservorio de osciladores armónicos. Físicamente esto puede representar un átomo que decae irreversiblemente cuando interactúa con un conjunto infinito de modos del campo electromagnético en el estado de vacío. El Hamiltoniano total de este problema es

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j + \sum_j \hbar \left( g_j \sigma b_j^\dagger + g_j^* \sigma^\dagger b_j \right). \quad (2.20)$$

donde  $\sigma^\dagger$  y  $\sigma$  son los operadores de subida y bajada que describen las transiciones del átomo entre los niveles excitado y fundamental. El procedimiento descrito anteriormente muestra que la ecuación maestra resultante es análoga, salvo por el cambio de operadores del sistema

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow a \\ \sigma^\dagger &\rightarrow a^\dagger \end{aligned}$$

por tanto la ecuación maestra es ahora

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{At}}{dt} &= -\frac{\gamma}{2} (1 + \bar{n}(\omega)) \left( \rho_{At} \sigma^\dagger \sigma + \sigma^\dagger \sigma \rho_{At} - 2\sigma \rho_{At} \sigma^\dagger \right) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \bar{n}(\omega) \left( \rho_{At} \sigma \sigma^\dagger + \sigma \sigma^\dagger \rho_{At} - 2\sigma^\dagger \rho_{At} \sigma \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

en este caso  $\gamma$  se interpreta como la tasa de decaimiento del nivel excitado del átomo.

### Oscilador Armónico Amortiguado en un baño Comprimido

Si se repite el procedimiento descrito antes para el caso de un baño de osciladores que inicialmente no están en un baño térmico sino que cada uno está en un estado comprimido, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\gamma}{2} (N + 1) \left( 2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} (N) \left( 2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} (M) \left( 2a^\dagger \rho a^\dagger - \rho a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger \rho \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} (M^*) \left( 2a\rho a - \rho a a - a a \rho \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde

$$\left\langle b_k^\dagger b_{k'} \right\rangle = N \delta_{k,k'} \quad (2.23)$$

y  $N = \sinh^2 r$ ,

$$\left\langle b_k b_{k'} \right\rangle = \langle b_k b_{-k} \rangle \delta_{k',-k} \quad (2.24)$$

con  $M = -\exp(i\theta) \sinh r \cosh r$ .  $M$  y  $N$  obedecen las relaciones

$$\sqrt{N(N+1)} = \sqrt{\sinh^2 r \cosh^2 r} = |M| \quad (2.25)$$

Se ve como las constantes  $M$  y  $N$  que aparecen en la ecuación maestra están directamente relacionadas con las fluctuaciones de los operadores del baño, dado que los osciladores del baño están en un estado comprimido se explica la relación con el *factor de compresión*  $r$  de la incertidumbre y el ángulo  $\theta$  que define una rotación de la incertidumbre en el espacio de las fases (ver Sec. 5.2.1) [63, 64]. Este tipo de estados de los osciladores armónicos, y más específicamente del campo electromagnético se estudiarán en el capítulo 5, en el cual se propone una forma de prepararlos usando dos modos en una cavidad que interactúan con átomos.

Durante el desarrollo de esta tesis se ha enfocado el efecto de la disipación tanto en la coherencia de los estados de los qubits como en el entrelazamiento, por lo tanto esta sección tendrá directa relación con el capítulo 3

**Decoherencia.** La decoherencia constituye la pérdida de información cuántica del sistema debido a su interacción con el medio ambiente. Si el medioambiente dispersa frecuentemente al sistema, y no se monitorea el estado del medioambiente, entonces los términos fuera de la diagonal de la matriz densidad del sistema decaen rápidamente en una base preferida (típicamente una base espacialmente localizada, seleccionada por la naturaleza del acoplamiento entre el sistema y el medioambiente). La escala de tiempo de la decoherencia está impuesta por la tasa de dispersión, la que puede ser mucho más grande que la tasa de amortiguamiento del sistema. Esto hace posible que se puedan obtener estados coherentes en un estado estacionario. Esto sucede porque el sistema rápidamente alcanza su estado estacionario (estado en el cual los valores medios de las variables dinámicas no cambian más en el tiempo), sin embargo, debido a la diferencia en escalas de tiempo, la decoherencia no se ha perdido totalmente. En esta tesis se ha estudiado el efecto de sistemas disipativos como estos en el entrelazamiento, por lo tanto esta sección tendrá directa relación con el capítulo 3. En el apéndice A se presenta un modelo de disipación diferente, conocido como Teoría Input–Output[65].

En ésta tesis se abordó el estudio del comportamiento de los sistemas físicos, usados para el procesamiento de información, en presencia del medio ambiente. Estos sistemas en general no existen aislados, por lo tanto su evolución no es unitaria, justamente una de las consideraciones que se deben tener en cuenta es como influye el medio ambiente en las propiedades de los estados usados para la codificación de información, desde esta perspectiva los modelos de disipación juegan un papel importante cuando se quiere obtener un primer acercamiento al estudio de la influencia del medio ambiente en los recursos físicos del procesamiento de información cuántica, propiedades fundamentales como el entrelazamiento y la coherencia deben estudiarse a fondo en cada sistema en el que se desea implementar tal o cual modelo propuesto por la Teoría de la Información Cuántica. En el capítulo 3 se presenta una forma de estudiar el comportamiento del entrelazamiento de dos qubits a tiempos cortos.

### 2.1.3. Computación cuántica.

El modelo de computación cuántica permite explorar el efecto del comportamiento cuántico de los sistemas físicos en los procesos de computación. A continuación haremos un breve resumen de los principales conceptos usados en Teoría Cuántica de la Computación.

#### *Compuertas Lógicas Cuánticas para qubits.*

En un proceso de computación implica la manipulación de un número finito de entradas para obtener otro conjunto de qubits de salida, de esta forma el proceso de computación esta determinado por la manipulación apropiada de las entradas que conducen a la obtención de las salidas. En último caso, este proceso permite resolver el problema computacional planteado.

En general el proceso de computación se modela mediante una operación unitaria que actúa sobre un número de entradas finito  $n$  y arroja las salidas, esta operación unitaria, recibe el nombre genérico de *Compuerta Lógica*. A continuación describimos las compuertas más conocidas. En particular, se muestra que es posible definir un conjunto de operaciones sobre un qubit y una

compuerta condicional y a partir de ellas construir, eficientemente, cualquier compuerta que actúe sobre  $n$  qubits.

**Compuertas para qubits individuales.** Como se ha dicho, un qubit es un elemento de un espacio de Hilbert de dos dimensiones. Un conjunto particular de operaciones, que actuando sobre un qubit produzca como resultado otro qubit, lo constituyen aquellas que tienen asociadas un operador lineal definido en este espacio. Los operadores lineales definidos en un espacio de Hilbert de dos dimensiones tienen siempre asociada una representación matricial. En Computación Cuántica son relevantes solo aquellas transformaciones unitarias entre qubits, es decir, están representadas por una matriz cuyo determinante es  $\pm 1$ . En el caso de una partícula con espín  $1/2$ , las operaciones unitarias que se realizan sobre los estados de espín están asociadas directamente con las rotaciones del sistema alrededor de un determinado eje  $\hat{n} \equiv (n_1, n_2, n_3)$ . Las rotaciones son operaciones espaciales que se efectúan sobre el sistema en cuestión. Una rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $\hat{n}$  tienen una representación (irreducible) en términos de las matrices de Pauli ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) dada por

$$R(\hat{n}, \theta) = \mathbf{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.26)$$

Si el sistema físico usado para definir el qubit no es una partícula con espín  $1/2$ , las transformaciones unitarias que se efectúan sobre un qubit aún están relacionadas con la representación expresada en (2.26). Una transformación unitaria general sobre qubits individuales debe ser básicamente una rotación por un factor de fase global [66], es decir

$$U = e^{i\alpha} R(\hat{n}, \theta) \quad (2.27)$$

Debido a su uso frecuente se han dado nombres especiales a casos particulares de estas transformaciones.

**Hadamard, X, Y, Z:** Estas compuertas pueden considerarse como una transformación unitaria dada por la Ec. (2.27) en la cual phase global está definida mediante  $\alpha = -\pi/2$  y elecciones particulares del eje de rotación.

La compuerta Hadamard se genera mediante la rotación alrededor del eje definido por  $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)$ , y el ángulo rotado es igual a  $\theta = \pi$ . Esta rotación transforma el eje  $x$  en el eje  $z$  y viceversa; entonces

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene las propiedades

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{1}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\sigma_1\mathbf{H} &= \sigma_3 \\ \mathbf{H}\sigma_3\mathbf{H} &= \sigma_1. \end{aligned}$$

Si se escogen  $\hat{n}$  a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y  $\theta = \pi$  se obtienen (las matrices de Pauli) las compuertas X, Y, Z, dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= -iR(\hat{n} = \hat{i}, \theta = \pi) \\ &= \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y} &= -iR(\hat{n} = \hat{j}, \theta = \pi) \\ &= \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z} &= -iR(\hat{n} = \hat{k}, \theta = \pi) \\ &= \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Adicionalmente se definen dos compuertas;

**Compuerta de Fase (S)**, se define como[67]

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

y una compuerta  $\pi/8$  denotada **T**

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} = e^{i\pi/8} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix}$$

Cualquier otra compuerta se puede decomponer en la forma

$$U = e^{i\alpha} R(\hat{i}, \beta) R(\hat{j}, \gamma) R(\hat{k}, \delta).$$

*Compuertas de dos qubits* Las compuertas sobre dos qubits son principalmente las compuertas condicionales, que son operaciones unitarias que se ejecutan sobre un qubit llamado *blanco* en dependencia del estado de otro qubit llamado *control*[7]. La más conocida de todas es la C-NOT, que es una generalización de la compuerta clásica XOR.

La XOR clásica es una compuerta que actúa sobre dos bits de entrada uno se llama control y el otro blanco. El bit blanco cambia de 0 a 1 y viceversa cuando el bit de control está en el estado 1, mientras que lo deja inalterado si el control está en el estado 0. el efecto de la acción de la XOR puede resumirse en lasiguiente tabla

bit $a$ : control	bit $b$ : Blanco	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

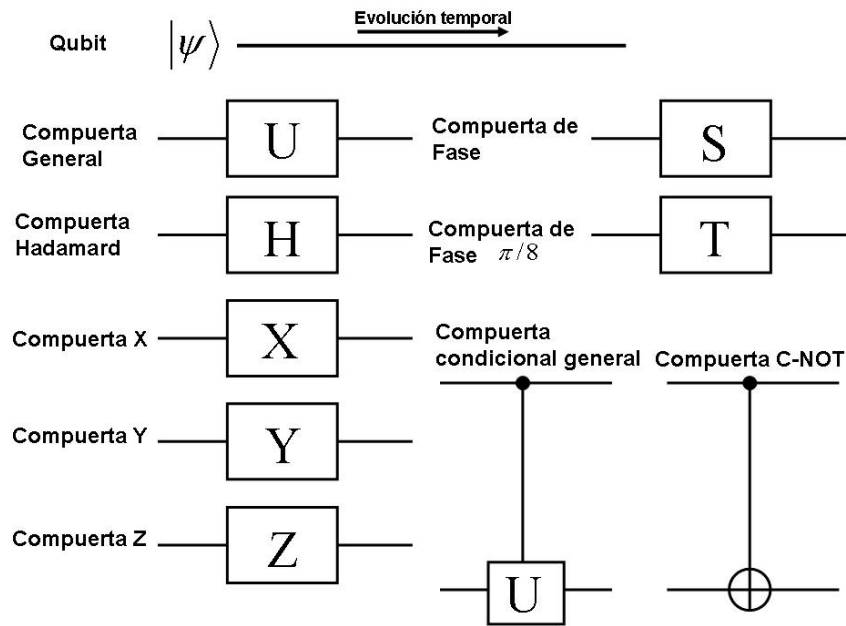


Fig. 2.1: Algunas compuertas lógicas cuánticas usadas frecuentemente.

Es decir realiza una suma módulo 2 ( $a \oplus b$ ). Esta compuerta evidencia la siguiente tabla de verdad.



Análogamente, en el caso cuántico la compuerta C-NOT se puede representar matemáticamente por

$$\mathbf{CNOT} : |a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$$

donde  $\oplus$  denota también la operación aritmética de suma módulo 2. Esta compuerta cumple que

$$(\mathbf{CNOT})^2 = 1$$

el bit  $a$  es el control (fuente) y el bit  $b$  es el blanco (target).

Una **compuerta condicional general** consiste en aplicar una transformación unitaria sobre el qubit blanco cuando el qubit de control se encuentra en el estado  $|1\rangle$  mientras que no se aplica ninguna operación cuando el control está en el estado  $|0\rangle$ .

*Circuitos Cuánticos* Se ha establecido una forma gráfica de representar los procesos de Teoría de la Información Cuántica, esta se conoce como circuitos cuánticos. En un circuito cuántico (ver la Fig. (2.1)) se representa a los qubits evolucionando en el tiempo por líneas horizontales (la evolución es hacia la derecha) y, se usan diversos símbolos para representar las operaciones sobre un qubit o sobre dos qubits.

Un circuito que permite cambiar de la base estándar  $\{|00\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  a la base de estados maximalmente entrelazados  $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$  y la aplicación de la transformación en el orden invertido permite hacer el cambio contrario. Este circuito cuántico consiste de dos qubits una compuerta Hadamard y una compuerta condicional CNOT, el circuito se muestra en la Fig. (2.2). El resultado de este circuito está dado por

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle \rightarrow |\phi^+\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |1\rangle \rightarrow |\psi^+\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) |0\rangle \rightarrow |\phi^-\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) |1\rangle \rightarrow |\psi^-\rangle. \end{aligned}$$

### Entanglement

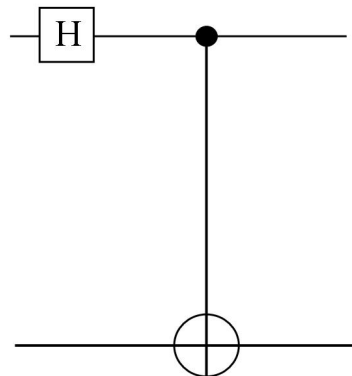


Fig. 2.2: Circuito de generación de entrelazamiento

Si se aplica el circuito invertido a un estado entrelazado, y se hace una medición sobre ambos qubits, pueden aprenderse los valores tanto de la fase y de la paridad.

La parte no local del circuito es la operación determinada por la compuerta C-NOT, esta es efectivamente la compuerta que genera o quita el entrelazamiento. Si las partes que quieren

comunicarse están muy separadas en el espacio, entonces se requeriría una compuerta C-NOT interestelar (lo cual es ciertamente utópico) para generar un estado entrelazado entre las diferentes partes o para leer los dos bits de información que es posible codificar en él. En la práctica esta operación global, requerida en la manipulación de estados entrelazados, se genera cuando los dos sistemas están juntos. Una vez generado un estado entrelazado entre los dos qubits se reparten entre dos sujetos que deseen comunicarse. Idealmente, los qubits permanecerán en un estado entrelazado, estableciendo de esta manera un canal cuántico de comunicación entre las partes que los poseen.

Consideremos dos partes, A y B, que deben establecer comunicación, por ejemplo, en un caso de emergencia, para ello con anterioridad se genera un estado entrelazado entre dos qubits y se reparte los sistemas entre A y B antes de que se alejaron una gran distancia. Cuando llega el momento de la emergencia, la parte A quiere enviarle dos bits de información, pero necesita hacerlo simultáneamente dada la premura del tiempo, entonces se da cuenta que tiene un canal cuántico que estableció con B. Usando este canal toma el qubit que posee y lo somete a varias operaciones locales, para codificar los dos bits y envía el qubit a la parte B. B recibe el qubit y puede en principio medir sobre los qubits conjuntamente y recuperar el mensaje que fue codificado.

Adicionalmente, si un espía intercepta el qubit, no puede leer el mensaje, necesita del otro, pues la cantidad de información que posee el qubit interceptado por A es  $\rho_A = \frac{1}{2}1_A$ . Por lo tanto el canal de comunicación cuántica es seguro.

La situación presentada anteriormente muestra que es posible codificar dos bits de información en un sólo qubit, esto se conoce como *codificación cuántica densa* (o Quantum Dense Coding) [69]. Y es el primer ejemplo donde el entrelazamiento se usa como recurso por dos partes para establecer un protocolo de comunicación. En este caso es además seguro.

La utilización del entrelazamiento como recurso de procesamiento de Información Cuántica, se ha mostrado en diversos protocolos como la Distribución de Claves Cuántica, que permiten establecer canales de comunicación seguros. Los algoritmos de búsqueda y de computación paralela, etc.

#### 2.1.4. Compuertas cuánticas universales.

La computación cuántica persigue la realización de tareas computacionales mediante la codificación de la información en la evolución dinámica de los sistemas cuánticos. Para ello se emplean un número finito  $n$  de registros, los cuales están constituidos, generalmente, por muchos sistemas cuánticos idénticos de dos niveles. Los algoritmos cuánticos pueden representarse, por lo tanto, mediante operaciones unitarias y mediciones proyectivas (medidas en el sentido definido por Von Neumann) que se efectúa sobre un registro representado por un vector estado de  $2^n$  dimensiones. Estas operaciones unitarias se llaman también *compuertas cuánticas*. Se sabe clásicamente que al implementar una compuerta sobre tres bits, llamada compuerta Toffoli y cualquier compuerta arbitraria sobre un bit, es posible simular computacionalmente el cálculo de cualquier función. Deutsch encontró una compuerta cuántica equivalente a la compuerta de Toffoli, y dada la posibilidad de realizar cualquier compuerta cuántica unitaria sobre un qubit individual, permitió concluir que es posible realizar cualquier modelo de computación clásica usando qubits, y más aún permite la realización de cualquier modelo de computación cuántica. Posteriormente se llegó a la conclusión de que son necesarias únicamente compuertas sobre qubits individuales y la posibilidad de realizar una compuerta C-NOT, para descomponer cualquier compuerta cuántica unitaria  $U$  en un espacio de dimensión  $2^n \times 2^n$  asociado a  $n$  qubits, en una secuencia de compuertas sobre qubits y C-NOT[73].

Un determinado proceso de computación cuántica requiere la realización de una operación unitaria  $U$  sobre los  $n$  qubits que constituyen las entradas, la complejidad de la implementación depende del número de compuertas lógicas elementales que se requieren para implementar la compuerta  $U$ . Una implementación óptima requiere la menor cantidad posible de compuertas lógicas elementales, esto es importante por dos razones, los tiempos de ejecución son más cortos y alternativamente los errores introducidos en la ejecución son menores.

En la práctica no se necesita que existan todas las descomposiciones posibles sino que la se-

cuencia de compuertas se aproxime con arbitraria exactitud a la compuerta lógica  $U$ . Un conjunto discreto de compuertas lógicas cuánticas elementales que permitan la descomposición, con aproximación arbitraria, de cualquier compuerta lógica  $U$ , se dice que este conjunto de *compuertas son Universales*. En el caso de qubits las compuertas sobre un qubit y las compuertas C-NOT sobre dos qubits son universales.

A continuación ilustraremos como una operación unitaria de dimensión  $3 \times 3$  se puede construir con el producto de tres matrices unitarias lo cual permitirá visualizar una extensión del método hacia dimensiones mayores.

Consideremos la matriz

$$U = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

que se supone que es unitaria, entonces esta matriz unitaria siempre se puede descomponer de tal forma que  $U_3 U_2 U_1 U = 1$  donde  $U_1, U_2, U_3$  son también unitarias pero actuando sobre un espacio de dos dimensiones. Estas matrices son

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si  $b = 0$  y

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{a^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{b^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{a^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuando  $b \neq 0$ . Si se encuentra el producto  $U_1 U$  se obtiene una matriz de la forma

$$U_1 U = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ 0 & e' & h' \\ c' & f' & j' \end{pmatrix},$$

donde los nuevos elementos son una consecuencia del producto pero no nos preocupamos que son exactamente. Si ahora se elije  $U_2$  de tal forma que cuando  $c' = 0$

$$U_2 = \begin{pmatrix} a'^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y si  $c' \neq 0$  se tiene

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{a'^*}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} & 0 & \frac{c'^*}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c'}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} & 0 & \frac{-a'}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por  $U_1 U$  se tiene

$$U_2 U_1 U = \begin{pmatrix} 1 & d'' & g'' \\ 0 & e'' & h'' \\ 0 & f'' & j'' \end{pmatrix},$$

y como  $U, U_1, U_2$  son unitarias entonces también  $U_2 U_1 U$  será unitaria, en consecuencia  $d'' = g'' = 0$ , con lo cual se elige la última operación unitaria  $U_3$  como

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e''^* & h''^* \\ 0 & f''^* & j''^* \end{pmatrix},$$

cuando se multiplican  $U_3U_2U_1U = I$ , con lo cual  $U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger$ . El conjunto de operaciones  $\{U_i\}$  constituyen una descomposición de la matriz  $U$ . Es claro que esta descomposición actúa de forma diferente de la trivial sólo en un espacio de dos dimensiones.

Un procedimiento similar se puede emplear para descomponer una compuerta arbitraria  $U$  de cualquier dimensión  $d$  siempre en términos de matrices unitarias en un espacio bidimensional.

Ahora se mostrará como se puede implementar una compuerta  $U$  de dos niveles arbitraria sobre  $n$  qubits en términos de compuertas arbitrarias sobre un qubit individual y la ayuda de una C-NOT.

Suponga una operación  $U$  de dos niveles, en un computador cuántico de  $n$  qubits. Esta operación actúa no trivialmente en un espacio generado por los dos estados computacionales  $|s\rangle$  y  $|t\rangle$ , donde  $s = s_1\dots s_n$  y  $t = t_1\dots t_n$  constituyen las descomposiciones binarias de los números  $s$  y  $t$ . Veamos un ejemplo en el cual  $s = 101001$  y  $t = 110011$ , ahora conectemos  $s$  y  $t$  por una secuencia de arreglos que difieren sólo en un símbolo del anterior

101001

101011

100011

110011.

Cada secuencias  $g_m$  se conoce como elemento de un *código Gray* y la secuencia misma es el código, por lo tanto considerando que  $s$  y  $t$  pueden diferir en  $n$  símbolos se tiene que habrán al menos  $m \leq n + 1$  elementos. Además se tiene que  $g_1 = s$  y  $g_m = t$ .

La implementación entonces consiste en definir secuencias de compuertas que cambien el estado en la forma  $|g_2\rangle \dots \rightarrow |g_{m-1}\rangle$ . Entonces realizamos una operación controlada considerando como blanco el único qubit en los que difieren  $|g_{m-1}\rangle$  y  $|g_m\rangle$ , entonces se debe regresar al paso inicial aplicando la secuencia de compuertas en orden invertido.

Hemos explicado como decomponer una matriz unitaria de dimensión arbitraria finita en una secuencia de operaciones unitarias que actúan entre dos niveles. Además se ha mostrado que cada una de estas compuertas unitarias entre dos niveles, definidas en  $n$  qubits, se puede realizar con una secuencia de compuertas sobre qubits individuales y compuertas C-NOT. Entonces se tiene al final que cualquier operación unitaria  $U$  sobre un conjunto de  $n$  qubits se puede realizar con compuertas sobre qubits individuales y compuertas C-NOT. Esto significa que las compuertas sobre qubits individuales y la C-NOT son universales.

Para implementar una compuerta unitaria  $U$  que actúa sobre  $n$  qubits puede implementarse usando un circuito que contiene una cantidad de compuertas sobre qubits individuales y C-NOT de por lo menos  $O(n^2 4^n)$ , lo cual es un caso no óptimo. El siguiente paso es escoger un conjunto discreto de compuertas que permitan la realización de cualquier compuerta unitaria  $U$  y que resulte resistente a los errores debidos al ruido. Un primer conjunto de este tipo de compuertas lo constituyen la compuerta de fase, la compuerta  $\pi/8$ , la compuerta C-NOT y la Hadamard. El problema de establecer circuitos cuánticos que posean un número óptimo de compuertas está todavía abierto. Por ejemplo, en la referencia [68] se reporta un realización de computación cuántica universal que requiere  $4^n$  compuertas individuales, y  $4^n - 2^{n+1}$  compuertas C-NOT.

### 2.1.5. El entrelazamiento como recurso del procesamiento de información cuántica

**Entrelazamiento.** Un estado puro bipartito se dice *separable* si es un producto directo de estados puros en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ ,

$$|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$$

por lo tanto, las matrices densidad reducidas  $\rho_A = |\varphi\rangle_{AA} \langle\varphi|$   $\rho_B = |\chi\rangle_{BB} \langle\chi|$  son puras. Cualquier estado que no puede ser expresado de esta forma es entrelazado, en este caso  $\rho_A$  y  $\rho_B$  representan estados mixtos.

Cabe aclarar que si un estado  $|\psi\rangle_{AB}$  de un sistema conjunto  $A$  y  $B$  es separable los sistemas componentes tienen cierto grado de correlación. En efecto, en un sistema de dos partículas con

espín  $1/2$ , se puede preparar el estado

$$|\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B,$$

entonces, a pesar de que este estado es separable, los sistemas mantienen cierta correlación, los dos tienen un espín que apunta en el mismo sentido. Sin embargo la correlación entre sistemas en un estado entrelazado tiene un carácter diferente. Como se mencionó antes la diferencia crítica está en el hecho de que las correlaciones implicadas en *el entrelazamiento no pueden crearse localmente*. El estado  $|\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B$  puede prepararse sin la necesidad de que los dos sistemas interactúen, se requiere solamente un mensaje (clásico) que diga que dos personas deben preparar un espín apuntando a lo largo del eje  $z$ . Pero si se quiere que las partículas sean preparadas en un estado de espín entrelazado tal como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B),$$

la única forma de lograrlo es aplicando una transformación unitaria colectiva. Las transformaciones unitarias locales de la forma  $\mathbf{U}_A \otimes \mathbf{U}_B$ , y mediciones locales realizadas por observadores en los sistemas A y B, *no pueden generar de ninguna manera correlaciones como las implicadas por un estado entrelazado de dos qubits*.

Las propiedades peculiares que presenta la codificación de la información en sistemas cuánticos dependen de las propiedades del *entrelazamiento cuántico*. Ya hemos destacado algunas propiedades de los estados entrelazados de dos sistemas y las implicaciones de esto en las observaciones hechas en cada sistema por separado.

Existen cuatro estados maximalmente entrelazados, llamados también *estados de Bell*, de dos qubits

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{AB} \pm |11\rangle_{AB}) \\ |\psi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{AB} \pm |10\rangle_{AB}). \end{aligned}$$

Se llaman maximalmente entrelazados porque cuando se trazan sobre las variables de uno de los dos subsistemas conducen a un estado descrito por

$$\rho_A = \text{Tr}(|\phi^\pm\rangle_{AB} \langle\phi^\pm|) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_A,$$

(y similarmente para  $\text{Tr} \rho_B = \mathbf{1}_B$ ). Esto significa que si se mide el espín (por ejemplo, si es un sistema de espines) a lo largo de cualquier eje, el resultado es completamente aleatorio. Entonces, si medimos localmente el sistema A o el sistema B, no adquirimos información a cerca de la preparación de este estado, (que estado lo generó) en su lugar simplemente se genera un bit (clásico) aleatorio. Esta situación contrasta con el caso en el cual cualquiera de los subsistemas está caracterizado por un qubit en un estado puro. En este último caso se puede preparar un bit de información preparando o  $|\uparrow_{\hat{n}}\rangle$  o  $|\downarrow_{\hat{n}}\rangle$  y puede recobrase el bit realizando medidas apropiadas a lo largo del eje  $\hat{n}$ .

Preparando uno de los cuatro estados maximalmente entrelazado, puede codificarse dos bits de información, uno es el bit de paridad (¿el sistema tiene los espines paralelos o antiparalelos, es decir se prepara  $|\phi^\pm\rangle_{AB}$  o  $|\psi^\pm\rangle_{AB}$ ?). El otro es la fase (el signo  $+$  o el  $-$ ) es decir ¿cuál de las dos superposiciones de paridad igual se prepara (por ejemplo,  $|\phi^+\rangle_{AB}$  o  $|\phi^-\rangle_{AB}$ )?. Esta información puede recobrase desarrollando mediciones ortogonales sobre la base  $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ . Pero, si los dos qubits están separados, no es posible recuperar tal información con sólo medir sobre cada sistema separadamente.

Lo que si está permitido es manipular localmente esta información. Cada uno de las partes pueden desarrollar transformaciones unitarias que cambian un estado maximalmente entrelazado en otro maximalmente entrelazado. Lo que no se pueden hacer localmente es alterar  $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2} \mathbf{1}$ . Esto significa que la información que están manipulando no puede leerse por ninguno de los dos.

Si se añade la posibilidad de intercambiar información (clásica) de los resultados que obtienen de las mediciones, pueden aprender, colaborando entre ellos, como están correlacionadas sus mediciones.

Matemáticamente, los estados entrelazados se caracterizan como autoestados simultáneos de los operadores que conmutan

$$\begin{aligned} &\sigma_1^{(A)} \sigma_1^{(B)} \\ &\sigma_3^{(A)} \sigma_3^{(B)}, \end{aligned}$$

el autovalor de  $\sigma_1^{(A)} \sigma_1^{(B)}$  es el bit de fase y el autovalor de  $\sigma_3^{(A)} \sigma_3^{(B)}$  es el bit de paridad. La conmutación de éstos operadores, que puede verificarse fácilmente a partir de su representación matricial, implica que pueden medirse (usando un aparato de medición global) simultáneamente, en principio, las propiedades asociadas a ellos.

Por otro lado, si se desarrollan medidas locales no pueden medirse simultáneamente las dos propiedades. Dado que  $\sigma_3^{(A)} \otimes 1_B$  y  $1 \otimes \sigma_3^{(B)}$  conmutan simultáneamente con  $\sigma_3^{(A)} \sigma_3^{(B)}$  entonces las dos partes podrían ponerse de acuerdo en medir a lo largo del eje  $z$  y preparar un autoestado de  $\sigma_3^{(A)} \sigma_3^{(B)}$ , sus mediciones no perturban el bit de paridad, entonces pueden combinar su información para inferir la paridad del estado. Pero  $\sigma_3^{(A)} \otimes 1_B$  y  $1 \otimes \sigma_3^{(B)}$  no conmutan con el operador de fase  $\sigma_1^{(A)} \otimes \sigma_1^{(B)}$ , entonces, la Mecánica Cuántica establece que el bit de fase será alterado. Si el acuerdo es medir en la dirección  $x$  entonces obtendrán información de la fase del estado pero no podrán distinguir la paridad.

Si las dos partes están juntas, pueden operar sobre los qubits conjuntamente. Entonces aplicando una transformación unitaria apropiada pueden rotar la base entrelazada  $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$  a una base sin entrelazamiento  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . Entonces pueden medir sus qubits separadamente para saber cual es el estado entrelazado en el que estuvieron preparados sus sistemas.

### 2.1.6. Medidas de entrelazamiento

Se ha mostrado brevemente en la sección anterior que los estados entrelazados de dos sistemas bipartitos pueden usarse como recurso para diferentes procesos de Computación Cuántica y Comunicación Cuántica, por ejemplo, codificación densa, computación en paralelo, teleportación etc. Si se tienen dos estados entrelazados disponibles para un proceso cualquiera de Información Cuántica los cuales están completamente caracterizados, entonces, es conveniente saber como se compara el entrelazamiento entre estos dos estados. De ahí surge la necesidad de establecer una medida de entrelazamiento. Existen por lo menos dos formas iniciales de definir la medida de entrelazamiento que posee un estado, y tienen directa relación con la posibilidad de hacer *operaciones locales y comunicación clásica* (LOCC) sobre un conjunto muy grande de estados entrelazados dados y obtener un conjunto diferente y conveniente de estados nuevos. Como se manifestó anteriormente las operaciones locales y la comunicación clásica no puede modificar el grado de entrelazamiento, estos procedimientos sólo pueden transformar un estado en otro con el mismo entrelazamiento.

La primera forma de definir el entrelazamiento contenido en un estado puro  $|\psi\rangle$  es imaginar que se proporcionan un conjunto muy grande de  $n$  estados maximalmente entrelazados de dos qubits, por ejemplo, el estado de Bell  $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ , y producir tantas copias como se pueda del estado puro  $|\psi\rangle$  usando LOCC. Si el número de estados  $|\psi\rangle$  que se puede producir  $m$  de estos estados, entonces, se define como *entrelazamiento de formación* la relación  $n/m$  cuando el número de copias disponibles tiende al infinito. Una segunda forma alternativa de definir el grado de entrelazamiento sería usar el procedimiento contrario, es decir si se dispone de  $m$  copias del estado  $|\psi\rangle$  obtener, mediante LOCC,  $n$  copias del estado maximalmente entrelazado  $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ , en este caso la relación  $n/m$  se define como *entrelazamiento de destilación* del estado  $|\psi\rangle$ . Para estados puros  $|\psi\rangle$  estas dos formas de definir la medida de entrelazamiento conducen al mismo resultado, sin embargo no es obvio que esto sea verdad para cualquier estado. Se puede demostrar que en el caso de estados puros el entrelazamiento de formación está directamente relacionado con la entropía de von Neumann (nuestro objetivo no es modificar la definición existente de medida de entrelazamiento sino hacer uso de las que se han definido y llevarlo a contextos nuevos, por ello no presentamos la demostración, pues involucra conceptos matemáticos que salen del enfoque de esta tesis). La

entropía de von Neumann, de un estado determinado por la matriz densidad  $\rho$  se define como

$$S(\rho) = -\text{tr}\rho \log(\rho). \quad (2.28)$$

Si los autovalores de la matriz densidad son  $\lambda_a$ , en la base en la que  $\rho$  es diagonal la entropía puede escribirse como

$$S(\rho) = -\sum_a p_a \log(p_a), \quad (2.29)$$

$\log$  representa el logaritmo en base  $N$  y  $N$  representa la dimensión de la base en la cual se está codificando la información, por ejemplo, si se trata de qubits  $N = 2$ , si son qutrits  $N = 3$ , etc.

El entrelazamiento de formación asociado a un estado de un sistema bipartito se define como

$$E(\rho_A) = S(\rho_A) = -\text{tr}\rho_A \log(\rho_A) = -\sum_a p_a \log(p_a),$$

donde  $\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB})$ ;  $\rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB})$  constituye la matriz densidad parcial del sistema  $A$  o  $B$  respectivamente.

Cuando se considera el caso de un estado bipartito generalizado representado por la matriz densidad representado en la base lógica  $\{|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$  puede escribirse como

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Trazando parcialmente sobre el segundo qubit se tiene que

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix},$$

calculando los autovalores de  $\rho_A$  se tiene que

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_A) \pm \sqrt{\text{tr}(\rho_A)^2 - 4\det(\rho_A)},$$

pero, sabemos que  $\text{tr}(\rho_A) = 1$ , por definición de matriz densidad, por lo tanto tenemos que

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\det(\rho_A)} \right),$$

sustituyendo en la definición de entrelazamiento de formación se tiene

$$E(\rho_A) = -x \log x - (1-x) \log(1-x), \quad (2.30)$$

donde  $x = \left( 1 + \sqrt{1 - 4\det(\rho_A)} \right) / 2$ , no es difícil demostrar que para este caso que  $4\det(\rho_A) = 2(1 - \text{tr}\rho_A^2)$ . En términos de los autovalores de  $\rho_A$  se puede escribir como

$$C^2(\rho_A) = 4\det(\rho_A) = 2(1 - x^2 - (1-x)^2), \quad (2.31)$$

donde se ha usado el hecho que  $\text{tr}\rho_A = \lambda_+ + \lambda_- = x + (1-x) = 1$ .

En la Fig. (2.3) se han graficado las dos funciones expresadas en (2.30) y (2.31), entre 0 y 1. A partir de las gráficas se ve que las dos son funciones convexas de  $x$  y alcanzan los mismos valores extremos para los mismos valores de  $x$ . Si  $x = 0$  significa que el estado es puro, la descomposición de Schmitd de la matriz densidad tiene sólo un coeficiente diferente de cero, y por lo tanto es separable. Se observa que tanto  $E(\rho_A)$  como  $C^2(\rho_A)$  tienen el valor cero, de igual forma si  $x = 1$ . Ahora en el caso de estados maximalmente entrelazados se sabe que  $x = 1/2$ , es decir la matriz densidad parcial representa un estado completamente mezclado, las probabilidades de los estados

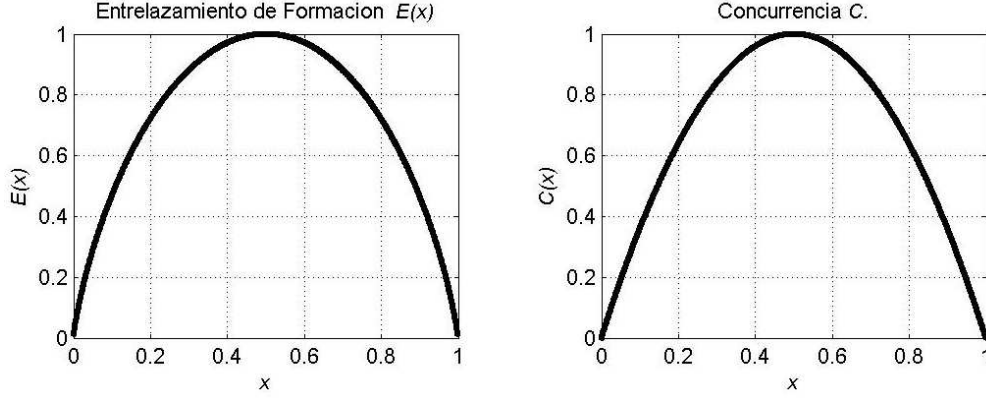


Fig. 2.3: Entrelazamiento de formación y concurrencia de estados de sistemas bipartitos

puros en los que se puede descomponer son las mismas. En este caso, tanto  $E(\rho_A)$  como  $C^2(\rho_A)$  alcanzan el valor uno.

Es decir, en el caso de estados entrelazados puros tanto la cantidad  $E$  como  $C$ , caracterizan de manera equivalente el entrelazamiento de sistemas bipartitos.

La cantidad  $C$  define lo que se conoce como *Concurrencia* y mide la cantidad de entrelazamiento en función de la pureza del estado, ya que si el estado del sistema al que se puede acceder es puro en la base lógica  $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$  entonces el estado del sistema compuesto será separable. Si por el contrario, el estado del sistema accesible está maximalmente mezclado el estado del sistema global estará maximalmente entrelazado.

Por otro lado, ¿qué pasa si el estado no está maximalmente entrelazado?. En ese caso, el entrelazamiento de formación se define a partir de la descomposición de la matriz densidad  $\rho_A$  en estados puros

$$\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.32)$$

Siempre se puede encontrar una descomposición de la matriz de densidad de esta forma, sin embargo no es única. A partir de ella se puede definir el entanglement de formación como

$$E(\rho_A) = \min_{\{p_i|\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \quad (2.33)$$

donde la minimización es respecto a todas las posibles descomposiciones  $\{p_i|\psi_i\rangle\}$  de la matriz densidad  $\rho_A$ . El problema es que existen muchas de estas descomposiciones, tantas que hace imposible, en la práctica, establecer una medida de entrelazamiento usando esta definición. Si se lograra encontrar una fórmula que proporcione  $E(\rho_A)$  o  $C(\rho_A)$  a partir del conocimiento de la matriz densidad  $\rho_A$ , y que permita evitar la minimización anterior, entonces la medida de entrelazamiento sería práctica. Por supuesto la fórmula debe ser un resultado de esta minimización.

Esta fórmula fue deducida por Wootters y Hill [18], tanto para el caso de estados entrelazados puros como para estados mezclados. Para explicar la motivación de la fórmula, consideremos los estados maximalmente entrelazados de Bell para dos qubits  $A$  y  $B$ .

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{AB} \pm |11\rangle_{AB}) \\ |\psi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{AB} \pm |10\rangle_{AB}) \end{aligned}$$

y cualquier estado separable en la base  $\{|00\rangle_{AB}, |11\rangle_{AB}, |01\rangle_{AB}, |10\rangle_{AB}\}$ , la aplicación de la operación  $\sigma_y$  tanto al qubit  $A$  como al qubit  $B$  conduce a

$$\begin{aligned} \sigma_y |0\rangle &= i |1\rangle \\ \sigma_y |1\rangle &= -i |0\rangle \end{aligned}$$



por lo tanto los estados de Bell transforman en la forma

$$\begin{aligned}\sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |\phi^\pm\rangle_{AB} &= -\frac{1}{2} (|11\rangle_{AB} \pm |00\rangle_{AB}) = \mp |\phi^\pm\rangle_{AB} \\ \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |\psi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{2} (|10\rangle_{AB} \pm |01\rangle_{AB}) = \pm |\phi^\pm\rangle_{AB}\end{aligned}$$

mientras que cada estado separable en la base lógica es transformado en un estado ortogonal, es decir

$$\begin{aligned}\sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |00\rangle_{AB} &= -|11\rangle_{AB} \\ \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |11\rangle_{AB} &= -|00\rangle_{AB} \\ \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |01\rangle_{AB} &= |10\rangle_{AB} \\ \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |10\rangle_{AB} &= |01\rangle_{AB}\end{aligned}$$

llamando

$$\begin{aligned}|\tilde{\phi}^\pm\rangle_{AB} &= \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |\phi^\pm\rangle_{AB} = -\frac{1}{2} (|11\rangle_{AB} \pm |00\rangle_{AB}) = \mp |\phi^\pm\rangle_{AB} \\ |\tilde{\psi}^\pm\rangle_{AB} &= \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} |\psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{2} (|10\rangle_{AB} \pm |01\rangle_{AB}) = \pm |\phi^\pm\rangle_{AB}\end{aligned}$$

vemos que el módulo al cuadrado del producto escalar entre estos estados transformados y los estados sin transformar da como resultado,

$$\begin{aligned}{}_{AB}\langle\phi^\pm|\tilde{\phi}^\pm\rangle_{AB}|^2 &= 1 \\ {}_{AB}\langle\psi^\pm|\tilde{\psi}^\pm\rangle_{AB}|^2 &= 1\end{aligned}$$

para los estados maximalmente entrelazados y cero para los separables. considerando el caso de un estado entrelazado que no esté maximalmente entrelazado, pero que siga siendo puro, por ejemplo

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle_{AB} + \beta |11\rangle_{AB}$$

la matriz asociada a este estado es

$$\rho_{AB} = |\alpha|^2 |00\rangle_{AB}\langle 00| + |\beta|^2 |11\rangle_{AB}\langle 11| + \alpha^* \beta |00\rangle_{AB}\langle 11| + \alpha \beta^* |11\rangle_{AB}\langle 00|$$

calculando la traza parcial respecto a  $B$  tenemos

$$\rho_A = |\alpha|^2 |0\rangle_{AA}\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle_{AA}\langle 1|$$

la traza de  $\rho_A^2$  es

$$\text{tr}\rho_A^2 = |\alpha|^2|\alpha|^2 + |\beta|^2|\beta|^2$$

usando la condición de normalización tenemos

$$\text{tr}\rho_A^2 = |\alpha|^2 - 2|\alpha|^2|\beta|^2 + |\beta|^2 = 1 - 2|\alpha|^2|\beta|^2$$

usando la definición de concurrencia tenemos que

$$C(\rho_A) = \sqrt{2(1 - \text{tr}\rho_A^2)} = \sqrt{4|\alpha|^2|\beta|^2} = 2|\alpha||\beta|$$

Calcularemos ahora  $C$  para el estado puro  $|\psi\rangle = \alpha |00\rangle_{AB} + \beta |11\rangle_{AB}$ , que no está maximalmente entrelazado

$$|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB}) |\psi^*\rangle = -(\alpha^* |11\rangle_{AB} + \beta^* |00\rangle_{AB})$$

calculando el el producto escalar de este estado transformado por  $|\psi\rangle$  y luego el módulo cuadrado tendremos que

$$C^2(\rho_A) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2 = |\alpha^*\beta^* + \alpha^*\beta|^2 = 4|\alpha|^2|\beta|^2$$

luego podemos definir la concurrencia como

$$C(\rho_A) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| = 2|\alpha||\beta|$$

esto evidencia que hay una correspondencia entre la transformación, escribir el complejo conjugado del estado y aplicar las rotaciones  $\sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB}$  a los dos qubits, y la concurrencia de un estado puro. Además en el caso de un estado separable  $|\tilde{\psi}\rangle$  es siempre ortogonal a  $|\psi\rangle$  por lo tanto el producto será cero. El paso siguiente es usar la transformación definida para calcular la concurrencia a partir de la matriz densidad asociada a  $|\psi\rangle$ . Consideremos la matriz  $\rho_{AB}^*$  para el estado puro  $|\psi\rangle$ , es decir la matriz densidad original transpuesta, y la transformación

$$\tilde{\rho}_{AB} = \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB} \rho_{AB}^* \sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB}$$

escrita en forma de matriz en la base  $\{|00\rangle_{AB}, |11\rangle_{AB}, |01\rangle_{AB}, |10\rangle_{AB}\}$  se lee

$$\tilde{\rho}_{AB} = \begin{pmatrix} |\beta|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^*\beta & 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix},$$

definiendo la matriz  $R = \sqrt{\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}}$ , tenemos para  $R^2$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 2|\beta|^2|\alpha|^2 & 0 & 0 & 2\alpha\beta^*|\alpha|^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha^*\beta|\beta|^2 & 0 & 0 & 2|\beta|^2|\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

los autovalores de esta matriz son ordenados de mayor a menor  $\lambda_1 = 4(|\beta||\alpha|)^2$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$  y  $\lambda_4 = 0$ , calculando las raíces de estos tenemos  $\tilde{\lambda}_1 = 2|\beta||\alpha|$ ,  $\tilde{\lambda}_2 = 0$ ,  $\tilde{\lambda}_3 = 0$  y  $\tilde{\lambda}_4 = 0$ . Si se resta del autovalor más grande los otros autovalores de  $R$  se obtiene en este caso simple

$$C(\rho_A) = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_4 = 2|\beta||\alpha|. \quad (2.34)$$

Si la anterior relación da como resultado un valor negativo entonces la concurrencia se define como 0, es decir

$$C(\rho_A) = \max\{0, \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_4\} \quad (2.35)$$

Esta es la fórmula muy difundida para la concurrencia, y Wootters[18] la demostró formalmente para estados puros de sistemas bipartitos de qubits. Wootters y Hill[18] generalizaron esta fórmula para el caso de estados mezclados. Por lo tanto, tenemos la relación definida por la Ec. (2.34), permite calcular la concurrencia, usando la transformación aplicada sobre la matriz densidad, para cualquier estado bipartito.

Rungta *et al.*[19] generalizaron la definición introducida en la Ec (2.31), para estados puros de sistemas bipartitos de dimensión  $d$ . Esta fórmula se conoce como *I-Concurrencia* para lo cual se define un superoperador llamado *inversor universal* que reemplaza al la operación de intercambio (flipping) de spines, representada por la operación  $\sigma_{yA} \otimes \sigma_{yB}$ . La fórmula a que llegaron es,

$$C(\rho_A) = \sqrt{2\nu_{D_1}\nu_{D_2}(1 - \text{tr}(\rho_A^2))}, \quad (2.36)$$

con  $\nu_{D_i}$ , constantes positivas a ser determinadas. En el caso de qubits se tiene  $\nu_{D_i} = 1$ .

Rungta y Caves[19], propusieron también una extensión del término *Tangle* para el cuadrado de la I-concurrencia, es decir

$$\begin{aligned} \tau(\rho_A) &= C^2(\rho_A) \\ &= 2\nu_{D_1}\nu_{D_2}(1 - \text{tr}(\rho_A^2)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

En principio se puede usar esta definición para cualquier tipo de estado bipartito, es decir se puede medir el entrelazamiento a partir de la pureza del estado. Tanto el tangle como la I-concurrencia, coinciden con las versiones de cocurrencia dados para el caso de dos qubits, sin embargo, hasta donde se conoce, no existe una fórmula de Tangle o I-concurrencia similar a la encontrada en la Ec. (2.35).

**Criterios de separabilidad de estados** Si no fuera posible obtener una medida explícita de entrelazamiento, sería útil conocer cuales son los bordes de separabilidad del espacio de estados del sistema. Dado el estado en términos de algunos parámetros, establecer el borde de separabilidad significaría establecer claramente una hipersuperficie en el espacio de parámetros que diferencie claramente cuales valores de estos parámetros definen un estado separable y cuales definen un estado entrelazado.

Peres[21], conjeturó un criterio de este tipo, llamado *criterio de la transpuesta parcial positiva*. En el caso de dos qubits, por ejemplo, si la matriz densidad de dos qubits es de la forma

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B,$$

consiste en calcular la matriz transpuesta parcial, por ejemplo, respecto al segundo qubit,

$$\tilde{\rho}_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B^T,$$

si el estado representado por  $\rho_{AB}$  es separable entonces  $\tilde{\rho}_{AB}$  siempre tiene todos los autovalores no negativos. Si la matriz  $\tilde{\rho}_{AB}$  no es positiva entonces el estado representado por  $\rho_{AB}$  no es separable o, lo que es lo mismo, está entrelazado. La familia Horodecki[22], demostró el siguiente teorema

Un estado  $\rho$  que actúa sobre el espacio  $\mathcal{H}_A^{(2)} \otimes \mathcal{H}_A^{(2)}$  o en el  $\mathcal{H}_A^{(2)} \otimes \mathcal{H}_B^{(3)}$  es separable si y sólo si su transposición parcial  $\rho^T$  es un operador positivo.

Este teorema formaliza el criterio de la transpuesta parcial de Peres[21] como una condición necesaria y suficiente para el caso de sistemas  $(2 \times 2)$  y  $(3 \times 3)$ . Este es un criterio de separabilidad porque para establecer el borde basta establecer donde falla la positividad de  $\tilde{\rho}_{AB}$ . Simultáneamente demostraron un lema que establece

Para cualquier estado no-separable  $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  existe un operador hermítico  $H = H^\dagger$  tal que

$$\text{tr}(H\rho) < 0, \quad (2.38)$$

y para todo estado separable  $\rho_{sep}$  se tiene que

$$\text{tr}(H\rho) \geq 0. \quad (2.39)$$

El contenido del anterior lema implica que si se logra encontrar un operador hermítico que satisface la condición  $\text{tr}(H\rho) < 0$  entonces el estado representado por  $\rho$  será un estado no separable y por lo tanto entrelazado, sin embargo no hay una forma sistemática de encontrarlo. El operador testigo de entrelazamiento está relacionado directamente con la teoría de los mapeos positivos que no son completamente positivos. Un mapeo lineal  $\mathcal{L} : B(\mathcal{H}_n) \rightarrow B(\mathcal{H}_m)$  es positivo cuando mapea  $X \geq 0$  en  $\mathcal{L}(X) \geq 0$  y es completamente positivo si y sólo si  $1_n \otimes \mathcal{L}$  es un mapa positivo. Precisamente la trasposición es un mapeo positivo que no es completamente positivo, por ejemplo, el estado maximalmente entrelazado  $(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})/\sqrt{2}$  que

$$\begin{aligned} & (1_n \otimes \mathcal{T}) [(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}) ({}_{AB}\langle 00| + {}_{AB}\langle 11|)] / 2 \\ &= (1_n \otimes \mathcal{T}) [(|00\rangle_{AB} \langle 00| + |{}_{AB}\langle 11| + |11\rangle_{AB} \langle 00| + |11\rangle_{AB} \langle 11|)] / 2 \\ &= [(|00\rangle_{AB} \langle 00| + |01\rangle_{AB} \langle 10| + |10\rangle_{AB} \langle 01| + |11\rangle_{AB} \langle 11|)] / 2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

tiene el autovector  $(|01\rangle + |10\rangle_{AB})/\sqrt{2}$  asociado al autovalor  $-1$ .

Lo que Peres notó fue que si se aplica  $(1_n \otimes \mathcal{T})$  sobre el operador densidad de un estado entrelazado lo transforma en un operador positivo. La manera más general de definir una matrix densidad

de un estado separable es como una suma convexa de productos tensoriales de estados puros en cada sistema que forman un sistema bipartito. Es decir,

$$\rho_{sep} = \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|,$$

si se aplica la transposición parcial a este estado

$$\begin{aligned} (1_n \otimes \mathcal{T}) \rho_{sep} &= (1_n \otimes \mathcal{T}) \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B| \\ &= \sum_i p_i (1_n \otimes \mathcal{T}) (|\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle \langle \psi_i^B|) \\ &= \sum_i p_i (|\psi_i^A\rangle \langle \psi_i^A| \otimes |\psi_i^{*B}\rangle \langle \psi_i^{*B}|) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

vemos que aún representa un operador positivo. Entonces la condición de Peres–Horodecki, es decir la condición de separabilidad se transforma en  $(1 \otimes \mathcal{T})(\rho) \geq 0$ . Lo que se sabe hasta ahora es que en espacios  $\mathcal{H}_A^{(2)} \otimes \mathcal{H}_B^{(2)}$  y  $\mathcal{H}_A^{(2)} \otimes \mathcal{H}_B^{(3)}$  todos los mapeos positivos están relacionados con la el mapeo de la transposición parcial, mediante la descomposición de la forma

$$\mathcal{L} = S_1 + S_2 \circ \mathcal{T}, \quad (2.42)$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son mapeos completamente positivos, y  $\mathcal{T}$  es el mapeo de transposición parcial. Esto implica que el testigo de entrelazamiento estará dado por

$$H = P + (1 \otimes \mathcal{T})(Q), \quad (2.43)$$

con  $P \geq 0$  y  $Q \geq 0$  y  $\mathcal{T}$  es el operador de transposición parcial. En dimensiones más altas la situación es un poco más complicada. Esto se debe a que en general los mapeos positivos no se pueden descomponer en la forma dada en la Ec. (2.42) y como consecuencia, en dimensiones más altas, existen estados entrelazados para los cuales  $(1 \otimes \mathcal{T})(\rho) \geq 0$ , es decir a pesar de estar entrelazados satisfacen la condición de separabilidad de Peres-Horodecki. Hay matrices densidad con entrelazamiento límite que tienen una PPT (transpuesta parcial positiva). El primer ejemplo de un mapeo que no se puede descomponer en el sentido de la Ec. (2.42) se encontró en  $\mathcal{H}_A^{(3)} \otimes \mathcal{H}_B^{(3)}$ . Sin embargo se puede construir un operador testigo de entrelazamiento que no se puede descomponer en la forma (2.43) en dimensiones arbitrarias. Se demostró que cada operador testigo de entrelazamiento es de la forma

$$H = P + (1 \otimes \mathcal{T})(Q) - \epsilon \mathbf{1}, \quad (2.44)$$

para asegurar que este operador tenga la propiedad dada en la Ec. (2.39) se impone la condición

$$0 \leq \epsilon \leq \inf_{\psi_A, \psi_B} \langle \psi_A, \psi_B | P + (1 \otimes \mathcal{T})(Q) | \psi_A, \psi_B \rangle, \quad (2.45)$$

tal que  $P \geq 0$  y  $Q \geq 0$  y que se construyen de tal forma que  $\text{tr}(P\delta)$  y  $\text{tr}(Q(1 \otimes \mathcal{T})\delta) = 0$  para todo estado  $\delta$ , donde los estados  $\delta$  llamados estados ‘edge’, estos estados son estados con entrelazamiento límite que tiene una transpuesta parcial positiva, y cumplen la propiedad de que para todo  $\epsilon > 0$  y todos los productos de estados  $|\psi_A, \psi_B\rangle$ ,  $\delta - \epsilon |\psi_A, \psi_B\rangle \langle \psi_A, \psi_B|$  no son positivos o no tienen una transpuesta parcial positiva.

En la Ec. (2.45)  $\inf_{\psi_A, \psi_B}$  representa el ínfimo cuando se varían los estados  $\psi_A, \psi_B$ .

Si se considera el conjunto cerrado de todos los estados con transpuesta parcial positiva entonces los estados  $\delta$  están en el borde de este conjunto, y el entrelazamiento de todos estos estados se detecta mediante el operador testigo de entrelazamiento dado en la Ec. (2.44). Si se escojen  $P$  y  $Q$  de tal forma que  $\text{tr}(P + (1 \otimes \mathcal{T})(Q)) = 0$ , este testigo detecta también estados con entrelazamiento límite al interior del conjunto de estados con transpuesta parcial positiva. De esta forma dado cualquier estado ‘edge’  $\delta$  se puede siempre construir un testigo de entrelazamiento. El problema

radica ahora en escoger apropiadamente los operadores  $P$  y  $Q$ . Ejemplos de como hacer esto se encuentran discutidos en trabajos como [70, 71, 72]

Un problema adicional resulta cuando se trata de medir el operador testigo de entrelazamiento. Una forma de hacer esto es descomponer el operador testigo de entrelazamiento en una suma de términos que pueden medirse localmente, este es el enfoque que se presenta en la sección (3.4). La idea básica es usar esta descomposición del operador testigo de entrelazamiento, detectar el entrelazamiento sin realizar una cantidad grande de mediciones sobre el sistema. Si se usa el la fórmula de Wootters o equivalentemente su generalización, se requiere el conocimiento del estado completo. Mientras que si se construye un operador testigo de entrelazamiento y se usa una descomposición adecuada es posible medir directamente la presencia de entrelazamiento en un sistema en general multipartito. En el capítulo 3 se muestra que es posible descomponer el operador testigo de entrelazamiento en términos de mediciones locales[99], aún en el caso en que el sistema evoluciona en presencia de diferentes canales de disipación.

## 2.2. Sistemas físicos y la implementación de procesos de Información Cuántica

En esta sección se introducen brevemente las características teóricas y experimentales de los sistemas físicos que se usarán para la realización de los procesos de computación cuántica e información cuántica descritos en la parte teórica. El escenario de fenómenos físicos que nos interesa explorar están directamente relacionados con el área de la Óptica Cuántica. Más específicamente, buscaremos realizaciones en el contexto de los iones atrapados y las cavidades ópticas. Desde esta perspectiva, es necesario conocer que tipo de procesos se pueden realizar en este tipo de sistemas, cuáles son los regímenes de energía que pueden distinguirse, etc.

Estos sistemas han sido ampliamente utilizados en estudios fundamentales y de aplicación, de tal forma que se conocen con gran detalle tanto experimental como teórico.

### 2.2.1. Interacción Radiación–Atomo.

Antes de estudiar directamente los sistemas que se usan en la implementación de los procesos de información cuántica, se presentan algunas propiedades importantes de la interacción radiación-materia, propiedades que son los fundamentos de el desarrollo de sistemas como iones atrapados y átomos en cavidades de electrodinámica cuántica.

**Los sistemas interactuantes.** Se considera la interacción de la radiación de un láser con un medio atómico que se supone que está muy diluido, de modo que pueden despreciarse las interacciones átomo-átomo. Adicionalmente, se considera un átomo  $A$ , con un estado excitado  $e$  y un estado base  $g$  separados por una energía

$$E_e - E_g = \hbar\omega_A \quad (2.46)$$

$\omega_A$  se llamará la frecuencia atómica. Los observables atómicos relevantes serán el momento dipolar eléctrico  $\vec{d}$ , la posición  $\vec{R}$  y el momento  $\vec{P}$  del centro de masa. Este átomo  $A$  interactúa, por un lado, con un campo láser  $L$ , y por otro con todos los otros modos del campo de radiación los cuales inicialmente no contienen ningún fotón y forman el vacío  $V$  cuántico del campo. El campo láser  $L$

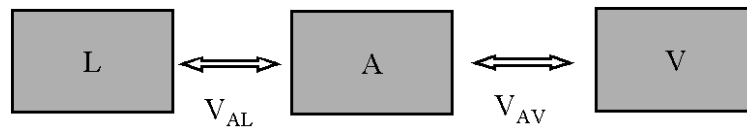


Fig. 2.4: Acoplamientos de un átomo con un campo láser y el vacío

se asume que es monocromático, con una frecuencia  $\omega_L$ . Si el estado original del campo láser es un

estado coherente, puede demostrarse que es legítimo considerarlo como campo externo complejo

$$E_L(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}(\vec{r})\epsilon(\vec{r}) \cos[\omega_L t + \Phi(\vec{r})], \quad (2.47)$$

donde  $\vec{\epsilon}(\vec{r})$ ,  $\epsilon(\vec{r})$  y  $\Phi(\vec{r})$  son, respectivamente, la polarización, la amplitud, y la fase del campo láser en  $\vec{r}$ . El acoplamiento átomo-láser  $V_{AL}$  está caracterizado por la frecuencia de Rabi  $\Omega_1$ , misma que resulta ser proporcional al producto escalar del elemento de la matriz momento dipolar  $\langle e|\vec{d}|g\rangle$  y el campo láser  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . La evolución Hamiltoniana debido a  $V_{AL}$  puede analizarse en términos de procesos elementales de absorción y emisión estimulada de fotones a la frecuencia del láser, por el átomo.

El acoplamiento átomo-vacío  $V_{AV}$  es el que genera emisión espontánea de fotones en los átomos excitados. Se lo caracteriza por el ancho natural  $\Gamma$  del estado excitado  $|e\rangle$ , el cual es también igual a la tasa de emisión espontánea de fotones desde  $|e\rangle$ . Debido a que  $V$  es un sistema con un número infinito de grados de libertad, el acoplamiento  $V_{AV}$  introduce amortiguamiento y fluctuaciones en la evolución de  $A$ .

La evolución de  $A$  puede considerarse en dos regímenes extremos tomados respecto al tiempo característico asociado a  $\Gamma$ . El primero en el cual los tiempos de interacción son muy cortos, i.e., para  $t \ll \Gamma^{-1}$ , en este caso puede despreciarse la emisión espontánea, y la evolución de  $A + L$  se describe por la ecuación de Schrödinger. Por otro lado si los tiempos de interacción son muy largos, i.e., para  $t \gg \Gamma^{-1}$ , ocurren varios procesos de emisión espontánea durante el tiempo de interacción, entonces la evolución “reducida” de  $A$  (trazando los grados de libertad del campo) está descrito por una ecuación maestra o por una ecuación de Langevin.

**Tiempos Característicos.** El rol de las escalas de tiempo en las cuales suceden los procesos es de vital importancia a fin optar por una u otra simplificación en el tratamiento que permite a su vez explicar las características de ciertos procesos. Por ello aquí se exponen las propiedades de algunos tiempos característicos en la interacción radiación-átomo y además se comparan sus órdenes de magnitud.

El tiempo más corto involucrado en este tipo de problema es el tiempo de correlación  $\tau_c$  del campo vacío. Las fluctuaciones del vacío tiene un espectro de frecuencias muy ancho  $\mathbf{J}(\omega)$ , el cual varía lentamente con  $\omega$  alrededor de la frecuencia atómica  $\omega_A$ : la escala de frecuencia típica para las variaciones de  $\mathbf{J}(\omega)$  es  $\omega_A$  mismo. Luego:

$$\tau_c \simeq 1/\omega_A. \quad (2.48)$$

El hecho que  $\tau_c$  sea mucho más corto que todos los otros tiempos característicos nos permitirá considerar al campo de vacío  $V$  como un “reservorio” y describir sus efectos sobre la evolución de  $A$  como un proceso de relajación.

Para los grados de libertad internos, el tiempo característico más obvio es el tiempo de vida radiativo  $\tau_R$  del estado excitado  $|e\rangle$ ,

$$\tau_R = 1/\Gamma, \quad (2.49)$$

se define como el inverso del ancho natural de frecuencia del estado excitado  $|e\rangle$  y puede considerarse como el tiempo de relajación asociado con la emisión espontánea. La relación  $\Gamma \ll \omega_A$  implica  $\tau_R \gg \tau_c$ .

La existencia de varios subniveles Zeeman en el estado fundamental da lugar a otros tiempos de relajación internos los cuales son asociados a un bombeo óptico. Los ciclos absorción espontánea y emisión, que se llaman también ciclos de fluorescencia, transfieren al átomo desde un subnivel Zeeman  $g_m$  a otro  $g_{m'}$ . Si la intensidad  $I_L$  del láser es baja, se define una tasa  $\Gamma'$  de ocurrencia de tales ciclos de bombeos ópticos, proporcional a  $I_L$ . El inverso de esta tasa

$$\tau_P = 1/\Gamma', \quad (2.50)$$

es el tiempo de bombeo óptico  $\tau_P$  y representa el tiempo medio que el átomo tiene que esperar antes de sufrir un ciclo de bombeo óptico. A intensidades bajas del láser,

$$\tau_P \gg \tau_R. \quad (2.51)$$

La existencia de tales tiempos largos de relajación internos para átomos multinivel permiten obtener mecanismos muy eficientes de enfriamiento.

Nótese que, para átomos de dos niveles, se puede definir además a baja intensidad una tasa de fluorescencia  $\Gamma'$  y un tiempo medio  $1/\Gamma'$  entre dos ciclos de fluorescencia experimentada por el mismo átomo, un tiempo medio el cual es mucho más grande que  $\tau_R$ . Pero tales ciclos de fluorescencia llevan nuevamente al átomo al mismo estado base y por tanto no dan lugar a tiempos de relajación interna adicionales. En la práctica, para un átomo de dos niveles, los únicos tiempos de amortiguamiento que aparecen en las ecuaciones ópticas de Bloch, que describen la evolución de los grados internos de libertad son todos del orden de  $\tau_R$ .

Para los grados de libertad externos (i.e. traslacionales), un tiempo característico muy importante es el tiempo de amortiguamiento de la velocidad atómica. Es del orden

$$T_{ext} = \hbar/E_R, \quad (2.52)$$

donde

$$E_R = \hbar^2 k_L^2 / 2M \quad (2.53)$$

es la energía de retroceso del átomo cuando él absorbe o emite un fotón láser único. En la ecuación (2.53),  $M$  es la masa total del átomo y  $k_L = \omega_L/c$ .

Para la mayoría de transiciones atómicas permitidas,

$$\hbar\Gamma \gg E_R, \quad (2.54)$$

por ejemplo, la línea de resonancia del sodio,  $\hbar\Gamma = 400E_R$ . Cuando hay un tiempo interno  $T_{int} = T_R$  único, se sigue de las ecuaciones (2.49), (2.52) y (2.54) que

$$T_{ext} \gg T_{int}. \quad (2.55)$$

Esta separación de escalas de tiempo introduce grandes simplificaciones en el análisis del movimiento atómico. Por ejemplo, se pueden eliminar adiabáticamente las variables internas más rápidas y deducir ecuaciones de movimiento reducidas para las variables externas.

Sin embargo, debe mantenerse en mente que la condición (2.55) no se satisface siempre. Para átomos con estado base degenerado, el tiempo interno  $\tau_R$  puede tornarse, a baja intensidad, comparable al tiempo externo (2.52), y puede ser aún mucho más grande. Pueden aparecer también tiempos externos mucho más cortos que  $T_{ext}$ , tales como el período de oscilación  $T_{osc}$  del átomo en el fondo de un pozo de potencial óptico. En tales casos, no es posible eliminar las variables internas, y el análisis teórico es más complicado. Estas situaciones son interesantes, ya que conducen, por ejemplo, a límites más bajos para la temperatura que los alcanzados por enfriamiento láser.

#### Átomo de dos niveles en un campo láser.

En esta sección se considera la interacción de un campo eléctrico  $\vec{E}$  con un átomo de un sólo electrón, en el cual tanto la dinámica del campo como la del átomo están descritas cuánticamente. De lo dicho anteriormente, el hamiltoniano de interacción se puede describir como

$$H = H_a + H_f - e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (2.56)$$

donde  $H_a$  y  $H_f$  son los Hamiltonianos asociados a las energías correspondientes al átomo y al campo libres,  $\vec{r}$  es la posición del electrón y se asume la validez de la aproximación de dipolo, en la cual el campo es uniforme en una región del espacio del orden del radio atómico, es decir, la longitud de onda del campo es mucho mayor que el radio atómico. Usando los operadores  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$  ( $i$  el índice que denota el nivel atómico) los observables quedan

$$H_a = \sum_i E_i \sigma_{ii}, \quad (2.57)$$

$$e\vec{r} = e \sum_{ij} |i\rangle\langle i|\vec{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{ij} \rho_{ij} \sigma_{ij}, \quad (2.58)$$

donde  $E_i$  son los valores propios de la energía dados por  $H_a|i\rangle = E_i|i\rangle$  y  $\varrho$  los elementos de matriz  $\langle i|\vec{r}|j\rangle$ . En la aproximación de dipolo el campo se evalúa en la posición del centro de masa del átomo, si colocamos el átomo en el origen del sistema de coordenadas, el campo eléctrico se puede escribir como

$$\vec{E} = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}), \quad (2.59)$$

con  $\varepsilon_{\vec{k}} = (\hbar\omega_k/2\varepsilon_0V)^{1/2}$   $V$  el volumen de cuantización de los modos del campo electromagnético. Por lo tanto el Hamiltoniano es ahora

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \sum_i E_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}), \quad (2.60)$$

con

$$g_{\vec{k}}^{ij} = -\frac{\varrho_{ij} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}}}{\hbar}, \quad (2.61)$$

en el caso de un átomo de dos niveles  $a$  y  $b$  y con los elementos de matriz dipolar reales, el Hamiltoniano se reduce a

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + (E_a \sigma_{aa} + E_b \sigma_{bb}) + \hbar \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} (\sigma_{ab} + \sigma_{ba}) (a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}), \quad (2.62)$$

el segundo término en (2.62) se puede reescribir como

$$E_a \sigma_{aa} + E_b \sigma_{bb} = \frac{1}{2} \hbar \omega (\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) + \frac{1}{2} \hbar (E_a + E_b), \quad (2.63)$$

donde se ha usado  $(E_a - E_b) = \hbar\omega$  y  $\sigma_{aa} + \sigma_{bb} = 1$ . La energía constante se puede ignorar (renormalizando la energía) y definiendo los nuevos operadores atómicos

$$\sigma_z = \sigma_{aa} - \sigma_{bb} \quad (2.64)$$

$$\sigma^+ = |a\rangle\langle b| \quad (2.65)$$

$$\sigma^- = |b\rangle\langle a|, \quad (2.66)$$

el Hamiltoniano adopta la forma

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \hbar\omega\sigma_z + \hbar \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} (\sigma^+ + \sigma^-) (a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}), \quad (2.67)$$

el operador  $\sigma^+$  describe la transición del átomo desde el nivel inferior  $b$  al nivel superior  $a$ , o sea describe una excitación del electrón, mientras que  $\sigma^-$  describe el proceso contrario.

La parte de interacción del Hamiltoniano (2.67) está formada de cuatro términos. El término  $a_{\vec{k}}^\dagger \sigma^-$  describe un proceso en el cual el átomo transita de un nivel excitado al fundamental y se crea un fotón en el modo  $\vec{k}$ . mientras que  $a_{\vec{k}} \sigma^+$  describe el proceso contrario. Estos procesos conservan la energía y por su importancia son los que se mantienen cuando se hace la aproximación de onda rotante.

Los otros dos procesos  $a_{\vec{k}}^\dagger \sigma^+$  y  $a_{\vec{k}} \sigma^-$  claramente violan el principio de conservación de la energía, pues, cuando el átomo se excita y crea un fotón el sistema gana una energía igual a  $\hbar\omega + \hbar\omega_{\vec{k}}$ , proceso que no puede ocurrir si el sistema átomo-campo es cerrado.

En este régimen el Hamiltoniano describe una dinámica, llamada de Jaynes y Cummings[74], determinada por

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \hbar\omega\sigma_z + \hbar \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} (\sigma^+ a_{\vec{k}} + \sigma^- a_{\vec{k}}^\dagger). \quad (2.68)$$

Este hamiltoniano ha resultado útil en la explicación de los fenómenos de Óptica cuántica y constituye el punto de partida para construcciones teóricas que explican, con éxito el comportamiento de sistemas como el láser y átomos en cavidades en general [75, 76, 77, 63].



## 2.2.2. Iones Atrapados.

En esta sección describiremos uno de los sistemas que se han usado para diferentes implementaciones de Computación e Información Cuántica, los iones atrapados. La codificación de la información se realiza mediante la manipulación de los grados de libertad atómicos (externos e internos) de los iones. Esta manipulación puede lograrse gracias a la interacción ión–campo, interacción que adquiere propiedades especialmente útiles gracias al atrapamiento y enfriamiento de los iones. Los procedimientos utilizados para el enfriamiento de los iones hasta niveles muy bajos de temperatura tienen su fundamento en la interacción radiación–átomo, discutida en la sección previa. El objetivo de esta sección es estudiar los principios en los que se fundamenta el atrapamiento y enfriamiento. Esto permitirá entender mejor los procesos implicados en la implementación tanto de los qubits generados en iones atrapados como de las compuertas cuánticas que operan entre éstos. Este será el tópico abordado en el capítulo 4

La *trampa de Paul* [79] es uno de los dispositivos que permiten atrapar iones. La motivación para su desarrollo fue, entre otras, estudiar sistemas fundamentales (la posibilidad de obtener experimentalmente un oscilador cuántico resultaba muy atractiva), que permitan explorar otros regímenes de la Naturaleza.

La trampa de Paul utiliza, para el atrapamiento, únicamente campos eléctricos. Está constituida por dos electrodos de perfil de forma hiperboloide, separados por distancias  $2z_0$ , y conectados a un anillo metálico central de radio  $r_0$  mediante un voltaje alterno  $U(t) = U_0 \cos(\nu t)$ , como se muestra en la Fig. (2.5). En esta configuración el potencial eléctrico está dado por

$$\Phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2)U(t), \quad (2.69)$$

y  $A = U_0/(r_0^2 + 2z_0^2)$ . Para atrapar una carga en el espacio vacío las líneas de campo eléctrico deben converger en algún punto desde todas las direcciones posibles. Debido a que la divergencia de un campo electrostático es nula, éste por sí sólo no puede producir atrapamiento. Una modulación temporal de este potencial permite corregir este problema. Si se considera un tiempo fijo, la partícula está atrapada en sólo una dirección. Sin embargo, para tiempos de observación grandes el atrapamiento es tridimensional debido a que esta dirección cambia periódicamente en el tiempo.

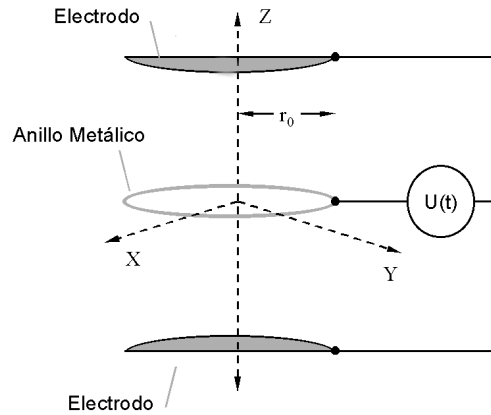


Fig. 2.5: Esquema de una trampa de Paul

La dinámica de la partícula consiste de un movimiento oscilatorio, de pequeña amplitud y frecuencia  $\nu$  muy alta, que está superpuesto a otro movimiento de mayor amplitud y frecuencia  $\omega$  pequeña (Fig. (2.6)). Si se elige el movimiento en la dirección  $z$  y no se toma en cuenta la dependencia espacial del campo eléctrico  $E_z$ , la ecuación del movimiento de la partícula es

$$m\ddot{z} = eE_z \cos(\nu t), \quad (2.70)$$

la misma que tiene una solución dada por  $z(t) = \bar{z} - \frac{eE}{m\nu^2} \cos(\nu t)$ , y representa un movimiento armónico alrededor de  $z = \bar{z}$ . La fuerza está siempre en contra fase con el movimiento  $z(t)$  indepen-

dientemente del signo de la carga  $e$ . La ausencia de variación espacial en el campo implica que el valor promedio temporal es nulo y por tanto no hay posibilidad de confinamiento. Permitiendo una variación espacial del campo  $E_z(z)$ , por ejemplo, si su amplitud crece con  $|z|$ , la fuerza instantánea sobre la partícula será mayor por arriba de  $z = \bar{z}$  y la fuerza promedio estará dirigida hacia el origen de coordenadas como se muestra en la Fig. (2.6) Partiendo de los potenciales eléctricos aplicados a la trampa, puede deducirse un potencial efectivo  $V_{ef}$  asociado a La fuerza promedio de confinamiento.

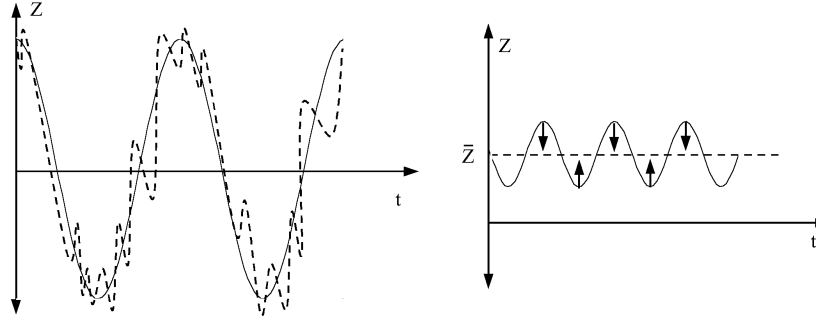


Fig. 2.6: Comportamiento de la partícula en la trampa de Paul

$$\vec{E} = -\Delta(\phi) = A \cos(\nu t)(-2x, -2y, 4z), \quad (2.71)$$

y las ecuaciones de movimiento clásicas serán para las tres coordenadas tienen la forma general como

$$m\ddot{x}_i = C_i x_i \cos(\nu t) \quad (2.72)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula con  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ,  $C_1 = C_2 = -\frac{2Ae}{m}$ , y  $C_3 = \frac{4Ae}{m}$ .

En promedio la partícula se comporta como un oscilador armónico tridimensional a la frecuencia  $\omega_i = C_i/\sqrt{2\nu}$ , que puede considerarse sujeto al potencial efectivo

$$V_{ef} = \frac{1}{2} \sum_i \omega_i^2 \bar{x}_i^2. \quad (2.73)$$

Este resultado proporciona la base teórica para trabajar con iones atrapados, permitiendo el desarrollo de experimentos en óptica cuántica y física atómica, en rangos de energía que hace veinte años eran conjeturas teóricas.

Por otro lado, pone al alcance del experimento sistemas cuánticos elementales, como un ión o un electrón, que se comportan como un oscilador armónico cuántico, y que tienen tiempos de decoherencia del orden del segundo. Los iones atrapados se han estudiado en Generación de Estados Entangled[15], Computación Cuántica[80], generación de Gatos de Schrödinger[81], Criptografía[82], Estadística de iones Ultra-Fríos[83] y aquellos que pretenden validar o refutar las diversas interpretaciones de los fundamentos de la mecánica cuántica.

Estos experimentos requieren una forma de preparar el estado cuántico inicial del ión. El proceso de preparación del ión se conoce como *enfriamiento*. Un método usado es el enfriamiento de iones vía un láser resonante a la frecuencia de transición atómica, propuesto por Wineland y Dehmelt en 1975[84] y realizado experimentalmente Neuhauser, Hohenstatt, Toscheck y Dehmelt en 1978[85]. El retroceso producido por la emisión y absorción de fotones es una de las limitaciones de este procedimiento. El método conocido como “Atrapamiento de población coherente mediante selección de velocidades” (VSCPT)[86] y el enfriamiento Raman[12] son métodos alternativos que permiten salvar estas limitaciones. El esquema Raman permite además llevar al ión a un estado de Fock vibracional.

Para enfriar iones atrapados, se debe considerar su frecuencia de oscilación en el pozo de potencial y compararla con la dinámica de los grados internos de libertad. Si la frecuencia de oscilación del ión es muy pequeña en comparación con la tasa de decaimiento-absorción, es decir  $\omega_v \ll \Gamma$ , entonces puede considerarse que los procesos de absorción-emisión ocurren, aproximadamente en un punto del espacio de las fases de la partícula fijo, es decir a cierta velocidad y posición del ión en la trampa. Para  $\omega_v \ll \Gamma$  el ión orbita en una órbita bien definida y se comporta como una partícula libre entre dos emisiones espontáneas consecutivas. Este caso se conoce como “enfriamiento Doppler” o de “ligadura débil”. Si además la tasa de decaimiento de la energía cinética  $\epsilon$  cumple con  $\epsilon \ll \Gamma$  entonces el sistema alcanza un límite adiabático y la partícula se comporta como si estuviera libre y su energía cinética decae como

$$E_{cin}(t) = E_{k_0} e^{-2\epsilon t}. \quad (2.74)$$

Al igual que en el enfriamiento de partículas libres, la emisión espontánea conduce a un ensanchamiento difusivo de la distribución de velocidades enfriada y la energía final está dada por

$$E_{final} = \frac{\hbar\Gamma}{2}. \quad (2.75)$$

El tiempo de oscilación  $T_{osc}$ , definido como el tiempo que toma disminuir la energía cinética del ión atrapado en un cuanto vibracional  $\hbar\omega_v$ . Asumiendo que la energía cinética es ya del orden de  $E = \hbar\Gamma/2$  se encuentra

$$-\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\hbar\omega_v}{T_{osc}} = 2\epsilon E = \epsilon\hbar\Gamma,$$

entonces

$$T_{osc} = \frac{\hbar\omega_v}{\epsilon\hbar\Gamma} = \frac{\omega_v}{\epsilon} T_{at}, \quad (2.76)$$

donde  $T_{at}$  representa el tiempo de decaimiento de los niveles internos del átomo.

Debido a que  $\epsilon \sim kHz$  y  $\omega_v \sim MHz$ , la tasa de enfriamiento en términos de cuantos de oscilación es baja comparada con el decaimiento atómico. De esta forma, en las trampas hay un parámetro pequeño que sirve como parámetro de expansión

$$\eta^2 = \frac{\epsilon}{\omega_v} \ll 1, \quad (2.77)$$

$\eta$  se conoce como el Parámetro de Lamb-Dicke y su pequeñez indica que el ión atrapado siente la estructura cuantizada de los niveles mas bajos del potencial de atrapamiento si  $\eta < 1$ .

Ahora en el caso de ligadura fuerte,  $\omega_v \gg \Gamma$  los eventos de absorción/emisión no pueden localizarse más en el espacio de las fases a cierta velocidad y posición. En este límite, los sideband están bien separados y el enfriamiento se obtiene sintonizando el láser por abajo de la resonancia portadora (carrier) a uno de los sidebands. La emisión espontánea, ocurre preferiblemente a la frecuencia del átomo  $\omega$  lo cual conduce a una *transferencia neta de energía*. Mientras el enfriamiento láser en átomos libres se efectúa por transferencia repetida de momentum determinada por el retroceso, el enfriamiento de átomos ligados se realiza por transferencia directa de energía, la energía extrada por transiciones Raman.

**Esquema Raman.** El esquema Raman[12] (que se muestra en la Fig. (2.7)), es un procedimiento por el cual, los niveles internos del ión  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  se acoplan mediante campos láser que interactúan con un tercer nivel, ya que la transición directa está prohibida por las reglas de selección. Los dos niveles principales tienen que ser metaestables, y tener una separación energética igual a  $\hbar\omega_0$ . Los campos láser están definidos por

$$\vec{E}_j = \vec{E}_{0j} [\exp\{i(\vec{k}_j \cdot \vec{x} - \omega_j t + \phi_j)\} + cc] \quad (2.78)$$

donde  $\vec{k}_j, \omega_j$  y  $\phi_j$  son el vector de onda, la frecuencia y fase del campo láser respectivamente, y  $\vec{x}$  representa la posición del centro de masa del ión. Ambos láseres tienen una desintonía igual a una

frecuencia  $\Delta$  con respecto a las transiciones entre los niveles  $c \leftrightarrow a$  y  $b \leftrightarrow c$ . Además  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0 + \delta$ , siendo,  $\delta$  del orden de la frecuencia de oscilación del ión. El Hamiltoniano que describe el sistema es

$$H = H_0 + H_R, \quad (2.79)$$

con

$$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c|c\rangle\langle c| \quad (2.80)$$

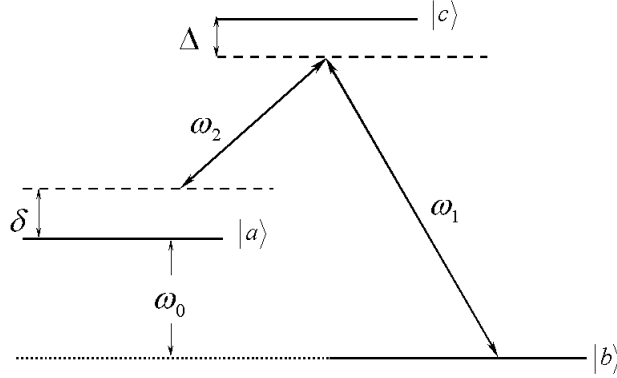


Fig. 2.7: Esquema Raman

y

$$H_R = \hbar \exp[-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_1 t + \phi_1)]|b\rangle\langle c| + \hbar d_2 \exp[-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega_2 t + \phi_2)]|a\rangle\langle c| + hc, \quad (2.81)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son los acoplamientos dipolares. Las frecuencias se escogen de tal forma que

$$\begin{aligned} \omega_c - \omega_b - \omega_1 &= \omega_{cb} - \omega_1 = \Delta \\ \omega_c - \omega_a - \omega_2 &= \omega_{ca} - \omega_2 = \Delta - \delta. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Si  $\Delta \gg \delta$  es posible eliminar adiabáticamente el nivel  $|c\rangle$  lo cual permite expresar la interacción original como una interacción efectiva entre los niveles  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$ . Considerando que  $\delta' = \delta + \frac{G_1^* G_1}{\Delta} - \frac{G_2^* G_2}{\Delta}$  el Hamiltoniano efectivo es

$$H_{ef} = \hbar\delta'\sigma_3 - \hbar\Omega \left\{ |a\rangle\langle b| \exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} + i\phi] + hc \right\} \quad (2.83)$$

con  $\Omega_0 = 2\frac{|d_1 d_2|}{\Delta}$  y  $\sigma_3 = \frac{|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|}{2}$ . El siguiente paso en el proceso de enfriamiento de un ión usando el esquema Raman consiste en cuantizar los grados de libertad externos, los cuales están asociados al movimiento del centro de masa del ión en el potencial armónico efectivo de la trampa. Clásicamente la coordenada del ión obedece la ecuación de un oscilador armónico simple, por tanto su cuantización es directa, para ello, se asocia a esta coordenada el operador

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_i}}(b_i + b_i^\dagger) \quad (2.84)$$

donde  $i = x, y, z$  y  $b_i$  y  $b_i^\dagger$  son operadores bosónicos de creación y aniquilación, su interpretación es también directa, desde la teoría del oscilador armónico cuántico, estos crean y aniquilan, respectivamente, un estado vibracional del centro de masa del ión que llamaremos "fonón",<sup>1</sup> con

<sup>1</sup> Estrictamente hablando fonones son los estados de vibración de la red de un cristal, formada por arreglos periódicos de iones, sin embargo nada impide incluir dentro de ese concepto el caso de un único ión

energía  $\hbar\omega_i$ ,  $\omega_i$  es la frecuencia natural de oscilación en la dirección  $i$ . La inclusión de los estados vibracionales cuánticos del ión, modifican la estructura del Hamiltoniano efectivo del sistema. Si se considera una trampa lineal [87], entonces los vectores de onda  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  de los campos pueden orientarse de tal forma que  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$  sea en la dirección de oscilación (que puede escogerse como  $x$ ). Bajo estas condiciones, y elevando a operador la coordenada  $x$  del ión cuya frecuencia de oscilación es  $\omega$  se tiene (usando (2.84)) que

$$H_{total} = \hbar\omega b_i^\dagger b_i + \hbar\delta'\sigma_3 - \frac{\hbar\Omega_0}{2} \left\{ |a\rangle\langle b| \exp[i\eta(b + b^\dagger) + i\phi] + hc \right\}, \quad (2.85)$$

en donde se ha introducido el parámetro de Lamb-Dicke (**LD**)  $\eta \equiv \delta k \sqrt{\hbar/2m\omega}$  con  $\delta k = |\vec{k}_1 - \vec{k}_2|$ . Por razones de simplicidad, es conveniente hacer una expansión formal, en serie de potencias, de la exponencial que aparece en el Hamiltoniano, la convergencia de la serie quedará garantizada si se escoge el parámetro de LD suficientemente pequeño, de tal forma que  $\eta\sqrt{n} \ll 1$ , si el ión tiene  $n$  fonones en su estado de vibración. Usando la identidad BCH<sup>2</sup> y luego usando la expansión de Taylor de la exponencial y sustituyendo esta expansión en la ecuación (2.85) se obtiene el correspondiente Hamiltoniano en el cuadro de interacción en la forma

$$H_{total} = -\frac{\hbar\Omega_0}{2} [|a\rangle\langle b| \exp(-\frac{\eta^2}{2} + i\phi) \sum_{l,l'} \frac{(i\eta)^{l+l'}}{l!l'} b^{\dagger l} b^{l'} \exp(it\{(l-l')\omega + \delta'\}) + hc] \quad (2.86)$$

donde se ha llevado a un cuadro de interacción utilizando como Hamiltoniano libre  $H_{libre} = \hbar\omega b_i^\dagger b_i + \hbar\delta'\sigma_3$ . Los parámetros de este sistema se pueden ajustar de tal forma que se satisfaga la condición  $(l-l')\omega + \delta' = 0$ , y asumiendo la aproximación de onda rotante se pueden conservar solamente términos que satisfagan esa condición. A continuación describimos brevemente algunas de las dinámicas particulares que se pueden generar de esta forma

**Transición Portadora (Carrier).** Si se ajustan los parámetros del sistema de tal forma que  $(l-l')\omega = 0$ ,  $\delta' = 0$  y conservando términos de orden cero en  $\eta$  en la expansión del hamiltoniano se tiene

$$H_I = -\frac{\hbar\Omega_0}{2} (e^{i\phi}\sigma^+ + e^{-i\phi}\sigma^-) \quad (2.87)$$

en donde  $\sigma^+ = |a\rangle\langle b|$ . Puesto que no aparecen los operadores fonónicos, la evolución del sistema se produce sin alterar la energía vibracional del ión, sin embargo, habrán oscilaciones tipo Rabi entre los niveles internos  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$ .

**Primer corrimiento al Rojo (red side Band).** Si por otro lado se satisface la condición  $(l-l')\omega = \omega$ ,  $\delta' = -\omega$ , y además conservando términos de orden  $\eta$  en la expansión

$$H_I = -\frac{-i\eta\hbar\Omega_0}{2} (e^{i\phi}\sigma^- b^\dagger + e^{-i\phi}\sigma^+ b) \quad (2.88)$$

y la evolución del sistema se produce siguiendo una dinámica tipo Jaynes–Cummings, es decir, el decaimiento de un ión desde el nivel  $|a\rangle$  hasta el  $|b\rangle$  y un aumento en la energía vibracional. Es posible también generar otras dinámicas, como por ejemplo, si se cumple que  $(l-l')\omega = -\omega$  y  $\delta' = \omega$ , se produce lo que se llama Primer Corrimiento al Azul, cuya dinámica es tipo Anti Jaynes–Cummings, en ésta, el ión decae del nivel  $|a\rangle$  al nivel  $|b\rangle$  y a la vez baja su energía vibracional en un cuanto.

**Esquemas de Enfriamiento Raman.** Manipulando apropiadamente las frecuencias de los láseres [12, 88], se puede lograr enfriamiento del ión. El límite de Lamb–Dicke, tiene la ventaja que, durante el experimento, permite elegir tanto  $\delta'$ , así como también el tiempo de interacción.

<sup>2</sup> La identidad de Baker–Campbell–Hausdorff establece que  $e^{-\alpha A} B e^{\alpha A} = B - \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots$



de información cuántica es alta. El régimen de acoplamiento fuerte se establece cuando

$$\begin{aligned} N_0 &\ll \frac{2\kappa\gamma}{g^2} \\ m_0 &\ll \frac{\gamma^2}{2g^2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

El **número crítico de átomos** establece el número de átomos que deben colocarse en la cavidad de tal forma que el acoplamiento con el campo permita que toda la luz absorbida produzca transiciones atómicas con alta probabilidad. Este número depende de las características geométricas y materiales del sistema, por ejemplo, de la comparación del tamaño del foco del modo de la cavidad óptica y la sección eficaz de absorción del átomo, y el número de vueltas que da el fotón en la cavidad antes de dejarla.

El **número crítico de fotones** representa el número mínimo de fotones requerido para establecer una oscilación coherente entre los niveles atómicos antes de que el átomo decaiga espontáneamente. Este número depende de las transiciones específicas involucradas en el acoplamiento átomo campo

La Electrodinámica Cuántica de Cavidades representa una de las más prominentes áreas de la Óptica Cuántica. En lo que tiene que ver con las realizaciones experimentales se deben distinguir entre las cavidades de microondas y las cavidades ópticas. Lo que las diferencia es el régimen de frecuencias en la que trabaja una u otra. Por supuesto, cada una presenta ventajas y limitaciones. Tecnológicamente, es más simple trabajar con microondas dado que el tiempo que demora un fotón en escapar de la cavidad es muy grande (del orde de 30 ms en el Grupo de París y 50 ms el grupo de Garching) y los momentos dipolares, en este régimen, de los átomos inyectados en la cavidad tienen momentos dipolares muy grandes, pues se preparan en estados excitados de Rydberg. Muchos de los experimentos que permiten testear los fundamentos de la interacción radiación–materia han sido realizados en este tipo de sistemas, (por ejemplo: generación de gatos de Schrödinger[89], investigación de decoherencia[90], aplicaciones en la realización de computas cuánticas[91]) trabajando en este régimen.

En comparación con las de microondas las cavidades ópticas presentan la ventaja de que es posible monitorear el campo que deja la cavidad o extraer luz de ésta. La desventaja radica en que es mucho más difícil alcanzar el régimen de acoplamiento fuerte. Sin embargo, los progresos recientes en la fabricación de espejos así como la propuesta de nuevas geometrías han permitido que las cavidades ópticas participen nuevamente de la carrera en la implementación de procesos de, por ejemplo, computación cuántica[92].

El uso de esquemas Raman (explicado en la sección anterior) en las cavidades permite dos avances importantes en la investigación en CQED[93]. La intensidad de las transiciones de dos fotones Raman está determinada por la intensidad de ambos campos electromagnéticos. En sistemas Raman en CQED el un campo es el de la cavidad, generalmente de un sólo fotón, acoplado a la transición atómica; el otro resulta ser un campo láser clásico externamente controlado. El control de la intensidad del láser externo permite controlar la intensidad del acoplamiento efectivo  $g_{eff}$  entre la cavidad y el átomo. Este control se realiza en tiempo real. Similarmente, variando la frecuencia del campo láser clásico se puede controlar, en tiempo real, la desintonía entre las transiciones y el campo de la cavidad. Estas ventajas permiten, por ejemplo, encender o apagar rápidamente las resonancias lo que permite una transferencia adiabática de energía entre la cavidad y el átomo. Puede concebirse por lo tanto una red de dispositivos de CQED cada uno de los cuales se activa externamente mediante un campo láser clásico, y que pueden conectarse mediante componentes ópticos como lentes, espejos, fibras, etc.

Por otro lado el uso de esquemas Raman en CQED permite que el número crítico de fotones  $m_0$  puede incrementarse arbitrariamente. Si se fija la geometría de la cavidad el acoplamiento efectivo  $g_{eff}$  entre el átomo y la cavidad es proporcional a la matriz de momento dipolar  $d$ , mientras la tasa de decaimiento atómico  $\gamma_{eff}$  es proporcional a  $d^2$ . En una transición Raman en una cavidad el elemento de matriz relevante es controlado por la intensidad  $\Omega$  del campo clásico del láser externo.

De esta forma  $m_0 \sim g_{eff}^2/\gamma_{eff}^2 \sim 1/d^2$ , el número crítico de fotones desaparece en el límite intensidades de transiciones Raman débiles es decir la tasa de decaimiento espontáneo del átomo en campos ópticos no deseados puede suprimirse arbitrariamente.

Todas estas propiedades de la tecnología de Electrodinámica Cuántica de Cavidades, permiten considerarla como uno de los dispositivos con mayores perspectivas en la realización de componentes para procesamiento de Información Cuántica. Los estados atómicos internos, como los niveles hiperfinos del estado fundamental, permiten almacenar información de forma coherente y por tiempos muy largos y con alta fidelidad. Esto lo demuestran los experimentos en iones atrapados. Si se usan átomos neutros para codificar información, tienen el problema de que es difícil transportarlos. Por el contrario los fotones ofrecen facilidades para el transporte de información, sin embargo, es muy difícil almacenarlos por tiempos largos. Precisamente es donde entran los sistemas de CQED, pues como se ha discutido, proporcionan un contacto controlable entre estos dos sistemas permitiendo conectar el concepto de memorias cuánticas (átomos), al de alambres cuánticos (fotones).



### 3. CARACTERIZACIÓN DE ESTADOS ENTRELAZADOS

#### 3.1. Introducción

El entrelazamiento cuántico se ha transformado en un concepto importante tanto en los albores de Teoría Cuántica, como también en nuestros días. Las implicaciones del entrelazamiento han sido discutidas anteriormente en trabajos pioneros de Einstein, Podolsky and Rosen [15]. La paradoja descrita en este trabajo fue retomada por D. Bohm [94] a inicio de los sesenta. Un enfoque diferente seguido por J. S Bell [16], permitió introducir un conjunto de desigualdades que deben ser satisfechas por cualquier teoría basada en propiedades puramente locales. Diferentes experimentos han confirmado que a nivel microscópico los sistemas físicos violan estas desigualdades [95]. La Teoría Cuántica predice una violación de las desigualdades de Bell para sistemas preparados en estados entrelazados.

Durante los últimos diez años se han presentado propuestas de aplicar el entrelazamiento cuántico a la Teoría de la Computación e Información. Estas propuestas han resultado en modelos nuevos teóricos para la computación y la información conocidos como Teorías de la Información y Computación Cuánticas [7]. Estos modelos están basados en la consideración del entrelazamiento como un recurso para el procesamiento de información. Por lo tanto la generación de entrelazamiento entre sistemas cuánticos es fundamental para la existencia y posterior desarrollo de estas nuevas disciplinas. Teóricamente, la posibilidad de generar entrelazamiento ha sido mostrada en varios trabajos que consideran diferentes sistemas físicos para la generación experimental, por ejemplo, usando fotones [96], iones atrapados [78, 10, 30], resonancia magnética nuclear o NMR (nuclear magnetic resonance)[31, 32], átomos en cavidades [97], y puntos cuánticos [34, 35, 36].

Una vez establecida la posibilidad cierta de generar entrelazamiento se presenta la necesidad de cuantificarlo, a fin de caracterizarlo. Los trabajos teóricos pioneros de Bennett *et. al.* [9] proponen una forma de caracterizar los recursos necesarios y suficientes de un canal que transmite estados cuánticos. Esto condujo a una medida de entrelazamiento denominada *entrelazamiento de formación*. Esta medida se define como la razón entre el número  $m$  de estados maximalmente entrelazados que se distribuyen por un canal con ruido y el número  $n$  de copias de un determinado estado mezcla que puede obtenerse de los primeros, usando operaciones locales (operaciones unitarias locales y mediciones) y comunicación clásica (Local Operations and Classical Communication [LOCC]). El entrelazamiento de formación de dos qubits está relacionado a la entropía de von Neumann,  $S = -tr\rho \ln \rho$ , a través de la expresión  $E_f(\rho) = \min_{\{p_i, \psi_i\}} \sum_i p_i S(tr_A(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|))$ . La minimización se toma sobre todos los ensembles  $\{p_i, \psi_i\}$  tales que  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Como se ha discutido en el Capítulo 2 este resultado nos proporciona un método para determinar el grado de entrelazamiento en un determinado canal de comunicación cuántica. En el capítulo anterior se mostró como Wootters y sus colaboradores [18] encontraron una conexión entre  $E_f(\rho)$ , para un estado arbitrario de dos qubits, con una cantidad que se puede calcular exactamente, llamada *Concurrencia*  $C$ . En términos de esta cantidad el entrelazamiento de formación está definido como (ver Ec. (2.30))

$$E_f(\rho) = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - C^2}\right) \quad (3.1)$$

donde  $h(x) = -x\log_2(x) - (1-x)\log_2(1-x)$ , y la concurrencia  $C(\rho)$  está dada por la Ec. (2.35)

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (3.2)$$

donde, como se explicó en el capítulo 2 los  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz  $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\rho\sqrt{\rho}}$

hermítica donde  $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ , en la práctica se usa la matriz no hermítica  $R = \sqrt{\tilde{\rho}\rho}$  que tienen los mismos autovalores.

La expresión anterior proporciona una forma operacional para cuantificar el grado de entrelazamiento para una familia de estados de sistemas compuestos. Sin embargo, si estamos interesados en obtener información cualitativa a cerca de la separabilidad de sistemas compuestos, existen otros criterios, búsqueda de violación de las desigualdades de Bell [51]. Sin embargo, existen los estados llamados *bound entangled states* los cuales tienen la característica de estar entrelazados pero no violan ninguna desigualdad de Bell conocida [98]. En el capítulo 2 se presentó el criterio de Horodecki-Peres [20] de la transpuesta parcial positiva, que permite establecer un límite entre estados entrelazados y separables para sistemas bipartitos de dimensión  $d \leq 6$  [22]. Siguiendo este concepto básico es posible introducir otro criterio para decidir si un estado dado está entrelazado o no, por ejemplo, el operador testigo de entrelazamiento (Witness operator) [99], y la negatividad [17]. Recientemente, se han hecho algunos esfuerzos para generalizar la fórmula de la concurrencia a sistemas bipartitos  $d$ -dimensionales. Esta generalización ha conducido a la definición de *tangle* [19].

La mayoría de los protocolos de comunicación cuántica están basados en la existencia de entrelazamiento cuántico entre nodos de una red de comunicación cuántica, que se encuentran muy separados. Sin embargo, aún en el caso de que se establezcan estados maximalmente entrelazados, el sistema evolucionará en presencia de los efectos, no deseados, del medio ambiente. En este sentido es importante saber como evoluciona el grado de entrelazamiento. Este es un problema muy difícil en general; sin embargo, una observación la evolución del entrelazamiento a tiempos cortos podría proporcionar información a cerca de como se pierde el entrelazamiento. Esta información podría, en particular, ser útil para implementar los procesos físicos que preservan el grado de entrelazamiento, por lo menos durante un tiempo en el cual se lleve a cabo un proceso de comunicación cuántica con una fidelidad alta. La evolución de tiempo corto, en la que estamos interesados, puede estar caracterizada por la llamada *tasa de entrelazamiento (o entanglement rate)*. En un trabajo debido a W. Dür *et. al.* [23] se destaca la importancia de la tasa de entrelazamiento en la caracterización de la capacidad de generación de entrelazamiento de cualquier interacción entre dos qubits. La tasa de entrelazamiento se define como  $\Gamma(E) = dE/dt$ . El conocimiento de esta cantidad puede ayudar a comprender la competencia entre una interacción Hamiltoniana y los efectos de decoherencia, debidos al ruido, en la generación de estados entrelazados particulares [100].

En este capítulo estudiamos un procedimiento para caracterizar la tasa de entrelazamiento de sistemas bipartitos, considerando un comportamiento de tiempo corto de la concurrencia definida por Wootters. Esto puede lograrse siguiendo la definición formal de la concurrencia en términos de la matriz  $R = \sqrt{\tilde{\rho}\rho}$ . En un primer acercamiento presentaremos una expresión general para la concurrencia en términos de los invariantes de esta matriz. La dependencia de  $C(\rho)$  se introduce a través de la evolución de la matriz densidad global bajo la acción del medio ambiente. El comportamiento de tiempo corto de  $C(\rho)$  nos permite definir una *tasa de concurrencia* como la derivada de  $C(t)$  evaluada en  $t = 0$ . En un segundo enfoque calcularemos la tasa de entrelazamiento desarrollando una teoría perturbativa para calcular los autovalores de la matriz  $R$ . Como veremos también, la conveniencia de escoger un enfoque u otro depende del rango de la matriz  $R$ . Este nuevo enfoque proporciona información a cerca del entrelazamiento inclusive en esos casos en los que es difícil obtener una solución exacta.

### 3.2. La concurrencia en términos de los invariantes de $R$

En lo que sigue expresaremos la concurrencia en términos de invariantes de la matriz  $R = \sqrt{\tilde{\rho}\rho}$ . Siguiendo la fórmula de Wootters para la concurrencia de un estado general de dos qubits dada a través de los autovalores de  $R$ . En primer lugar consideramos el caso general de la matriz  $R$  que tiene  $rank(R) \leq 4$ , de tal forma que la concurrencia puede escribirse como:

$$C(\rho) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (3.3)$$

donde asumiremos que esta combinación de autovalores es positiva. Por otro lado, podemos escribir

$$\text{tr}(R) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \quad (3.4)$$

a partir de estas ecuaciones y, notando que  $\lambda_1 = (C(\rho) + \text{tr}(R))/2$ , podemos derivar una fórmula general para la concurrencia en términos de los invariantes de  $R$ :

$$\begin{aligned} C^2(\rho) + \text{tr}(R)^2 &= 2\text{tr}(R^2) + 8 \frac{\det R}{(C(\rho) + \text{tr}(R))} \\ &\times \left( \text{tr}[R^{-1}] - \frac{2}{(C(\rho) + \text{tr}(R))} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Esta es una ecuación muy compacta de la concurrencia relacionada a los invariantes de la matriz  $R$ . El conocimiento de estos invariantes nos permitiría calcular la concurrencia resolviendo esta ecuación no lineal.

Para un sistema que evoluciona bajo una dinámica dada,  $C(\rho)$  puede considerarse una función explícita del tiempo de tal forma que para tiempos cortos comparados con las escalas de tiempo dinámicas, puede escribirse un desarrollo en serie para  $C(t)$  como

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n C(t)}{dt^n} \right]_{t=0} t^n. \quad (3.6)$$

Esto significa que debemos ser capaces de calcular las derivadas temporales de  $C(t)$ . A partir de la ecuación para  $C(t)$  dada antes podemos calcular una jerarquía de ecuaciones para todas las derivadas de  $C(t)$  alrededor de  $t = 0$ . Para hacer esto debemos calcular las derivadas de  $\text{tr}[R]$ ,  $\text{tr}[R^2]$ ,  $\text{tr}[R^{-1}]$  y  $\det[R]$  alrededor de  $t = 0$ . Por ejemplo, consideremos  $\text{tr}[R^2] = \text{tr}[\rho \tilde{\rho}]$ ,

$$\frac{d}{dt} \text{tr}[R^2] = \text{tr} \left[ \frac{d\rho}{dt} \tilde{\rho} \right] + \text{tr} \left[ \rho \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right], \quad (3.7)$$

y la segunda derivada de  $\text{tr}R^2$

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{tr}[R^2] = \text{tr} \left[ \frac{d^2 \rho}{dt^2} \tilde{\rho} \right] + 2\text{tr} \left[ \frac{d\rho}{dt} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right] + \text{tr} \left[ \rho \frac{d^2 \tilde{\rho}}{dt^2} \right]. \quad (3.8)$$

Como podemos ver a partir de estas expresiones, el comportamiento temporal se introduce a través de la evolución de la matriz densidad global  $\rho$  y la transformada  $\tilde{\rho}$ . En principio puede calcularse fácilmente la evolución de tiempos cortos de algunos términos que aparecen en la expresión para  $C(\rho)$ . La situación se torna más complicada cuando evaluamos la evolución de  $\text{tr}[R^{-1}]$  y  $\det[R]$ . Si observamos estas ecuaciones, encontramos que, dependiendo del rango  $\text{rank}(R)$ , algunos términos no contribuyen. Por ejemplo, para  $\text{rank}(R) \leq 2$  sólo  $\text{tr}(R)$  y  $\text{tr}(R^2)$  contribuyen. Como veremos más tarde, el  $\text{rank}(R)$  varía durante la evolución. Los cambios en el rango  $\text{rank}(R)$  dependen de los estados iniciales como también de la evolución física que el sistema experimenta. Un caso interesante donde la ecuación (3) puede aplicarse es, donde se parte de un estado con rango  $\text{rank}(R) = 1$ , el rango de la matriz cambia sólo a  $\text{rank}(R) \leq 2$ . En esta situación tenemos

$$C^2(\rho) = 2\text{tr}(R^2) - \text{tr}(R)^2. \quad (3.9)$$

Para calcular con esta expresión, tenemos que introducir la expansión formal para la matriz  $R$  y relacionarla con las variaciones de  $\rho$  y las de  $\tilde{\rho}$ . En este espíritu consideramos una serie formal.

$$R = \sqrt{\rho \tilde{\rho}} = [1 + (\rho \tilde{\rho} - 1)]^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho \tilde{\rho} - 1)^n \quad (3.10)$$

con  $A_n$  siendo los coeficientes de la expansión binomial general. A partir de esta relación derivamos relaciones para la primera y la segunda derivada de  $\text{Tr}[R]$ . Como una ilustración tomemos el caso

particular de un estado maximalmente entrelazado de dos fotones generado entre dos cavidades separadas que evolucionan bajo pérdidas de cavidad independientes. La evolución de la matriz densidad para estos sistemas está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_t = \mathcal{L}(\rho_t) &= \frac{\gamma_1}{2}(2a\rho_t a^\dagger - a^\dagger a \rho_t - \rho_t a^\dagger a) \\ &+ \frac{\gamma_2}{2}(2b\rho_t b^\dagger - b^\dagger b \rho_t - \rho_t b^\dagger b). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Asumiremos que inicialmente preparamos las cavidades en un estado puro maximalmente entrelazado dado por  $|\psi\rangle = (|10\rangle + |01\rangle)/\sqrt{2}$ . En este caso  $R$  inicialmente es una matriz de  $\text{rank}(R) = 1$ , y las pérdidas de la cavidad no cambian el rango de  $R$ . Este hecho reduce las expresiones para las derivadas de la concurrencia a

$$C(t)\dot{C}(t) = \text{tr}\left(\frac{dR_t^2}{dt}\right) - \text{tr}(R_t)\text{tr}(\dot{R}_t) \quad (3.12)$$

y

$$C(t)\ddot{C}(t) = \text{tr}(\ddot{R}_t^2) - \text{tr}(R_t)\text{tr}(\ddot{R}_t) - \text{tr}(\dot{R}_t)^2 - \dot{C}(t)^2. \quad (3.13)$$

Notando que  $(\sigma_y \otimes \sigma_y)^\dagger = (\sigma_y \otimes \sigma_y)$ , y usando las propiedades cíclicas de la traza, puede mostrarse que

$$\text{tr}\left[\frac{dR_t^2}{dt}\right] = 2\text{tr}\left[\frac{d\rho_t}{dt}\tilde{\rho}_t\right] = 2\text{tr}\left[\rho_t\frac{d\tilde{\rho}_t}{dt}\right]. \quad (3.14)$$

La expresión para  $\text{tr}(\dot{R}_t)$  puede calcularse a partir de (3.10). Después de alguna álgebra y tomando en cuenta que alrededor de  $t = 0$  tenemos  $(\rho\tilde{\rho})^n = \rho\tilde{\rho}$ , pueden mostrarse los siguientes resultados:

$$\text{tr}\left[(\rho\tilde{\rho} - 1)^{n-1}\frac{d(\rho\tilde{\rho})}{dt}\right]_{t=0} = 0, \quad (3.15)$$

el cual es válido para  $n = 2, 3, 4, \dots$ . De esta forma la primera derivada de  $R$  puede escribirse como

$$\text{tr}[\dot{R}] = \text{tr}\left[\tilde{\rho}\frac{d(\rho)}{dt}\right]. \quad (3.16)$$

Considerando ahora que  $\text{tr}[R]_{t=0} = 1$ , y remplazando los resultados de (3.14), y (3.16) en la ecuación (3.12) obtenemos

$$\dot{C}(0) = -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2), \quad (3.17)$$

donde  $\gamma_1$   $\gamma_2$  son las tasas de pérdida de las dos cavidades.

Adicionalmente, en el caso especial de este ejemplo, calcularemos la derivada de segundo orden de  $R$  (también los términos de más alto orden en la serie son todos idénticamente cero). A partir de estas observaciones es fácil mostrar que la segunda derivada de la concurrencia se puede escribirse en la forma

$$\ddot{C}(0) = \frac{1}{4}(\gamma_1 + \gamma_2)^2. \quad (3.18)$$

Entonces, al segundo orden en el tiempo  $t$ , podemos escribir:

$$C(t) \approx 1 - \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)t + \frac{1}{8}(\gamma_1 + \gamma_2)^2 t^2. \quad (3.19)$$

Este resultado está en perfecto acuerdo con las soluciones analíticas exactas para la concurrencia  $C(t) = \exp(-(\gamma_1 + \gamma_2)t/2)$ , la cual se obtiene resolviendo la Ec. (3.11).

El cálculo de la concurrencia para matrices que tienen  $\text{rank}(R) \geq 2$  es mucho más complicado debido a los términos adicionales en la Ec. (3.5). Por ejemplo, bajo la dinámica dada en la Ec. (3.11) un estado inicial maximalmente entrelazado de la forma  $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  cambia a  $\text{rank}(R) = 4$ . Para estudiar situaciones más complicadas como esta, encontramos interesante buscar otros métodos de encontrar información a cerca de las medida de entrelazamiento de tiempo corto. Esto es la que discutiremos en la siguiente sección.

### 3.3. En enfoque perturbativo para la tasa de Concurrencia

En esta sección presentamos un método para calcular la tasa de concurrencia para los estados entrelazados de dos qubits. Como hemos mencionado previamente, la concurrencia se define en términos de los autovalores de la matriz  $R$ . El problema que nos interesa resolver se escribe formalmente como

$$M|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle,$$

donde  $M(t) = R^2 = \rho\tilde{\rho}$ . Una posibilidad es calcular los autovalores de  $R$  en una expansión perturbativa en el tiempo. De esta forma, la matriz  $M$  puede expresarse como una serie en la siguiente forma:

$$M = M^{(0)} + M^{(1)}t + M^{(2)}t^2 + \dots \quad (3.20)$$

Aquí, la matriz  $M^{(0)} = M(0)$  se asume que es hermítica, la cual corresponde a una matriz densidad de un estado de Werner, es decir, una superposición incoherente de estados maximalmente entrelazados. Adicionalmente, asumiremos que los autovalores de  $M$  están dados por

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}t + \lambda^{(2)}t^2 + \dots \quad (3.21)$$

y sus autovectores se escriben como

$$|\psi\rangle = |\psi^{(0)}\rangle + |\psi^{(1)}\rangle t + |\psi^{(2)}\rangle t^2 + \dots \quad (3.22)$$

A partir de las ecuaciones (3.22), (3.21) y (3.20) obtenemos la siguiente jerarquía de ecuaciones:

$$\begin{aligned} M^{(0)}|\psi_i^{(0)}\rangle &= \lambda_i^{(0)}|\psi_i^{(0)}\rangle \\ M^{(0)}|\psi_i^{(1)}\rangle + M^{(1)}|\psi_i^{(0)}\rangle &= \lambda_i^{(0)}|\psi_i^{(1)}\rangle + \lambda_i^{(1)}|\psi_i^{(0)}\rangle \\ M^{(0)}|\psi_i^{(2)}\rangle + M^{(1)}|\psi_i^{(1)}\rangle + M^{(2)}|\psi_i^{(0)}\rangle &= \lambda_i^{(0)}|\psi_i^{(2)}\rangle + \lambda_i^{(1)}|\psi_i^{(1)}\rangle + \lambda_i^{(2)}|\psi_i^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dada la Hermiticidad de  $M(0)$ , la corrección a los autovectores y autovalores se obtienen usando el procedimiento usual en la teoría perturbativa. Después de algunos cálculos obtenemos

$$\lambda_i^{(1)} = \langle \psi_i^{(0)} | M^{(1)} | \psi_i^{(0)} \rangle \quad (3.24)$$

$$\lambda_i^{(2)} = \sum_{j'} \frac{|\langle \psi_j^{(0)} | M^{(1)} | \psi_i^{(0)} \rangle|^2}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}} + \langle \psi_i^{(0)} | M^{(2)} | \psi_i^{(0)} \rangle. \quad (3.25)$$

A partir de estas ecuaciones podemos calcular la tasa de concurrencia para los diferentes estados que son inicialmente estados de Werner.

Estamos interesados en sistemas que evolucionan bajo una ecuación maestra general:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}(\rho), \quad (3.26)$$

donde  $H$  es el operador Hamiltoniano y  $\mathcal{L}$  el superoperador de Lindblad el cual puede escribirse en forma general como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) &= \sum_{j=1,2} \frac{\gamma_j}{2} (\bar{n}_j + 1) \left[ 2F_j \rho F_j^\dagger - F_j^\dagger F_j \rho - \rho F_j^\dagger F_j \right] \\ &+ \sum_{j=1,2} \frac{\gamma_j}{2} \bar{n}_j \left[ 2F_j^\dagger \rho F_j - F_j F_j^\dagger \rho - \rho F_j F_j^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde  $\bar{n}_j$  es el número promedio de excitaciones y  $\gamma_j$  es la tasa de decaimiento para cada sistema.

Si, tanto el Hamiltoniano  $H$  y el super operador  $\mathcal{L}$  son independientes del tiempo, una solución formal de la ecuación (3.26) está dada por

$$\rho(t) = e^{Lt} \rho(0), \quad (3.28)$$

donde  $L(\rho) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}(\rho)$  es un superoperador general, y tiene sentido sólo cuando actúa sobre una matriz densidad. Entonces podemos expandir (3.28) en forma de una serie de Taylor como

$$\rho(t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}^n}{n!} t^n \right) \rho(0). \quad (3.29)$$

$\mathcal{L}^n$ , significa  $n$  aplicaciones sucesivas del superoperador  $\mathcal{L}$  a la matriz densidad para la condición inicial.

Del resultado anterior, podemos construir la matriz  $M = \rho\tilde{\rho}$  a cualquier orden en  $t$ , pero para los fines que perseguimos aquí basta con calcularlo al segundo orden, entonces tenemos las siguientes relaciones

$$M^{(0)} = \rho(0)\tilde{\rho}(0), \quad (3.30)$$

$$M^{(1)} = \dot{\rho}(0)\tilde{\rho}(0) + \rho(0)\dot{\tilde{\rho}}(0), \quad (3.31)$$

$$M^{(2)} = \ddot{\rho}(0)\tilde{\rho}(0) + \rho(0)\ddot{\tilde{\rho}}(0) + \dot{\rho}(0)\dot{\tilde{\rho}}(0). \quad (3.32)$$

Este método es simple y es válido para un rango amplio de problemas en información y computación cuántica. Aplicaremos el procedimiento descrito arriba a un estado inicial maximalmente entrelazado de dos cavidades acopladas

$$|\phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} \quad (3.33)$$

que evolucionan bajo (3.27) para  $F_1 = a$  y  $F_2 = b$  y a  $T = 0$ . En este caso la tasa de concurrencia es difícil de calcular usando el método presentado en la sección previa. El mecanismo de decoherencia dado por (3.11) (con  $H = 0$ ) cambia el rango de  $\text{rank}(\mathbf{R}) = 1$  a  $\text{rank}(\mathbf{R}) > 2$ . Después de algunos cálculos al segundo orden en teoría perturbativa, puede mostrarse que la concurrencia al primer orden está dado por

$$C(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|) = 1 - \left[ \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) + \sqrt{\gamma_1\gamma_2} \right] t + \dots \quad (3.34)$$

En este caso es necesario calcular hasta el segundo orden debido a que el  $\text{rank}(\mathbf{R})$  cambia introduciendo una contribución adicional  $\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ . La disipación acopla el sector del espacio de Hilbert que involucra a los estados  $|01\rangle$  y  $|10\rangle$  que aparecen en las correcciones a los autovalores de  $R^2$  son de segundo orden en el tiempo. Este resultado está de acuerdo con el que se puede obtener resolviendo la dinámica exacta del sistema. En una forma similar se pueden obtener directamente los resultados obtenidos en la sección anterior para el caso  $|\psi\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ .

Usando este resultado podemos abordar el problema estudiado en [100] para un sistema de qubits formado por átomos en presencia de un Hamiltoniano de interacción y un único canal de decaimiento. En este caso la ecuación maestra considerada por los autores se obtiene de las ecuaciones (3.26), (3.27) con  $F_j = \sigma_-^j$ ,  $F_j^\dagger = \sigma_+^j$ ; y el Hamiltoniano  $H$  en este caso está dado por

$$H = \frac{\hbar\omega\sigma_z^1}{2} + \frac{\hbar\omega\sigma_z^2}{2} + \hbar g(\sigma_+^1\sigma_-^2 + \sigma_-^1\sigma_+^2).$$

Asumiendo que tenemos un estado inicial no maximalmente entrelazado dado por;

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} \frac{c+d}{2} & 0 & 0 & \frac{c-d}{2} \\ 0 & \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-c}{2} & \frac{a+b}{2} & 0 \\ \frac{c-d}{2} & 0 & 0 & \frac{c+d}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

la concurrencia puede escribirse como

$$C(t) = (a - b - c - d) - \gamma(2\bar{n} + 1)(c + d - 2a)t + \dots \quad (3.36)$$

donde se ha asumido que la concurrencia inicial es  $a - b - c - d \geq 0$ . Este resultado está conectado al resultado encontrado en [100] cuando ponemos la temperatura  $T = 0$ .

Este ejemplo nos muestra que, cuando  $M^{(0)}$  es una matriz Hermítica, este enfoque perturbativo nos permite encontrar las correcciones de primero y segundo orden de los autovalores de  $\rho\tilde{\rho}$ .

Existen ciertos casos en los cuales no se tiene necesariamente una matriz  $M^{(0)}$  hermítica. Esto ocurre cuando partimos de un estado no maximalmente entrelazado. En estos casos, proponemos modificaciones a los métodos usados para calcular las correcciones a los autovalores. El problema perturbativo en la Ec (3.23) seguirá siendo válido cuando los autovalores de  $M^{(0)}$  (no necesariamente hermítica) sean reales. Esta condición es satisfecha siempre por  $M = \rho\tilde{\rho}$ , debido a que tiene los mismos autovalores que la matriz hermítica  $\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}$  [101]. Por ejemplo consideremos el caso presentado en la referencia [100] donde el estado inicial está dado por

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & q^* & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Esto conduce a una matriz no hermítica  $M(0)$  con autovalores reales. En general tenemos que resolver el siguiente problema de autovalores

$$M|\psi_r\rangle = \lambda|\psi_r\rangle \quad (3.38)$$

donde  $|\psi_r\rangle$  son los autovectores a la derecha. Calcularemos los autovectores a la izquierda usando la ecuación siguiente:

$$M^\dagger|\psi_\ell\rangle = \tilde{\lambda}|\psi_\ell\rangle. \quad (3.39)$$

Tomando el conjugado hermítico de (3.38) y (3.39) tenemos

$$\begin{aligned} \langle\psi_r|M^\dagger &= \lambda^*\langle\psi_r| \\ \langle\psi_\ell|M &= \tilde{\lambda}^*\langle\psi_\ell|. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ya que  $M$  tiene autovalores positivos entonces, dados dos autovalores diferentes de  $M^{(0)}$ , la siguiente afirmación es verdadera:

$$\begin{aligned} \langle\psi_{\ell 2}|M|\psi_{r 1}\rangle &= \lambda_1\langle\psi_{\ell 2}|\psi_{r 1}\rangle \\ \langle\psi_{\ell 2}|M|\psi_{r 1}\rangle &= \lambda_2\langle\psi_{\ell 2}|\psi_{r 1}\rangle \end{aligned} \quad (3.41)$$

y a partir de esta

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\psi_{\ell 2}|\psi_{r 1}\rangle = 0. \quad (3.42)$$

Los autovectores que corresponden a un autovalor  $\lambda_1$  son ortogonales a los autovectores derechos que corresponden a un autovalor diferente  $\lambda_2$ . Adicionalmente, usaremos la constante de normalización en una forma tal que  $\langle\psi_\ell|\psi_r\rangle = 1$ . Podemos ahora calcular las correcciones de primero y segundo orden a los autovalores de  $M^{(0)}$ :

$$\lambda_i^{(1)} = \langle\psi_{\ell i}^{(0)}|M^{(1)}|\psi_{r i}^{(0)}\rangle \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(2)} &= \sum_j \frac{\langle\psi_{\ell j}^{(0)}|M^{(1)}|\psi_{r i}^{(0)}\rangle\langle\psi_{\ell i}^{(0)}|M^{(1)}|\psi_{r j}^{(0)}\rangle}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}} \\ &+ \langle\psi_{\ell i}^{(0)}|M^{(2)}|\psi_{r i}^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

A partir de estas fórmulas podemos calcular la tasa de concurrencia la cual después de algunos calculos, da como resultado:

$$\begin{aligned} C(t) &= 2|q| + 2 \left[ \frac{gq^I(2p-1) - \gamma|q|^2(2\bar{n}+1)}{|q|} \right. \\ &\quad \left. - \gamma\sqrt{\bar{n}(\bar{n}+1)} \right] t + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde  $q^I = \text{Im}(q)$ . Este resultado concuerda con el que se encuentra en [100] para la tasa de entrelazamiento para  $t = 0$  y  $\bar{n} = 0$  (debido a que, independientemente de los términos de las derivadas de orden más alto de  $C(t)$  evaluadas en  $t = 0$  es la misma que en [100] a este tiempo). Se obtiene información adicional a partir de la (3.45) si hacemos válido este resultado a tiempos cortos. Esta relación revela la dependencia con la temperatura, por ejemplo, este problema es muy duro de resolver en el caso exacto, pero usando este método podemos tener información de la influencia de la temperatura. La concurrencia a tiempos cortos está dada para cualquier estado entrelazado de un sistema bipartito bidimensional, variando desde un estado separable hasta un estado maximalmente entrelazado.

La última afirmación se verifica trivialmente a partir de los casos presentados en los ejemplos precedentes, debido a que sólo un parámetro, la escala de tiempo asociado con  $\gamma$ , es el relevante, entonces si la condición  $\gamma t \ll 1$  es suficiente para asegurar que la serie tenga convergencia y por lo tanto truncarla al orden  $t$ . En el último ejemplo estudiado el problema es algo diferente debido a que hay dos escalas de tiempo asociadas a los parámetros  $g$  y  $\gamma$ , que están en competición en los procesos de entrelazamiento y decoherencia. Para clarificar este punto tomemos, sin pérdida de generalidad, un parámetro real  $q$  y  $T = 0$ , el término de segundo orden de la concurrencia está dado por

$$C(t) = 2q - 2q\gamma t + \left( \left( \frac{g}{\gamma} \right)^2 \frac{\sqrt{(p-p^2)}(1-2p)^2}{q} + q \right) \gamma^2 t^2 + O(t^3) \quad (3.46)$$

En este caso podemos tomar como parámetros de la expansión  $\gamma t \ll 1$ . Entonces, el régimen  $g \ll \gamma$  es trivial debido a que el sistema es amortiguado rápidamente al estado fundamental (es un sistema atómico). El régimen  $\gamma \ll g$  se obtiene cuando el término de amortiguamiento de la ecuación maestra es despreciable con respecto a la evolución unitaria.

A partir del resultado en (3.46) puede verse que los coeficientes de segundo orden dependen del estado inicial, como se esperaba. El rol de la condición inicial juega en la convergencia de la serie está restringido por  $|q|^2 \leq p - p^2$ , lo cual garantiza la validez de la matriz densidad. Los dos casos extremos son  $p = 0$  o  $p = 1$ , pero la condición impuesta en la matriz densidad implica que  $|q| = 0$ , la concurrencia del estado inicial es cero, lo cual es correcto, debido a que en este caso no está entrelazado. El coeficiente de segundo orden es finito en este caso debido a que  $|q| \rightarrow 0$  y  $p - p^2 \rightarrow 0$ , simultáneamente, entonces para  $g \approx \gamma$  y  $\gamma t \ll 1$  la concurrencia de tiempo corto es válida. En el caso de estados maximalmente entrelazados  $|q| = 1/2$ ,  $p = 1/2$ , el coeficiente de segundo orden es independiente de  $g$ , y de nuevo la concurrencia de tiempo corto es válida. En los casos intermedios  $0 < |q| < 1/2$  el coeficiente del término de segundo orden es más pequeño que el coeficiente del término de primer orden cuando  $\gamma t \ll 1$  y  $g$  comparable a  $\gamma$  o  $g \ll \gamma$ .

Otras situaciones, como el caso estudiado en la referencia [102] para el cálculo exacto de la concurrencia para estados entrelazados del campo de dos modos en presencia de amortiguamiento de fase, pueden también abordarse siguiendo el esquema descrito en esta sección, estudiando la evolución de tiempo corto de la concurrencia.

En resumen, hemos estudiado el comportamiento de tiempo corto del entrelazamiento para un sistema inicialmente preparado en un estado ya sea maximalmente o no maximalmente entrelazado, y evolucionando bajo dinámicas disipativas. Un enfoque perturbativo nos permite calcular las derivadas de la concurrencia de Wootters alrededor de  $t = 0$ . Definimos la tasa de entrelazamiento en términos de la primera derivada de la concurrencia. Una teoría perturbativa similar a los métodos estándar usados en mecánica cuántica nos permite encontrar los autovalores de la matriz inicial  $R^2 = \rho(0)\tilde{\rho}(0)$ , y entonces calcular la concurrencia definida por Wootters.

### 3.4. El testigo de entrelazamiento.

En esta sección presentamos la forma de calcular el “operador testigo de entrelazamiento” cuando un estado inicialmente entrelazado evoluciona bajo diferentes mecanismos de disipación. Estos mecanismos de disipación constituyen básicamente disipación de fase y disipación de amplitud de



estados fotónicos. Adicionalmente se estudia el comportamiento del operador testigo de entrelazamiento para el estado entrelazado de dos estados coherentes (dos gatos de Schödinger entrelazados) que se encuentra conectado a un baño térmico a temperatura  $T = 0$ .

El testigo de entrelazamiento es un operador  $W$  definido en el espacio  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  que es hermítico, por lo tanto un observable en este espacio. La definición de este operador tiene una conexión directa con el criterio de Peres–Horodecki para separabilidad de estados bipartitos y multipartitos llamado criterio de la Transpuesta Parcial Positiva (del inglés Positive Partial Tranpose). Peres introdujo este criterio de separabilidad de estados bipartitos (para qubits) , mostrando que la transpuesta parcial (transposición respecto al sistema  $B$ , por ejemplo) de la matriz densidad de un estado separable debe también ser una matriz densidad. Como hemos explicado en el capítulo de introducción teórica la positividad de la matriz densidad es una propiedad crucial, si se quiere que ésta represente un estado físico de un sistema. Sin embargo no siempre es verdad que la transposición parcial de la matriz densidad conduzca también a un operador densidad. Lo relevante en el criterio de Peres–Horodecki es que se viola la positividad si y sólo si el estado es no separable.

Dado que el operador testigo de entrelazamiento es un observable, para que sea un buen detector de separabilidad de estados debe ser sensible al conjunto de autovalores negativos de la matriz transpuesta parcial. La familia Horodecki demostró que una matriz densidad  $\rho$  en  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  representa un estado entrelazado si y sólo si existe una matriz hermítica  $W = W^\dagger$ , un testigo de entrelazamiento, tal que

$$\text{Tr}(W\rho_{ent}) < 0 \quad (3.47)$$

y para todo estado separable  $\rho_{sep}$

$$\text{Tr}(W\rho_{sep}) \geq 0 \quad (3.48)$$

Este criterio establece que si el valor esperado del observable testigo de entrelazamiento  $W$  es positivo, entonces el estado es separable, mientras que si este valor esperado es negativo el estado está entrelazado.

Investigaciones posteriores proponen una descomposición del operador testigo de entrelazamiento en términos de un conjunto de mediciones locales, lo cual permitiría en principio establecer si un estado es o no separable simplemente realizando estas mediciones locales. En otras palabras, si se encuentra una forma de caracterizar una familia de estados mediante una descomposición del operador testigo en términos de mediciones locales podremos decidir respecto a la separabilidad o no de un estado sin tener que caracterizar el estado en su totalidad.

En esta sección se muestra que efectivamente se puede establecer esta descomposición del testigo de entrelazamiento en términos de los operadores de Pauli asociados a cada sistema individual, aún cuando el estado evoluciona en presencia de diferentes mecanismos de disipación. Este resultado muestra que basta con medir estos operadores de Pauli en cualquier tiempo para determinar si el estado es separable o no.

### 3.4.1. Estados de Fock entrelazados.

Considere un sistema en el estado inicial  $|\psi\rangle$  . El sistema se supone que está en contacto con un baño térmico a  $T = 0$ , la evolución de este sistema está descrita por

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\gamma_1}{2}(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\gamma_2}{2}(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b) \quad (3.49)$$

donde  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$  son los operadores de creación y destrucción de los dos modos del campo electromagnético cuyo estado es un estado entrelazado (por ejemplo puede representar los estados de polarización o el campo de una cavidad bimodal),  $\gamma_i$  corresponde a las tasas de decaimiento debido al efecto del baño. En la base de estados de Fock  $\{|nm\rangle\}$  la última ecuación se escribe ahora

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{ijkl} &= \frac{\gamma_1}{2} [2\sqrt{(i+1)(j+1)}\rho_{i+1j+1kl} \\
&\quad - (i+j)\rho_{ijkl}] \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{2} [2\sqrt{(k+1)(l+1)}\rho_{ij,k+1l+1} \\
&\quad - (k+l)\rho_{ijkl}]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

los subíndices  $i, j$  y  $k, l$  corresponden al primer y segundo qubit respectivamente. Los procesos de decaimiento se consideran debidos a baños acoplados de forma independiente a los modos. Si la energía disponible en el sistema no es suficiente para generar estados con un número de fotones igual o superior a 2 en las cavidades se obtiene un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales. Las soluciones para este sistema de ecuaciones se obtienen de manera muy simple por integración directa. Si los índices  $j, k, l, m$  no son todos simultáneamente cero podemos escribir una expresión abreviada de las soluciones:

$$\rho_{ijkl}(t) = \bar{\rho}_{ijkl}e^{-\gamma_{ijkl}t} + \epsilon_{ijkl}R_{ijkl}e^{-\gamma_{ijkl}t}(1 - e^{-\gamma_{kl}t}) \tag{3.51}$$

donde hemos definido  $\epsilon_{ijkl} \equiv |(i+j - \delta_{ij}) - (k+l - \delta_{kl})/2|$ ;  $\gamma_{ijkl} \equiv (i+j)\gamma_1/2 + (k+l)\gamma_2/2$  y  $R_{ijkl} \equiv \delta_{ij}\bar{\rho}_{ijkl} + \delta_{kl}\bar{\rho}_{ijkl}$  (la barra indica la condición inicial de los elementos de matriz). El elemento de matriz  $\rho_{0000}$  es ligeramente diferente y puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\rho_{0000} &= (\bar{\rho}_{0011} + \bar{\rho}_{1111})(1 - e^{-\gamma_1 t}) \\
&\quad + (\bar{\rho}_{1100} + \bar{\rho}_{1111})(1 - e^{-\gamma_2 t}) \\
&\quad - \bar{\rho}_{1111}(1 - e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t}) + \bar{\rho}_{0000}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Una vez obtenida la solución para todos los elementos de la matriz densidad, partiendo de un estado inicial arbitrario podemos considerar los casos particulares de un estado no maximalmente entrelazado  $|\phi\rangle = a'|01\rangle + b'|10\rangle$ . La matriz densidad inicial es entonces

$$\rho_0 = |\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a'|^2 & a'b'^* & 0 \\ 0 & a'^*b' & |b'|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

Los únicos elementos que son diferentes de cero en la solución de la ecuación maestra son los siguientes

$$\begin{aligned}
\rho_{0011} &= p_1\bar{\rho}_{0011} \\
\rho_{1100} &= p_2\bar{\rho}_{1100} \\
\rho_{1001} &= \sqrt{p_1p_2}\bar{\rho}_{1001} \\
\rho_{0110} &= \sqrt{p_1p_2}\bar{\rho}_{0110} \\
\rho_{0000} &= (1 - p_1)\bar{\rho}_{0011} + (1 - p_2)\bar{\rho}_{1100},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

donde  $p_i = e^{-\gamma_i t}$ . La transpuesta parcial (en el segundo qubit) de la matriz densidad al tiempo  $t$  es

$$\rho^{TB} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & q\bar{\rho}_{1001} \\ 0 & p_1\bar{\rho}_{0011} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2\bar{\rho}_{1100} & 0 \\ q\bar{\rho}_{0110} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

donde hemos definido  $q = \sqrt{p_1p_2}$  y  $A = (1 - p_1)\bar{\rho}_{0011} + (1 - p_2)\bar{\rho}_{1100}$ . El próximo paso es calcular los autovalores negativos y el correspondiente autovector. Si el estado inicial está maximalmente entrelazado tenemos.

$$\lambda_- = \frac{(1-p_1)\bar{\rho}_{0011} + (1-p_2)\bar{\rho}_{1100}}{2} \times \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4q^2|\bar{\rho}_{1001}|^2}{|(1-p_1)\bar{\rho}_{0011} + (1-p_2)\bar{\rho}_{1100}|^2}} \right) \quad (3.56)$$

el cual es siempre negativo. Por lo tanto, este estado está siempre entrelazado, el autoestado correspondiente es

$$|e\rangle = N \left( |00\rangle + \frac{q\bar{\rho}_{0110}}{\lambda_-} |11\rangle \right)$$

$N$  es el factor de normalización. El operador testigo de entrelazamiento  $W = |e\rangle\langle e|^{TB}$  está dado por

$$W = |N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q\bar{\rho}_{0110}}{\lambda_-} & 0 \\ 0 & \frac{q\bar{\rho}_{0110}}{\lambda_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q^2|\bar{\rho}_{0110}|^2}{|\lambda_-|^2} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Consideremos ahora un estado inicial de la forma  $|\psi\rangle = a'|00\rangle + b'|11\rangle$ , que posee una matriz densidad correspondiente dada por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |a'|^2 & 0 & 0 & a'b'^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'^*b' & 0 & 0 & |b'|^2 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

la matriz densidad al tiempo  $t$  tendrá los siguientes elementos diferentes de cero

$$\begin{aligned} \rho_{1111} &= p_1 p_2 \bar{\rho}_{1111} \\ \rho_{1010} &= q \bar{\rho}_{1010} \\ \rho_{0101} &= q \bar{\rho}_{0101} \\ \rho_{1100} &= p_1 (1-p_2) \bar{\rho}_{1111} \\ \rho_{0011} &= p_2 (1-p_1) \bar{\rho}_{1111} \\ \rho_{0000} &= [(1-p_1)(1-p_2)] \bar{\rho}_{1111} + \bar{\rho}_{0000} \end{aligned} \quad (3.59)$$

la transpuesta parcial será

$$\rho^{TB} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 d_1 \bar{\rho}_{1111} & q \bar{\rho}_{0101} & 0 \\ 0 & q \bar{\rho}_{1010} & p_1 d_2 \bar{\rho}_{1111} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \bar{\rho}_{1111} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

donde  $d_i = 1 - p_i$ ,  $A' = d_1 d_2 \bar{\rho}_{1111} + \bar{\rho}_{0000}$

El autovalor negativo de esta transpuesta parcial que puede resultar negativo es

$$\lambda_- = \frac{c \bar{\rho}_{1111}}{2} \times \left[ 1 - \sqrt{1 + f [|\bar{\rho}_{1010}|^2 - d_1 d_2 |\rho_{1111}|^2]} \right] \quad (3.61)$$

con  $f = 4q^2/[c\bar{\rho}_{1111}]^2$  y  $c = p_2(1-p_1) + p_1(1-p_2)$ . El autovalor es negativo si y sólo si se cumple la condición

$$(1-p_1)(1-p_2)|\rho_{1111}|^2 < |\bar{\rho}_{1010}|^2 \quad (3.62)$$

Esta relación establece una condición de separabilidad. Por lo tanto, este caso es diferente del primero en cuanto a comportamiento del entrelazamiento en función del tiempo. El autovector correspondiente al autovalor en consideración (el que puede ser negativo) está dado por

$$|e\rangle = N \left[ |01\rangle + \frac{q^2 \bar{\rho}_{1010}}{p_1(1-p_2)\bar{\rho}_{1111} - \lambda_-} |10\rangle \right]$$

Por lo tanto, el testigo de entrelazamiento  $W' = |e'\rangle\langle e'|^{TB}$  en este caso está dado como

$$W' = |N|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C\bar{\rho}_{1010} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |C\bar{\rho}_{1010}|^2 & 0 \\ C\bar{\rho}_{1010} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

donde  $C = (q^2 \bar{\rho}_{1010}) / (p_1(1-p_2)\bar{\rho}_{1111} - \lambda_-)$

### 3.4.2. Disipación de Fase

Cuando se considera disipación de fase la ecuación de Limbland tiene la forma

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\gamma_1}{2} [2\hat{n}_1 \rho \hat{n}_1 - \hat{n}_1 \rho - \rho \hat{n}_1] + \frac{\gamma_2}{2} [2\hat{n}_2 \rho \hat{n}_2 - \hat{n}_2 \rho - \rho \hat{n}_2] \quad (3.64)$$

si escogemos de nuevo la base Fock  $\{|nm\rangle\}$ , la ecuación toma la forma

$$\dot{\rho}_{ijkl} = \left\{ \frac{\gamma_1}{2} [2ij - (i+j)] + \frac{\gamma_2}{2} [2kl - (k+l)] \right\} \rho_{ijkl} \quad (3.65)$$

donde (como antes) las primas se refieren a los estados finales de Fock. La solución se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} \rho_{ijkl} &= \bar{\rho}_{ijkl} e^{\gamma_{ijkl} t} \\ \gamma_{ijkl} &= \frac{\gamma_1}{2} [2ij - (i+j)] \\ &\quad + \frac{\gamma_2}{2} [2kl - (k+l)] \end{aligned} \quad (3.66)$$

La característica de la disipación de fase es que únicamente los elementos fuera de la diagonal decaen en el tiempo, la diagonal de la matriz densidad permanecen en el tiempo. Si el sistema está inicialmente en el estado  $|\phi\rangle$ , el estado final viene dado en este caso por

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_{0011} & q\bar{\rho}_{0110} & 0 \\ 0 & q\bar{\rho}_{1001} & \bar{\rho}_{1100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

el autovalor negativo es  $\lambda_- = -q|\bar{\rho}_{1001}|^2$  y el autovector es  $|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - e^{i\varphi}|11\rangle)$ , tenemos  $\varphi = 0$ . Por lo tanto el testigo de entrelazamiento es

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Si el estado inicial es  $|\psi\rangle$ , entonces la matriz densidad en el tiempo  $t$  está dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_{000} & 0 & 0 & q\bar{\rho}_{0101} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q\bar{\rho}_{1010} & 0 & 0 & \bar{\rho}_{1111} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

el autovalor negativo y su autovector son  $\lambda_- = -q|\bar{\rho}_{1010}|^2$ ,  $|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - e^{i\varphi}|10\rangle)$ , tenemos  $\varphi = 0$ . El testigo de entrelazamiento, en este caso es, por lo tanto

$$W' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

### 3.4.3. Estados coherentes entrelazados

Consideremos dos estados coherentes entrelazados y un proceso de disipación. Seguimos el enfoque presentado en la referencia [64]. En esta referencia se presenta la evolución de un gato de Schrödinger en presencia de un reservorio a  $T = 0$  en el estado de vacío. Entonces el estado final, que se obtiene trazando sobre las variables de reservorio (en el límite  $N \rightarrow \infty$ ), es

$$\rho(t) = N_+^2 [|\alpha_t\rangle\langle\alpha_t| + |-\alpha_t\rangle\langle-\alpha_t| + \kappa(|-\alpha_t\rangle\langle\alpha_t| + |\alpha_t\rangle\langle-\alpha_t|)] \quad (3.71)$$

donde  $N_+ = 1/\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})}$ ,  $\kappa = e^{-2F(t)|\alpha|^2}$ ;  $F(t) = 1 - \xi(t) = 1 - e^{-\gamma t}$ . Estamos interesados en la evolución de un sistema en este reservorio con un estado inicial entangled del tipo  $|\Psi\rangle = C_0(|\alpha\rangle|\eta\rangle + |-\alpha\rangle|-\eta\rangle)$ . La matriz densidad final, siguiendo (3.71) está dado por

$$\rho(t) = |C_0|^2 [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\eta\rangle\langle\eta| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| \otimes |-\eta\rangle\langle-\eta| + \kappa_\alpha \kappa_\eta (|\alpha\rangle\langle-\alpha| \otimes |\eta\rangle\langle-\eta| + |-\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |-\eta\rangle\langle\eta|)] \quad (3.72)$$

Necesitamos escoger una base ortonormal apropiada. Esta base está formada por la base  $|\pm\rangle$  la cual se define como

$$|\pm\rangle = N_\pm (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \quad (3.73)$$

donde  $N_\pm = 1/\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}$ . A partir de la Ec. (3.73) tenemos

$$|\pm\alpha\rangle = \frac{1}{N_+} |+\rangle \pm \frac{1}{N_-} |-\rangle$$

Entonces el estado final puede está descrito por

$$\rho(t) = 2|C_0|^2 [ak|+\rangle\langle+\rangle + |\bar{a}k|-\rangle\langle-\rangle + b\bar{k}|+\rangle\langle-\rangle + |\bar{b}k|-\rangle\langle+\rangle + qk|+\rangle\langle-\rangle + |\bar{q}k|-\rangle\langle+\rangle + q\bar{k}|+\rangle\langle-\rangle + |\bar{q}k|-\rangle\langle+\rangle] \quad (3.74)$$

En la base  $\{|+\rangle, |-\rangle, |-\rangle, |-\rangle\}$ , la transpuesta parcial de la matriz densidad es

$$\rho^{T_B} = 2|C_0|^2 \begin{pmatrix} ak & 0 & 0 & q\bar{k} \\ 0 & b\bar{k} & qk & 0 \\ 0 & qk & \bar{b}k & 0 \\ q\bar{k} & 0 & 0 & \bar{a}k \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

donde  $a = (N_+^2 M_+^2)^{-1}$ ,  $\bar{a} = (N_-^2 M_-^2)^{-1}$ ,  $b = (N_+^2 M_-^2)^{-1}$ ,  $\bar{b} = (N_-^2 M_+^2)^{-1}$ ,  $q = (N_+ N_- M_+ M_-)^{-1}$  y  $k = 1 + \kappa_\alpha \kappa_\eta$ ,  $\bar{k} = 1 - \kappa_\alpha \kappa_\eta$ . Los autovalores son

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{(a + \bar{a})k}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - Q}\right) \\ \lambda_{3,4} &= \frac{(b + \bar{b})\bar{k}}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + Q}\right)\end{aligned}\quad (3.76)$$

donde  $Q = (16q^2 \kappa_\alpha \kappa_\eta) / [(a + \bar{a})k]^2$ . Hay sólo un autovalor que es siempre negativo, específicamente

$$\lambda_- = \frac{(b + \bar{b})\bar{k}}{2} \left(1 - \sqrt{1 + Q}\right)$$

Esto significa que el estado está siempre entrelazado. El autovector puede escribirse como

$$|e\rangle = N(|+-\rangle + P|-+\rangle)$$

con  $P = (b\bar{k} - \lambda_-) / qk$ ,  $N$  un factor de normalización conveniente. Por lo tanto, el operador testigo de entrelazamiento correspondiente es

$$W = |N|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P^2 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (3.77)$$

#### 3.4.4. Medida del operador testigo de entrelazamiento

En la sección previa hemos calculado el testigo de entrelazamiento a partir de los autovectores que corresponden al autovalor negativo de la matriz densidad en la que se ha efectuado la operación de transposición parcial.

Se distinguen dos casos. Si la forma general de un autovector negativo es  $|e\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ , el testigo de entrelazamiento puede decomponerse en términos de las matrices sigma siguiendo la forma

$$\begin{aligned}W &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sigma_z \otimes \sigma_z + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\sigma_z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma_z) \\ &\quad + \alpha\beta(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y)\end{aligned}\quad (3.78)$$

donde  $\alpha = N$  y  $\beta = N \frac{\sqrt{P_1 P_2 \bar{\rho}_{0110}}}{\lambda_-}$ .

Por otro lado, si el autovector asociado al autovalor negativo tiene la forma  $|e\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$  el operador testigo de entrelazamiento puede decomponerse en una manera similar

$$\begin{aligned}W &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \sigma_z \otimes \sigma_z + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\mathbf{1} \otimes \sigma_z - \sigma_z \otimes \mathbf{1}) \\ &\quad + \alpha\beta(\sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y)\end{aligned}\quad (3.79)$$

Esto muestra que para determinar la separabilidad de los estados a cualquier tiempo basta con que cada parte realice las mediciones de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  y mediante comunicación clásica puede reconstruir el operador testigo de entrelazamiento en la forma indicada para cada caso.

En este capítulo se ha presentado tanto un método para estudiar el comportamiento del entrelazamiento en sistemas sujetos a disipación, el cual resulta válido a tiempos cortos. Este método permite establecer una escala característica de tiempo, en la cual se genera o se pierde el entrelazamiento de estados bipartitos. Por otro lado, se muestra también que el operador testigo de entrelazamiento puede descomponerse en términos de cantidades observables locales, una vez medidos estos operadores se pueden en principio reconstruir el operador de entrelazamiento. Este procedimiento requiere de una cantidad de mediciones menor a la que se requiere para determinar el estado. Este mecanismo resulta útil cuando se está interesado en saber si el estado está entrelazado con la mayor eficiencia posible.

## 4. COMPUTACIÓN CUÁNTICA CON QUTRITS EN IONES ATRAPADOS

### 4.1. Introducción

En el capítulo 2 se dijo que bloques fundamentales sobre los que se construye la Computación Cuántica y la Teoría de la Información Cuántica constituyen los qubits [7], los cuales son sistemas cuánticos de dos niveles, los mismos que para que sean útiles, deben ser distinguibles y susceptibles de manipulación tanto colectiva como individual. Las operaciones que se realizan sobre los qubits constituye lo que se denomina compuertas cuánticas (quantum gates) que constituyen una analogía de las compuertas lógicas usadas para el procesamiento de la información clásica. El caso más simple de manipulación colectiva se reduce a una compuerta cuántica bipartita, es decir una compuerta que actúa sobre dos qubit, por ejemplo la compuerta NOT controlada (controlled-NOT ó C-NOT) [12], también llamada compuerta XOR. El funcionamiento de la XOR consiste en realizar una operación de intercambio de estados (flipping) en los que se encuentra un qubit, llamado blanco en dependencia del estado del otro qubit llamado control. Si el estado del control es  $|1\rangle$ , el estado del qubit blanco es intercambiado, en otros casos el blanco permanece en su estado. La realización experimental de una compuerta XOR de dos qubits se ha estudiado en diversos sistemas físicos, por ejemplo: Iones Atrapados [30, 10], resonancia magnética nuclear NMR (Nuclear Magnetic Resonance) [31, 32, 33], sistemas de electrodinámica cuántica de cavidad CQED (cavity QED) y Heteroestructuras cuánticas [34, 35, 36].

En estudios recientes, se plantea el uso de sistemas cuánticos de dimensiones más altas procesamiento de información cuántica. A pesar de que estos sistemas están disponibles en la naturaleza, no se sabe con certeza que ventajas comparativas deben tener respecto a los qubits. Con la intención de responder esta interrogante, se han hecho varios planteamientos respecto de las ventajas en algunos procesos. Dado que el recurso fundamental para la computación e información cuánticas es el entrelazamiento, los autores en [103] plantean la posibilidad de generarlo entre sistemas cuánticos de tres niveles. El uso de los qutrits ha probado, por ejemplo, ser más seguro en contra de un ataque simétrico en un protocolo de distribución de claves [104]. Estos estudios requieren una generalización de la compuerta XOR, en la referencia [48], se propone una generalización a sistemas de  $d$ -niveles o qudits la cual se ha llamado compuerta GXOR. Esta compuerta opera sobre el producto tensorial de dos qudits, es decir, estados que pertenecen a un espacio de Hilbert  $d$ -dimensional. Se han estudiado adicionalmente, borde de entanglement, [105], discriminación entre estados de Bell de qudits [106], entanglement entre qudits [107], paradoja GHZ para qudits [108], computación cuántica con qudits [109], tomografía de estados de qudits [110], entanglement swapping entre sistemas de multiqudits [111]. Recientemente se ha propuesto un protocolo de complejidad de comunicación cuántica con dos qutrits entrelazados [113]. Experimentalmente se ha dado un gran paso hacia el uso de sistemas cuánticos de dimensiones grandes, debido al trabajo experimental de generación de entanglement de qutrits usando estados de dos fotones de un proceso de PDC (parametric down conversion) [114].

La idea de esta sección es abordar la implementación de compuertas cuánticas para computación basada en qudits, explotando la posibilidad de manipulación coherente de iones en una trampa lineal [30]. El interés primario en estudiar computación cuántica con qutrits en lugar de qubits es la, exponencialmente creciente, disponibilidad de un espacio de Hilbert con la misma cantidad de recursos físicos. En particular, enfocamos nuestra atención en la implementación de la compuerta condicional entre dos qutrits,  $XOR^{(3)}$ . Adicionalmente, se propone un protocolo para la transformada de Fourier cuántica entre qutrits. La extensión de la implementación física desde qubits a los

qutrits no es trivial debido a las operaciones coherentes requeridas en un espacio de Hilbert tridimensional. De lo que se conoce hasta ahora, hay una propuesta de una implementación para una compuerta condicional para qutrits llamada GXOR basada en la interacción de modos de campo [48], la cual asume la existencia de una transformada de Fourier discreta para un estado del campo arbitrario que está en un espacio  $d$ -dimensional de uno de los modos del campo.

Aquí la compuerta condicional entre dos qutrits está convenientemente expresada como:

$$XOR_{12}^{(3)} |i\rangle_1 |j\rangle_2 = |i\rangle_1 |j \pm i\rangle_2 \quad (4.1)$$

donde  $j \pm i$  denota la adición (diferencia)  $i \pm j$ , módulo (3). Como se mostrará esta compuerta se descompone como  $XOR_{mn}^{(3)} = F_n^{-1} P_{mn} F_n$ , donde  $F_n$  es la transformada de Fourier cuántica para un qutrit, y  $P_{mn}$  es una compuerta de fase condicional para qutrits, donde  $m$  y  $n$  son los qutrits de control y blanco, respectivamente. Lo anterior significa que la compuerta  $XOR^{(3)}$  se genera en dos pasos. El primero es la generación de una transformada de Fourier discreta, la cual requiere la manipulación coherente de las poblaciones en un espacio tridimensional de Hilbert. La segunda es la compuerta de corrimiento de fase condicional, la cual requiere la intervención de un canal cuántico auxiliar de los qutrits.

#### 4.2. Compuerta arbitraria sobre qutrits

Consideraremos la realización de una compuerta general para un qutrit individual. Matemáticamente, una operación unitaria arbitraria sobre qutrits, una operación  $U(3)$ , se puede descomponer en una secuencia de operaciones  $SU(2)$ . Un arreglo físico para este se obtiene en un arreglo lineal de iones atrapados, donde los qutrits se definen usando la estructura de niveles Zeeman, en un ión de  $^{138}\text{Ba}^+$ , colocado en una trampa de Paul. Una representación de esta estructura de niveles se presenta en la figura (4.2). En esta figura se puede ver que es posible implementar independientemente

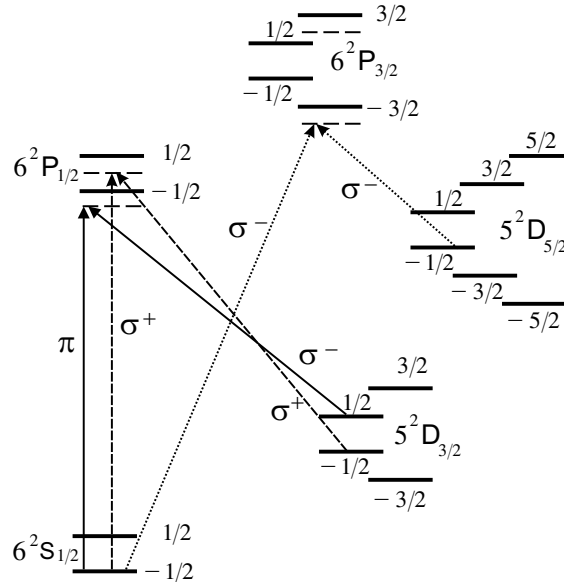


Fig. 4.1: Configuración Raman para definir los estados lógicos de un qutrit en iones atrapados.

dos configuraciones Raman entre los niveles  $6S_{1/2}(m = -1/2)$ ,  $6P_{1/2}(m = 1/2)$ ,  $5D_{3/2}(m = -1/2)$  y los niveles  $6S_{1/2}(m = -1/2)$ ,  $6P_{3/2}(m = -3/2)$ ,  $5D_{3/2}(m = -1/2)$ . Las configuraciones Raman requieren luz polarizada  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ . La naturaleza de los niveles energéticos del electrón en el ión, requiere que se use diodos láser [115] de 760 nm para establecer las interacciones. En este caso, los valores típicos de los campos magnéticos para el desdoblamiento Zeeman son del orden de los 10 Gauss, y la diferencia de energía entre dos subniveles Zeeman es:  $u = 0,14|\vec{B}|[MHz/G]$  para el nivel



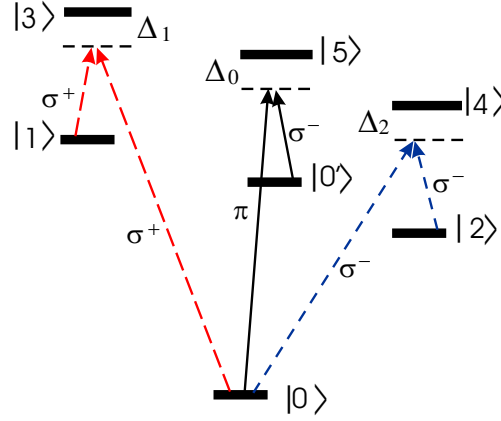


Fig. 4.2: Estructura de niveles electrónicos de un ión atrapado. La información cuántica de los qutrits está almacenada en los niveles  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ , and  $|2\rangle$ . Las transiciones que involucran interacciones efectivas entre los niveles  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  y  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  están conducidas por campos clásicos con diferentes polarizaciones.

$S_{1/2}$ ,  $u = \frac{2}{3}0,14|\vec{B}|[MHz/G]$  para el nivel  $P_{1/2}$  y  $u = \frac{4}{5}0,14|\vec{B}|[MHz/G]$  para  $D_{3/2}$ . A partir de estos valores la diferencia de energía típica es de unos pocos MHz. La frecuencia de transición entre los niveles  $S \leftrightarrow P$  y  $D \leftrightarrow P$  son típicamente de los cientos de MHz, y la frecuencia de oscilación del ión en la trampa reportada es del orden de los diez MHz [7, 116].

Una operación extra sobre un solo ión es necesaria para implementar la operación de la compuerta cuántica controlada, debido a la presencia de una fase residual que aparece cuando se usan solamente las dos transiciones Raman. Esta fase se remueve con una configuración Raman adicional que en este caso involucra las transiciones  $6S_{1/2}(m = -1/2), 6P_{1/2}(m = -1/2), 5D_{3/2}(m = 1/2)$ . La transición  $S \leftrightarrow P$  se realiza usando un láser con polarización  $\pi$ , y la transición  $S \leftrightarrow D$ , usando una polarización  $\sigma^-$  para el campo electromagnético. Si en lugar de usar iones de Berilio se usan iones  $Ca^+$  la implementación se realiza siguiendo un esquema similar. Sin embargo, el uso de iones de  $Ca^+$  implica que la operación extra se hace mediante un campo muy intenso que se acopla cuadrupolarmente al ión y provoca una transición directa entre los niveles  $6S_{1/2}$  y  $5D_{5/2}$ , la cual está prohibida en los acoplamientos dipolares. Toda esta discusión de los parámetros que describen las características dinámicas del sistema, hacen que sea factible la implementación de computación cuántica con qutrit, para lo cual se usa los niveles finos de iones de Bario atrapados [117].

Aquí consideraremos una estructura simplificada de los niveles de los iones, en la cual se presentan únicamente las transiciones electrónicas relevantes, como se muestra en la Fig. (4.2). Los niveles  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$  constituyen los estados lógicos de un qutrit individual. El nivel  $|0'\rangle$ , es un nivel auxiliar necesario cuando se definen las compuertas condicionales entre dos qutrits. Un ingrediente clave es la existencia de dipolos eléctricos que prohíben las transiciones  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  and  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ . Todas estas transiciones se alcanzan con transiciones Raman a través de canales independientes asociados con las polarizaciones ortogonales, conducidas por campos clásicos  $\Omega_{03}$ ,  $\Omega_{13}$ ,  $\Omega_{04}$  y  $\Omega_{24}$ .

En este sistema las poblaciones de los niveles del ión se manipulan seleccionando la operación coherente deseada. Por ejemplo, podemos operar independientemente con las transiciones  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ,  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  ajustando los parámetros. El Hamiltoniano que describe este sistema efectivo, bajo las aproximaciones estándar dipolar y de onda rotante (rotating wave approximation o más corto RWA), está dado por

$$H = \sum_j \hbar\omega_j |j\rangle\langle j| + \hbar\{e^{-i\nu_2 t} (\Omega_{04} |4\rangle\langle 0| + \Omega_{03} |3\rangle\langle 0|) + e^{-i\nu_1 t} (\Omega_{13} |3\rangle\langle 1| + \Omega_{24} |4\rangle\langle 2|) + h.c.\} \quad (4.2)$$

donde  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ . Los perfiles espaciales de los campos Raman se han considerado implícitamente como factores de fase. En un primer paso, sólo la transición portadora de los iones se considera, de

tal forma que no se incluyen efectos explícitos en el movimiento del centro de masa del ión. Asumiendo las siguientes condiciones:  $\Delta = (\omega_4 - \omega_0) - \nu_2 = (\omega_3 - \omega_0) - \nu_2 = (\omega_4 - \omega_2) - \nu_1 = (\omega_3 - \omega_1) - \nu_1$  y  $\Delta \gg \Omega_{04}, \Omega_{03}, \Omega_{31}, \Omega_{42}$ ; los niveles superiores  $|3\rangle$  y  $|4\rangle$  decaen rápidamente y pueden ser eliminados adiabáticamente, conduciendo a un Hamiltoniano efectivo:

$$\begin{aligned} \frac{H}{\hbar} = & -\frac{|\Omega_{31}|^2}{\Delta} |1\rangle\langle 1| - \frac{|\Omega_{42}|^2}{\Delta} |2\rangle\langle 2| - \frac{|\Omega_{30}|^2 + |\Omega_{40}|^2}{\Delta} |0\rangle\langle 0| \\ & - \left\{ \frac{\Omega_{31}\Omega_{30}^*}{\Delta} |0\rangle\langle 1| + \frac{\Omega_{42}\Omega_{40}^*}{\Delta} |0\rangle\langle 2| + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Suponiendo las condiciones adicionales,

$$\frac{|\Omega_{31}|^2}{\Delta} = \frac{|\Omega_{42}|^2}{\Delta} = \frac{|\Omega_{30}|^2 + |\Omega_{40}|^2}{\Delta} \quad (4.4)$$

podemos encontrar la evolución para el sistema. Después de algunos cálculos el operador de evolución en el espacio restringido tridimensional generado por  $\{|2\rangle, |1\rangle, |0\rangle\}$  está dado por:

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + |g|^2 C(\varphi) & gg'^* C(\varphi) & -ig \sin \varphi \\ g'g^* C(\varphi) & 1 + |g'|^2 C(\varphi) & -ig' \sin \varphi \\ -ig^* \sin \varphi & -ig'^* \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

donde  $\varphi = \Omega t$  es un tiempo de interacción adimensional,  $C(\varphi) = (\cos \varphi - 1)$ , y  $\Omega^2 = |\kappa'|^2 + |\kappa|^2$ . Hemos introducido la notación  $g = \kappa/\Omega$ , y  $g' = \kappa'/\Omega$ , donde  $\kappa = \Omega_{04}\Omega_{24}^*/\Delta$  y  $\kappa' = \Omega_{03}\Omega_{13}^*/\Delta$ . Este operador de evolución permite implementar todas las operaciones coherentes requeridas entre cualquier par de estados lógicos. Por ejemplo, para activar las transiciones  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ , asumimos  $\varphi = \pi$  en la Eq. (4.5), tal que

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -e^{i\beta_1} \sin \alpha & 0 \\ -e^{-i\beta_1} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

donde hemos definido

$$\cos \alpha = \frac{|\kappa'|^2 - |\kappa|^2}{|\kappa'|^2 + |\kappa|^2} \text{ and } e^{i\beta_1} = \kappa\kappa'^*/|\kappa\kappa'^*|. \quad (4.7)$$

Otras transiciones se alcanzan manipulando los acoplamientos  $\kappa$  en la transición  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ , or  $\kappa'$  en la transición  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ . Por ejemplo, la transición  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  se accede asumiendo que  $\kappa' = 0$  de tal forma que:

$$U_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -ie^{-i\beta_2} \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -ie^{i\beta_2} \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

donde  $\kappa = e^{i\beta_2} |\kappa|$  y  $\varphi_2 = |\kappa| t$ . Finalmente para la transición  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  asumimos  $\kappa = 0$ :

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -ie^{i\beta_3} \sin \varphi_3 \\ 0 & -ie^{-i\beta_3} \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde  $\kappa' = e^{i\beta_3} |\kappa'|$  y  $\varphi_3 = |\kappa'| t$ . Para generar cualquier operador SU(3) [126] necesitamos tener una descomposición de ocho parámetros independientes. En las operaciones anteriores tenemos seis parámetros involucrados. La combinación de dos procesos dispersivos en los canales  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  y  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  conducen a las evoluciones dispersivas

$$U_D = \begin{pmatrix} e^{i\varrho} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varrho+\varepsilon)} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

lo cual proporciona dos parámetros adicionales.

En particular podemos enfocarnos ahora en el cálculo de la transformada de Fourier cuántica para un qutrit, la cual es una operación unitaria (ver 4.4) definida por

$$F |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{l=0}^2 e^{2i\pi lj/3} |l\rangle. \quad (4.11)$$

Explícitamente, los estados transformados  $|\bar{j}\rangle = F |j\rangle$  pueden escribirse como

$$\begin{aligned} |\bar{0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \\ |\bar{1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + e^{2i\pi/3} |1\rangle + e^{-2i\pi/3} |2\rangle) \\ |\bar{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + e^{-2i\pi/3} |1\rangle + e^{2i\pi/3} |2\rangle) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Esta transformación se obtiene usando el operador general que hemos calculado antes, para la transición portadora, y combinando con las transiciones adiabáticas en ambos canales de polarización. A partir de los resultados expuestos en el apéndice B se encuentra que la transformada de Fourier se descompone en la forma

$$F = iU_D U_2 U_3 U_1 \quad (4.13)$$

donde cada uno de estas operaciones se obtiene a partir de los procesos anteriores: En  $U_D$ , si se pone  $\varrho = \pi/3$ ,  $\varepsilon = \pi/6$ , obtenemos

$$U_D = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

En  $U_1$  con  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta_1 = -2\pi/3$ :

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-2i\pi/3} & 0 \\ -e^{2i\pi/3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ahora, cuando ponemos  $\varphi_2 = \pi/4$ ,  $\beta_2 = -\pi/3$  en  $U_2$ :

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & ie^{2i\pi/3} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ ie^{-2i\pi/3} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Finalmente, asumiendo que  $\varphi_3 = -\pi/3$ ,  $\beta_3 = 7\pi/6$  en  $U_3$ :

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & ie^{-i\pi/6} \\ 0 & ie^{i\pi/6} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

En la misma forma, cualquier compuerta arbitraria de un qutrit se descompone como en el caso de la Transformada de Fourier usando la Ec. (4.5).

### 4.3. Compuerta condicional entre dos qutrit.

La transformada de Fourier que hemos encontrado juega el mismo rol que la compuerta Hadamard para qubits. Por ejemplo, los estados entrelazados de dos qubits se generan por la aplicación de una compuerta Hadamard seguida por una compuerta de fase condicional. En lo que sigue describiremos la implementación de una compuerta de fase condicional entre dos qutrits, la cual permite

la realización de la compuerta  $XOR^{(3)}$  que se ha introducido en el capítulo 2. Un requerimiento para desarrollar una compuerta condicional entre dos qutrits es proporcionar un mecanismo caminos cuánticos independientes, para satisfacer en el cambio condicional en el qutrit blanco dependiendo del estado en el que se encuentre el de control. En nuestro caso, hemos definido la  $XOR^{(3)}$  en una forma tal que el blanco cambia solamente cuando el control está en los estados  $|1\rangle$  or  $|2\rangle$ , con la condición de que el estado del blanco será, luego de la transformación,  $|j\oplus 0\rangle = |j\rangle$  cuando el control está en el estado  $|0\rangle$ . Así, necesitamos implementar un protocolo que considere canales cuánticos independientes a través de los canales cuánticos de los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  del qutrit de control. En un conjunto de iones en una trampa lineal, en la configuración electrónica dada en la Fig. 4.2, tales canales cuánticos se establecen con la intervención del movimiento del centro de masa colectivo de los iones dentro de la trampa.

En la computación cuántica lineal de iones [30] el canal cuántico entre los iones se establece a través del movimiento del centro de masa, al cual se accede ajustando una transición Raman a una frecuencia red sideband determinada. Como se verá en lo que sigue, procederemos a lo largo de las mismas líneas de razonamiento, considerando el modelo de ión descrito en la Fig. 4.2. Asumimos que se ajustan las amplitudes del campo de tal forma que  $\Omega_{04} = \Omega_{24} = 0$ , y  $\Omega_{31}, \Omega_{03} \neq 0$ ; o  $\Omega_{04} = \Omega_{24} \neq 0$ , y  $\Omega_{31}, \Omega_{03} = 0$ . En ambos casos, después de eliminar los niveles excitados superiores y de ajustar la frecuencia a la transición red sideband, se obtiene el Hamiltoniano que describe el movimiento del centro de masa acoplado a la transición electrónica  $|0\rangle \rightarrow |q\rangle$ :

$$H_{n,q} = \frac{\Omega_q \eta}{2} \left[ |q\rangle_n \langle 0| a e^{-i\delta t - i\phi} + a^\dagger |0\rangle_n \langle q| e^{i\delta t + i\phi} \right] \quad (4.18)$$

Aquí  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de creación y de aniquilación de los fonones del CM, respectivamente;  $\Omega_q$  es la frecuencia de Rabi efectiva después de la eliminación adiabática de los niveles superiores excitados;  $\phi$  es la fase del laser,  $\delta = \omega_2 - \omega_0 - \nu_2 + \nu_1 + \nu_x = \omega_1 - \omega_0 - \nu_2 + \nu_1 + \nu_x$ , y  $\eta = \sqrt{\hbar k_\theta^2 / (2M\nu_x)}$  es el parámetro de Lamb Dicke ( $k_\theta = l \cos \theta$ , con  $\vec{k}$  el vector de onda del láser y  $\theta$  el ángulo entre el eje  $X$  y la dirección de la propagación del laser). El subíndice  $q = 1, 2$  se refiere a las transiciones excitadas por el láser en el ión  $n$ -ésimo. El movimiento del centro de masa acoplado a las transiciones electrónicas se manipulan coherentemente seleccionando el tiempo interacción efectiva y las polarizaciones de los láseres. Este Hamiltoniano permite implementar la interacción coherente entre los qutrits y el movimiento del centro de masa colectivo. En particular, para implementar un corrimiento de fase condicional las operaciones necesarias son:

$$\begin{aligned} U_m^{l,q}(\phi) |0\rangle_m |0\rangle &= |0\rangle_m |0\rangle \\ U_m^{l,q}(\phi) |0\rangle_m |1\rangle &= \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) |0\rangle_m |1\rangle - ie^{-i\phi} \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) |q\rangle_m |0\rangle \\ U_m^{l,q}(\phi) |q\rangle_m |0\rangle &= \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) |q\rangle_m |0\rangle - ie^{i\phi} \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) |0\rangle_m |1\rangle \end{aligned}$$

donde hemos definido  $\Omega_q \eta t / 2 = l\pi / 2$ . Como veremos estas operaciones coherentes nos permiten seleccionar el canal cuántico para la transferencia de información al centro de masa. Después de esto es necesario introducir un cambio de fase en el estado del qutrit, el cual depende de la energía del centro de masa. Este cambio de fase se realiza mediante el régimen dispersivo del primer red side band en (4.18) esto es,

$$D_m^q(\varphi) = e^{i\varphi a a^\dagger} |q\rangle_m \langle q| + e^{i\varphi a^\dagger a} |0\rangle_m \langle 0|, \quad (4.19)$$

donde  $\varphi = (\Omega_q \eta)^2 / 4\delta$ , lo cual permite corrimiento de fase dependientes de la intensidad de los niveles electrónicos.

A partir de la ecuación 4.12 no es difícil establecer que el corrimiento de fase condicional

necesario para implementar la  $XOR^{(3)}|i\rangle_m|j\rangle_n = |i\rangle_m|j \ominus i\rangle_n$  estará dada por:

$$\begin{array}{ccc}
|0\rangle_m |0\rangle_n & & |0\rangle_m |0\rangle_n \\
|0\rangle_m |1\rangle_n & & |0\rangle_m |1\rangle_n \\
|0\rangle_m |2\rangle_n & & |0\rangle_m |2\rangle_n \\
|1\rangle_m |0\rangle_n & & |1\rangle_m |0\rangle_n \\
|1\rangle_m |1\rangle_n & \xrightarrow{P_{mn}^{(2)}P_{mn}^{(1)}} & e^{4i\pi/3} |1\rangle_m |1\rangle_n, \\
|1\rangle_m |2\rangle_n & & e^{2i\pi/3} |1\rangle_m |2\rangle_n \\
|2\rangle_m |0\rangle_n & & |2\rangle_m |0\rangle_n \\
|2\rangle_m |1\rangle_n & & e^{2i\pi/3} |2\rangle_m |1\rangle_n \\
|2\rangle_m |2\rangle_n & & e^{4i\pi/3} |2\rangle_m |2\rangle_n
\end{array} \quad (4.20)$$

donde  $P_{mn}^{(1)}$  y  $P_{mn}^{(2)}$  se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
P_{mn}^{(1)}(\phi_1, \phi_2) &= R_{00'}(\pi)U_m^{1,1}(3\pi/2)\mathcal{D}_n^2(\xi_2)D_n^2(\phi_2)\mathcal{D}_n^1(\xi_1)D_n^1(\phi_1)U_m^{1,1}(\pi/2)R_{00'}(\pi), \\
P_{mn}^{(2)}(\phi_2, \phi_1) &= R_{00'}(\pi)U_m^{1,2}(3\pi/2)\mathcal{D}_n^2(\xi_1)D_n^2(\phi_1)\mathcal{D}_n^1(\xi_2)D_n^1(\phi_2)U_m^{1,2}(\pi/2)R_{00'}(\pi),
\end{aligned} \quad (4.21)$$

con  $\xi_i = 2\pi - \phi_i$ . La operación  $R_{00'}(\pi)$  es una rotación la cual actúa sobre el ión sólo cuando está en nivel  $|0\rangle$ , enviándolo al nivel  $|0'\rangle$ , evitando que se produzca cualquier corrimiento de fase en este estado. La operación dispersiva que afecta las transiciones  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  y  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  están dadas por:

$$\begin{aligned}
D_n^1(\phi_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1 a a^\dagger} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_1 a^\dagger a} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{D}_n^1(\varphi_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix}, \\
D_n^2(\phi_2) &= \begin{pmatrix} e^{i\phi_2 a a^\dagger} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_2 a^\dagger a} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{D}_n^2(\varphi_2) &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De esta forma el corrimiento de fase particular en la Ec. 4.20 se alcanza mediante  $P_{mn}^{(1)}(4\pi/3, 2\pi/3)$  y  $P_{mn}^{(2)}(2\pi/3, 4\pi/3)$ . Finalmente, el cambio efectivo condicional de los estados del qutrit blanco dan lugar a la compuerta  $XOR^{(3)}$ . Brevemente,

$$XOR_{mn}^{(3)} = F_n^{-1}P_{mn}^{(2)}P_{mn}^{(1)}F_n. \quad (4.22)$$

En esta forma la  $XOR_{mn}^{(3)}$  produce la siguiente evolución de los estados de dos qutrits.

$$\begin{array}{cccc}
|0\rangle |0\rangle & |0\rangle |\bar{0}\rangle & |0\rangle |\bar{0}\rangle & |0\rangle |0\rangle \\
|0\rangle |1\rangle & |0\rangle |\bar{1}\rangle & |0\rangle |\bar{1}\rangle & |0\rangle |1\rangle \\
|0\rangle |2\rangle & |0\rangle |\bar{2}\rangle & |0\rangle |\bar{2}\rangle & |0\rangle |2\rangle \\
|1\rangle |0\rangle & |1\rangle |\bar{0}\rangle & |1\rangle |\bar{2}\rangle & |1\rangle |2\rangle \\
|1\rangle |1\rangle & |1\rangle |\bar{1}\rangle & |1\rangle |\bar{0}\rangle & |1\rangle |0\rangle \\
|1\rangle |2\rangle & |1\rangle |\bar{2}\rangle & |1\rangle |\bar{1}\rangle & |1\rangle |1\rangle \\
|2\rangle |0\rangle & |2\rangle |\bar{0}\rangle & |2\rangle |\bar{1}\rangle & |2\rangle |1\rangle \\
|2\rangle |1\rangle & |2\rangle |\bar{1}\rangle & |2\rangle |\bar{2}\rangle & |2\rangle |2\rangle \\
|2\rangle |2\rangle & |2\rangle |\bar{2}\rangle & |2\rangle |\bar{0}\rangle & |2\rangle |0\rangle
\end{array} \xrightarrow{F_n} \xrightarrow{P_{mn}^{(2)}P_{mn}^{(1)}} \xrightarrow{F_n^{-1}} \quad (4.23)$$

La computación cuántica universal requiere, adicionalmente, un esquema de medición en la base computacional. En nuestro caso, las mediciones de von Neumann que distinguen entre las tres

direcciones  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  se efectúan acoplando interacciones resonantes desde  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  a los estados  $|3\rangle$ ,  $|4\rangle$  respectivamente. Un decaimiento rápido de los niveles ópticos excitados a través de canales separados en polarización nos permiten discriminar entre los niveles de ocupación  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ , cuando se observa fluorescencia; o el nivel  $|0\rangle$  cuando no se observa nada..

Una puntualización final, debe establecerse que una condición de adición modular  $|j \oplus i\rangle$ , como una operación condicional entre qutrits, está definida en su lugar por una operación de diferencia modular, sólo ajustando el corrimiento de fase condicional en la Ec. (4.20) a:

$$\begin{aligned} |1\rangle_m |1\rangle_n &\longrightarrow e^{2i\pi/3} |1\rangle_m |1\rangle_n, \\ |1\rangle_m |2\rangle_n &\longrightarrow e^{4i\pi/3} |1\rangle_m |2\rangle_n, \\ |2\rangle_m |1\rangle_n &\longrightarrow e^{4i\pi/3} |2\rangle_m |1\rangle_n, \\ |2\rangle_m |2\rangle_n &\longrightarrow e^{2i\pi/3} |2\rangle_m |2\rangle_n. \end{aligned}$$

#### 4.4. Transformada de Fourier Cuántica

En esta sección se presenta una discusión general de la formulación de la Transformada de Fourier para qudits, cuya realización física se presenta en el capítulo en la sección siguiente

##### 4.4.1. TFC para qudits

La Transformada de Fourier Cuántica es una transformación unitaria sobre un vector estado, definida por:

$$|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{jk}{N}} |k\rangle \quad (4.24)$$

Recordando que la decomposición de un número entero en una base numérica  $d$ , la cual se escribe como:

$$j = j_1 d^{n-1} + j_2 d^{n-2} + \dots + j_n d^0 \quad (4.25)$$

donde  $n$  es el número de dígitos usados para representar el entero  $j$ , y además  $j_i = 1, 2, 3, \dots, d$ .

En mecánica cuántica un estado  $|j\rangle$ , etiquetado con el entero  $j$ , se representa como el producto tensorial de  $n$  qudits, cada uno de ellos están en un estado caracterizado por  $j_i$ . Esto es:

$$|j\rangle = |j_1\rangle \otimes |j_2\rangle \otimes \dots \otimes |j_n\rangle = |j_1 j_2 j_3 \dots j_n\rangle \quad (4.26)$$

Poniendo  $N = d^n$ , tenemos una expresión para la Transformada de Fourier Cuántica usando  $n$  qudits:

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \sum_{k=0}^{d^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{d^n}} |k\rangle \quad (4.27)$$

La fracción  $k/d^n$ , puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{k}{d^n} &= \frac{k_1 d^{n-1}}{d^n} + \frac{k_2 d^{n-2}}{d^n} + \dots + \frac{k_n d^0}{d^n} \\ &= \frac{k_1}{d} + \frac{k_2}{d^2} + \dots + \frac{k_n}{d^n} \\ &= \sum_{l=1}^n k_l d^{-l} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \sum_{k=0}^{d^n-1} e^{2\pi i j [\sum_{l=1}^n k_l d^{-l}]} |k\rangle \quad (4.29)$$

Reemplazando el resultado obtenido en la ecuación (4.43) para  $|k\rangle$  tenemos

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \sum_{k=0}^{d^n-1} \left[ \bigotimes_{l=1}^n e^{2\pi i j k_l d^{-l}} |k_l\rangle \right] \quad (4.30)$$

Expresión que puede escribirse en la forma

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \sum_{k_1=0}^{d-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{d-1} \left[ \bigotimes_{l=1}^n e^{2\pi i j k_l d^{-l}} |k_l\rangle \right] \quad (4.31)$$

Debido a que se pueden intercambiar la suma por el producto tenemos:

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^n \left[ \sum_{k_l=0}^{d-1} e^{2\pi i j k_l d^{-l}} |k_l\rangle \right] \quad (4.32)$$

Notemos que la expresión  $j/d^l$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{j}{d^l} &= \frac{j_1 d^{n-1}}{d^l} + \frac{j_2 d^{n-2}}{d^l} + \cdots + \frac{j_n d^0}{d^l} \\ &= int. + \frac{j_{n+1-l}}{d} + \frac{j_{n+2-l}}{d^2} \cdots \frac{j_n}{d^l} \\ &= 0.j_{n+1-l}j_{n+2-l} \cdots j_n \end{aligned} \quad (4.33)$$

Entonces

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^n \left[ \sum_{k_l=0}^{d-1} e^{2\pi i k_l [0.j_{n+1-l}j_{n+2-l} \cdots j_n]} |k_l\rangle \right] \quad (4.34)$$

Este producto puede escribirse en la forma equivalente

$$|j\rangle = \frac{1}{d^{n/2}} \left( \sum_{k_1=0}^{d-1} e^{2\pi i k_1 j_n} |k_1\rangle \right) \left( \sum_{k_2=0}^{d-1} e^{2\pi i k_2 0.j_{n-1}j_n} |k_2\rangle \right) \cdots \left( \sum_{k_n=0}^{d-1} e^{2\pi i k_n 0.j_1j_2 \cdots j_n} |k_n\rangle \right) \quad (4.35)$$

Si expandemos la suma en cada factor, por ejemplo, en el último término tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k_n=0}^{d-1} e^{2\pi i k_n (0.j_1j_2 \cdots j_n)} |k_n\rangle &= e^{2\pi i [0](0.j_1j_2 \cdots j_n)} |0\rangle + e^{2\pi i [1](0.j_1j_2 \cdots j_n)} |1\rangle \\ &\quad + e^{2\pi i [2](0.j_1j_2 \cdots j_n)} |2\rangle + \cdots + e^{2\pi i [d-1](0.j_1j_2 \cdots j_n)} |d-1\rangle \end{aligned} \quad (4.36)$$

La compuerta de Hadamard es una Transformada de Fourier Cuántica para qubits, la generalización a  $d$  dimensiones de esta compuerta se obtiene si  $n = 1$  en la ecuación [4.24], esto es, la *Hadamard para un qudit*  $H^{(d)}$  es una operación unitaria que transforma la base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d\rangle\}$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H^{(d)}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \cdots + |d\rangle) \\ H^{(d)}|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}}(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{1}{d}} |1\rangle + e^{2\pi i \frac{2}{d}} |2\rangle + \cdots + e^{2\pi i \frac{d-1}{d}} |d-1\rangle) \\ H^{(d)}|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}}(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{2}{d}} |1\rangle + e^{2\pi i \frac{4}{d}} |2\rangle + \cdots + e^{2\pi i \frac{2(d-1)}{d}} |d-1\rangle) \\ &\vdots \\ H^{(d)}|d-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}}(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{d-1}{d}} |1\rangle + e^{2\pi i \frac{2(d-1)}{d}} |2\rangle + \cdots + e^{2\pi i \frac{(d-1)^2}{d}} |d-1\rangle) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Esto significa que,  $H^{(d)}$  se ve como

$$\mathbf{H}^{(d)} = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i \frac{1}{d}} & e^{2\pi i \frac{2}{d}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{(d-1)}{d}} \\ 1 & e^{2\pi i \frac{2}{d}} & e^{2\pi i \frac{4}{d}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{2(d-1)}{d}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{2\pi i \frac{d-1}{d}} & e^{2\pi i \frac{2(d-1)}{d}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{(d-1)^2}{d}} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la compuerta de fase condicional es necesaria para poder diseñar un circuito lógico por la Q.F.T, esta compuerta debe transformar los qudits en la forma

$$\begin{aligned} |cont\rangle|targ\rangle &\rightarrow \\ |n\rangle|m\rangle &\rightarrow e^{in\phi_m}|n\rangle|m\rangle \end{aligned} \quad (4.38)$$

Essto significa que, si tenemos una transformación unitaria  $\mathbf{R}$ , que en la base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d\rangle\}$  está dada por

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i\phi_{d-1}} \end{pmatrix}$$

Entonces la compuerta de fase condicional, que necesitamos, se obtiene cuando aplicamos la transformación  $\mathbf{R}$  sobre el blanco un número de veces indicada por el control. Esto se puede escribir formalmente como:

$$\begin{aligned} |cont\rangle|targ\rangle &\rightarrow \\ |n\rangle|m\rangle &\rightarrow |n\rangle\mathbf{R}^n|m\rangle \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ahora la transformación  $R_k$  se define en la forama

$$\mathbf{R}_k^{(d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \frac{1}{d^k}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i \frac{2}{d^k}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{2\pi i \frac{d-1}{d^k}} \end{pmatrix}$$

donde ponemos  $\phi_m = 2\pi \frac{m}{d^k}$

A partir de estas consideraciones podemos usar el circuito cuántico, presentado en la Fig. (4.4.1) para representar la Transformada de Fourier Cuántica de un qudit

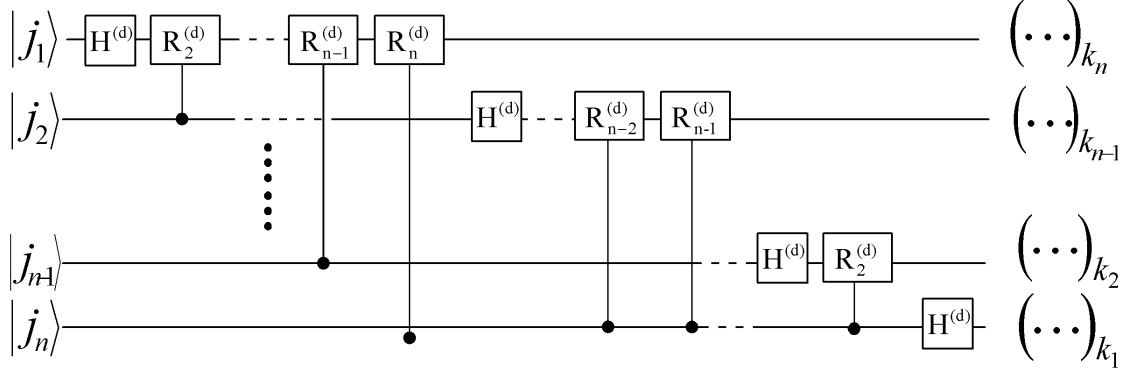
En esta figura  $(\dots)_{k_l}$  representa el factor  $l$ -ésimo en la ecuación (4.48).

#### 4.4.2. Transformada de Fourier para qubits y qutrits.

La discusión previa, es muy general, pero si ponemos  $d = 3$  y  $d = 2$ , el problema se reduce a una representación para la Transformada de Fourier Cuántica en qutrits and qubits. **Qubits** Para  $d = 2$

$$\begin{aligned} |j\rangle &= \frac{1}{2^{n/2}} (|0\rangle + e^{2\pi i 0 \cdot j_n} |1\rangle) (|0\rangle + e^{2\pi i 0 \cdot j_{n-1} \cdot j_n} |1\rangle) \\ &\cdots (|0\rangle + e^{2\pi i 0 \cdot j_1 \cdots j_n} |1\rangle) \end{aligned} \quad (4.40)$$



Fig. 4.3: Transformada de Fourier cuántica usando  $n$  qutrits.

En este caso  $H^{(2)}$  está dado por

$$\begin{aligned} H^{(2)}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ H^{(2)}|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\pi i}|1\rangle) \end{aligned} \quad (4.41)$$

o

$$\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La transformación unitaria  $R_k^{(2)}$  para la compuerta condicional [en la figura (4.4.1), ] está dada en este caso

$$\mathbf{R}_k^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \frac{1}{2^k}} \end{pmatrix}$$

La fase condicional será, la transformación se aplica al blanco: La identidad  $\mathbf{I}$  si el control está en  $|0\rangle$  y  $R_k^{(2)}$  si el control está en  $|1\rangle$

Siguiendo el circuito esquematizado en la Fig. (4.4.1), y haciendo uso de las operaciones correspondientes definidas antes puede obtenerse la TFC fácilmente.

#### La Transformada de Fourier para $n$ -qutrits

Una extensión natural es considerar el análisis de un protocolo para la transformada de Fourier Cuántica para un sistema de  $n$ -qutrits codificados en iones atrapados. Podemos ayudarnos de la guía matemática desarrolladas para definir la transformada de Fourier para un sistema de  $n$ -qubits [7]. En la base 3 la expresión general para la transformada de Fourier está dada por

$$|\bar{j}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{k=0}^{3^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{3^n}} |k\rangle \quad (4.42)$$

En este contexto un elemento importante es la descomposición de un número entero  $0 \leq j \leq 3^n - 1$  en la base 3, la cual está dada convenientemente como

$$j = j_1 3^{n-1} + j_2 3^{n-2} + \dots + j_n 3^0 \quad (4.43)$$

La fracción  $k/3^n$ , puede escribirse en la base 3 como:

$$\begin{aligned} \frac{k}{3^n} &= \frac{k_1 3^{n-1}}{3^n} + \frac{k_2 3^{n-2}}{3^n} + \dots + \frac{k_n 3^0}{3^n} \\ &= \sum_{l=1}^n k_l 3^{-l} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Siguiendo un análisis similar al realizado para un sistema de  $n$ -qubit, de tal forma que la transformada de Fourier se puede escribir ahora en la forma

$$|\bar{j}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^n \left[ \sum_{k_l=0}^{3-1} e^{2\pi i j k_l 3^{-l}} |k_l\rangle \right] \quad (4.45)$$

Usando el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \frac{j}{3^l} &= \text{int.} + \frac{j_{n+1-l}}{3} + \frac{j_{n+2-l}}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^l} \\ &= \text{int.} + 0 \cdot j_{n+1-l} j_{n+2-l} \dots j_n \end{aligned} \quad (4.46)$$

Entonces

$$|\bar{j}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^n \left[ \sum_{k_l=0}^3 e^{2\pi i k_l [0 \cdot j_{n+1-l} j_{n+2-l} \dots j_n]} |k_l\rangle \right] \quad (4.47)$$

Este producto se escribe en la forma equivalente:

$$|\bar{j}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \left( \sum_{k_1=0}^{3-1} e^{2\pi i k_1 0 \cdot j_n} |k_1\rangle \right) \left( \sum_{k_2=0}^{3-1} e^{2\pi i k_2 0 \cdot j_{n-1} j_n} |k_2\rangle \right) \dots \left( \sum_{k_n=0}^{3-1} e^{2\pi i k_n 0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n} |k_n\rangle \right) \quad (4.48)$$

Si se expande la suma para cada factor, por ejemplo, en el último término tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k_n=0}^{3-1} e^{2\pi i k_n (0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n)} |k_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i (0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n)} |1\rangle + e^{4\pi i (0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n)} |2\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i (\frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^n})} |1\rangle + e^{4\pi i (\frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^n})} |2\rangle \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Este estado se genera partiendo con la aplicación de una transformada de Fourier sobre el primer qutrit:

$$F_1^{(3)} |j_1\rangle |j_2\rangle, |j_3\rangle, \dots, |j_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i \frac{j_1}{3}} |1\rangle + e^{4\pi i \frac{j_1}{3}} |2\rangle \right) |j_2\rangle, |j_3\rangle, \dots, |j_n\rangle$$

y después aplicando la transformación de fase condicional sobre este estado qutrit, condicionada a el estado inicial de los estados qutrits  $|j_2\rangle, |j_3\rangle, \dots, |j_n\rangle$  que quedan

$$\begin{aligned} &R_{n1} \dots R_{31} R_{21} F_1^{(3)} |j_1\rangle |j_2\rangle, |j_3\rangle, \dots, |j_n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i (\frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^n})} |1\rangle + e^{4\pi i (\frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^n})} |2\rangle \right) |j_2\rangle, |j_3\rangle, \dots, |j_n\rangle \end{aligned}$$

La fase condicional está dada por

$$R_{21} = P_{21}^{(2)} \left( \frac{4\pi}{3^2}, \frac{8\pi}{3^2} \right) P_{21}^{(1)} \left( \frac{2\pi}{3^2}, \frac{4\pi}{3^2} \right) \quad (4.50)$$

$$R_{31} = P_{31}^{(2)} \left( \frac{4\pi}{3^3}, \frac{8\pi}{3^3} \right) P_{31}^{(1)} \left( \frac{2\pi}{3^3}, \frac{4\pi}{3^3} \right)$$

....

$$\begin{aligned} R_{k1} &= P_{k1}^{(2)} P_{k1}^{(1)} \\ P_{k1}^{(j_k)} &= \left( \frac{2j_k \pi}{3^k}, \frac{4j_k \pi}{3^k} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

En la misma forma el estado

$$\begin{aligned} \sum_{k_n=0}^{3-1} e^{2\pi i k_n (0.j_2 j_3 \dots j_n)} |k_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i (0.j_2 j_3 \dots j_n)} |1\rangle + e^{4\pi i (0.j_2 j_3 \dots j_n)} |2\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i (\frac{j_2}{3} + \frac{j_3}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^{n-1}})} |1\rangle + e^{4\pi i (\frac{j_2}{3} + \frac{j_3}{3^2} \dots \frac{j_n}{3^{n-1}})} |2\rangle \right) \quad (4.52) \end{aligned}$$

está generado aplicando una transformada de Fourier sobre el qutrit  $|j_2\rangle$  y después aplicando operaciones de fase condicional en estos estados de qutrits, condicionado a los estados de qutrits  $|j_3\rangle, \dots, |j_n\rangle$ , que restan.

En conclusión este capítulo se ha estudiado un procedimiento para implementar cualquier proceso de Computación Cuántica que utiliza qutrits como portadores de la información. En particular se ha mostrado como, usando los grados de libertad internos y externos de iones atrapados, se puede generar experimentalmente tanto compuertas arbitrarias sobre qutrits como compuertas condicionales entre dos qutrits. Como se mostró en el capítulo 2, con éste conjunto de compuertas se puede aproximar eficientemente cualquier compuerta unitaria que actúa sobre un conjunto finito de qutrits.

Se presenta también una forma de generalizar la compuerta asociada a la Transformada de Fourier de qutrits, de la cual se presenta su realización física en iones atrapados. Se discute también la versión matemática de la transformada de Fourier que actúa sobre un qudit.

## 5. GENERACIÓN DE ESTADOS CORRELACIONADOS CUÁNTICAMENTE

El estudio de estados del campo electromagnético con propiedades cuánticas, ha sido de gran interés desde los inicios del desarrollo de la Electrodinámica Cuántica. Sin embargo, dos tipos de estados han sido los más estudiados. Los *estados coherentes*, que permiten una descripción apropiada de la luz láser. Una de sus propiedades es que resultan ser estados MUS, estados de mínima incerteza, en los que el producto de las fluctuaciones en las cuadraturas (que pueden medirse experimentalmente) adquiere su mínimo valor compatible con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Los *estados comprimidos*, que describen diversas propiedades no clásicas del campo electromagnético, como por ejemplo el antibunching, que puede medirse mediante detección homodina o heterodina. El interés en los estados comprimidos se debe a que su nivel de ruido cuántico está por debajo del límite estándar, en una cuadratura a expensas del aumento en la fluctuación de la amplitud de la cuadratura conjugada. La manipulación de las fluctuaciones de las cuadraturas abre la posibilidad de transmitir o detectar señales mucho más débiles que el ruido cuántico. Caves *et. al.* propusieron el uso de estados comprimidos para realizar detección de ondas gravitacionales. Desde entonces han sido publicadas numerosas propuestas tanto teóricas como experimentales, de generación, detección y aplicación de estados comprimidos. Dentro del contexto de la Teoría de la Información Cuántica, se han propuesto el uso de estados comprimidos para realización de teleportación con variables continuas. Por otro lado se espera también que la implementación de parámetros de compresión bajos permitan una distribución eficiente de entrelazamiento cuántico y por lo tanto la generación de canales cuánticos. La generación de estados comprimidos de dos modos (de polarización ortogonal) se ha efectuado experimentalmente, usando para ello medios no lineales de Kerr en fibras ópticas, también usando nubes atómicas frías en cavidades ópticas.

El aporte esencial en este capítulo es la generación de un *operador de compresión unitario sintonizable de uno o dos modos*, desacoplado del medio atómico, que actúa sobre los modos de la cavidad. El parámetro de compresión escala con el tiempo de interacción y con el número de átomos presentes en la cavidad. En la propuesta se usan niveles atómicos metaestables, lo que hace que la generación sea robusta respecto a la emisión espontánea. Adicionalmente no se requiere un régimen de acoplamiento fuerte ni localización atómica.

Por otro lado, se usa la Teoría Input-Output para mostrar que es posible generar estados coherentes de dos fotones, estados comprimidos ideales y estado comprimidos perfectos en la salida de la cavidad, permitiendo de esta manera el estudio de sus propiedades en un amplio rango de parámetros.

### 5.1. Estados Coherentes

Históricamente los estados coherentes fueron propuestos inicialmente por Schrödinger en 1926 [118], como una novedad interesante que resulta del estudio del oscilador armónico cuántico. Sin embargo, la popularidad de su uso en óptica cuántica se debe a Glauber, quién los introdujo en su tratamiento de la coherencia óptica [53]. La representación en estados coherentes permite establecer una correspondencia cercana entre las funciones de correlación clásica y cuántica. Los estados coherentes describen el equivalente cuántico más cercano de una onda monocromática clásica en la medida que lo permite el principio de incertidumbre de Heisenberg. El campo electromagnético Clásico tiene una amplitud y una fase perfectamente definidas. Cuánticamente tanto la fase como la amplitud presentan fluctuaciones intrínsecas. Estas fluctuaciones se minimizan en el estado

coherente, y por tanto son los estados cuánticos del campo que más se parece al clásico [119]. Equivalentemente, el campo electromagnético puede describirse en términos de dos cuadraturas conjugadas, las fluctuaciones de las cuadraturas satisfacen también el principio de Heisenberg, y en el estado coherente esta incertidumbre es mínima. Un estado coherente (para un solo modo)  $|\alpha\rangle$  se define como autoestado del operador de aniquilación el cual tiene asociado un autovalor  $\alpha$ , es decir

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (5.1)$$

en la base de Fock se tiene

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (5.2)$$

mediante la relación  $(a^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$  se puede escribir como

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle \quad (5.3)$$

Si tomamos el valor medio del operador de campo eléctrico  $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{\epsilon} [\langle\alpha|a|\alpha\rangle \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) - \langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})] \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{\epsilon} [\alpha \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) - \alpha^* \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})], \end{aligned}$$

se aprecia que la fase y la amplitud de la onda están dados por el número complejo  $\alpha$ .

Definimos al *operador desplazamiento*  $D(\alpha)$  como

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)|0\rangle \quad (5.4)$$

operador que es unitario y que cumple

$$D(\alpha) = D(-\alpha) = [D(\alpha)]^{-1}. \quad (5.5)$$

La transformación de los operadores unitarios  $a$  y  $a^\dagger$  es muy frecuente en este tratamiento, y está dada por

$$\begin{aligned} D^{-1}(-\alpha)aD(-\alpha) &= a + \alpha \\ D^{-1}(-\alpha)a^\dagger D(-\alpha) &= a^\dagger + \alpha^*, \end{aligned} \quad (5.6)$$

cuyo efecto es desplazar en un valor constante  $\alpha$  la acción del operador de aniquilación. Por lo tanto, puede considerarse al estado coherente como un desplazamiento del estado fundamental del oscilador armónico.

Las cuadraturas del campo se definen por

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \\ X_2 &= \frac{1}{2i}(a - a^\dagger) \end{aligned} \quad (5.7)$$

y están asociadas a los operadores de posición  $Q$  y momentum  $P$ . Las cuadraturas obedecen la regla de conmutación  $[X_1, X_2] = \frac{i}{2}$  y una relación de incertidumbre dada por

$$(\Delta X_1)^2 (\Delta X_2)^2 \geq \frac{1}{16}. \quad (5.8)$$

Cuando el estado es un estado coherente se cumple la igualdad en la Ec. (5.8), entonces se dice que el estado coherente es un estado MUS, esto es, un estado de mínima incertidumbre (*Minimum Uncertainty State*[MUS]).

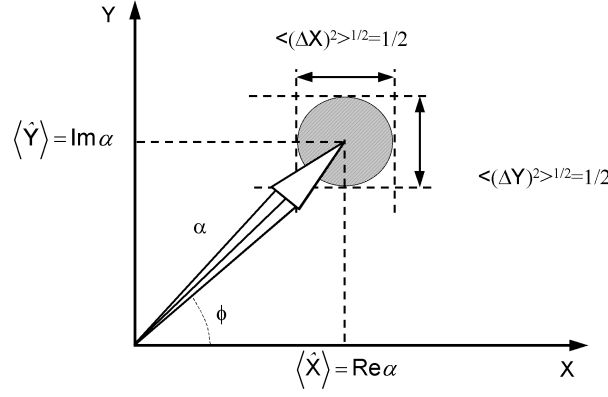


Fig. 5.1: Representación de los valores medios e incertidumbres de las cuadraturas, para un estado coherente, en el espacio de las fases

Si se cumple la condición  $|\alpha| \gg 1$ , entonces la incertidumbre en el número de fotones y la fase puede deducirse de la representación pictórica del estado coherente en el estado de las fases, Fig. (5.1).

La intensidad del campo es incierta por una cantidad dada por el *radio* del círculo de incertidumbre; es decir,  $1/4$ , así que la incertidumbre en el número de fotones está dada por

$$(|\alpha| \pm \frac{1}{4})^2 \approx |\alpha| \pm \frac{1}{2}|\alpha| = \langle \hat{n} \rangle \pm \frac{1}{2} \langle (\Delta n)^2 \rangle^{1/2}, \quad (5.9)$$

entonces,

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle^{1/2} = |\alpha|. \quad (5.10)$$

La incertidumbre en la fase está dada por el ángulo subtendido en el origen por el círculo de incertidumbre, por lo tanto

$$\Delta \phi = \frac{1}{2|\alpha|} \quad (5.11)$$

de tal forma que el estado coherente satisface la igualdad semiclásica número-fase

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle^{1/2} \Delta \phi = \frac{1}{2} \quad (5.12)$$

## 5.2. Estados Comprimidos

Este tipo de estados comprimidos o squeezed [120, 121, 122] se definen como autoestados de un operador construido a partir de una transformación del operador de aniquilación  $a$  mediante el operador  $\exp(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2})$ , llamado operador de compresión  $S(\xi)$ , de tal forma que el estado comprimido  $|\xi, \alpha\rangle$  queda definido por

$$|\xi, \alpha\rangle = S(\xi)|\alpha\rangle = \exp(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2})D(\alpha)|0\rangle, \quad (5.13)$$

con  $\xi = r \exp(i\theta)$  un número complejo. A este estado se le llama estado coherente comprimido, se diferencia del estado obtenido aplicando los operadores de compresión y desplazamiento en forma inversa.

El operador de compresión es unitario, como puede verificarse, es decir:

$$S^\dagger(\xi) = S^{-1}(\xi) = S(-\xi). \quad (5.14)$$

El operador de compresión genera una rotación<sup>1</sup> de los operadores de creación y aniquilación del tipo

$$S^\dagger(\xi)aS(\xi) = a \cosh(r) - a^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \quad (5.15)$$

<sup>1</sup> Con ligeras modificaciones ésta se conoce, en otras áreas de la física, como rotación de Bogoliubov [123]

$$S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh(r) - ae^{-i\theta} \sinh(r) \quad (5.16)$$

estos resultados permiten calcular el número promedio de fotones  $a^\dagger a$  y el valor medio de  $a^2$  en un estado comprimido

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle &= \langle \alpha | S^\dagger(\xi) a^\dagger a S(\xi) | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) S^\dagger(\xi) a S(\xi) | \alpha \rangle \\ &= |\alpha|^2 (\cosh^2(r) + \sinh^2(r) - (\alpha^*)^2 e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) \\ &\quad - (\alpha)^2 e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r) + \sinh^2(r)) \\ \langle a^2 \rangle &= \langle \alpha | S^\dagger(\xi) a^2 S(\xi) | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | S^\dagger(\xi) a S(\xi) S^\dagger(\xi) a S(\xi) | \alpha \rangle \\ &= (\alpha)^2 \cosh^2(r) + (\alpha^*)^2 e^{2i\theta} \sinh^2(r) - |\alpha|^2 e^{i\theta} \sinh(r) \cosh(r) \\ &\quad - e^{-i\theta} \sinh(r) \cosh(r). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Redefiniendo las cuadraturas (5.7), para simplificar el tratamiento, en la forma

$$Y_1 = \frac{1}{2}(ae^{i\theta/2} + a^\dagger e^{-i\theta/2}) \quad (5.18)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(ae^{-i\theta/2} - a^\dagger e^{i\theta/2}), \quad (5.19)$$

donde se ha agregado una fase  $i\theta/2$  a las cuadraturas iniciales.

Una vez hecho el cálculo de  $\langle a^\dagger a \rangle$  y  $\langle a^2 \rangle$  en la forma (5.17), es fácil obtener las cuadraturas, en términos del parámetro  $r$ , en la forma

$$(\Delta Y_1)^2 = \langle Y_1^2 \rangle - \langle Y_1 \rangle^2 = \frac{1}{4}e^{-2r} \quad (5.20)$$

$$(\Delta Y_2)^2 = \langle Y_2^2 \rangle - \langle Y_2 \rangle^2 = \frac{1}{4}e^{2r} \quad (5.21)$$

$$\Delta Y_1 \Delta Y_2 = \frac{1}{4} \quad (5.22)$$

$r$ , determina el grado de compresión de las cuadraturas, por ello se llama *parámetro de compresión*. El estado coherente comprimido sigue siendo un estado MUS. Lo que diferencia a los estados comprimidos de los estados coherentes es que, en los primeros, la incertidumbre de una de las cuadraturas crece, a expensas de la otra, manteniendo constante su producto e igual al mínimo valor permitido por el principio de Heisenberg; mientras que los estados coherentes las dos cuadraturas tienen la misma incertidumbre.

Puede construirse una representación pictórica de ambos tipos de estados como la que se muestra en la Fig. (5.2)

El efecto del operador de compresión  $S(\xi)$  se representa como una rotación de los ejes coordenados de las cuadraturas, y una deformación de la incertidumbre desde un círculo, en estado coherente, a una elipse en el estado comprimido. Esta rotación está definida por el ángulo  $\theta/2$ .

El campo eléctrico se puede escribir en función de las cuadraturas  $X_1$  y  $X_2$  como

$$\vec{E}(t) = 2\epsilon\hat{e}A_{\vec{k},\lambda}[X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t)] \quad (5.23)$$

La compresión en las cuadraturas puede detectarse mediante los esquemas de detección Homodina o Heterodina [55].

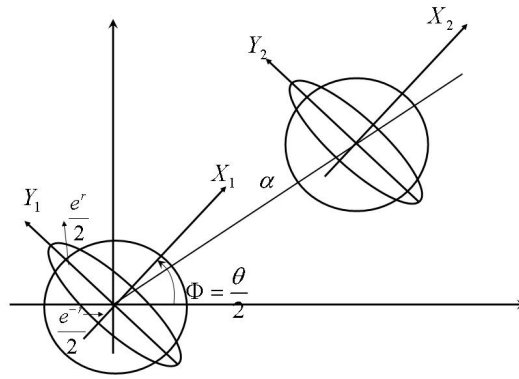


Fig. 5.2: Efecto del operador de compresión sobre las cuadraturas del campo

### 5.2.1. Incertidumbres de fase y de número

A partir de las ecuaciones (5.17) se puede obtener el número medio de fotones en el estado comprimido, que será:

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle a^\dagger a \rangle^2 + \sinh^2 r \quad (5.24)$$

de igual forma, la varianza en el número de fotones estará dada por:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = |\alpha|^2 [\exp(-2r) \cos^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) - \exp(2r) \sin^2(\phi - \frac{1}{2}\theta)] + 2 \sin^2 r, \quad (5.25)$$

con  $\alpha = |\alpha| \exp(i\phi)$ .

Las fuentes que generan luz comprimida, en la práctica, generan un estado de vacío comprimido, donde  $\alpha = 0$ , por lo tanto (5.24) y (5.25) dan

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = 2 \langle \hat{n} \rangle (\langle \hat{n} \rangle + 1) \quad (5.26)$$

El cálculo de la incereza ángulo-fase cuando la contribución coherente al número medio de fotones es mucho más grande que la contribución del estado comprimido, se obtiene a partir del ángulo subtendido por por la elipse de incertidumbre, en el origen, con una longitud de arco dada por la proyección de la elipse sobre la dirección perpendicular al vector coherente, así

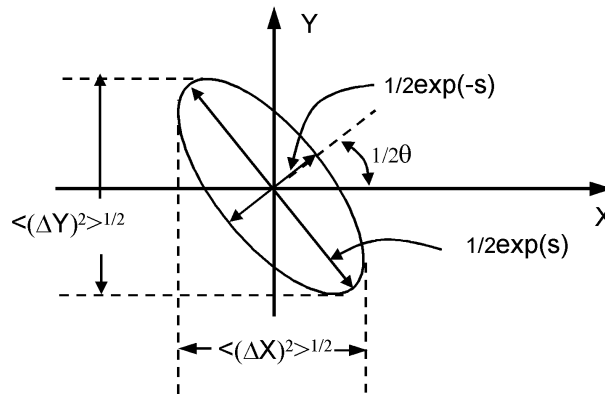


Fig. 5.3: Representación del estado comprimido en el espacio de las fases



$$(\Delta\phi)^2 = [\exp(-2s) \sin^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) + \exp(2s) \cos^2(\phi - \frac{1}{2}\theta)] \quad (5.27)$$

con lo cual

$$\langle(\Delta n)^2\rangle(\Delta\phi) = \frac{1}{2} \quad \phi = \frac{1}{2}\theta \quad \phi = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\pi \quad (5.28)$$

lo que está de acuerdo con las relación de mínima incertidumbre. Sin embargo, el producto de las incertidumbres es más grande para otros ángulos. El ángulo para el cual la incertidumbre en las cuadraturas es mínima difiere del ángulo para el cual las incerteza de número-fase es mínima.

### 5.2.2. Estado Comprimido Multimodo

Algunos de los procedimientos de generación y detección de estados squeezed, producen salidas de luz a dos frecuencias distintas, denotadas por  $\omega_+$  y  $\omega_-$ . La excitación resultante puede escribirse como un estado comprimido de dos modos definidos por [58, 59]

$$|\alpha_+, \alpha_-, \psi\rangle = \hat{D}_+(\alpha_+) \hat{D}_-(\alpha_-) \hat{S}_{+-}(\psi) |0\rangle. \quad (5.29)$$

$$\hat{D}_\pm(\alpha_\pm) = \exp(\alpha_\pm \hat{a}_\pm^\dagger - \alpha_\pm^* \hat{a}_\pm) \quad (5.30)$$

es el operador de desplazamiento coherente para dos modos, descritos por los operadores  $\hat{a}_+$  y  $\hat{a}_-$ .

$$\hat{S}_{+-}(\psi) = \exp(\psi^* \hat{a}_+ \hat{a}_- - \psi \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger) \quad (5.31)$$

es el operador unitario de squeezed de dos modos,  $|0\rangle$  es el estado de vacío de dos modos.

Este operador cumple la propiedad

$$\hat{S}_{+-}^{-1}(\psi) \hat{a}_\pm \hat{S}_{+-}(\psi) = \hat{a}_{pm}^\dagger \cosh r - \hat{a}_{\mp}^\dagger \exp i\theta \sinh r \quad (5.32)$$

con lo cual los valores de expectación, al orden más bajo, son:

$$\langle\hat{a}_+\rangle = \alpha_+ \quad \langle\hat{a}_-\rangle = \alpha_- \quad (5.33)$$

$$\langle\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+\rangle = |\alpha_+|^2 + \sinh^2 r \quad y \quad \langle\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-\rangle = |\alpha_-|^2 + \sinh^2 r \quad (5.34)$$

$$\langle\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-\rangle = \alpha_+^* \alpha_- \quad y \quad \langle\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+\rangle = \alpha_-^* \alpha_+ \quad (5.35)$$

$$\langle\hat{a}_+ \hat{a}_+\rangle = \alpha_+^2 \quad y \quad \langle\hat{a}_- \hat{a}_-\rangle = \alpha_-^2 \quad (5.36)$$

$$\langle\hat{a}_+ \hat{a}_-\rangle = \langle\hat{a}_+ \hat{a}_-\rangle = \alpha_+ \alpha_- - \exp(i\theta) \sinh r \cosh r. \quad (5.37)$$

Se ve que la compresión afecta exclusivamente a los valores de expectación diagonales, para cada modo individual y los valores de espectación intermodo fuera de la diagonal.

El operador de cuadratura  $\hat{X}$  se generaliza al caso de dos modos en la forma

$$\hat{X} = (\hat{a}_+ + \hat{a}_+^\dagger + \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger)/2^{1/2} \quad (5.38)$$

A partir del conjunto de ecuaciones 5.33, se puede demostrar que el valor medio y la varianza de  $\hat{X}$  son

$$\langle X \rangle = (\mathbf{Re}\alpha_+ + \mathbf{Re}\alpha_-)/2^{1/2} \quad (5.39)$$

y

$$\langle(\Delta X)^2\rangle = \frac{1}{4}[\exp(-2r) \cos^2 \frac{1}{2}\theta + \exp(2r) \sin^2 \frac{1}{2}\theta] \quad (5.40)$$

Debido a que en el estado comprimido es posible reducir la incertidumbre de una de las cuadraturas, este tipo de estado se puede utilizar para enviar información con bajo ruido, teóricamente se podría tener un ruido nulo cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Los estados coherentes y comprimidos han sido ampliamente usados en estudios de detección de ondas gravitacionales [124], con la finalidad de de mejorar la sensibilidad de los interferómetros utilizados para medir vibraciones con amplitudes mucho más pequeñas que el radio de un núcleo atómico.

### 5.3. Operador de compresión en cavidades ópticas

Las propiedades de las cavidades ópticas y sus ventajas para el procesamiento de información cuántica se discutieron en el capítulo 2. En una publicación reciente [125], se plantea la posibilidad de generar entrelazamiento en estados atómicos en cavidades para las cuales es difícil alcanzar, experimentalmente, el límite  $g^2/\kappa\gamma \gg 1$ . La generación de estos estados depende del parámetro  $Ng^2/\kappa\gamma$ , con  $N$  el número de átomos presentes en la cavidad. El entrelazamiento se puede medir siempre y cuando  $Ng^2/\kappa\gamma \gtrsim 1$ .

Motivados por este resultado, presentamos a continuación un esquema de generación de estados comprimidos en cavidades ópticas que pueden o no trabajar en el régimen de acoplamiento fuerte. Se verá que el parámetro de compresión escala con el número de átomos presentes en la cavidad.

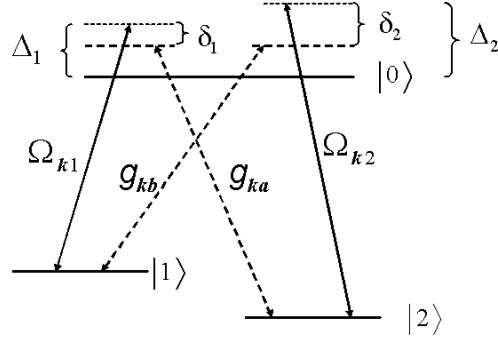


Fig. 5.4: Cada átomo de tres niveles se conduce con campos clásicos, de frecuencias  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , estableciendo una acoplamiento Raman de un sistema de tres láseres mediante los modos de la cavidad.

Consideremos un ensemble de un número grande de  $N$  átomos de tres niveles dentro de una cavidad óptica. En general los átomos están en posiciones aleatorias dentro de la cavidad, estas posiciones están determinadas por las coordenadas  $z_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) que están distribuidas a lo largo de una la distribución espacial de dos modos de la cavidad,  $u_a(z)$  y  $u_b(z)$ . Cada átomo interactúa con estos dos modos cuantizados y dos láseres apropiadamente sintonizados, como se esquematiza en la Fig. (5.3), lo cual establece un acoplamiento Raman doble de los niveles mediante los láseres. El Hamiltoniano asociado al sistema (haciendo uso de la RWA) se puede escribir como.

$$H = H_0 + H_{int},$$

con

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^2 \omega_i |i\rangle_k \langle i|,$$

y

$$\begin{aligned} H_{int} = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} (|0\rangle_k \langle 1| e^{-i\nu_1 t} + |1\rangle_k \langle 0| e^{i\nu_1 t}) \right. \\ & + \Omega_{k2} (|0\rangle_k \langle 2| e^{-i\nu_2 t} + |2\rangle_k \langle 0| e^{i\nu_2 t}) \\ & + g_{k1} (|0\rangle_k \langle 2| a + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger) \\ & \left. + g_{k2} (|0\rangle_k \langle 1| b + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger) \right\}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Aquí,  $a$  ( $a^\dagger$ ) y  $b$  ( $b^\dagger$ ) son los operadores de aniquilación (creación) asociados con los dos modos de la cavidad, con frecuencias  $\omega_a$  y  $\omega_b$ , respectivamente. Los estados atómicos  $|i\rangle$  ( $i = 0, 1, 2$ ) tienen frecuencias de Bohr  $\omega_i$  y están acoplados en dos configuraciones lambda. Las transiciones atómicas  $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$  y  $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$  están acoplados a los campos clásicos con constantes de acoplamiento  $\Omega_{k1}$

y  $\Omega_{k2}$ , y también a dos modos de la cavidad,  $b$  y  $a$ , con constantes de acoplamiento  $g_{kb} = g_b u_b(z_k)$  y  $g_{ka} = g_a u_a(z_k)$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad puede considerarse que todos los acoplamientos son reales. En el cuadro de interacción, el Hamiltoniano de Ec. (5.41) se lee ahora

$$\begin{aligned}
H_I = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} (|0\rangle_k \langle 1| e^{-i\Delta_1 t} + |1\rangle_k \langle 0| e^{i\Delta_1 t}) \right. \\
& + \Omega_{k2} (|0\rangle_k \langle 2| e^{-i\Delta_2 t} + |2\rangle_k \langle 0| e^{i\Delta_2 t}) \\
& + g_{k1} (|0\rangle_k \langle 2| a e^{-i\tilde{\Delta}_1 t} + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger e^{i\tilde{\Delta}_1 t}) \\
& \left. + g_{k2} (|0\rangle_k \langle 1| b e^{-i\tilde{\Delta}_2 t} + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger e^{i\tilde{\Delta}_2 t}) \right\}, \quad (5.42)
\end{aligned}$$

donde  $\Delta_i = \omega_i - \omega_0 + \nu_i$ ,  $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \delta_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\omega_{01} - \omega_1 - \omega_b = -\tilde{\Delta}_2$  y  $\omega_{02} - \omega_a = -\tilde{\Delta}_1$ . Asumiremos ahora que los modos clásicos y cuánticos están muy desintonizados de las transiciones atómicas. En tales casos podemos considerar un límite de desintonía grande,  $\{\tilde{\Delta}_i, \Delta_i\} \gg \{\delta_i, g_{ka}, g_{kb}, \Omega_{k1}, \Omega_{k2}\}$ , con  $i = 1, 2$  y  $k = 1, \dots, N$ , y derivar un Hamiltoniano efectivo de segundo orden. Esta derivación se explica con mayor detalle en el apéndice A.1, el resultado interesante es

$$\begin{aligned}
H_{II} = & -\hbar\bar{\delta}a^\dagger a - \hbar\bar{\delta}b^\dagger b \\
& \hbar \sum_k \left( \frac{\Omega_{k1}^2}{\Delta_1} + \frac{g_{k2}^2 b^\dagger b}{\Delta_2} \right) \sigma_k^- \sigma_k^+ \\
& + \hbar \sum_k \left( \frac{\Omega_{k2}^2}{\Delta_2} + \frac{g_{k1}^2 a^\dagger a}{\Delta_1} \right) \sigma_k^+ \sigma_k^- \\
& + \hbar \sum_k \left( \frac{\Omega_{k1} g_{ka}}{\Delta_1} a^\dagger + \frac{g_{kb} \Omega_{k2}}{\Delta_2} b \right) e^{i\delta t} \sigma_k^- \\
& + \hbar \sum_k \left( \frac{\Omega_{k2} g_{kb}}{\Delta_2} b^\dagger + \frac{g_{ka} \Omega_{k1}}{\Delta_1} a \right) e^{-i\delta t} \sigma_k^+. \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Aquí,  $\sigma_k^+ = \sigma_k^\dagger = |1\rangle_k \langle 2|$  son los operadores de subida y bajada, y las desintonías  $\delta_i$  han sido escogidas de tal forma que  $\delta_1 = -\delta + \bar{\delta}$ ,  $\delta_2 = \delta + \bar{\delta}$ .

En la ecuación

Como observamos a partir del Hamiltoniano en la Ec. 5.43, esta elección nos permite generar un modo efectivo que corresponde a la suma de los modos  $b$  y  $a$ . Hemos descartado los términos que requieren una población inicial del nivel superior,  $|0\rangle$ , que ha sido eliminado adiabáticamente de la dinámica. Adicionalmente, asumiremos que todos los átomos están inicialmente en el estado fundamental,  $|2\rangle$ , dentro de una cavidad vacía de campo. En las primeras dos líneas de la Ec. (5.43), las componentes constantes del corrimiento AC Stark puede compensarse ajustando las frecuencias del láser, y las componentes que dependen del estado del campo son despreciables en general. Con estas consideraciones y bajo la condición plausible  $\tilde{\Omega}_k \equiv \Omega_{k1} g_{ka} / \Delta_1 = \Omega_{k2} g_{kb} / \Delta_2$ , es posible reescribir el Hamiltoniano como

$$\begin{aligned}
H_{II} = & -\hbar\bar{\delta}a^\dagger a - \hbar\bar{\delta}b^\dagger b \\
& + \hbar\tilde{J}^-(a^\dagger + b)e^{i\delta t} \hbar\tilde{J}^+(b^\dagger + a)e^{-i\delta t}, \quad (5.44)
\end{aligned}$$

donde  $\tilde{J}^+ \equiv \sum_k \tilde{\Omega}_k \sigma_k^+$  y  $\tilde{J}^- \equiv \sum_k \tilde{\Omega}_k \sigma_k^-$ . Ahora, usaremos una segunda condición de desintonía grande,  $\delta \gg \{\tilde{\Omega}_k, \bar{\delta}\}$  para derivar un nuevo Hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned}
H_{III} = & -\hbar\bar{\delta}a^\dagger a - \hbar\bar{\delta}b^\dagger b \\
& - \frac{\hbar}{\delta} [\tilde{J}^+, \tilde{J}^-] (a^\dagger a + b^\dagger b + 1 + ab + a^\dagger b^\dagger). \quad (5.45)
\end{aligned}$$

Aquí, el conmutador puede calcularse como

$$\frac{1}{\delta}[\tilde{J}^+, \tilde{J}^-] = 2 \sum_k \frac{\tilde{\Omega}_k^2}{\delta} \sigma_z^k \equiv 2 \sum_k \tilde{\Omega}_{\text{eff}}^k \sigma_z^k \equiv \frac{2}{\delta} \tilde{J}_z.$$

Ahora, reemplazando estas expresiones y escogiendo  $\bar{\delta} = \sum_k \tilde{\Omega}_{\text{eff}}^k \equiv \Omega_{\text{eff}}$ , el Hamiltoniano efectivo puede escribirse como

$$\begin{aligned} \bar{H}_{III} &= -\hbar\Omega_{\text{eff}} a^\dagger a - \hbar\Omega_{\text{eff}} b^\dagger b \\ &\quad - 2\hbar \left( \sum_k \tilde{\Omega}_{\text{eff}}^k \sigma_z^k \right) (a^\dagger a + b^\dagger b + 1 + ab + a^\dagger b^\dagger). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Finalmente, recordando que todos los átomos están en el estado fundamental  $|2\rangle$ , y entonces el autovalor de  $\sigma_z^k$  es igual a  $-1/2$  de tal forma que la elección de  $\bar{\delta}$  como se indicó antes puede escribirse el Hamiltoniano efectivo actuando sobre el estado del campo y el estado fundamental de los estados colectivos de la nube atómica como sigue:

$$H_{\text{eff}} = \hbar\Omega_{\text{eff}}(ab + a^\dagger b^\dagger). \quad (5.47)$$

Este Hamiltoniano efectivo está actuando solo en los grados de libertad de la cavidad y corresponde a un Hamiltoniano de un oscilador paramétrico no degenerado (o degenerado en el caso  $a = b$ ) el cual actuando sobre el vacío del campo puede dar lugar a un estado de vacío comprimido de dos modos. También puede producir compresión cuando en la cavidad están presentes dos campos en cualquier estado inicial.

En el caso ideal daría lugar a un estado de vacío squeezed perfecto. El formalismo input–output es el escenario apropiado para estudiar la compresión de los modos de campo que salen de la cavidad, puesto que estos son los campos que interesan para las aplicaciones en los protocolos de Teoría de la Información Cuántica mencionados anteriormente.

Tomamos el modelo de sistema abierto sugerido en [29]. El sistema está descrito a través del Hamiltoniano de dos modos en la cavidad (5.47). Con el fin de producir un estado coherente de dos modos o un estado comprimido ideal, deben introducirse dos campos clásicos que interactúen linealmente con cada modo de la cavidad. Bajo estas condiciones los modos cuánticos interactúan con dos baños independientes de tal forma que en la aproximación de Markov, la Teoría Input–Output proporciona las siguientes ecuación de movimiento para los campos dentro de la cavidad (ver apéndice A)

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\varepsilon_1^* + \frac{\Omega}{2} b^\dagger - \frac{\gamma_1}{2} a - \sqrt{\gamma_1} C_{in}(t) \\ \dot{b} &= -i\varepsilon_2^* + \frac{\Omega}{2} a^\dagger - \frac{\gamma_1}{2} b - \sqrt{\gamma_1} D_{in}(t), \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde  $\varepsilon_i$  son los acoplamientos de los dos nuevos campos clásicos con los modos  $a$  y  $b$  respectivamente, y se ha redefinido la constante de acoplamiento de tal forma que ahora es  $i\frac{\Omega}{4}$  lo cual puede hacerse sin pérdida de generalidad en la descripción y por un criterio de pura conveniencia. Las cuadraturas del campo se definen como  $X = (a + b + a^\dagger + b^\dagger) / 2^{3/2}$ , y  $Y = -i(a + b - a^\dagger - b^\dagger) / 2^{3/2}$  [134, 135]. Las soluciones a (5.48), en el espacio de frecuencias son

$$\tilde{a}(\omega) = \alpha_0 \delta(\omega) + \frac{2\sqrt{\gamma_1}\beta}{\Omega^2 - \beta\alpha} C_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\gamma_2}\Omega}{\Omega^2 - \beta\alpha} D_{in}^\dagger(-\omega) \quad (5.49)$$

$$\tilde{b}(\omega) = \beta_0 \delta(\omega) + \frac{2\sqrt{\gamma_2}\alpha}{\Omega^2 - \beta\alpha} D_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\gamma_1}\Omega}{\Omega^2 - \beta\alpha} C_{in}^\dagger(-\omega) \quad (5.50)$$

donde  $\alpha_0 = -i2(\Omega\varepsilon_2 - \varepsilon_1^*\gamma_2) / (\Omega^2 - \gamma_1\gamma_2)$  y  $\beta_0 = -2i(\Omega\varepsilon_1 - \gamma_1\varepsilon_2^*) / (\Omega^2 - \gamma_1\gamma_2)$ . A partir de estas ecuaciones podemos calcular las fluctuaciones de las cuadraturas para el campo dentro de la cavidad

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{(2\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\Omega) (\sqrt{N} - \sqrt{M})}{8(\Omega^2 - \gamma_1\gamma_2)(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\Omega}\right)^2}} \quad (5.51)$$

$$\langle Y^2(t) \rangle = \frac{(2\gamma_1\gamma_2 - (\gamma_2 + \gamma_1)\Omega) (\sqrt{M} - \sqrt{N})}{8(\gamma_1\gamma_2 - \Omega^2)(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\Omega}\right)^2}} \quad (5.52)$$

donde:  $M = B - \sqrt{C}$ ;  $N = B + \sqrt{C}$ ;  $B = \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\Omega^2)}{8}$  y  $C = \frac{1}{16}(\gamma_1 + \gamma_2)^2 \left(\Omega^2 + \frac{1}{4}(\gamma_1 - \gamma_2)^2\right)$ ; con  $\alpha = \gamma_1 - 2i\omega$  y  $\beta = \gamma_2 - 2i\omega$ .

Por otro lado, a partir de las soluciones ( A.51 ), los campos de salida están dados como

$$C_{out}(\omega) = -\sqrt{\gamma_1}\alpha_0\delta(\omega) + \frac{\Omega^2 + \alpha^*\beta}{\Omega^2 - \beta\alpha}C_i(\omega) + \frac{2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\Omega}{\Omega^2 - \beta\alpha}D_i^\dagger(-\omega) \quad (5.53)$$

$$D_{out}(\omega) = -\sqrt{\gamma_2}\beta_0\delta(\omega) + \frac{\Omega^2 + \beta^*\alpha}{\Omega^2 - \beta\alpha}D_i(\omega) + \frac{2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\Omega}{\Omega^2 - \beta\alpha}C_i^\dagger(-\omega) \quad (5.54)$$

Similarmente las cuadraturas normalmente ordenadas del campo de salida (que se definen en forma análoga a las del campo en el interior) están calculadas a partir de las ecuaciones (5.53), el espectro de las fluctuaciones en  $\omega = 0$  está dado por

$$: S_Y(0) := -\frac{\Omega\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{(\sqrt{\gamma_1\gamma_2} + \Omega)^2}. \quad (5.55)$$

La condición  $\omega = 0$  para la frecuencia es equivalente a tomar  $\omega_a + \omega_b \approx \nu_1 + \nu_2$ ; que exactamente la condición de matching. Esto garantiza que la condición de generación paramétrica se satisfaga, y ocurra un proceso de dos fotones.

El estado de squeezenz perfecto se obtiene cuando las fluctuaciones en una de las cuadraturas normalmente ordenadas ( $Y$  en nuestro caso) es igual a  $-1/4$ , mientras las fluctuaciones en las otras cuadraturas tiende al infinito. En este caso los campos están en un estado que es un autoestado del operador de cuadratura de fase.

Cuando ponemos el valor  $\gamma_1 = \gamma_2$  y  $\Omega = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}$  in (5.51), (5.52), se obtiene que la compresión máxima es  $-\frac{1}{8}$ , que también es el resultado de la solución del estado estacionario. Los valores correspondientes de compresión para los campos del espectro del campo de salida en Ec. (5.55), (a las mismas condiciones  $\gamma_1 = \gamma_2$  y  $\Omega = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ ) es igual a  $-\frac{1}{4}$ ; el cual es un estado de compresión perfecta para el campo a la salida.

En conclusión es este capítulo hemos presentado un esquema para obtener un operador efectivo de compresión para el campo dentro de una cavidad, a través de la interacción del campo bimodal de la cavidad con una nube de átomos de tres niveles. Esta compresión se produce debido a los dos campos clásicos externos. La nube atómica proporciona un aumento de la compresión proporcional a  $\bar{N}$  (número medio efectivo de átomos en la cavidad). El operador de compresión puede usarse para generar estados squeezenz de campos de dos modos degenerados y no degenerados. Se ha usado la Teoría Input–Output par comparar el campo a la salida con el campo dentro de la cavidad. La compresión óptimo se obtiene cuando  $\gamma_1 = \gamma_2$  y  $\Omega = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ ; en este caso la compresión de la cavidad está degradado a la mitad mientras que el de la salida es perfecto.

## 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La presente tesis gira alrededor de dos problemas de la Teoría de la Información Cuántica. El primero es el de la caracterización del entrelazamiento, recurso básico para la realización de protocolos de procesamiento de información cuántica.

Como se destacó en el capítulo 2, sin este recurso no se puede hablar de ventajas comparativas del uso de sistemas cuánticos en estos procesos [7] respecto a sus equivalentes clásicos. La tendencia generalizada en la caracterización de entanglement, ha sido la de estudiar las características matemáticas de un espacio de Hilbert lo más general posible a fin de encontrar una medida de entanglement lo más general posible. Sin embargo, es claro que mientras eso suceda, se hacen necesarias la mayor cantidad posible de formas sencillas de caracterizar este recurso y comprender como se comporta en presencia de diferentes efectos físicos. La *tasa de concurrencia* [24] constituye una de estas maneras de caracterizar el entanglement de sistemas de qubits a tiempos cortos. Se han explorado dos formas de determinar esta medida de entanglement. El primer método consiste en determinar la expansión en serie de Taylor de la Concurrencia de Wootters [18]. Para ello se ha expresado la concurrencia en términos de sus invariantes, lo cual conduce a una expresión que permite derivar una jerarquía de ecuaciones, que a su vez relacionan las derivadas de la concurrencia con el valor de ésta en el estado inicial. Adicionalmente, se presenta un nuevo enfoque al mismo problema. Si se quiere estudiar el cambio de la concurrencia para la dinámica de un estado entanglement sometido a un proceso unitario y un proceso disipativo tipo Limbland, a tiempos cortos, entonces posible hacer esto usando un cálculo perturbativo de los autovalores de la matriz  $R^2$  (capítulo 3). Con este objetivo se presentan una generalización de la teoría perturbativa usada en mecánica cuántica al caso de  $R^2$ . Pese a que el origen de la idea está motivada por la teoría perturbativa de la mecánica cuántica, tiene sus propios matices y diferencias. Una primera diferencia radica en que  $R^2$ , no es hermítica, a diferencia del Hamiltoniano en mecánica, por lo tanto es necesario modificar este esquema a fin de encontrar una fórmula perturbativa generalizada de los autovalores y autovectores de  $R^2$ . La segunda diferencia clave está en que en mecánica cuántica, solo se tiene un término perturbativo en el Hamiltoniano, lo cual hace que la forma de obtener órdenes de aproximación más altos sea relativamente sencilla, a pesar de que los resultados son menos confiables a medida que crece el orden (términos de orden mayor en el Hamiltoniano podrían ser importantes a órdenes mayores a 2). Mientras que en nuestro esquema, se puede obtener la expansión de la matriz  $R^2$  a cualquier orden en potencias de  $t$ . Esto permite en principio que se pueda calcular (aunque el nivel de dificultad aumenta con el orden grandemente) las correcciones a cualquier orden. El conocimiento de  $R^2$  a cualquier orden lo da la dinámica a través de la ecuación maestra. Entonces la metodología en este caso es

1. Encontrar la expansión de  $R^2$  hasta el segundo orden. Esto porque en realidad para la concurrencia son necesarios los autovalores de  $R$ .
2. Usar las fórmulas desarrolladas en el capítulo (3) para calcular perturbativamente los autovalores de  $R^2$ .
3. Calcular, a partir de estos resultados la concurrencia a tiempos cortos.

El segundo problema de este trabajo está orientado hacia la búsqueda de realizaciones de protocolos de computación cuántica en sistemas de dimensionalidad más alta que la de los qubits. La comunidad científica [103, 104, 111, 109, 107, 113] viene usando estos sistemas para modelar los

procesos de información cuántica en general. Una de los puntos poco claros es si estos sistemas presentan una ventaja real respecto al procesamiento de información en qubits. Sin embargo, en este trabajo no abordamos ese aspecto del problema, sino más bien se propone que lo mismo que se puede hacer con qubits codificados en iones atrapados en una trampa electromagnética, puede hacerse codificando la información en qutrits, es decir un estado de un sistema de tres niveles[52]. El objeto físico para la codificación son los niveles Zeeman de iones de  $Ba^+$  atrapados en una trampa de Paul, usando pulsos de luz descritos clásicamente, en dos esquemas Raman, pueden codificarse la información en qutrits. El primer paso es la realización de la compuerta lógica condicional equivalente a la CNOT para los qutrits, llamada GXOR[48]. Para ello se hace uso de la decomposición de esta compuerta en una transformada de Fourier para qutrits y una compuerta condicional de fase. Los grados de libertad del centro de masa juegan un rol fundamental en la manipulación de los qutrits, los cuales son manipulados mediante el uso de los dos esquemas Raman (ver capítulo 4). También se presenta una generalización de transformada de Fourier para  $n$  qutrits codificados en iones atrapados, ayudados por la transformación de fase condicional implementada.

Un tercer problema se ha presentado en este trabajo. Está relacionado con la posibilidad de comunicación entre nodos de una red de comunicación cuántica. En el capítulo 2 se mencionó que el entanglement es un recurso importante si se puede repartir los qubits entrelazados entre personas que quieren comunicarse. Esto significa establecer un canal cuántico de comunicación, entre las dos partes, que sea confiable. El problema es que, debido a la presencia de ruido, (como se ha demostrado en el capítulo 3) puede destruir el entanglement a pesar de haber permanentemente un acoplamiento que trata de restaurar este entanglement. Entonces el problema de buscar una sistema en el que el efecto de la decoherencia sobre el entanglement es vital para incrementar las posibilidades de la realización de protocolos de comunicación cuántica a grandes distancias. Una de las fuentes de ruido es justamente la naturaleza cuántica de los estados que se usan, los cuales presentan un límite de reducción fundamental impuesto por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Se ha propuesto que el uso de los estados comprimidos del campo electromagnético, pueden ser útiles para la distribución de entanglement [138] en canales ruidosos. En este trabajo se estudia la posibilidad de generar cualquier estado squeeze de dos modos, mediante la realización de un operador de compresión efectivo. Para ello se usa una nube de átomos que se introducen en una cavidad óptica bimodal, la manipulación de los niveles atómicos usando campos clásicos permite que el campo de la cavidad sea preparado en un estado squeezing, los modos de la cavidad se encuentran también acoplados a los niveles de los átomos de la nube. Se ha hecho un estudio de los efectos de ruido de la cavidad a fin de saber si el campo que sale de la misma conserva las propiedades de los estados comprimidos generadas mediante el esquema planteado. La utilidad de este tipo de squeezing en los procesos de información cuántica está todavía en estudio y debe ser desarrollada aún más.

### 6.1. *Conclusiones.*

Basados en los resultados presentados en las páginas de este trabajo podemos llegar a las siguientes conclusiones.

En cuanto a la tasa de concurrencia de tiempos cortos podemos decir:

1. El comportamiento de tiempo corto del entanglement para un sistema inicialmente preparado en un estado ya sea maximalmente o no maximalmente entrelazado, y evolucionando bajo dinámicas disipativas puede estudiarse mediante un enfoque perturbativo. El mmo que permite calcular las derivadas de la concurrencia de Wootters alrededor de  $t = 0$ . Una teoría perturbativa similar a los métodos estándar usados en mecánica cuántica permite encontrar los autovalores de la matriz inicial  $R^2 = \rho(0)\tilde{\rho}(0)$ , y entonces calcular la concurrencia definida por Wootters.

En lo que tiene que ver con la realización de computación cuántica en qutrits en iones atrapados:

2. El resultado más importante es que se muestra que la misma clase de arreglo usado para computación cuántica de qubits es apropiada para la computación cuántica basada en qutrits, la cual proporciona un incremento en la disponibilidad del espacio de Hilbert para la misma cantidad de recursos físicos. En principio, este esquema permite también distribución de entanglement entre qutrits localizados en nodos distantes de una red cuántica.

Respecto a la generación de estados no clásicos en cavidades se puede decir que.

3. Se ha encontrado un esquema para obtener un operador efectivo de compresión para el campo dentro de una cavidad, a través de la interacción del campo bimodal de la cavidad con una nube de átomos de tres niveles. Este estado comprimido se produce debido a los dos campos clásicos extra. La nube atómica proporciona un aumento de compresión proporcional a  $\sqrt{N}$ . El operador de compresión puede usarse para generar estados squeezed de campos de dos modos degenerados y no degenerados. La teoría de input–output permite deducir que la compresión óptima en el interior de la cavidad se obtiene cuando  $\gamma_1 = \gamma_2$  y  $\Omega = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ ; en este caso el campo en un estado comprimido de la cavidad está degradado a la mitad mientras que el estado del campo de salida es perfecto.

Resumiendo podemos decir que se han explorado algunos aspectos de los fundamentos de la Teoría de la Información Cuántica, sus propiedades y su factibilidad de realización en sistemas físicos reales. Por supuesto, este constituye sólo un paso más hacia el entendimiento total del problema, y por lo tanto, hacia la realización práctica de un protocolo de información cuántica que todos esperan que sea una realidad en un futuro próximo.



## APÉNDICE

## A. HAMILTONIANO EFECTIVO Y TEORÍA INPUT–OUTPUT

El objetivo de este apéndice es presentar los detalles más relevantes de los cálculos que conducen a los resultados presentados en el capítulo 5. En la sección A.1 se presentan algunos aspectos del método de cálculo empleado para obtener Hamiltonianos efectivos. Luego se aplica este resultado al caso de interacción de nubes atómicas con campos de una cavidad óptica, en dos regímenes dispersivos diferentes, lo que permite la obtención de un operador efectivo de compresión degenerado y no degenerado. En el apéndice A.2 se presenta la aplicación del método Input–Output para sistemas abiertos, al caso de cavidades ópticas y nubes atómicas. Este cálculo permite obtener información de como se transforma el estado comprimido generado en el campo de cavidad cuando sale de ella. En particular se puede decir que es posible generar un estado de compresión perfecta a la salida. En la sección A.3 se repite el cálculo del campo de salida, pero ahora suponiendo que el estado del campo interno es un estado coherente.

### A.1. Teoría perturbativa

Consideremos el caso en el cual hay un Hamiltoniano dado por

$$H = H_0 + V \quad (\text{A.1})$$

entonces la ecuación de Schrödinger estará dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S\rangle = (H_0 + V) |\psi_S\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Si el estado se somete a la transformación

$$|\psi_I\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_S\rangle \quad (\text{A.3})$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S\rangle &= i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} H_0 e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_S\rangle \\ &= i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} H_0 |\psi_I\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ahora ponemos  $e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}$ , con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S\rangle &= (H_0 + V) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_S\rangle \\ &= (H_0 + V) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle \\ &= H_0 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle + V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo el primer miembro por el resultado anterior

$$\begin{aligned} i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I\rangle + H_0 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle &= H_0 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle + V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle \\ i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I\rangle &= V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y multiplicando por  $e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}$  tenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} |\psi_I\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Definimos ahora

$$H_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \quad (\text{A.8})$$

Obtenemos lo que se conoce como la *ecuación de Schrödinger en el cuadro de interacción*

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_I \right) |\psi_I\rangle = 0$$

Si se hace una nueva transformación unitaria de la Ecuación de Schrödinger

$$|\psi_{II}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} |\psi_I\rangle \quad (\text{A.9})$$

debido a la unitariedad de la transformación podemos escribir:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_I \right) e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} |\psi_I\rangle = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_I \right) e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} |\psi_{II}\rangle = 0 \quad (\text{A.10})$$

y multiplicando ambos miembros por  $e^{\frac{i}{\hbar}W(t)}$  obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_I \right) e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} |\psi_{II}\rangle \\ 0 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{II}\rangle + \left( i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} - e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} H_I e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} \right) |\psi_{II}\rangle \\ & \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{II}\rangle + H_{II} |\psi_{II}\rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Entonces tenemos:

$$H_{II} = i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} - e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} H_I e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} \quad (\text{A.12})$$

Se sabe que toda transformación unitaria finita se puede construir a partir del producto de transformaciones unitarias infinitesimales. Consideraremos por lo tanto los primeros términos de la expansión en serie de este nuevo operador  $e^{\frac{i}{\hbar}W(t)}$  y de su conjugado

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}W(t)} &= 1 + \frac{i}{\hbar}W(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 W^2(t) + \dots \\ e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} &= 1 - \frac{i}{\hbar}W(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 W^2(t) - \dots \end{aligned}$$

Nos quedaremos al segundo orden por ahora. Reemplazando en (A.12)

$$H_{II} = \left( 1 + \frac{i}{\hbar}W(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 W^2(t) \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_I \right) \left( 1 - \frac{i}{\hbar}W(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 W^2(t) \right)$$

y luego de algunos cálculos se obtiene, al segundo orden en  $i/\hbar$ , la expresión

$$\begin{aligned} H_{II} &= \left( \dot{W}(t) - H_I - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \left[ [W(t), H_I] - 2 [W(t), \dot{W}(t)] \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{6} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \left[ W(t), [W(t), \dot{W}(t)] \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \left[ [W(t), [W(t), H_I]] \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Tomando  $\dot{W}(t) = H_I(t)$ , entonces se tiene que

$$W(t) = \int_0^t H_I(t') dt' \quad (\text{A.14})$$

suponiendo que se pueden despreciar los términos de orden mayor que uno en  $i/\hbar$  se tiene que

$$H_{II} = \frac{i}{2\hbar} [W(t), H_I(t)] = \frac{i}{2\hbar} \int_0^t dt' [H_I(t'), H_I(t)] \quad (\text{A.15})$$

En los casos en los que el conmutador  $[W(t), H_I] = 0$  es un número complejo (*c-number*), entonces todos los términos de orden mayor automáticamente serán nulos y en ese caso el resultado anterior es exacto. Sin embargo, cuando esto no ocurre hay que calcular los conmutadores de orden mayor y asegurarse de que sean despreciables en comparación con el de primer orden. En general este trabajo es muy laborioso.

Una vez establecido el Hamiltoniano efectivo  $H_{II}$ , el estado del sistema escrito en el cuadro de interacción estará dado por

$$|\psi_I\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{II}(t') dt'} e^{-\frac{i}{\hbar}W(0)} |\psi(0)\rangle \quad (\text{A.16})$$

y en el cuadro de Schrödinger tenemos

$$|\psi_S\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{II}(t') dt'} e^{-\frac{i}{\hbar}W(0)} |\psi(0)\rangle \quad (\text{A.17})$$

en general una teoría efectiva útil es aquella en la que se cumple que  $e^{-\frac{i}{\hbar}W(0)} = 1$ , y  $H_{II}(t')$  no depende del tiempo, lo cual conduce a un estado en el cuadro de Schrödinger dada por

$$|\psi_S\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_{II}(t') dt'} |\psi(0)\rangle \quad (\text{A.18})$$

En la sección siguiente usaremos este método para calcular el Hamiltoniano efectivo usado en el capítulo 5 de esta tesis.

### A.1.1. Hamiltoniano efectivo en nubes atómicas en cavidades ópticas.

apen11

Consideremos el problema de una nube atómica, discutido en el capítulo 5, que se introduce en una cavidad óptica bimodal. Los dos modos de la cavidad están acopladas a dos transiciones atómicas desde dos niveles metaestables  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  hasta un nivel excitado  $|0\rangle$  común, en un esquema lambda. Si adicionalmente el sistema se bombea con dos láseres clásicos, que van acoplados resonantemente a las transiciones  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  y  $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ , es posible obtener algunos procesos que involucran la emisión-absorción de dos fotones a la frecuencia de los modos intracavidad. El Hamiltoniano que representa este sistema puede escribirse de la forma siguiente:

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \omega_b b^\dagger b + \omega_a a^\dagger a + \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^2 \omega_{ki} |i\rangle_k \langle i| \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} V_1 = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} (|0\rangle_k \langle 1| e^{-i\nu_1 t} + |1\rangle \langle 0| e^{i\nu_1 t}) \right. \\ & + \Omega_{k2} (|0\rangle_k \langle 2| e^{-i\nu_2 t} + |2\rangle \langle 0| e^{i\nu_2 t}) \\ & + g_{k1} (|0\rangle_k \langle 2| a + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger) \\ & \left. + g_2 (|0\rangle_k \langle 1| b + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger) \right\} \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

en el cuadro de interacción este Hamiltoniano puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
H_1 = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 1| e^{i(\omega_0 - \omega_1 - \nu_1)t} + |1\rangle_k \langle 0| e^{-i(\omega_0 - \omega_1 - \nu_1)t} \right) \right. \\
& + \Omega_{k2} \left( |0\rangle_k \langle 2| e^{i(\omega_0 - \omega_2 - \nu_2)t} + |2\rangle_k \langle 0| e^{-i(\omega_0 - \omega_2 - \nu_2)t} \right) \\
& + g_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 2| a e^{i(\omega_0 - \omega_2 - \omega_a)t} + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_2 - \omega_a)t} \right) \\
& \left. + g_2 \left( |0\rangle_k \langle 1| b e^{i(\omega_0 - \omega_1 - \omega_b)t} + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_1 - \omega_b)t} \right) \right\} \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

escogiendo la relación entre las diferentes frecuencias en la forma

$$\begin{aligned}
\omega_0 - \omega_2 - \omega_a &= \Delta_1 - \delta_1 = \bar{\Delta}_1 \\
\omega_0 - \omega_1 - \omega_b &= \Delta_2 - \delta_2 = \bar{\Delta}_2 \\
\omega_0 - \omega_1 - \nu_1 &= \Delta_1 \\
\omega_0 - \omega_1 - \nu_1 &= \Delta_1
\end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

puede obtenerse el hamiltoniano de interacción como

$$\begin{aligned}
H_1 = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 1| e^{-i\Delta_1 t} + |1\rangle_k \langle 0| e^{i\Delta_1 t} \right) \right. \\
& + \Omega_{k2} \left( |0\rangle_k \langle 2| e^{-i\Delta_2 t} + |2\rangle_k \langle 0| e^{i\Delta_2 t} \right) \\
& + g_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 2| a e^{-i\bar{\Delta}_1 t} + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger e^{i\bar{\Delta}_1 t} \right) \\
& \left. + g_2 \left( |0\rangle_k \langle 1| b e^{-i\bar{\Delta}_2 t} + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger e^{i\bar{\Delta}_2 t} \right) \right\} \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

con  $\bar{\Delta}_i = \Delta_i - \delta_i$ . El esquema de cálculo de hamiltonianos efectivos en régimen dispersivo propuesto antes exige que se calcule el operador  $W$  definido en la Ec. (A.14), por lo tanto

$$\begin{aligned}
W(t) = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 1| \int_0^t e^{-i\Delta_1 t'} dt' + |1\rangle_k \langle 0| \int_0^t e^{i\Delta_1 t'} dt' \right) \right. \\
& + \Omega_{k2} \left( |0\rangle_k \langle 2| \int_0^t e^{-i\Delta_2 t'} dt' + |2\rangle_k \langle 0| \int_0^t e^{i\Delta_2 t'} dt' \right) \\
& + g_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 2| a \int_0^t e^{-i\bar{\Delta}_1 t'} dt' + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger \int_0^t e^{i\bar{\Delta}_1 t'} dt' \right) \\
& \left. + g_2 \left( |0\rangle_k \langle 1| b \int_0^t e^{-i\bar{\Delta}_2 t'} dt' + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger \int_0^t e^{i\bar{\Delta}_2 t'} dt' \right) \right\} \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
W(t) = & \sum_{k=1}^N \left\{ \Omega_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 1| \frac{e^{-i\Delta_1 t} - 1}{-i\Delta_1} + |1\rangle_k \langle 0| \frac{e^{i\Delta_1 t} - 1}{i\Delta_1} \right) \right. \\
& + \Omega_{k2} \left( |0\rangle_k \langle 2| \frac{e^{-i\Delta_2 t} - 1}{-i\Delta_2} + |2\rangle_k \langle 0| \frac{e^{i\Delta_2 t} - 1}{i\Delta_2} \right) \\
& + g_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 2| a \frac{e^{-i\bar{\Delta}_1 t} - 1}{-i\bar{\Delta}_1} + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger \frac{e^{i\bar{\Delta}_1 t} - 1}{i\bar{\Delta}_1} \right) \\
& \left. + g_{k2} \left( |0\rangle_k \langle 1| b \frac{e^{-i\bar{\Delta}_2 t} - 1}{-i\bar{\Delta}_2} + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger \frac{e^{i\bar{\Delta}_2 t} - 1}{i\bar{\Delta}_2} \right) \right\} \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

Usando las Ecs. (A.23) y (A.25) puede calcularse el conmutador

$$\begin{aligned}
[W(t), H_1(t)] &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left[ \left\{ \Omega_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 1| \frac{e^{-i\Delta_1 t} - 1}{-i\Delta_1} + |1\rangle \langle 0| \frac{e^{i\Delta_1 t} - 1}{i\Delta_1} \right) \right. \right. \\
&\quad + \Omega_{k2} \left( |0\rangle_k \langle 2| \frac{e^{-i\Delta_2 t} - 1}{-i\Delta_2} + |2\rangle \langle 0| \frac{e^{i\Delta_{k2} t} - 1}{i\Delta_{k2}} \right) \\
&\quad + g_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 2| a \frac{e^{-i\bar{\Delta}_1 t} - 1}{-i\bar{\Delta}_1} + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger \frac{e^{i\bar{\Delta}_1 t} - 1}{i\bar{\Delta}_1} \right) \\
&\quad \left. \left. + g_2 \left( |0\rangle_k \langle 1| b \frac{e^{-i\bar{\Delta}_2 t} - 1}{-i\bar{\Delta}_2} + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger \frac{e^{i\bar{\Delta}_2 t} - 1}{i\bar{\Delta}_2} \right) \right\} \right. \\
&\quad , \left\{ \Omega_{l1} (|0\rangle_l \langle 1| e^{-i\Delta_1 t} + |1\rangle_l \langle 0| e^{i\Delta_1 t}) \right. \\
&\quad + \Omega_{l2} (|0\rangle_l \langle 2| e^{-i\Delta_2 t} + |2\rangle_l \langle 0| e^{i\Delta_2 t}) \\
&\quad + g_{l1} (|0\rangle_l \langle 2| a e^{-i\bar{\Delta}_1 t} + |2\rangle_l \langle 0| a^\dagger e^{i\bar{\Delta}_1 t}) \\
&\quad \left. \left. + g_{l2} (|0\rangle_l \langle 1| b e^{-i\bar{\Delta}_2 t} + |1\rangle_l \langle 0| b^\dagger e^{i\bar{\Delta}_2 t}) \right\} \right]. \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Los términos no nulos del conmutador serán

$$\begin{aligned}
& [W(t), H_1(t)] \tag{A.27} \\
= & \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \Omega_{k1} \Omega_{l1} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_l \langle 0|] \frac{1 - e^{i\Delta_1 t}}{-i\Delta_1} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] \frac{1 - e^{-i\Delta_1 t}}{i\Delta_1} \right) \right. \\
& + \Omega_{k1} \Omega_{l2} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] \frac{e^{-i(\Delta_1 - \Delta_2)t} - e^{i\Delta_2 t}}{-i\Delta_1} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] \frac{e^{i(\Delta_1 - \Delta_2)t} - e^{-i\Delta_2 t}}{i\Delta_1} \right) \\
& + g_{l1} \Omega_{k1} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] a^\dagger \frac{e^{-i(\Delta_1 - \bar{\Delta}_1)t} - e^{i\bar{\Delta}_1 t}}{-i\Delta_1} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] a \frac{e^{i(\Delta_1 - \bar{\Delta}_1)t} - e^{-i\bar{\Delta}_1 t}}{i\Delta_1} \right) \\
& + g_{l2} \Omega_{k1} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_l \langle 0|] b^\dagger \frac{e^{-i(\Delta_1 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{i\bar{\Delta}_2 t}}{-i\Delta_1} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] b \frac{e^{i(\Delta_1 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{-i\bar{\Delta}_2 t}}{i\Delta_1} \right) \\
& + \Omega_{l1} \Omega_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |1\rangle_l \langle 0|] \frac{e^{-i(\Delta_2 - \Delta_1)t} - e^{i\Delta_1 t}}{-i\Delta_2} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] \frac{e^{i(\Delta_2 - \Delta_1)t} - e^{-i\Delta_1 t}}{i\Delta_2} \right) \\
& + \Omega_{k2} \Omega_{l2} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_l \langle 0|] \frac{1 - e^{i\Delta_2 t}}{-i\Delta_2} + [|2\rangle \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] \frac{1 - e^{-i\Delta_2 t}}{i\Delta_{k2}} \right) \\
& + g_{l1} \Omega_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_l \langle 0|] a^\dagger \frac{e^{i(\Delta_2 - \bar{\Delta}_1)t} - e^{-i\bar{\Delta}_1 t}}{-i\Delta_2} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] a \frac{e^{i(\Delta_2 - \bar{\Delta}_1)t} - e^{-i\bar{\Delta}_1 t}}{i\Delta_2} \right) \\
& + g_{l2} \Omega_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |1\rangle_l \langle 0|] b^\dagger \frac{e^{-i(\Delta_2 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{i\bar{\Delta}_2 t}}{-i\Delta_2} + [|2\rangle \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] b \frac{e^{i(\Delta_2 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{-i\bar{\Delta}_2 t}}{i\Delta_{k2}} \right) \\
& + \Omega_{l1} g_{k1} \left( |0\rangle_k \langle 2|, |1\rangle_l \langle 0| a \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_1 - \Delta_1)t} - e^{i\Delta_1 t}}{-i\bar{\Delta}_1} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] a^\dagger \frac{e^{i(\bar{\Delta}_1 - \Delta_1)t} - e^{-i\Delta_1 t}}{i\bar{\Delta}_1} \right) \\
& + \Omega_{l2} g_{k1} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_l \langle 0|] a \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_1 - \Delta_2)t} - e^{i\Delta_2 t}}{-i\bar{\Delta}_1} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] a^\dagger \frac{e^{i(\bar{\Delta}_1 - \Delta_2)t} - e^{-i\Delta_2 t}}{i\bar{\Delta}_1} \right) \\
& \left. + g_{l1} g_{k1} \left( [|0\rangle_k \langle 2| a, |2\rangle_l \langle 0| a^\dagger] \frac{1 - e^{i\bar{\Delta}_1 t}}{-i\bar{\Delta}_1} + [|2\rangle_k \langle 0| a^\dagger, |0\rangle_l \langle 2| a] \frac{1 - e^{-i\bar{\Delta}_1 t}}{i\bar{\Delta}_1} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +g_{l2}g_{k1} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |1\rangle_l \langle 0|] a b^\dagger \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{i\bar{\Delta}_2 t}}{-i\bar{\Delta}_1} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] a^\dagger b \frac{e^{i(\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{-i\bar{\Delta}_2 t}}{i\bar{\Delta}_1} \right) \\
 & +g_{k2}\Omega_{l1} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_l \langle 0|] b \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_2 - \Delta_1)t} - e^{i\Delta_1 t}}{-i\bar{\Delta}_2} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] b^\dagger \frac{e^{i(\bar{\Delta}_2 - \Delta_1)t} - e^{-i\Delta_1 t}}{i\bar{\Delta}_2} \right) \\
 & +\Omega_{l2}g_{k2} \left( [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] b^\dagger \frac{e^{-i(\Delta_2 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{-i\Delta_2 t}}{i\bar{\Delta}_2} + [|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] b \frac{e^{i(\Delta_2 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{i\Delta_2 t}}{-i\bar{\Delta}_2} \right) \\
 & +g_{l1}g_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] b a^\dagger \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1)t} - e^{i\bar{\Delta}_1 t}}{-i\bar{\Delta}_2} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] b^\dagger a \frac{e^{i(\bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1)t} - e^{-i\bar{\Delta}_1 t}}{i\bar{\Delta}_2} \right) \\
 & +g_{l2}g_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 1| b, |1\rangle_l \langle 0| b^\dagger] \frac{1 - e^{i\bar{\Delta}_2 t}}{-i\bar{\Delta}_2} + [|1\rangle_k \langle 0| b^\dagger, |0\rangle_l \langle 1| b] \frac{1 - e^{-i\bar{\Delta}_2 t}}{i\bar{\Delta}_2} \right) \Big\}
 \end{aligned}$$

Los diferentes términos tienen factores del tipo

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{e^{-i2\Delta_i t} - e^{-i\Delta_i t}}{-i\Delta_i}; \right. & \left. \frac{e^{i(\Delta_1 - \Delta_2)t} - e^{-i\Delta_2 t}}{i\Delta_1}; \right. \\
 & \left( \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2)t} - e^{-i\bar{\Delta}_2 t}}{-i\bar{\Delta}_1}; \right. & \left. \frac{e^{-i(\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2)t} - e^{i\bar{\Delta}_2 t}}{-i\bar{\Delta}_1}; \right. \\
 & \left( \frac{e^{i(\bar{\Delta}_i - \Delta_i)t} - e^{-i\Delta_i t}}{i\bar{\Delta}_i}; \right. & \left. \frac{e^{-i(\Delta_2 + \bar{\Delta}_1)t} - e^{-i\bar{\Delta}_1 t}}{-i\Delta_2}; \right. \\
 & \left. \frac{1 - e^{i\bar{\Delta}_i t}}{i\bar{\Delta}_i}; \right. & \left. \frac{1 - e^{i\Delta_i t}}{i\Delta_i}; \right.
 \end{aligned}$$

Si nos fijamos en el esquema de interacción átomo campo que se presenta en la Figura (5.3), los casos  $\Delta_1 - \Delta_2$ ;  $\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2$  podrían ser problemáticos para nuestros fines, sin embargo tomando una diferencia entre las desintonías como  $\Delta_1 - \Delta_2 \approx \Delta_1 \approx \Delta$  y  $\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2 \approx \Delta_1 \approx \Delta$ ; entonces  $\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 \approx 3\Delta$ , y  $\Delta_1 + \Delta_2 \approx 3\Delta$ . Adicionalmente  $\bar{\Delta}_i - \Delta_i = \delta_i$ . Con lo cual los factores, en el límite de alto detuning ( $\Delta_1, \Delta_2, \Delta \gg \{\delta_i, \Omega_{ki}, g_{ki}\}$  con  $i = 1, 2$ ), se pueden aproximar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{e^{-i2\Delta_i t} - e^{-i\Delta_i t}}{-i\Delta_i} \approx 0; \right. & \left. \frac{e^{-i3\Delta t} e^{-i\delta_1 t} - e^{-i\Delta_2 t}}{-i\bar{\Delta}_1} e^{-i\delta_2 t} \approx 0; \right. \\
 & \left( \frac{e^{i\Delta t} - e^{-i\Delta_2 t}}{i\Delta_1} \approx 0 \right. & \left. \frac{e^{-i3\Delta t} e^{-i\delta_2 t} - e^{i\Delta_2 t}}{-i\bar{\Delta}_2} e^{-i\delta_1 t} \approx 0 \right. \\
 & \left( \frac{e^{i(\bar{\Delta}_i - \Delta_i)t} - e^{-i\Delta_i t}}{i\bar{\Delta}_i} \approx \frac{e^{-i\delta_i t}}{i\bar{\Delta}_i} \right. & \left. \frac{1 - e^{i\bar{\Delta}_i t}}{i\bar{\Delta}_i} \approx \frac{1}{i\bar{\Delta}_i} \right. \\
 & \left. \frac{1}{i\bar{\Delta}_i} (1 - e^{i\Delta_i t}) \approx \frac{1}{i\bar{\Delta}_i} \right. & \left. \bar{\Delta}_i \approx \Delta_i \right.
 \end{aligned}$$

con estas suposiciones que pueden ser satisfechas con relativa facilidad en este contexto, podemos ahora reducir el conmutador que hemos calculado en la Ec. (A.27) a

$$\begin{aligned}
 [W(t), H_1(t)] & = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \Omega_{k1}\Omega_{l1} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_l \langle 0|] \frac{1}{-i\Delta_1} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] \frac{1}{i\Delta_1} \right) \right. \\
 & +\Omega_{l2}\Omega_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_l \langle 0|] \frac{1}{-i\Delta_2} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] \frac{1}{i\Delta_{k2}} \right) \\
 & +g_{l1}g_{k1} \left( [|0\rangle_k \langle 2| a, |2\rangle_l \langle 0| a^\dagger] \frac{1}{-i\Delta_1} + [|2\rangle_k \langle 0| a^\dagger, |0\rangle_l \langle 2| a] \frac{1}{i\Delta_1} \right) \\
 & +g_{l2}g_{k2} \left( [|0\rangle_k \langle 1| b, |1\rangle_l \langle 0| b^\dagger] \frac{1}{-i\Delta_2} + [|1\rangle_k \langle 0| b^\dagger, |0\rangle_l \langle 1| b] \frac{1}{i\Delta_2} \right) \\
 & +\Omega_{k1}g_{l1} \left( [|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] a^\dagger \frac{e^{-i\delta_1 t}}{-i\Delta_1} + [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] a \frac{e^{i\delta_1 t}}{i\Delta_1} \right) \\
 & +g_{k1}\Omega_{l1} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |1\rangle_l \langle 0|] a \frac{e^{i\delta_1 t}}{-i\bar{\Delta}_1} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] a^\dagger \frac{e^{-i\delta_1 t}}{i\bar{\Delta}_1} \right) \\
 & +\Omega_{k2}g_{l2} \left( [|0\rangle_k \langle 2|, |1\rangle_l \langle 0|] b^\dagger \frac{e^{-i\delta_2 t}}{-i\Delta_2} + [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] b \frac{e^{i\delta_2 t}}{i\Delta_{k2}} \right) \\
 & +g_{k2}\Omega_{l2} \left( [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] b^\dagger \frac{e^{-i\delta_2 t}}{i\bar{\Delta}_2} + [|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] b \frac{e^{i\delta_2 t}}{-i\bar{\Delta}_2} \right)
 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Ahora, calcularemos los conmutadores:

$$\begin{aligned}
[|0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_l \langle 0|] &= [ |0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_k \langle 0| ] \delta_{kl} \\
&= (|0\rangle_k \langle 2| |2\rangle_k \langle 0| - |2\rangle_k \langle 0| |0\rangle_k \langle 2|) \delta_{kl} \\
&= (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) \delta_{kl} = - [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] \\
[|0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_l \langle 0|] &= [ |0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_k \langle 0| ] \delta_{kl} \\
&= (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) \delta_{kl} = - [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] \\
[|0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_l \langle 0|] &= [ |0\rangle_k \langle 1|, |2\rangle_k \langle 0| ] \delta_{kl} \\
&= (|0\rangle_k \langle 1| |2\rangle_k \langle 0| - |2\rangle_k \langle 0| |0\rangle_k \langle 1|) \delta_{kl} = - |2\rangle_{kk} \langle 1| \delta_{kl} \\
[|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] &= [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_k \langle 1|] \delta_{kl} = |2\rangle_{kk} \langle 1| \delta_{kl} \\
[|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 2|] &= |1\rangle_{kk} \langle 2| \delta_{kl}
\end{aligned}$$

los conmutadores que involucran operadores atómicos y operadores de campo se deben realizar con cuidado

$$\begin{aligned}
[|0\rangle_k \langle 2| a, |2\rangle_l \langle 0| a^\dagger] &= [ |0\rangle_k \langle 2|, |2\rangle_l \langle 0| ] a^\dagger a + |0\rangle_k \langle 2| |2\rangle_l \langle 0| [ a, a^\dagger ] \\
&= (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) a^\dagger a \delta_{kl} + (|0\rangle_k \langle 2|) (|2\rangle_l \langle 0|) \\
[|2\rangle_k \langle 0| a^\dagger, |0\rangle_l \langle 2| a] &= [|2\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_k \langle 2|] a a^\dagger \delta_{kl} + |2\rangle_k \langle 0| |0\rangle_l \langle 2| [ a^\dagger, a ] \\
&= (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |0\rangle_{kk} \langle 0|) a a^\dagger \delta_{kl} - |2\rangle_k \langle 0| |0\rangle_l \langle 2| \\
[|0\rangle_k \langle 1| b, |1\rangle_l \langle 0| b^\dagger] &= ([|0\rangle_k \langle 1|, |1\rangle_k \langle 0|]) b^\dagger b \delta_{kl} + |0\rangle_k \langle 1| |1\rangle_l \langle 0| [ b, b^\dagger ] \\
&= (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) b^\dagger b \delta_{kl} + |0\rangle_k \langle 1| |1\rangle_l \langle 0| \\
[|1\rangle_k \langle 0| b^\dagger, |0\rangle_l \langle 1| b] &= [|1\rangle_k \langle 0|, |0\rangle_l \langle 1|] b b^\dagger + |1\rangle_k \langle 0| |0\rangle_l \langle 1| [ b^\dagger, b ] \\
&= (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |0\rangle_{kk} \langle 0|) b b^\dagger \delta_{kl} - |1\rangle_k \langle 0| |0\rangle_l \langle 1|
\end{aligned}$$

con lo cual el conmutador se transforma en

$$\begin{aligned}
\frac{[W(t), H_1(t)]}{\hbar^2} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ -2 \frac{\Omega_{k1} \Omega_{k1}}{i \Delta_1} (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) \right. \\
&\quad - 2 \frac{\Omega_{k2} \Omega_{k2}}{i \Delta_{k2}} ((|0\rangle_{kk} \langle 0| - |2\rangle_{kk} \langle 2|)) \\
&\quad + \Omega_{k1} g_{k1} \left( |2\rangle_{kk} \langle 1| a^\dagger \frac{e^{-i\delta_1 t}}{i \Delta_1} + |1\rangle_{kk} \langle 2| a \frac{e^{i\delta_1 t}}{i \Delta_1} \right) \\
&\quad + g_{k1} \Omega_{k1} \left( |1\rangle_{kk} \langle 2| a \frac{e^{i\delta_1 t}}{i \Delta_1} + |2\rangle_{kk} \langle 1| a^\dagger \frac{e^{-i\delta_1 t}}{i \Delta_1} \right) \\
&\quad + \Omega_{k2} g_{k2} \left( |1\rangle_{kk} \langle 2| b^\dagger \frac{e^{-i\delta_2 t}}{i \Delta_2} + |2\rangle_{kk} \langle 1| b \frac{e^{i\delta_2 t}}{i \Delta_{k2}} \right) \\
&\quad + g_{k2} \Omega_{k2} \left( [|1\rangle_{kk} \langle 2|] b^\dagger \frac{e^{-i\delta_2 t}}{i \Delta_2} + |2\rangle_{kk} \langle 1| b \frac{e^{i\delta_2 t}}{i \Delta_2} \right) \\
&\quad + \frac{g_{k1} g_{k1}}{-i \Delta_1} (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) a^\dagger a + \frac{g_{k1} g_{k1}}{i \Delta_1} (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |0\rangle_{kk} \langle 0|) a a^\dagger \\
&\quad + \frac{g_{k2} g_{k2}}{-i \Delta_2} (|0\rangle_{kk} \langle 0| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) b^\dagger b + \frac{g_{k2} g_{k2}}{i \Delta_2} (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |0\rangle_{kk} \langle 0|) b b^\dagger \left. \right\} \delta_{kl} \\
&\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{g_{l1} g_{k1}}{i \Delta_1} ((|0\rangle_k \langle 2|) (|2\rangle_l \langle 0|) + (|2\rangle_k \langle 0|) (|0\rangle_l \langle 2|)) \\
&\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{g_{l2} g_{k2}}{i \Delta_2} |0\rangle_k \langle 1| |1\rangle_l \langle 0| - \frac{g_{l2} g_{k2}}{i \Delta_2} |1\rangle_k \langle 0| |0\rangle_l \langle 1|
\end{aligned}$$



por lo tanto, puede separarse el conmutador en dos partes

$$\begin{aligned}
 [W(t), H_1(t)] = & \sum_{k=1}^N \left\{ \left( -2 \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{i\Delta_1} - 2 \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{i\Delta_2} - \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} |0\rangle_{kk} \langle 0| \right. \right. \\
 & - \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} - 2 \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} a^\dagger a - 2 \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} b^\dagger b \left. \right) |0\rangle_{kk} \langle 0| \\
 & + |1\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} + 2 \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{i\Delta_1} + 2 \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} b^\dagger b \right) \\
 & + \left( 2 \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{i\Delta_2} + 2 \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} a^\dagger a + \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} \right) |2\rangle_{kk} \langle 2| \\
 & + 2 |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{i\Delta_1} a^\dagger e^{-i\delta_1 t} + \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{i\Delta_2} b e^{i\delta_2 t} \right) \\
 & + 2 |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{i\Delta_1} a e^{i\delta_1 t} + \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{i\Delta_2} b^\dagger e^{-i\delta_2 t} \right) \left. \right\} \\
 & - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{g_{l1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} (|0\rangle_k \langle 2|) (|2\rangle_l \langle 0|) + (|2\rangle_k \langle 0|) (|0\rangle_l \langle 2|) \\
 & - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{g_{l2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} (|0\rangle_k \langle 1|) (|1\rangle_l \langle 0|) + (|1\rangle_k \langle 0|) (|0\rangle_l \langle 1|)
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

las dos últimas líneas en (A.29), involucran al nivel  $|0\rangle$ , por lo tanto los productos de operadores colectivos atómicos que corresponden a átomos diferentes no pueden realizar transiciones al nivel  $|0\rangle$ , este nivel nunca está poblado.

Por lo tanto, puede escribirse un operador efectivo, en lugar de las dos últimas líneas en (A.29), dado por

$$-2N \sum_{k=1}^N \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} |2\rangle_{kk} \langle 2| - 2N \sum_{k=1}^N \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} |1\rangle_{kk} \langle 1|.$$

Entonces, se puede escribir el conmutador como

$$\begin{aligned}
 [W(t), H_1(t)] = & 2\hbar^2 \sum_{k=1}^N \left\{ - \left( \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{i\Delta_1} + \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{i\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{i2\bar{\Delta}_1} \right. \right. \\
 & + \frac{g_{k2}g_{k2}}{i2\bar{\Delta}_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} a^\dagger a + \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} b^\dagger b \left. \right) |0\rangle_{kk} \langle 0| \\
 & + \left( \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{i\Delta_1} + \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} b^\dagger b + \frac{g_{k2}g_{k2}}{i2\bar{\Delta}_2} - N \frac{g_{k2}g_{k2}}{i\bar{\Delta}_2} \right) |1\rangle_{kk} \langle 1| \\
 & + \left( \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{i\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} a^\dagger a + \frac{g_{k1}g_{k1}}{i2\bar{\Delta}_1} - N \frac{g_{k1}g_{k1}}{i\bar{\Delta}_1} \right) |2\rangle_{kk} \langle 2| \\
 & + |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{i\Delta_1} a^\dagger e^{-i\delta_1 t} + \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{i\Delta_2} b e^{i\delta_2 t} \right) \\
 & + |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{i\Delta_1} a e^{i\delta_1 t} + \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{i\Delta_2} b^\dagger e^{-i\delta_2 t} \right) \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$H_{II} = \frac{i}{2\hbar} [W(t), H_1(t)] \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} &= \hbar^2 \sum_{k=1}^N \left\{ - \left( \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{\Delta_1} + \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{2\Delta_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{g_{k2}g_{k2}}{2\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} a^\dagger a + \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} b^\dagger b \right) |0\rangle_{kk} \langle 0| \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{\Delta_1} + \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} b^\dagger b + \frac{g_{k2}g_{k2}}{2\Delta_2} - N \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} \right) |1\rangle_{kk} \langle 1| \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} a^\dagger a + \frac{g_{k1}g_{k1}}{2\Delta_1} - N \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} \right) |2\rangle_{kk} \langle 2| \right. \\ &\quad \left. + |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} a^\dagger e^{-i\delta_1 t} + \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} b e^{i\delta_2 t} \right) \right. \\ &\quad \left. + |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} a e^{i\delta_1 t} + \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} b^\dagger e^{-i\delta_2 t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Luego de eliminar el nivel  $|0\rangle$  que no interviene en la dinámica, puede definirse el Hamiltoniano efectivo de segundo orden, en la forma

$$\begin{aligned} H_{II} &= \hbar \sum_{k=1}^N |2\rangle_k \langle 2| \left( a^\dagger a \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} + \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{2\Delta_1} - N \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} \right) \\ &\quad + \hbar \sum_{k=1}^N |1\rangle_k \langle 1| \left( b^\dagger b \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} + \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{\Delta_1} + \frac{g_{k2}g_{k2}}{2\Delta_2} - N \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} \right) \\ &\quad + \hbar \sum_{k=1}^N |2\rangle_k \langle 1| \left( a^\dagger \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} e^{-i\delta_1 t} + b e^{i\delta_2 t} \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} \right) \\ &\quad + \hbar \sum_{k=1}^N |1\rangle_k \langle 2| \left( b^\dagger \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} e^{-i\delta_2 t} + a \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} e^{i\delta_1 t} \right) \end{aligned}$$

De acuerdo a la teoría perturbativa, desarrollada en la sección anterior debería, existe un factor del tipo  $e^{-\frac{i}{\hbar}W(t)}$  para el estado del sistema, y  $W(t)$  está definido como

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\Omega_{k1}}{\Delta_1} \left( |0\rangle_k \langle 1| \frac{e^{-i\Delta_1 t} - 1}{-i} + |1\rangle_k \langle 0| \frac{e^{i\Delta_1 t} - 1}{i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega_{k2}}{\Delta_2} \left( |0\rangle_k \langle 2| \frac{e^{-i\Delta_2 t} - 1}{-i\Delta_2} + |2\rangle_k \langle 0| \frac{e^{i\Delta_2 t} - 1}{i\Delta_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{k1}}{\Delta_1} \left( |0\rangle_k \langle 2| a \frac{e^{-i\Delta_1 t} - 1}{-i} + |2\rangle_k \langle 0| a^\dagger \frac{e^{i\Delta_1 t} - 1}{i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{k2}}{\Delta_2} \left( |0\rangle_k \langle 1| b \frac{e^{-i\Delta_2 t} - 1}{-i} + |1\rangle_k \langle 0| b^\dagger \frac{e^{i\Delta_2 t} - 1}{i\Delta_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

tomando el límite cuando  $\frac{g_{k\alpha}g_{k\alpha}}{\Delta_\alpha}, \frac{\Omega_{k\alpha}g_{k\alpha}}{\Delta_\alpha}, \frac{\Omega_{k\alpha}\Omega_{k\alpha}}{\Delta_\alpha} \gg \frac{g_{k\alpha}}{\Delta_\alpha}$ , con  $\alpha = 1, 2$ , se obtiene que  $W(t) = 0$ .

Por lo tanto la dinámica del sistema estará gobernada únicamente por el término de segundo

orden

$$\begin{aligned}
H_{II} = & \hbar \sum_{k=1}^N |2\rangle_k \langle 2| \left( a^\dagger a \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} + \frac{\Omega_{k2}\Omega_{k2}}{\Delta_2} + \frac{g_{k1}g_{k1}}{2\Delta_1} - N \frac{g_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} \right) \\
& + \hbar \sum_{k=1}^N |1\rangle_k \langle 1| \left( b^\dagger b \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} + \frac{\Omega_{k1}\Omega_{k1}}{\Delta_1} + \frac{g_{k2}g_{k2}}{2\Delta_2} - N \frac{g_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} \right) \\
& + \hbar \sum_{k=1}^N |2\rangle_k \langle 1| \left( a^\dagger \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} e^{-i\delta_1 t} + b \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} e^{i\delta_2 t} \right) \\
& + \hbar \sum_{k=1}^N |1\rangle_k \langle 2| \left( b^\dagger \frac{\Omega_{k2}g_{k2}}{\Delta_2} e^{-i\delta_2 t} + a \frac{\Omega_{k1}g_{k1}}{\Delta_1} e^{i\delta_1 t} \right)
\end{aligned}$$

tomando la condición  $\bar{\Omega}_k = (\Omega_{k1}g_{k1}/\Delta_1) = (\Omega_{k2}g_{k2}/\Delta_2)$  y suponiendo que  $g_{k1}^2/\Delta_1 = g_{k2}^2/\Delta_2 = \zeta_k$  se tiene en un cuadro rotante con  $H_0^{(1)} = \hbar((1-2N)/2) \sum_{k=1}^N \zeta_k (|2\rangle_k \langle 2| + |1\rangle_k \langle 1|)$

$$\begin{aligned}
H_{II} = & \hbar \sum_{k=1}^N |2\rangle_k \langle 2| \left( a^\dagger a \zeta_k + \eta_{k2} \right) + \hbar \sum_{k=1}^N |1\rangle_k \langle 1| \left( b^\dagger b \zeta_k + \eta_{k1} \right) \\
& + \hbar \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |2\rangle_k \langle 1| \left( a^\dagger e^{i\delta_1 t} + b e^{-i\delta_2 t} \right) + \hbar \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |1\rangle_k \langle 2| \left( b^\dagger e^{i\delta_2 t} + a e^{-i\delta_1 t} \right)
\end{aligned}$$

donde se ha definido  $\Omega_{k\alpha}^2/\Delta_{k\alpha} = \eta_{k\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ).

#### A.1.2. Hamiltoniano efectivo de cuarto orden

Usando como Hamiltoniano libre  $H_0^{(2)} = \hbar \sum_{k=1}^N |2\rangle_k \langle 2| (a^\dagger a \zeta_k + \eta_{k2}) + \hbar \sum_{k=1}^N |1\rangle_k \langle 1| (b^\dagger b \zeta_k + \eta_{k1})$ , puede encontrarse un nuevo cuadro de interacción definido por  $H'_{II} = U^\dagger(t) H_{II} U(t)$ , con

$$\begin{aligned}
U(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) = & \exp \left( -i \sum_{k=1}^N v_k(\hat{n}_a) |1\rangle_k \langle 1| t \right) \exp \left( -i \sum_{k=1}^N v_k(\hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 2| t \right) \\
= & \prod_{k=1}^N U_k(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)
\end{aligned}$$

donde  $v_k(\hat{n}_a) = a^\dagger a \zeta_k + \eta_{k1}$  y  $v_k(\hat{n}_b) = b^\dagger b \zeta_k + \eta_{k2}$ , y  $U_k(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) = \exp(-i v_k(\hat{n}_a) |1\rangle_k \langle 1| t) \exp(-i v_k(\hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 2| t)$

$$\begin{aligned}
H_{II} = & \hbar \left( \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k U^\dagger |2\rangle_k \langle 1| U \right) U^\dagger \left( a^\dagger e^{-i\delta_1 t} + b e^{i\delta_2 t} \right) U \\
& + \hbar U^\dagger \left( b^\dagger e^{-i\delta_2 t} + a e^{i\delta_1 t} \right) U \left( \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k U^\dagger |1\rangle_k \langle 2| U \right)
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}
\hat{n}^m a &= a(\hat{n} - 1)^m \\
\hat{n}^m a^\dagger &= a^\dagger(\hat{n} + 1)^m
\end{aligned}$$

y los hermíticos conjugados también son verdaderos. En general se tiene que cualquier función del operador de número  $f(\hat{n})$  cumple la relación

$$\begin{aligned} f(\hat{n})a &= af(\hat{n} - 1) \\ f(\hat{n})a^\dagger &= a^\dagger f(\hat{n} + 1) \end{aligned}$$

Entonces, fácilmente puede demostrarse que

$$\begin{aligned} U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)a^\dagger &= \exp\left(i \sum_{k=1}^N v_k(\hat{n}_a) |1\rangle_k \langle 1| t\right) \exp\left(i \sum_{k=1}^N v_k(\hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 2| t\right) a^\dagger \\ &= a^\dagger \exp\left(i \sum_{k=1}^N v_k(\hat{n}_a + 1) |1\rangle_k \langle 1| t\right) \exp\left(i \sum_{k=1}^N v_k(\hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 2| t\right) \\ &= \exp\left(i \sum_{k=1}^N \zeta_k |1\rangle_k \langle 1| t\right) a^\dagger U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \end{aligned}$$

de igual forma también se tiene que:

$$\begin{aligned} U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)a &= \exp\left(-i \sum_{k=1}^N \zeta_k |1\rangle_k \langle 1| t\right) a U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \\ U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)b^\dagger &= \exp\left(i \sum_{k=1}^N \zeta_k |2\rangle_k \langle 2| t\right) b^\dagger U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \\ U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)b &= \exp\left(-i \sum_{k=1}^N \zeta_k |2\rangle_k \langle 2| t\right) b U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)a^\dagger U(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) &= \exp\left(i \sum_{k=1}^N \zeta_k |1\rangle_k \langle 1| t\right) a^\dagger \\ U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)a U(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) &= \exp\left(-i \sum_{k=1}^N \zeta_k |1\rangle_k \langle 1| t\right) a \\ U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)b^\dagger U(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) &= \exp\left(i \sum_{k=1}^N \zeta_k |2\rangle_k \langle 2| t\right) b^\dagger \\ U^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b)b U(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) &= \exp\left(-i \sum_{k=1}^N \zeta_k |2\rangle_k \langle 2| t\right) b \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k U^\dagger |2\rangle_k \langle 1| U &= \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k U^\dagger |2\rangle_k \langle 1| U \\ &= \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k \prod_{l=1}^N U_l^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 1| \prod_{\ell=1}^N U_\ell(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \\ &= \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k U_k^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) |2\rangle_{kk} \langle 1| U_k(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 U_k^\dagger(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) |2\rangle_{kk} \langle 1| &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i(v_k(\hat{n}_a) |1\rangle_k \langle 1| + v_k(\hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 2|) t)^n |2\rangle_{kk} \langle 1| \\
 &= |2\rangle_{kk} \langle 1| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iv_k(\hat{n}_b)t)^n}{n!} \\
 &= |2\rangle_{kk} \langle 1| \exp(iv_k(\hat{n}_b)t) \\
 |2\rangle_{kk} \langle 1| U_k(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) &= |2\rangle_{kk} \langle 1| U_k(t, \hat{n}_a, \hat{n}_b) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |2\rangle_{kk} \langle 1| (i(v_k(\hat{n}_a) |1\rangle_k \langle 1| + v_k(\hat{n}_b) |2\rangle_k \langle 2|) t)^n \\
 &= |2\rangle_{kk} \langle 1| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iv_k(\hat{n}_a)t)^n \\
 &= |2\rangle_{kk} \langle 1| \exp(-iv_k(\hat{n}_a)t) \\
 \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k U^\dagger |2\rangle_k \langle 1| U &= \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |2\rangle_{kk} \langle 1| \exp(i(v_k(\hat{n}_b) + v_k(\hat{n}_a)) t) \\
 H_{II} &= \hbar \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( e^{i\hat{\delta}_{k1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} b \right) \\
 &\quad + \hbar \left( \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} a + e^{i\hat{\delta}_{k2}t} b^\dagger \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

donde hemos puesto  $J_\alpha = \sum_{k=1}^N \zeta_k |\alpha\rangle_k \langle \alpha|$ ;  $\alpha = 1, 2$ , y también  $\hat{\delta}_{k1} = -\delta_1 + v_k(\hat{n}_b) - v_k(\hat{n}_a) + J_1$ ;  $\hat{\delta}_{k2} = -\delta_2 - v_k(\hat{n}_b) + v_k(\hat{n}_a) + J_2$

Entonces, consideramos ahora el caso en el cual

$$\delta_\alpha \gg \bar{\Omega}_k, \eta_{k\alpha}, \zeta_k \mathbf{1} \tag{A.35}$$

definidos arriba; en este caso repetimos el procedimiento usando el Hamiltoniano  $H_{II}$ , para ello calculamos a partir de la Ec. (A.34) un nuevo operador  $W'(t)$ , definido como en la Ec. (A.14)

$$\begin{aligned}
 W'(t) &= \hbar \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) \\
 &\quad + \hbar \left( \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} a + \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} b^\dagger \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

Entonces podemos calcular el conmutador  $[W'(t), H_{II}(t)]$ , de manera muy fácil, y obtener

$$\begin{aligned}
[W'(t), H_{II}(t)] &= \hbar^2 \left[ \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) + h.c. \right. \\
&\quad \left. , \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_l |2\rangle_{ll} \langle 1| \left( e^{i\hat{\delta}_{l1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{l2}t} b \right) + h.c. \right] \\
&= \hbar^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_k \bar{\Omega}_l \\
&\quad \times \left[ |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) , |2\rangle_{ll} \langle 1| \left( e^{i\hat{\delta}_{l1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{l2}t} b \right) \right] \\
&\quad + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_k \bar{\Omega}_l \\
&\quad \times \left[ |2\rangle_{kk} \langle 1| \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) , |1\rangle_{ll} \langle 2| \left( a e^{-i\hat{\delta}_{l1}t} + b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{l2}t} \right) \right] \\
&\quad + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_k \bar{\Omega}_l \\
&\quad \times \left[ |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( a \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b^\dagger \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right) , |2\rangle_{ll} \langle 1| \left( e^{i\hat{\delta}_{l1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{l2}t} b \right) \right] \\
&\quad + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_k \bar{\Omega}_l \\
&\quad \times \left[ |1\rangle_{kk} \langle 2| \left( a \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b^\dagger \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right) , |1\rangle_{ll} \langle 2| \left( a e^{-i\hat{\delta}_{l1}t} + b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{l2}t} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.37}$$

calcularemos los conmutadores. El conmutador del primer y tercer término en la Ec. (A.37) se reduce al conmutador de los operadores atómicos, puesto que los operadores relacionados con los campos conmutan. Tenemos para el primer término

$$\begin{aligned}
& [|2\rangle_{kk} \langle 1| , |2\rangle_{ll} \langle 1|] \left( e^{i\hat{\delta}_{l1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{l2}t} b \right) \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) \\
&= [|2\rangle_{kk} \langle 1| , |2\rangle_{kk} \langle 1|] \left( e^{i\hat{\delta}_{k1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} b \right) \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) \delta_{k,l} \\
&= 0
\end{aligned}$$

y para el tercer término

$$\begin{aligned}
& [|1\rangle_{kk} \langle 2| , |2\rangle_{ll} \langle 1|] \left( e^{i\hat{\delta}_{l1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{l2}t} b \right) \left( a^\dagger \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right) \\
&= (|1\rangle_{kk} \langle 2| |2\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 1| |1\rangle_{kk} \langle 2|) \left( e^{i\hat{\delta}_{k1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} b \right) \\
&\quad \times \left( a^\dagger \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right) \delta_{k,l} \\
&= (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) \left( e^{i\hat{\delta}_{k1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} b \right) \left( a^\dagger \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right) \delta_{k,l}
\end{aligned}$$

El segundo y el cuarto término son un poco diferentes, veamos que pasa con el conmutador de los operadores de campo

$$\left[ \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right), \left( a e^{-i\hat{\delta}_{11}t} + b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{12}t} \right) \right]$$

éste se reduce a

$$\left[ \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger, a e^{-i\hat{\delta}_{11}t} \right] + \left[ \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b, b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{12}t} \right]$$

y entonces

$$\left[ \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger, a e^{-i\hat{\delta}_{11}t} \right] = \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{11}t}}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger a - a \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{11}t}}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger$$

y

$$\left[ \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b, b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{12}t} \right] = b b^\dagger \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{12}t}}{-i\hat{\delta}_{k2}} - b^\dagger \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{12}t}}{-i\hat{\delta}_{k2}} b,$$

entonces el conmutador se lee ahora

$$\begin{aligned} & [W'(t), H_{II}(t)] \tag{A.38} \\ &= \hbar^2 \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) \\ & \quad \times \left( a e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} + b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{k2}t} \right) \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) \\ & \quad + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) \\ & \quad \times \left( e^{i\hat{\delta}_{k1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} b \right) \left( a \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b^\dagger \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right) \\ & + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_k \bar{\Omega}_l |2\rangle_{kk} \langle 1| |1\rangle_{ll} \langle 2| \\ & \quad \times \left( \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{11}t}}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger a - a \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{11}t}}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + b b^\dagger \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{12}t}}{-i\hat{\delta}_{k2}} - b^\dagger \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{12}t}}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \right) \\ & \quad + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{\Omega}_k \bar{\Omega}_l |1\rangle_{kk} \langle 2| |2\rangle_{ll} \langle 1| \\ & \quad \times \left[ \left( a \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-i\hat{\delta}_{k1}} + b^\dagger \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{i\hat{\delta}_{k2}} \right), \left( e^{i\hat{\delta}_{11}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{12}t} b \right) \right] \end{aligned}$$

en la aproximación dada en la Ec. (A.35)

$$\begin{aligned} & \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{11}t}}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger a - a \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{11}t}}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + b b^\dagger \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{12}t}}{-i\hat{\delta}_{k2}} - b^\dagger \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{12}t}}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \tag{A.39} \\ & \approx \frac{1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger a - a \frac{1}{i\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + b b^\dagger \frac{1}{-i\hat{\delta}_{k2}} - b^\dagger \frac{1}{-i\hat{\delta}_{k2}} b \\ & \approx \frac{1}{i\hat{\delta}_{k1}} (a^\dagger a - a a^\dagger) + (b b^\dagger - b^\dagger b) \frac{1}{-i\hat{\delta}_{k2}} \\ & \approx -\frac{1}{i\hat{\delta}_{k1}} - \frac{1}{i\hat{\delta}_{k2}} \\ & \approx -\frac{1}{i\delta_1} - \frac{1}{i\delta_2} \end{aligned}$$

entonces eligiendo la relación

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (-\delta + \bar{\delta}) \\ \delta_2 &= (\delta + \bar{\delta})\end{aligned}\tag{A.40}$$

(ver ecuación 5.3 del capítulo 5 y la discusión a continuación de esta ecuación) se tiene el Hamiltoniano efectivo  $H_{III}$  en la forma

$$\begin{aligned}H_{III}(t) & \\ = \frac{\hbar}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) & \\ \times \left( a e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} + b^\dagger e^{i\hat{\delta}_{k2}t} \right) \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{\hat{\delta}_{k1}} a^\dagger + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{-\hat{\delta}_{k2}} b \right) & \\ + \hbar^2 \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) & \\ \times \left( e^{i\hat{\delta}_{k1}t} a^\dagger + e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} b \right) \left( a \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - 1}{-\hat{\delta}_{k1}} + b^\dagger \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - 1}{\hat{\delta}_{k2}} \right) &\end{aligned}\tag{A.41}$$

en el límite dado por la Ec. (A.35)

$$\begin{aligned}H_{III}(t) &= \frac{\hbar}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) \\ &\times \left( \left( a a^\dagger \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{k1}t}}{\hat{\delta}_{k1}} + \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} - e^{-i\hat{\delta}_{k1}t}}{-\hat{\delta}_{k2}} a b \right) \right. \\ &\left. + \left( \frac{e^{i\hat{\delta}_{k2}t} e^{i\hat{\delta}_{k1}t} - e^{i\hat{\delta}_{k2}t}}{\hat{\delta}_{k1}} b^\dagger a^\dagger + \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{k2}t}}{-\hat{\delta}_{k2}} b^\dagger b \right) \right) \\ &+ \hbar^2 \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) \\ &\times \left( \left( a^\dagger a \frac{1 - e^{i\hat{\delta}_{k1}t}}{-\hat{\delta}_{k1}} + a^\dagger b^\dagger \frac{e^{i\hat{\delta}_{k1}t} e^{i\hat{\delta}_{k2}t} - e^{i\hat{\delta}_{k1}t}}{\hat{\delta}_{k2}} \right) \right. \\ &\left. + \left( b a \frac{e^{-i\hat{\delta}_{k2}t} e^{-i\hat{\delta}_{k1}t} - e^{-i\hat{\delta}_{k2}t}}{-\hat{\delta}_{k1}} + b b^\dagger \frac{1 - e^{-i\hat{\delta}_{k2}t}}{\hat{\delta}_{k2}} \right) \right)\end{aligned}\tag{A.42}$$

$$\begin{aligned}H_{III}(t) &= \frac{\hbar}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) \\ &\times \left( \left( a a^\dagger \frac{1}{-\delta_1} + \frac{e^{-i\delta_1 t} e^{-i\delta_2 t}}{\delta_2} a b \right) \right. \\ &\left. + \left( \frac{e^{-i\delta_2 t} e^{-i\delta_1 t}}{-\delta_1} b^\dagger a^\dagger + \frac{1}{\delta_2} b^\dagger b \right) \right) \\ &+ \hbar^2 \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 \bar{\Omega}_l (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) \\ &\times \left( \left( a^\dagger a \frac{1}{\delta_1} + a^\dagger b^\dagger \frac{e^{-i\delta_1 t} e^{-i\delta_2 t}}{-\delta_2} \right) \right. \\ &\left. + \left( b a \frac{e^{-i\delta_{k2}t} e^{-i\delta_1 t}}{\delta_1} + b b^\dagger \frac{1}{-\delta_2} \right) \right)\end{aligned}\tag{A.43}$$



y ahora usando la condición Ec. (A.41) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
H_{III} &= \frac{\hbar}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|2\rangle_{kk} \langle 2| - |1\rangle_{kk} \langle 1|) \\
&\quad \left\{ \times \left( \left( aa^\dagger \frac{1}{(-\delta + \bar{\delta})} + ab \frac{e^{i(-\delta + \bar{\delta})t} e^{i(\delta + \bar{\delta})t}}{(\delta + \bar{\delta})} \right) + \left( \frac{e^{-i(\delta + \bar{\delta})t} e^{-i(-\delta + \bar{\delta})t}}{-(-\delta + \bar{\delta})} b^\dagger a^\dagger + \frac{1}{(\delta + \bar{\delta})} b^\dagger b \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \left( a^\dagger a \frac{1}{(-\delta + \bar{\delta})} + a^\dagger b^\dagger \frac{e^{-i(-\delta + \bar{\delta})t} e^{-i\delta_2 t}}{-(\delta + \bar{\delta})} \right) + \left( ba \frac{e^{i(\delta + \bar{\delta})t} e^{i(-\delta + \bar{\delta})t}}{(-\delta + \bar{\delta})} + bb^\dagger \frac{1}{-(\delta + \bar{\delta})} \right) \right) \right\} \\
H_{III} &= -\frac{\hbar}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) \\
&\quad \times \left\{ \left( \left( aa^\dagger \frac{1}{\delta} + ab \frac{e^{i2\bar{\delta}t}}{\delta} \right) + \left( \frac{e^{-i2\bar{\delta}t}}{\delta} b^\dagger a^\dagger + \frac{1}{\delta} b^\dagger b \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \left( a^\dagger a \frac{1}{-\delta} + a^\dagger b^\dagger \frac{e^{-2i\bar{\delta}t}}{-\delta} \right) + \left( ba \frac{e^{2i\bar{\delta}t}}{-\delta} + bb^\dagger \frac{1}{-\delta} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

este Hamiltoniano puede reescribirse como

$$H_{III} = -\hbar\bar{\delta} (aa^\dagger + b^\dagger b) + \frac{\hbar}{\delta} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (|1\rangle_{kk} \langle 1| - |2\rangle_{kk} \langle 2|) (a^\dagger a + b^\dagger a^\dagger + ab + b^\dagger b)$$

y preparando todos los átomos en el estado fundamental tenemos

$$\begin{aligned}
H_{III} &= -\hbar\bar{\delta} (aa^\dagger + b^\dagger b) + \frac{\hbar}{\delta} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (a^\dagger a + b^\dagger a^\dagger + ab + b^\dagger b) \\
&= -\hbar\bar{\delta} (aa^\dagger + b^\dagger b) + \frac{\hbar}{\delta} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (a^\dagger a + b^\dagger b) + \frac{\hbar}{\delta} \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 (b^\dagger a^\dagger + ab)
\end{aligned}$$

poniendo  $\Omega_{eff} = \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k^2 / \delta$  se obtiene

$$H_{III} = -\hbar\bar{\delta} (aa^\dagger + b^\dagger b) + \hbar\Omega_{eff} (a^\dagger a + b^\dagger b) + \hbar\Omega_{eff} (b^\dagger a^\dagger + ab)$$

y cuando se escoge  $\bar{\delta} = \Omega_{eff} / \delta$  se obtiene finalmente

$$H_{III} = \hbar \frac{\Omega_{eff}}{\delta} (b^\dagger a^\dagger + ab) \quad (\text{A.44})$$

este es el resultado mas importante del capítulo 5

Por último nótese que decir que los operadores conmutan en el sentido de la Ec. (A.39) es equivalente a desprestigiar los términos de corrimiento Stark AC en el Hamiltoniano  $H_{II}$ . Si se hubiera hecho eso, el cálculo es todavía más directo.

## A.2. Modelo input–output para los modos de la cavidad.

El objetivo es estudiar las relaciones entre el campo en la cavidad y el campo que sale de la cavidad, suponiendo que no hay más pérdidas que las que dejamos escapar con propósitos de aplicaciones. Este proceso se puede estudiar haciendo uso de los métodos de la teoría Input-Output. Para

ello usamos como Hamiltoniano del sistema el que hemos desarrollado anteriormente (redefiniendo la constante de acoplamiento efectivo)

$$H_{sys} = \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar\omega_a a^\dagger a + i\hbar\frac{\epsilon}{2} \left( a^\dagger b^\dagger e^{-i\omega_b t} e^{-i\omega_a t} - b a e^{i\omega_b t} e^{i\omega_a t} \right) \quad (\text{A.45})$$

como siempre el Hamiltoniano del baño podemos simular como:

$$H_{bath} = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega C^\dagger(\omega) C(\omega) + \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega D^\dagger(\omega) D(\omega) \quad (\text{A.46})$$

La interacción entre los modos de la cavidad y el baño estará dada por

$$H_{B-S} = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa_1(\omega) \left[ C^\dagger(\omega) a - a^\dagger C(\omega) \right] + i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa_2(\omega) \left[ D^\dagger(\omega) b - b^\dagger D(\omega) \right] \quad (\text{A.47})$$

La ecuación que gobierna la dinámica de los diferentes operadores, en la aproximación Markoviana, está dada por

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar} [a, H_{sys}] - [a, c^\dagger] \left[ \frac{\kappa}{2} c + \sqrt{\kappa} a_{in}(t) \right] - \left[ \frac{\kappa}{2} c + \sqrt{\kappa} a_{in}(t) \right] [a, c] \quad (\text{A.48})$$

y en nuestro caso, usando (A.45) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\omega_a a + \frac{\epsilon}{2} b^\dagger e^{-i\omega_b t} e^{-i\omega_a t} - \frac{\kappa_1}{2} a - \sqrt{\kappa_1} C_{in}(t) \\ \dot{b} &= -i\omega_b b + \frac{\epsilon}{2} a^\dagger e^{-i\omega_b t} e^{-i\omega_a t} - \frac{\kappa_1}{2} b - \sqrt{\kappa_1} D_{in}(t) \\ \dot{a}^\dagger &= i\omega_a a + \frac{\epsilon}{2} b e^{i\omega_b t} e^{i\omega_a t} - \frac{\kappa_1}{2} a^\dagger - \sqrt{\kappa_1} C_{in}^\dagger(t) \\ \dot{b}^\dagger &= i\omega_b b + \frac{\epsilon}{2} a e^{i\omega_b t} e^{i\omega_a t} - \frac{\kappa_1}{2} b^\dagger - \sqrt{\kappa_1} D_{in}^\dagger(t) \end{aligned}$$

Hacemos los cambios de variable  $a \rightarrow e^{-i\omega_a t} a$ ;  $b \rightarrow e^{-i\omega_b t} b$ ,  $C_{in}(t) \rightarrow e^{-i\omega_a t} C_{in}(t)$ ;  $D_{in}(t) \rightarrow e^{-i\omega_b t} D_{in}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\epsilon}{2} b^\dagger - \frac{\kappa_1}{2} a - \sqrt{\kappa_1} C_{in}(t) \rightarrow \dot{a}^\dagger = \frac{\epsilon}{2} b - \frac{\kappa_1}{2} a^\dagger - \sqrt{\kappa_1} C_{in}^\dagger(t) \\ \dot{b} &= \frac{\epsilon}{2} a^\dagger - \frac{\kappa_1}{2} b - \sqrt{\kappa_1} D_{in}(t) \rightarrow \dot{b}^\dagger = \frac{\epsilon}{2} a - \frac{\kappa_1}{2} b^\dagger - \sqrt{\kappa_1} D_{in}^\dagger(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} a(t) \rightarrow \tilde{a}^\dagger(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-i\omega t} a^\dagger(t) \\ \tilde{b}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} b(t) \rightarrow \tilde{b}^\dagger(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-i\omega t} b^\dagger(t) \\ \tilde{C}_{in}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} C_{in}(t) \rightarrow \tilde{C}_{in}^\dagger(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-i\omega t} C_{in}^\dagger(t) \\ \tilde{D}_{in}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} D_{in}(t) \rightarrow \tilde{D}_{in}^\dagger(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{-i\omega t} D_{in}^\dagger(t) \end{aligned}$$

de la transformación anterior uno tiene

$$\begin{aligned} \dot{a} &\rightarrow \frac{d}{dt} e^{i\omega_a t} a = i\omega_a e^{i\omega_a t} a + e^{i\omega_a t} \dot{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega (i\omega_a - i\omega) e^{i\omega_a t} e^{-i\omega t} a(\omega) \end{aligned}$$

donde hemos sustituido  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} a(\omega)$ . Con la sustitución  $\omega_a - \omega = -\omega'$  tenemos

$$\dot{a} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega' i\omega' e^{-i\omega' t} a(\omega' + \omega_a)$$

$$a^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega_a t} e^{i\omega t} a^\dagger(\omega)$$

en este caso hacemos  $\omega_a - \omega = \omega'$  luego

$$a^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega' e^{-i\omega' t} a^\dagger(\omega_a - \omega')$$

en forma análoga para los otros operadores, poniendo  $\omega_a - \bar{\omega} = -\bar{\omega}'$

$$b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\bar{\omega}' e^{-i\bar{\omega}' t} b(\omega_b + \bar{\omega}')$$

y  $\omega_a - \bar{\omega} = \bar{\omega}'$

$$b^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\bar{\omega}' e^{-i\bar{\omega}' t} b^\dagger(\omega_b - \bar{\omega}')$$

siguiendo el mismo razonamiento podemos reescribir las ecuaciones en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} -i\omega a(\omega_a + \omega) &= \frac{\epsilon}{2} b^\dagger(\omega_b - \omega) - \frac{\kappa_1}{2} a(\omega_a + \omega) - \sqrt{\kappa_1} C_{in}(\omega_a + \omega) \\ -i\omega a^\dagger(\omega_a - \omega) &= \frac{\epsilon}{2} b(\omega_b + \omega) - \frac{\kappa_1}{2} a^\dagger(\omega_a - \omega) - \sqrt{\kappa_1} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \\ -i\bar{\omega} b(\omega_b + \bar{\omega}) &= \frac{\epsilon}{2} a^\dagger(\omega_a - \bar{\omega}) - \frac{\kappa_1}{2} b(\omega_b + \bar{\omega}) - \sqrt{\kappa_1} D_{in}(\omega_b + \bar{\omega}) \\ -i\bar{\omega} b^\dagger(\omega_b - \bar{\omega}) &= \frac{\epsilon}{2} a(\omega_a + \bar{\omega}) - \frac{\kappa_1}{2} b^\dagger(\omega_b - \bar{\omega}) - \sqrt{\kappa_1} D_{in}^\dagger(t)(\omega_b - \bar{\omega}) \end{aligned}$$

que puede ponerse como una ecuación matricial en la forma

$$A\tilde{x}(\omega) = -\tilde{b}(\omega),$$

con

$$\tilde{x}(\omega) = \begin{pmatrix} \tilde{a}(\omega_a + \omega) \\ \tilde{b}^\dagger(\omega_b - \bar{\omega}) \\ \tilde{b}(\omega_b + \bar{\omega}) \\ \tilde{a}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha & -\frac{1}{2}\epsilon & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\epsilon & \frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\epsilon \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha = \kappa_1 - 2i\omega$ ;  $\beta = \kappa_2 - 2i\bar{\omega}$  este sistema se puede resolver calculando la inversa  $A^{-1}$  de  $A$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2\frac{\beta}{-\beta\alpha + \epsilon^2} & -2\frac{\epsilon}{-\beta\alpha + \epsilon^2} & 0 & 0 \\ -2\frac{\epsilon}{-\beta\alpha + \epsilon^2} & -2\frac{\alpha}{-\beta\alpha + \epsilon^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\frac{\alpha}{-\beta\alpha + \epsilon^2} & -2\frac{\epsilon}{-\beta\alpha + \epsilon^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\epsilon}{-\beta\alpha + \epsilon^2} & -2\frac{\beta}{-\beta\alpha + \epsilon^2} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_1} \tilde{C}_{in}(\omega_a + \omega) \\ \sqrt{\kappa_2} \tilde{D}_{in}^\dagger(\omega_b - \omega) \\ \sqrt{\kappa_2} \tilde{D}_{in}(\omega_b + \omega) \\ \sqrt{\kappa_1} \tilde{C}_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{pmatrix}$$

entonces las soluciones están dadas por

$$\tilde{x}(\omega) = -A^{-1}\tilde{b}(\omega),$$

que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\omega_a + \omega) &= \frac{2\beta\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}^\dagger(\omega_b - \omega) \\ \tilde{b}^\dagger(\omega_b - \omega) &= \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\alpha\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}^\dagger(\omega_b - \omega) \\ \tilde{b}(\omega_b + \omega) &= \frac{2\alpha\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}(\omega_b + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \\ \tilde{a}^\dagger(\omega_a - \omega) &= \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}(\omega_b + \omega) + \frac{2\beta\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\omega_a + \omega) &= \frac{2\beta\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}^\dagger(\omega_b - \omega) \\ \tilde{b}(\omega_b + \omega) &= \frac{2\alpha\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}(\omega_b + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

a partir de estas soluciones se calculan los campos de salida de la cavidad, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{out}(\omega_a + \omega) &= C_{in}(\omega_a + \omega) + \sqrt{\kappa_1} \tilde{a}(\omega_a + \omega) \\ &= C_{in}(\omega_a + \omega) + \sqrt{\kappa_1} \left( \frac{2\beta\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}^\dagger(\omega_b - \omega) \right) \\ D_{out}(\omega_b + \omega) &= D_{in}(\omega_b + \omega) + \sqrt{\kappa_2} \tilde{b}(\omega_b + \omega) \\ &= D_{in}(\omega_b + \omega) + \sqrt{\kappa_2} \left( \frac{2\alpha\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}(\omega_b + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \right) \end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} C_{out}(\omega_a + \omega) &= \left( \frac{\alpha^*\beta + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta\alpha} \right) C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\epsilon\bar{\kappa}}{-\beta\alpha + \epsilon^2} D_{in}^\dagger(\omega_a - \omega - \Delta) \\ D_{out}(\omega_b + \omega) &= \left( \frac{\beta^*\alpha + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta\alpha} \right) D_{in}(\omega_b + \omega - \Delta) + \frac{2\bar{\kappa}\epsilon}{-\beta\alpha + \epsilon^2} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{aligned}$$

si ponemos la diferencias de frecuencias como  $\omega_a - \omega_b = \Delta$ , entonces  $\omega_a - \Delta = \omega_b$ ;  $\omega_a - \Delta = \omega_b$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\omega_a + \omega) &= \frac{2\beta\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_2}}{-\beta\alpha + \epsilon^2} D_{in}^\dagger(\omega_a - \omega - \Delta) \\ \tilde{b}(\omega_b + \omega) &= \frac{2\alpha\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha} D_{in}(\omega_b + \omega - \Delta) + \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_1}}{-\beta\alpha + \epsilon^2} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{aligned}$$

y los campos de salida se pueden poner como  $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}$

$$\begin{aligned} C_{out}(\omega_a + \omega) &= \left( \frac{\alpha^*\beta + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta\alpha} \right) C_{in}(\omega_a + \omega) + \frac{2\epsilon\bar{\kappa}}{-\beta\alpha + \epsilon^2} D_{in}^\dagger(\omega_a - \omega - \Delta) \\ D_{out}(\omega_b + \omega - \Delta) &= \left( \frac{\beta^*\alpha + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta\alpha} \right) D_{in}(\omega_b + \omega - \Delta) + \frac{2\bar{\kappa}\epsilon}{-\beta\alpha + \epsilon^2} C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega) \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

con  $\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa_1\kappa_2}$

## A.2.1. Cuadraturas del campo interno

Si definimos las cuadraturas del campo como

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2^{3/2}} \left( a(\omega) + a^\dagger(\omega) + b(\omega) + b^\dagger(\omega) \right) \\ Y(\omega) &= \frac{1}{i2^{3/2}} \left( a(\omega) + b(\omega) - a^\dagger(\omega) - b^\dagger(\omega) \right) \end{aligned}$$

entonces las correlaciones, normalmente ordenadas a distintas frecuencia de estos observables pueden calcularse como

$$\begin{aligned} \langle : X(\omega)X(\omega') : \rangle &= \frac{1}{2^3} \left( \langle a(\omega)a(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega')a(\omega) \rangle + \langle a(\omega)b(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega')a(\omega) \rangle \right. \\ &\quad + \langle a^\dagger(\omega)a(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega)a^\dagger(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega)b(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega)b^\dagger(\omega') \rangle \\ &\quad + \langle b(\omega)a(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega')b(\omega) \rangle + \langle b(\omega)b(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega')b(\omega) \rangle \\ &\quad \left. + \langle b^\dagger(\omega)a(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega)a^\dagger(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega)b(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega)b^\dagger(\omega') \rangle \right) \\ \langle : Y(\omega)Y(\omega') : \rangle &= -\frac{1}{2^3} \left( \langle a(\omega)a(\omega') \rangle + \langle a(\omega)b(\omega') \rangle - \langle a^\dagger(\omega')a(\omega) \rangle - \langle b^\dagger(\omega')a(\omega) \rangle \right) \\ &\quad + \langle b(\omega)a(\omega') \rangle + \langle b(\omega)b(\omega') \rangle - \langle a^\dagger(\omega')b(\omega) \rangle - \langle b^\dagger(\omega')b(\omega) \rangle \\ &\quad - \langle a^\dagger(\omega)a(\omega') \rangle - \langle a^\dagger(\omega)b(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega)a^\dagger(\omega') \rangle + \langle a^\dagger(\omega)b^\dagger(\omega') \rangle \\ &\quad - \langle b^\dagger(\omega)a(\omega') \rangle - \langle b^\dagger(\omega)b(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega)a^\dagger(\omega') \rangle + \langle b^\dagger(\omega)b^\dagger(\omega') \rangle \end{aligned}$$

Cada una de las correlaciones, que se encuentran en la ecuación precedente, pueden calcularse a partir de las ecuaciones Ec. (A.49). Es fácil ver que en el estado de vacío del campo de entrada se tiene  $\langle \tilde{a}^\dagger(\omega)\tilde{b}(\omega') \rangle = 0 = \langle \tilde{a}(\omega)\tilde{a}(\omega') \rangle = \langle \tilde{b}(\omega)\tilde{b}(\omega') \rangle$  luego

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\omega_a + \omega)b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon\kappa_2\alpha'^* \langle D_{in}(\omega_a - \omega - \Delta)D_{in}^\dagger(\omega_a + \omega' - \Delta) \rangle}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)} \\ &= \frac{4\epsilon\kappa_2\alpha'^*}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)} \delta(\omega + \omega') \\ \langle a^\dagger(\omega_a + \omega')a(\omega_a + \omega) \rangle &= \frac{4\epsilon^2\kappa_2 \langle (D_{in}(\omega_a - \omega' - \Delta))(D_{in}^\dagger(\omega_a - \omega - \Delta)) \rangle}{(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \\ &= \frac{4\epsilon^2\kappa_2}{(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \delta(\omega - \omega') \\ \langle a^\dagger(\omega_a + \omega)a(\omega_a + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon^2\kappa_2 \langle (D_{in}(\omega_a - \omega - \Delta))(D_{in}^\dagger(\omega_a - \omega' - \Delta)) \rangle}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \\ &= \frac{4\epsilon^2\kappa_2}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \delta(\omega - \omega') \\ \langle b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega')b(\omega_a - \Delta + \omega) \rangle &= \frac{4\epsilon^2\kappa_1 \langle (C_{in}(\omega_a - \omega'))(C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega)) \rangle}{(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \\ &= \frac{4\epsilon^2\kappa_1}{(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \delta(\omega - \omega') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega)b(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon^2\kappa_1 \langle C_{in}(\omega_a - \omega)C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega') \rangle}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \\ &= \frac{4\epsilon^2\kappa_1}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \delta(\omega - \omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega)a^\dagger(\omega_a + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon\kappa_1\beta'^* \langle C_{in}(\omega_a - \omega)C_{in}^\dagger(\omega_a + \omega') \rangle}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)} \\ &= \frac{4\epsilon\kappa_1\beta'^*}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)} \delta(\omega + \omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle a(\omega_a + \omega)b(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon^2\kappa_1 \langle C_{in}(\omega_a + \omega)C_{in}^\dagger(\omega_a - \omega') \rangle}{(\epsilon^2 - \beta\alpha)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \\ &= \frac{4\epsilon^2\kappa_1}{(\epsilon^2 - \beta\alpha)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \delta(\omega + \omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle b(\omega_a - \Delta + \omega)a(\omega_a + \omega') \rangle &= \frac{4\alpha\epsilon\kappa_2 \langle D_{in}(\omega_a + \omega - \Delta)D_{in}^\dagger(\omega_a - \omega' - \Delta) \rangle}{(\epsilon^2 - \beta\alpha)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \\ &= \frac{4\alpha\epsilon\kappa_2\delta(\omega + \omega')}{(\epsilon^2 - \beta\alpha)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger(\omega_a + \omega)b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon\alpha'^*\kappa_2 \langle D_{in}(\omega_a - \omega - \Delta)D_{in}^\dagger(\omega_a + \omega' - \Delta) \rangle}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)} \\ &= \frac{4\epsilon\alpha'^*\kappa_2}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)} \delta(\omega + \omega')\end{aligned}$$

$$\langle a^\dagger(\omega_a + \omega')a(\omega_a + \omega) \rangle = \frac{4\epsilon^2\kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|} \delta(\omega - \omega')$$

$$\langle a^\dagger(\omega_a + \omega)a(\omega_a + \omega') \rangle = \frac{4\epsilon^2\kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|} \delta(\omega - \omega')$$

$$\langle b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega')b(\omega_a - \Delta + \omega) \rangle = \frac{4\epsilon^2\kappa_1}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|} \delta(\omega - \omega')$$

$$\langle b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega)b(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle = \frac{4\epsilon^2\kappa_1}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|} \delta(\omega - \omega')$$

$$\langle b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega)a^\dagger(\omega_a + \omega') \rangle = \frac{4\epsilon\beta'^*\kappa_1}{(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)} \delta(\omega + \omega')$$

$$\langle a(\omega_a + \omega)b(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle = \frac{4\epsilon\beta\kappa_1}{(\epsilon^2 - \beta'\alpha')(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \delta(\omega + \omega')$$

$$\langle b(\omega_a - \Delta + \omega)a(\omega_a + \omega') \rangle = \frac{4\alpha\epsilon\kappa_2}{(\epsilon^2 - \beta\alpha)(\epsilon^2 - \beta'\alpha')} \delta(\omega + \omega')$$

$$\langle a^\dagger(\omega_a + \omega)b^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle = \frac{4\epsilon\kappa_2\alpha'^*}{(\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*)(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)}\delta(\omega + \omega')$$

A partir de estas relaciones y de las definiciones  $\beta = (\kappa_2 - 2i(\omega + \Delta))$ ;  $\beta^* = (\kappa_2 + 2i(\omega + \Delta))$ ;

$\alpha = (\kappa_1 - 2i\omega)$ ;  $\alpha^* = (\kappa_1 + 2i\omega) = \alpha'$ ;  $\beta' = \kappa_2 + 2i(\omega - \Delta)$ ;  $\beta'^* = (\kappa_2 - 2i(\omega - \Delta))$ . Y haciendo la sustitución  $Q = \epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2$ ; y  $\kappa = \kappa_2 + \kappa_1$

La correlación a diferentes frecuencias de las cuadraturas están dadas por

$$\begin{aligned} & \langle : X(\omega)X(\omega') : \rangle \\ &= \frac{1}{2^3} \left( \frac{(16\epsilon\bar{\kappa}^2 (Q^2 + 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4) - 64\omega\Delta\epsilon\kappa(\kappa_1Q - 4\kappa_2\omega^2) - 64\Delta^2\epsilon^3\bar{\kappa}^2)\delta(\omega + \omega')}{(Q^2 - 4\Delta^2\kappa_1^2 + 4((\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\epsilon^2) - 4\Delta^2)\omega^2 + 16\omega^4)^2 + 16\Delta^2(\kappa_1^2Q^2 - 8\kappa_1\kappa_2Q\omega^2 + 16\kappa_2^2\omega^4)} \right. \\ & \quad \left. \times + \frac{8\epsilon^2\kappa\delta(\omega - \omega')}{(Q^2 + 4\Delta^2\kappa_1^2 + 4(\kappa^2 + 2Q + 4\Delta^2)\omega^2 + 16\omega^4 + 8\Delta(\epsilon^2\omega + 4\omega^3 + \omega\kappa_1^2))^2} \right) \\ & \langle : Y(\omega)Y(\omega') : \rangle \\ &= -\frac{1}{2^3} \left( \frac{(16\epsilon\bar{\kappa}^2 (Q^2 + 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4) - 64\omega\Delta\epsilon\kappa(\kappa_1Q - 4\kappa_2\omega^2) - 64\Delta^2\epsilon^3\bar{\kappa}^2)\delta(\omega + \omega')}{(Q^2 - 4\Delta^2\kappa_1^2 + 4((\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\epsilon^2) - 4\Delta^2)\omega^2 + 16\omega^4)^2 + 16\Delta^2(\kappa_1^2Q^2 - 8\kappa_1\kappa_2Q\omega^2 + 16\kappa_2^2\omega^4)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{8\epsilon^2\kappa\delta(\omega - \omega')}{(Q^2 + 4\Delta^2\kappa_1^2 + 4(\kappa^2 + 2Q + 4\Delta^2)\omega^2 + 16\omega^4 + 8\Delta(\epsilon^2\omega + 4\omega^3 + \omega\kappa_1^2))^2} \right). \end{aligned}$$

Cuando  $\Delta = 0$  se obtendrá el resultado

$$\begin{aligned} & \langle : X(\omega)X(\omega') : \rangle \\ &= \frac{1}{2^3} \left( \frac{16\epsilon\bar{\kappa}^2 (Q^2 + 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4)\delta(\omega + \omega')}{(Q^2 + 4(\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{8\epsilon^2\kappa\delta(\omega - \omega')}{(Q^2 + 4(\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4)^2} \right) \\ & \langle : Y(\omega)Y(\omega') : \rangle \\ &= -\frac{1}{2^3} \left( \frac{(16\epsilon\bar{\kappa}^2 (Q^2 + 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4))\delta(\omega + \omega')}{(Q^2 + 4(\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{8\epsilon^2\kappa\delta(\omega - \omega')}{(Q^2 + 4(\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\epsilon^2)\omega^2 + 16\omega^4)^2} \right). \end{aligned}$$

Integrando en  $\omega'$  y  $\omega$  se obtienen la fluctuación de la cuadratura en función del tiempo

$$\begin{aligned} \langle : X^2(t) : \rangle &= \frac{(2\kappa_1\kappa_2 + (\kappa_1 + \kappa_2)\epsilon)}{8(\kappa_1 + \kappa_2)(\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2)\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\epsilon}\right)^2}} \\ & \quad \times \left( \sqrt{\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)}{8} + \frac{1}{4}\kappa\epsilon\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\epsilon}\right)^2}} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)}{8} - \frac{1}{4}\kappa\epsilon\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\epsilon}\right)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle : Y^2(t) : \rangle &= -\frac{(2\bar{\kappa}^2 - \kappa\epsilon)}{8\kappa(\kappa_1\kappa_2 - \epsilon^2)} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\epsilon}\right)^2\right)} \\ &\times \left( \sqrt{\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)}{2} + \kappa\epsilon \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\epsilon}\right)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2)}{2} - \kappa\epsilon \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\epsilon}\right)^2}} \right) \end{aligned}$$

A partir de estas relaciones se ha deducido el grado de compresión que poseen los campos internos de la cavidad.

### A.2.2. Cuadraturas del campo externo

Empezamos definiendo las cuadraturas del campo que sale de la cavidad en la forma

$$\begin{aligned} X_{out}(\omega) &= \frac{1}{2^{3/2}} \left( C_{out}(\omega) + D_{out}(\omega) + C_{out}^\dagger(\omega) + D_{out}^\dagger(\omega) \right) \\ Y_{out}(\omega) &= \frac{1}{i2^{3/2}} \left( C_{out}(\omega) + D_{out}(\omega) - C_{out}^\dagger(\omega) - D_{out}^\dagger(\omega) \right) \end{aligned}$$

por lo tanto las correlaciones, normalmente ordenadas, a diferente frecuencia de estas cuadraturas están dadas por

$$\begin{aligned} \langle X_{out}(\omega) X_{out}(\omega') \rangle &= \frac{1}{2^3} \left( \langle C_{out}(\omega) D_{out}(\omega') \rangle + \langle C_{out}^\dagger(\omega') C_{out}(\omega) \rangle \right. \\ &\quad + \langle D_{out}(\omega) C_{out}(\omega') \rangle + \langle D_{out}^\dagger(\omega') D_{out}(\omega) \rangle \\ &\quad + \langle C_{out}^\dagger(\omega) C_{out}(\omega') \rangle + \langle C_{out}^\dagger(\omega) D_{out}^\dagger(\omega') \rangle \\ &\quad \left. + \langle D_{out}^\dagger(\omega) D_{out}(\omega') \rangle + \langle D_{out}^\dagger(\omega) C_{out}^\dagger(\omega') \rangle \right) \\ \langle Y_{out}(\omega) Y_{out}(\omega') \rangle &= -\frac{1}{2^3} \left( \langle C_{out}(\omega) D_{out}(\omega') \rangle - \langle C_{out}^\dagger(\omega') C_{out}(\omega) \rangle \right. \\ &\quad + \langle D_{out}(\omega) C_{out}(\omega') \rangle - \langle D_{out}^\dagger(\omega') D_{out}(\omega) \rangle \\ &\quad - \langle C_{out}^\dagger(\omega) C_{out}(\omega') \rangle + \langle C_{out}^\dagger(\omega) D_{out}^\dagger(\omega') \rangle \\ &\quad \left. - \langle D_{out}^\dagger(\omega) D_{out}(\omega') \rangle + \langle D_{out}^\dagger(\omega) C_{out}^\dagger(\omega') \rangle \right) \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones del campo de salida dadas en la Ec. (A.50) se puede calcular cada término de las correlaciones, el resultado es

$$\begin{aligned} \langle C_{out}^\dagger(\omega_a + \omega') C_{out}(\omega_a + \omega) \rangle &= \frac{4\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\ \langle C_{out}^\dagger(\omega_a + \omega) C_{out}(\omega_a + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\ \langle D_{out}^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega') D_{out}(\omega_a - \Delta + \omega) \rangle &= \frac{4\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\ \langle D_{out}^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega) D_{out}(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{4\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\langle C_{out}(\omega_a + \omega)D_{out}(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{\alpha^*\beta + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta\alpha} \frac{2\epsilon\bar{\kappa}}{\epsilon^2 - \beta'\alpha'} \delta(\omega + \omega') \\ \langle D_{out}(\omega_a - \Delta + \omega)C_{out}(\omega_a + \omega') \rangle &= \frac{\beta^*\alpha + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta\alpha} \frac{2\epsilon\bar{\kappa}}{\epsilon^2 - \beta'\alpha'} \delta(\omega + \omega') \\ \langle C_{out}^\dagger(\omega_a + \omega)D_{out}^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega') \rangle &= \frac{2\epsilon\bar{\kappa}}{\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*} \frac{\beta'\alpha'^* + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*} \delta(\omega + \omega') \\ \langle D_{out}^\dagger(\omega_a - \Delta + \omega)C_{out}^\dagger(\omega_a + \omega') \rangle &= \frac{\alpha'\beta'^* + \epsilon^2}{\epsilon^2 - \beta'^*\alpha'^*} \frac{2\bar{\kappa}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*} \delta(\omega + \omega')\end{aligned}$$

todas las demás son cero. Reemplazando los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  tenemos

$$\begin{aligned}\langle : X_{out}(\omega)X_{out}(\omega') : \rangle &= \frac{1}{2^3} \frac{4\epsilon\sqrt{\kappa_1\kappa_2} \left( (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + (2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 4\Delta^2) \omega^2 - 4\Delta^2\kappa_1^2 + 16\omega^4 \right)}{A'^2 + 16\Delta^2 \left( \kappa_1^2 (\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2)^2 - 8(\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2) \omega^2 + 16\kappa_2^2\omega^4 \right)} \\ &\times (2\kappa_1\kappa_2 + 8\omega^2 + 2\epsilon^2 + 8\omega\Delta) \delta(\omega + \omega') + \frac{1}{2^3} \frac{16\epsilon^2\kappa_1\kappa_2}{A + 8\Delta (\epsilon^2\omega + 4\omega^3 + \omega\kappa_1^2)} \delta(\omega - \omega') \\ \langle : Y_{out}(\omega)Y_{out}(\omega') : \rangle &= -\frac{1}{2^3} \frac{4\epsilon\sqrt{\kappa_1\kappa_2} \left( (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + (2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 4\Delta^2) \omega^2 - 4\Delta^2\kappa_1^2 + 16\omega^4 \right)}{A'^2 + 16\Delta^2 \left( \kappa_1^2 (\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2)^2 - 8(\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2) \omega^2 + 16\kappa_2^2\omega^4 \right)} \\ &\times (2\kappa_1\kappa_2 + 8\omega^2 + 2\epsilon^2 + 8\omega\Delta) \delta(\omega + \omega') + \frac{1}{2^3} \frac{16\epsilon^2\kappa_1\kappa_2}{A + 8\Delta (\epsilon^2\omega + 4\omega^3 + \omega\kappa_1^2)} \delta(\omega - \omega')\end{aligned}$$

donde se ha puesto

$$\begin{aligned}A' &= (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 4\Delta^2) \omega^2 - 4\Delta^2\kappa_1^2 + 16\omega^4 \\ A &= (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + 4\Delta^2\kappa_1^2 + 4(2\epsilon^2 + 4\Delta^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2) \omega^2 + 16\omega^4\end{aligned}$$

En el caso en que  $\Delta = 0$ , las cuadraturas están dadas por

$$\begin{aligned}\langle : X_{out}(\omega)X_{out}(\omega') : \rangle &= \frac{\epsilon\bar{\kappa} (\kappa_1\kappa_2 + 4\omega^2 + \epsilon^2)}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega^2 + 16\omega^4 \right)} \delta(\omega + \omega') \\ &+ \frac{2\epsilon^2\kappa_1\kappa_2}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2) \omega^2 + 16\omega^4 \right)} \delta(\omega - \omega') \\ \langle : Y_{out}(\omega)Y_{out}(\omega') : \rangle &= -\frac{\epsilon\bar{\kappa} (\kappa_1\kappa_2 + 4\omega^2 + \epsilon^2)}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega^2 + 16\omega^4 \right)} \delta(\omega + \omega') \\ &+ \frac{2\epsilon^2\kappa_1\kappa_2}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2\kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2) \omega^2 + 16\omega^4 \right)} \delta(\omega - \omega')\end{aligned}$$

integrando en  $\omega'$  se tiene el espectro de fluctuaciones de las cuadraturas, normalmente ordenadas,

dado por

$$\begin{aligned}
\langle : S_{X_{out}}(\omega) : \rangle &= \langle : X_{out}(\omega) X_{out}(\omega) : \rangle \\
&= \frac{\epsilon \bar{\kappa} (\kappa_1 \kappa_2 + 4\omega^2 + \epsilon^2)}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)\omega^2 + 16\omega^4 \right)} \\
&\quad + \frac{2\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2)\omega^2 + 16\omega^4 \right)} \\
\langle : S_{Y_{out}}(\omega) : \rangle &= \langle : Y_{out}(\omega) Y_{out}(\omega') : \rangle \\
&= -\frac{\epsilon \bar{\kappa} (\kappa_1 \kappa_2 + 4\omega^2 + \epsilon^2)}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)\omega^2 + 16\omega^4 \right)} \\
&\quad + \frac{2\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2 + 4(2\epsilon^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1^2)\omega^2 + 16\omega^4 \right)}
\end{aligned}$$

y poniendo  $\omega = 0$

$$\begin{aligned}
\langle : S_{X_{out}}(0) : \rangle &= \frac{\epsilon \bar{\kappa} \kappa_1 \kappa_2}{(\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2} + \frac{2\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{\left( (\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2 \right)} \\
\langle : S_{Y_{out}}(0) : \rangle &= -\frac{\epsilon \bar{\kappa} \kappa_1 \kappa_2}{(\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2} + \frac{2\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{(\epsilon^2 - \kappa_2 \kappa_1)^2}
\end{aligned}$$

### A.3. Estados coherentes de dos fotones.

Modificamos el modelo del sistema para incluir la interacción de dos campos clásicos con cada modo de la cavidad. Esto conduce a nuevo Hamiltoniano para la dinámica de los dos campos en la cavidad

$$H_{sys} = \hbar(\varepsilon_1 a + \varepsilon_1^* a^\dagger) + \hbar(\varepsilon_2 b + \varepsilon_2^* b^\dagger) + i\hbar \frac{\epsilon}{2} (a^\dagger b^\dagger - ab)$$

donde se considera que los acoplamientos respectivos con cada cavidad son  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ . Usando el modelo de baño dado en la sección anterior Ecs. (A.47) y (A.46); considerando válida la aproximación de Markov las ecuaciones de Heisenberg para los campos dentro de la cavidad están dadas ahora por

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= -i\varepsilon_1^* + \frac{\epsilon}{2} b^\dagger - \frac{\kappa_1}{2} a - \sqrt{\kappa_1} C_{in}(t) \\
\dot{b} &= -i\varepsilon_2^* + \frac{\epsilon}{2} a^\dagger - \frac{\kappa_1}{2} b - \sqrt{\kappa_1} D_{in}(t)
\end{aligned}$$

Puede transformarse el campo de tal forma que:

$$\begin{aligned}
a &= a + \alpha_0 \\
b &= b + \beta_0
\end{aligned}$$

con  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ , que no dependen del tiempo. Entonces

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \dot{a}' \\
\dot{b} &= \dot{b}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}' &= -i\varepsilon_1^* + \frac{\epsilon}{2} (b'^\dagger + \beta_0^*) - \frac{\kappa_1}{2} (a + \alpha_0) - \sqrt{\kappa_1} C_{in}(t) \\
\dot{b}' &= -i\varepsilon_2^* + \frac{\epsilon}{2} (a'^\dagger + \alpha_0^*) - \frac{\kappa_2}{2} (b + \beta_0) - \sqrt{\kappa_2} D_{in}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}' &= -i\varepsilon_1^* + \frac{\epsilon}{2}\beta_0^* - \frac{\kappa_1}{2}\alpha_0 + \frac{\epsilon}{2}b'^{\dagger} - \frac{\kappa_1}{2}a - \sqrt{\kappa_1}C_{in}(t) \\ \dot{b}' &= -i\varepsilon_2^* + \frac{\epsilon}{2}\alpha_0^* - \frac{\kappa_2}{2}\beta_0 + \frac{\epsilon}{2}a'^{\dagger} - \frac{\kappa_2}{2}b - \sqrt{\kappa_2}D_{in}(t)\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}-i\varepsilon_1^* + \frac{\epsilon}{2}\beta_0^* - \frac{\kappa_1}{2}\alpha_0 &= 0 \\ -i\varepsilon_2^* + \frac{\epsilon}{2}\alpha_0^* - \frac{\kappa_2}{2}\beta_0 &= 0 \\ i\varepsilon_1 + \frac{\epsilon}{2}\beta_0 - \frac{\kappa_1}{2}\alpha_0^* &= 0 \\ i\varepsilon_2 + \frac{\epsilon}{2}\alpha_0 - \frac{\kappa_2}{2}\beta_0^* &= 0 \\ \frac{\kappa_1}{2}\alpha_0 &= \left(-i\varepsilon_1^* + \frac{\epsilon}{2}\beta_0^*\right) \\ \left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\kappa_1\kappa_2}{2}\right)\beta_0^* &= i(\epsilon\varepsilon_1^* - \kappa_1\varepsilon_2)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\beta_0^* &= \frac{2i(\epsilon\varepsilon_1^* - \kappa_1\varepsilon_2)}{\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2} \\ \frac{\kappa_1}{2}\alpha_0 &= \left(-i\varepsilon_1^* + \frac{\epsilon}{2}\beta_0^*\right) \\ &= \left(\frac{i\varepsilon_1^*\kappa_1\kappa_2 - i\epsilon\kappa_1\varepsilon_2}{\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2}\right) \\ \alpha_0 &= -\frac{i2(\epsilon\varepsilon_2 - \varepsilon_1^*\kappa_2)}{\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2} \\ \beta_0^* &= \frac{2i(\epsilon\varepsilon_1^* - \kappa_1\varepsilon_2)}{\epsilon^2 - \kappa_1\kappa_2}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{a}' &= \frac{\epsilon}{2}b'^{\dagger} - \frac{\kappa_1}{2}a' - \sqrt{\kappa_1}C_{in}(t) \\ \dot{b}' &= \frac{\epsilon}{2}a'^{\dagger} - \frac{\kappa_2}{2}b' - \sqrt{\kappa_2}D_{in}(t)\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}\tilde{a}'(\omega) &= \frac{2\sqrt{\kappa_1}\beta}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_2}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}^{\dagger}(-\omega) \\ \tilde{b}'^{\dagger}(-\omega) &= \frac{2\epsilon\sqrt{\kappa_1}}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}(\omega) + \frac{2\alpha\sqrt{\kappa_2}}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}^{\dagger}(-\omega) \\ \tilde{b}'(\omega) &= \frac{2\sqrt{\kappa_2}\alpha}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_1}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}^{\dagger}(-\omega) \\ \tilde{a}'^{\dagger}(-\omega) &= \frac{2\sqrt{\kappa_2}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_1}\beta}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}^{\dagger}(-\omega) \\ \tilde{a}'(\omega) &= \frac{2\sqrt{\kappa_1}\beta}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_2}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}^{\dagger}(-\omega) \\ \tilde{b}'(\omega) &= \frac{2\sqrt{\kappa_2}\alpha}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_1}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}^{\dagger}(-\omega)\end{aligned}$$

y volviendo a los campos originales tenemos.

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\omega) &= \alpha_0\delta(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_1}\beta}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_2}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}^\dagger(-\omega) \\ \tilde{b}(\omega) &= \beta_0\delta(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_2}\alpha}{\epsilon^2 - \beta\alpha}D_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_1}\epsilon}{\epsilon^2 - \beta\alpha}C_{in}^\dagger(-\omega)\end{aligned}\quad (\text{A.51})$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2^{3/2}} \left( \tilde{a}(\omega) + \tilde{b}(\omega) + \tilde{a}^\dagger(\omega) + \tilde{b}^\dagger(\omega) \right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{a}(\omega)\tilde{b}(\omega') \rangle &= \beta_0\alpha_0\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\epsilon\kappa_1\beta}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2}\delta(\omega + \omega') \\ \langle \tilde{a}^\dagger(\omega')\tilde{a}(\omega) \rangle &= |\alpha_0|^2\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\kappa_2\epsilon^2\delta(\omega - \omega')}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \\ \langle \tilde{b}(\omega)\tilde{a}(\omega') \rangle &= \alpha_0\beta_0\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\kappa_2\epsilon\alpha\delta(\omega + \omega')}{(\epsilon^2 - \beta^*\alpha^*)(\epsilon^2 - \beta\alpha)} \\ \langle \tilde{b}^\dagger(\omega')\tilde{b}(\omega) \rangle &= |\beta_0|^2\delta(\omega')\delta(\omega) + \frac{4\kappa_1\epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2}\delta(\omega - \omega') \\ \langle \tilde{a}^\dagger(\omega)\tilde{a}(\omega') \rangle &= |\alpha_0|^2\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\kappa_2\epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2}\delta(\omega - \omega') \\ \langle \tilde{a}^\dagger(\omega)\tilde{b}^\dagger(\omega') \rangle &= \beta_0^*\alpha_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\kappa_2\alpha\epsilon}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2}\delta(\omega + \omega') \\ \langle \tilde{b}^\dagger(\omega)\tilde{a}^\dagger(\omega') \rangle &= \alpha_0^*\beta_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\kappa_1\epsilon\beta^*}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2}\delta(\omega + \omega') \\ \langle \tilde{b}^\dagger(\omega)\tilde{b}(\omega') \rangle &= \beta_0\beta_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') + \frac{4\kappa_1\epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2}\delta(\omega - \omega') \\ \langle \tilde{a}(\omega)\tilde{a}(\omega') \rangle &= \alpha_0\alpha_0\delta(\omega)\delta(\omega') & \langle \tilde{a}^\dagger(\omega)\tilde{b}(\omega') \rangle &= \beta_0\alpha_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') \\ \langle \tilde{b}^\dagger(\omega')\tilde{a}(\omega) \rangle &= \beta_0^*\alpha_0\delta(\omega)\delta(\omega') & \langle \tilde{a}^\dagger(\omega)\tilde{a}^\dagger(\omega') \rangle &= \alpha_0^*\alpha_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') \\ \langle \tilde{b}(\omega)\tilde{b}(\omega') \rangle &= \beta_0\beta_0\delta(\omega)\delta(\omega') & \langle \tilde{b}^\dagger(\omega)\tilde{a}(\omega') \rangle &= \alpha_0\beta_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') \\ \langle \tilde{a}^\dagger(\omega')\tilde{b}(\omega) \rangle &= \beta_0\alpha_0^*\delta(\omega)\delta(\omega') & \langle \tilde{b}^\dagger(\omega)\tilde{b}^\dagger(\omega') \rangle &= \beta_0^*\beta_0^*\delta(\omega)\delta(\omega')\end{aligned}$$

luego, tenemos en este caso

$$\begin{aligned}\langle : X(\omega)X(\omega') : \rangle &= \frac{1}{2^3} \left( (\alpha_0\alpha_0 + \alpha_0^*\alpha_0^* + \beta_0\beta_0 + \beta_0^*\beta_0^* + 2(\alpha_0\beta_0 + \beta_0^*\alpha_0^*)) \right. \\ &\quad \left. + 2(|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2) + 2(\alpha_0^*\beta_0 + \alpha_0\beta_0^*) \right) \delta(\omega)\delta(\omega') \\ &\quad + \frac{4\epsilon}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2} (\kappa_1(\beta + \beta^*) + \kappa_2(\alpha^* + \alpha)) \delta(\omega + \omega') \\ &\quad + \frac{8\epsilon^2(\kappa_1 + \kappa_2)}{|\epsilon^2 - \beta\alpha|^2} \delta(\omega - \omega')\end{aligned}$$

integrando se obtiene la dependencia temporal de la fluctuación  $X$  como función del tiempo

$$A = \epsilon^2 + \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2$$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{X}^2(t) \rangle &= \frac{1}{2^3} \left( (\alpha_0\alpha_0 + \alpha_0^*\alpha_0^* + \beta_0\beta_0 + \beta_0^*\beta_0^* + 2(\alpha_0\beta_0 + \beta_0^*\alpha_0^*)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^4} \frac{2\epsilon(2\kappa_1\kappa_2 + (\kappa_1 + \kappa_2)\epsilon)}{8\sqrt{\frac{1}{16}(\kappa_1 + \kappa_2)^2} A \sqrt{\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}(\kappa_1 + \kappa_2)^2} A} \right. \\ &\quad \times \left( \sqrt{\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2}{8}} + \sqrt{\frac{1}{16}(\kappa_1 + \kappa_2)^2} A \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\epsilon^2}{8}} - \sqrt{\frac{1}{16}(\kappa_1 + \kappa_2)^2} A \right) \right).\end{aligned}$$

Para los campos fuera de la cavidad tenemos a partir de (A.51)

$$\begin{aligned}
C_{out}(\omega) &= C_{in}(\omega) + \sqrt{\kappa_1} \tilde{a}(\omega) \\
&= C_{in}(\omega) - \sqrt{\kappa_1} \alpha_0 \delta(\omega) + \sqrt{\kappa_1} \left( \frac{2\sqrt{\kappa_1} \beta}{\epsilon^2 - \beta \alpha} C_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_2} \epsilon}{\epsilon^2 - \beta \alpha} D_{in}^\dagger(-\omega) \right) \\
D_{out}(\omega) &= D_{in}(\omega) + \sqrt{\kappa_2} \tilde{b}(\omega) \\
&= D_{in}(\omega) - \sqrt{\kappa_2} \beta_0 \delta(\omega) + \sqrt{\kappa_2} \left( \frac{2\sqrt{\kappa_2} \alpha}{\epsilon^2 - \beta \alpha} D_{in}(\omega) + \frac{2\sqrt{\kappa_1} \epsilon}{\epsilon^2 - \beta \alpha} C_{in}^\dagger(-\omega) \right) \\
C_{out}(\omega) &= -\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 \delta(\omega) + \frac{\epsilon^2 + \alpha^* \beta}{\epsilon^2 - \beta \alpha} C_i(\omega) + \frac{2\bar{\kappa} \epsilon}{\epsilon^2 - \beta \alpha} D_i^\dagger(-\omega) \\
D_o(\omega) &= -\sqrt{\kappa_2} \beta_0 \delta(\omega) + \frac{\epsilon^2 + \beta^* \alpha}{\epsilon^2 - \beta \alpha} D_i(\omega) + \frac{2\bar{\kappa} \epsilon}{\epsilon^2 - \beta \alpha} C_i^\dagger(-\omega)
\end{aligned} \tag{A.52}$$

donde, como antes  $\alpha = (\kappa_1 - 2i\omega)$ ;  $\beta = (\kappa_2 - 2i\omega)$ ; y , por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle C_{out}(\omega) D_{out}(\omega') \rangle &= \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0 \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{2\epsilon \bar{\kappa} (\epsilon^2 + \beta \alpha^*)}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega + \omega') \\
\langle C_{out}^\dagger(\omega') C_{out}(\omega) \rangle &= \kappa_1 |\alpha_0|^2 \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{4\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\
\langle D_{out}(\omega) C_{out}(\omega') \rangle &= \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0 \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{2\epsilon \bar{\kappa} (\epsilon^2 + \alpha \beta^*)}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega + \omega') \\
\langle D_{out}^\dagger(\omega') D_{out}(\omega) \rangle &= \kappa_2 |\beta_0|^2 \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{4\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\
\langle C_{out}^\dagger(\omega) C_{out}(\omega') \rangle &= \kappa_1 |\alpha_0|^2 \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{4\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\
\langle C_{out}^\dagger(\omega) D_{out}^\dagger(\omega') \rangle &= \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0^* \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{2\epsilon \bar{\kappa} (\epsilon^2 + \alpha^* \beta)}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega + \omega') \\
\langle D_{out}^\dagger(\omega) D_{out}(\omega') \rangle &= \kappa_2 |\beta_0|^2 \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{4\epsilon^2 \kappa_1 \kappa_2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \\
\langle D_{out}^\dagger(\omega) C_{out}^\dagger(\omega') \rangle &= \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0^* \delta(\omega) \delta(\omega') + \frac{2\epsilon \bar{\kappa} (\epsilon^2 + \beta^* \alpha)}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega + \omega') \\
\langle C_{out}(\omega) C_{out}(\omega') \rangle &= \kappa_1 \alpha_0 \alpha_0 \delta(\omega) \delta(\omega') & \langle C_{out}^\dagger(\omega) D_{out}(\omega') \rangle &= \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0^* \delta(\omega) \delta(\omega') \\
\langle D_{out}^\dagger(\omega') C_{out}(\omega) \rangle &= \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0 \delta(\omega) \delta(\omega') & \langle C_{out}^\dagger(\omega) C_{out}^\dagger(\omega') \rangle &= \kappa_1 \alpha_0^* \alpha_0 \delta(\omega) \delta(\omega') \\
\langle D_{out}(\omega) D_{out}(\omega') \rangle &= \kappa_2 \beta_0 \beta_0 \delta(\omega) \delta(\omega') & \langle D_{out}^\dagger(\omega) C_{out}(\omega') \rangle &= \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0^* \delta(\omega) \delta(\omega') \\
\langle C_{out}^\dagger(\omega') D_{out}(\omega) \rangle &= \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0^* \delta(\omega) \delta(\omega') & \langle D_{out}^\dagger(\omega) D_{out}^\dagger(\omega') \rangle &= \kappa_2 \beta_0^* \beta_0 \delta(\omega) \delta(\omega')
\end{aligned}$$

Las currelaciones están dadas por

$$\begin{aligned}
\langle : \tilde{X}_{out}(\omega) \tilde{X}_{out}(\omega) : \rangle &= \frac{1}{2^3} \left( 4\epsilon \bar{\kappa} \frac{(\epsilon^2 + \alpha^* \beta + \alpha \beta^*)}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega + \omega') + \frac{16\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \delta(\omega - \omega') \right) \\
&+ \left( \kappa_1 \left( 2\Re(\alpha_0 \alpha_0) + 2|\alpha_0|^2 \right) + \kappa_2 \left( 2\Re(\beta_0 \beta_0) + 2|\beta_0|^2 \right) \right. \\
&+ 2\bar{\kappa} (\alpha_0 \beta_0^* + \alpha_0 \beta_0 + \beta_0 \alpha_0 + \alpha_0^* \beta_0 + \beta_0^* \alpha_0^*) \delta(\omega) \delta(\omega') \left. \right)
\end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\begin{aligned}
\langle : \tilde{X}_{out}(\omega) \tilde{X}_{out}(\omega') : \rangle &= \frac{1}{2^3} 4 \frac{\epsilon \bar{\kappa} \left( (2\epsilon^2 + 2\kappa_2 \kappa_1 + 8\omega^2) \delta(\omega + \omega') + 4\epsilon \bar{\kappa} \delta(\omega - \omega') \right)}{\kappa_2^2 \kappa_1^2 - 2\kappa_2 \kappa_1 \epsilon^2 + 4\kappa_2^2 \omega^2 + 4\omega^2 \kappa_1^2 + 16\omega^4 + 8\omega^2 \epsilon^2 + \epsilon^4} \\
&+ \frac{1}{2^3} \left( \kappa_1 \left( 2\Re(\alpha_0 \alpha_0) + 2|\alpha_0|^2 \right) + \kappa_2 \left( 2\Re(\beta_0 \beta_0) + 2|\beta_0|^2 \right) \right. \\
&+ 2\bar{\kappa} ((\alpha_0 \beta_0^* + \beta_0 \alpha_0^*) + (\alpha_0 \beta_0 + \beta_0^* \alpha_0^*)) \delta(\omega) \delta(\omega') \left. \right)
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle X_{out}(\omega) \rangle &= \frac{1}{2^{3/2}} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 + \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* + \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega) \\
\langle X_{out}(\omega') \rangle &= \frac{1}{2^{3/2}} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 + \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* + \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X_{out}(\omega) \rangle \langle X_{out}(\omega') \rangle &= \frac{1}{2^3} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 + \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* + \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \\
&\quad \times (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 + \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* + \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega) \delta(\omega') \\
\langle X_{out}(\omega) \rangle \langle X_{out}(\omega') \rangle &= \frac{1}{2^3} \left( 2\kappa_1 \left( \Re(\alpha_0 \alpha_0) + |\alpha_0|^2 \right) + 2\kappa_2 \left( \Re(\beta_0 \beta_0) + |\beta_0|^2 \right) \right) \\
&\quad + 2\bar{\kappa} \left( (\alpha_0 \beta_0^* + \alpha_0^* \beta_0) + (\alpha_0 \beta_{00} + \alpha_0^* \beta_0^*) \right) \delta(\omega) \delta(\omega') \quad (A.55)
\end{aligned}$$

La fluctuación a la frecuencia  $\omega$  se tiene integrando sobre  $\omega'$  las relaciones (A.54) y (A.55). Siguiendo la relación

$$(\Delta \tilde{X}_{out}(\omega)) = \langle \tilde{X}^2(\omega) \rangle - \langle X(\omega) \rangle^2$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \tilde{X}_{out}(\omega))^2 &= \langle \tilde{X}_{out}^2(\omega) \rangle - \langle X_{out}(\omega) \rangle^2 \\
&= \frac{1}{2^3} 4 \left( \frac{\epsilon \bar{\kappa} (2\epsilon^2 + \alpha^* \beta + \alpha \beta^*) + 4\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \right)
\end{aligned}$$

y a partir de (A.54) se tiene finalmente:

$$: S_{X_{out}}(\omega) := \frac{1}{2^3} 4 \frac{\epsilon \bar{\kappa} ((2\epsilon^2 + 2\kappa_2 \kappa_1 + 8\omega^2) + 4\epsilon \bar{\kappa})}{\kappa_2^2 \kappa_1^2 - 2\kappa_2 \kappa_1 \epsilon^2 + 4\kappa_2^2 \omega^2 + 4\omega^2 \kappa_1^2 + 16\omega^4 + 8\omega^2 \epsilon^2 + \epsilon^4}$$

Similarmente la cuadratura  $Y$  está definida por

$$\tilde{Y}_{out}(\omega) = \frac{1}{i 2^{3/2}} \left( C_{out}(\omega) + D_{out}(\omega) - C_{out}^\dagger(\omega) - D_{out}^\dagger(\omega) \right)$$

y la correlación a diferentes frecuencias estará dada por

$$\begin{aligned}
\langle : Y_{out}(\omega) Y_{out}(\omega') : \rangle &= -\frac{1}{2^3} \left( 4 \left( \frac{\epsilon \bar{\kappa} (2\epsilon^2 + \alpha^* \beta + \alpha \beta^*)}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \right) \delta(\omega + \omega') \right. \\
&\quad - 4 \left( \frac{4\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \right) \delta(\omega - \omega') \\
&\quad + \kappa_1 \alpha_0 \alpha_0 + \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0 - \kappa_1 |\alpha_0|^2 - \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0 \\
&\quad + \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0 + \kappa_2 \beta_0 \beta_0 - \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0^* - \kappa_2 |\beta_0|^2 \\
&\quad - \kappa_1 |\alpha_0|^2 - \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0^* + \kappa_1 \alpha_0^* \alpha_0^* + \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0^* \\
&\quad \left. - \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0^* - \kappa_2 |\beta_0|^2 + \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0^* + \kappa_2 \beta_0^* \beta_0^* \right) \delta(\omega) \delta(\omega') \\
\langle \tilde{Y}(\omega) \rangle &= \frac{1}{2^{3/2} i} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 - \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* - \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega) \\
\langle \tilde{Y}(\omega') \rangle &= \frac{1}{2^{3/2} i} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 + \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* + \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega') \\
\langle \tilde{Y}(\omega) \rangle \langle \tilde{Y}(\omega') \rangle &= -\frac{1}{2^3} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 - \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* - \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega) \\
&\quad \times (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 - \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* - \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Y}(\omega) \rangle \langle \tilde{Y}(\omega') \rangle &= -\frac{1}{2^3} (\kappa_1 \alpha_0 \alpha_0 + \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0 - \kappa_1 \alpha_0 \alpha_0^* - \bar{\kappa} \alpha_0 \beta_0^* \\ &\quad + \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0 + \kappa_2 \beta_0 \beta_0 - \bar{\kappa} \beta_0 \alpha_0^* - \kappa_2 \beta_0 \beta_0^* \\ &\quad - \kappa_1 \alpha_0^* \alpha_0 - \bar{\kappa} \alpha_0^* \beta_0 + \kappa_1 \alpha_0^* \alpha_0^* + \bar{\kappa} \alpha_0^* \beta_0^* \\ &\quad - \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0 - \kappa_2 \beta_0^* \beta_0 + \bar{\kappa} \beta_0^* \alpha_0^* + \kappa_2 \beta_0^* \beta_0^*) \delta(\omega) \delta(\omega') \end{aligned}$$

Por lo tanto, el espectro de las fluctuaciones en función de la frecuencia está dado por

$$\begin{aligned} \langle : \Delta \tilde{Y}_{out}(\omega) : \rangle^2 &= \langle \tilde{Y}^2(\omega) \rangle - \langle \tilde{Y}(\omega) \rangle^2 \\ &= -\frac{1}{2^3} 4 \left( \frac{\epsilon \bar{\kappa} (2\epsilon^2 + \alpha^* \beta + \alpha \beta^*) - 4\kappa_1 \kappa_2 \epsilon^2}{|\epsilon^2 - \beta \alpha|^2} \right) \\ : S_Y(\omega) &:= -\frac{\epsilon \bar{\kappa} (\epsilon^2 - 2\epsilon \bar{\kappa} + \kappa_2 \kappa_1 + 4\omega^2)}{\kappa_2^2 \kappa_1^2 - 2\kappa_2 \kappa_1 \epsilon^2 + 4\kappa_2^2 \omega^2 + 4\omega^2 \kappa_1^2 + 16\omega^4 + 8\omega^2 \epsilon^2 + \epsilon^4} \end{aligned}$$

lo cual muestra que la fluctuación no cambia si el campo dentro de la cavidad está desplazado por una cantidad  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  en cada modo, Sin embargo a partir de (A.52) puede notarse que los dos campos output están también desplazados por una cantidad  $\sqrt{\kappa_1} \alpha_0$  y  $\sqrt{\kappa_2} \beta_0$  respectivamente.

Ahora sabemos que el espectro de la fluctuación en términos del espectro normalmente ordenado está dado por

$$S_Y(\omega) =: S_Y(\omega) : - \frac{\epsilon \bar{\kappa} (\epsilon^2 - 2\epsilon \bar{\kappa} + \kappa_2 \kappa_1 + 4\omega^2)}{\kappa_2^2 \kappa_1^2 - 2\kappa_2 \kappa_1 \epsilon^2 + 4\kappa_2^2 \omega^2 + 4\omega^2 \kappa_1^2 + 16\omega^4 + 8\omega^2 \epsilon^2 + \epsilon^4} + \frac{1}{4}$$

luego se tiene

$$S_Y(0) =: S_Y(0) : - \frac{\epsilon \bar{\kappa}}{(\epsilon + \bar{\kappa})^2} + \frac{1}{4}$$

ahora sabemos que

$$S_Y(0) = \frac{1}{4} - \frac{\epsilon \bar{\kappa}}{(\epsilon + \bar{\kappa})^2} = \frac{(\epsilon - \bar{\kappa})^2}{4(\epsilon + \bar{\kappa})^2}$$

entonces el parámetro de compresión

$$e^{-r} = \frac{(\epsilon - \bar{\kappa})^2}{4(\epsilon + \bar{\kappa})^2}$$

luego

$$r = -2 \ln [|\epsilon - \bar{\kappa}| / 2 |\epsilon + \bar{\kappa}|]$$

Por otro lado tenemos que  $\alpha_0 = -\frac{i2(\epsilon \varepsilon_2 - \varepsilon_1^* \kappa_2)}{\epsilon^2 - \kappa_1 \kappa_2}$  y  $\beta_0^* = \frac{2i(\epsilon \varepsilon_1^* - \kappa_1 \varepsilon_2)}{\epsilon^2 - \kappa_1 \kappa_2}$

$$\langle \tilde{X}(\omega) \rangle = \frac{1}{2^{3/2}} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 + \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* + \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega)$$

$$\langle \tilde{Y}(\omega) \rangle = \frac{1}{2^{3/2} i} (\sqrt{\kappa_1} \alpha_0 + \sqrt{\kappa_2} \beta_0 - \sqrt{\kappa_1} \alpha_0^* - \sqrt{\kappa_2} \beta_0^*) \delta(\omega)$$

Luego los dos campos de salida se comportan como si estuvieran desplazados por un valor  $\alpha = \sqrt{\kappa_1} \alpha_0$  y  $\beta = \sqrt{\kappa_2} \beta_0$ , luego el parámetro de desplazamiento a la salida se puede estimar a partir de

$$\alpha = -\frac{i2\sqrt{\kappa_1}(\epsilon \varepsilon_2 - \varepsilon_1^* \kappa_2)}{\epsilon^2 - \kappa_1 \kappa_2}$$

$$\beta = -\frac{2i\sqrt{\kappa_2}(\epsilon \varepsilon_1 - \kappa_1 \varepsilon_2^*)}{\epsilon^2 - \kappa_1 \kappa_2}$$

si ponemos  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^* = \eta$ ; tenemos que

$$\alpha = -\frac{i2\eta\sqrt{\kappa_1}(\varepsilon - \kappa_2)}{\varepsilon^2 - \kappa_1\kappa_2}$$

$$\beta = -\frac{2i\eta^*\sqrt{\kappa_2}(\varepsilon - \kappa_1)}{\varepsilon^2 - \kappa_1\kappa_2}$$

si se considera que las dos tasas de decaimiento son las mismas tenemos  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$

$$\alpha = -\frac{i2\eta\sqrt{\kappa}}{\varepsilon + \kappa} = \beta^*$$



## B. DESCOMPOSICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En este apéndice presentamos los detalles de la descomposición de la transformación que define la Transformada de Fourier Cuántica que actúa sobre qutrits.

A partir de la discusión matemática de la sección 4.4.2 se ve que la Transformada de Fourier en la base  $\{|2\rangle, |0\rangle, |0\rangle\}$  está dada por

$$F = -i \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{22} & F_{21} & F_{20} \\ F_{12} & F_{11} & F_{10} \\ F_{02} & F_{01} & F_{00} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

En el capítulo 2 se mostró que una transformación unitaria que actúa sobre un espacio de tres dimensiones puede descomponerse en el producto de tres operaciones que actúan sobre un subespacio de dos dimensiones. Sin embargo, dado que la intención era simplemente que esta descomposición se puede realizar en esa sección no se determinaron las fases relativas. Por lo tanto la descomposición del operador está dado por

$$F = \begin{pmatrix} e^{i\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\kappa+\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & ie^{i\lambda} \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ ie^{-i\lambda} \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & ie^{i\epsilon} \sin \alpha \\ 0 & ie^{-i\epsilon} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -e^{i\delta} \sin \beta & 0 \\ -e^{-i\delta} \sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en la que se ha añadido una transformación diagonal que actúa en el espacio de tres dimensiones y permite fijar las fases apropiadas. De aquí se ve que los elementos de la transformada de fourier está dadas por

$$\begin{aligned} F_{22} &= e^{i\kappa} \cos \gamma \cos \beta + e^{i\kappa} e^{i\lambda} e^{-i\epsilon} e^{-i\delta} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta. \\ F_{21} &= -e^{i\kappa} e^{i\delta} \cos \gamma \sin \beta + e^{i\kappa} e^{i\lambda} e^{-i\epsilon} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta. \\ F_{20} &= -ie^{i\kappa} e^{i\lambda} \sin \gamma \cos \alpha. \\ F_{12} &= -e^{-i(\kappa+\eta+\delta)} e \cos \alpha \sin \beta. \\ F_{11} &= -e^{-i(\kappa+\eta)} \cos \alpha \cos \beta. \\ F_{10} &= -ie^{-i(\kappa+\eta+\epsilon)} \sin \alpha. \\ F_{02} &= ie^{i\eta} e^{-i\lambda} \sin \gamma \cos \beta - ie^{i\eta} e^{-i\epsilon} e^{-i\delta} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta. \\ F_{01} &= -ie^{i\eta} e^{-i\lambda} e^{i\delta} \sin \gamma \sin \beta - ie^{i\eta} e^{-i\epsilon} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta. \\ F_{00} &= -e^{i\eta} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

Comparando las Ecs. (B.1) y (B.2) se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$ie^{i(\eta-\lambda)} \sin \gamma \cos \beta - ie^{i(\eta-\epsilon-\delta)} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.3})$$

$$-ie^{i(\eta-\lambda+\delta)} \sin \gamma \sin \beta - ie^{i(\eta-\epsilon)} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.4})$$

$$-e^{i\eta} \cos \gamma \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.5})$$

$$-e^{-i(\kappa+\eta+\delta)} \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{4i\pi/3} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

$$-e^{-i(\kappa+\eta)} \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2i\pi/3} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.8})$$

$$-ie^{-i(\kappa+\eta+\epsilon)} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.9})$$

$$e^{i\kappa} \cos \gamma \cos \beta + e^{i(\kappa+\lambda-\epsilon-\delta)} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2i\pi/3} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.10})$$

$$-e^{i(\kappa+\delta)} \cos \gamma \sin \beta + e^{i(\kappa+\lambda-\epsilon)} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{4i\pi/3} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.11})$$

$$-ie^{i(\kappa+\lambda)} \sin \gamma \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\pi/2} \quad (\text{B.12})$$

Las condiciones para las fases, desde las ecuaciones (B.5, B.6, B.8, B.9, B.12) son:

$$\kappa + \eta + \delta = -11\pi/6 + m\pi$$

$$\kappa + \eta = -7\pi/6 + n\pi$$

$$\kappa + \eta - \epsilon = l\pi$$

$$\kappa + \lambda = p\pi$$

$$\eta = k\pi - \pi/2$$

las soluciones son

$$\begin{aligned} \epsilon &= -7\pi/6 + (n-l)\pi; & \kappa &= -2\pi/3 + (n-k)\pi; \\ \eta &= k\pi - \pi/2; & \lambda &= 2\pi/3 + (n+p-k)\pi; \\ \delta &= -2\pi/3 + (m-n)\pi; \end{aligned}$$

relaciones que aparecen en las otras ecuaciones:

$$\begin{aligned} \eta - \lambda &= 5\pi/6 - (n+p)\pi; & \eta - \epsilon - \delta &= \frac{5}{6}\pi + \pi/2 + (k+l-m)\pi; \\ \eta - \lambda + \delta &= \pi/6 - (p-m)\pi; & \eta - \epsilon &= \pi/6 + \pi/2 - (n-l)\pi; \end{aligned}$$

Reemplazando en las restantes ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{i5\pi/6} (-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta - e^{i5\pi/6+i\pi/2} (-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{-1}{\sqrt{3}}, \\ e^{i\pi/6} (-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta + e^{i\pi/6+i\pi/2} (-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ e^{i\kappa} \cos \gamma \cos \beta + e^{i\kappa} e^{i\lambda} \sin \gamma e^{-i\epsilon} e^{-i\delta} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2i\pi/3} e^{-i\pi/2}, \\ -e^{i\kappa} e^{i\delta} \cos \gamma \sin \beta + e^{i\kappa} e^{i\lambda} e^{-i\epsilon} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{4i\pi/3} e^{-i\pi/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3 + i\sqrt{3}) (-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta + (\sqrt{3} + 3i) (-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= -2, \\ -3(-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta + \sqrt{3}(-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= -2, \\ \sqrt{3}(-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta + 3(-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= 0, \\ (-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta &= \frac{1}{2}, \\ (-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3 + i\sqrt{3})(-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta + (-\sqrt{3} + 3i)(-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= 2, \\
3(-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta - \sqrt{3}(-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= 2, \\
\sqrt{3}(-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta + 3(-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= 0, \\
(-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta &= \frac{1}{2}, \\
(-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= -\frac{1}{2\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta &= \frac{1}{2}, & (-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta &= \frac{1}{2}, \\
(-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{-1}{2\sqrt{3}}, & (-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \\
\frac{(-1)^{p-m} \sin \beta}{(-1)^{n+p} \cos \beta} &= 1, & \frac{(-1)^{k+l-m} \sin \beta}{(-1)^{n-l} \cos \beta} &= 1, \\
\frac{(-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha}{(-1)^{p-m} \sin \gamma} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{(-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha}{(-1)^{n+p} \sin \gamma} &= -\frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

de donde  $\beta = \pi/4$ . Se puede reescribir las ecuaciones en la forma.

$$\begin{aligned}
e^{i\kappa} \cos \gamma \cos \beta + e^{i\kappa} e^{i\lambda} e^{-i\epsilon} e^{-i\delta} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2i\pi/3} e^{-i\pi/2}, \\
e^{-2i\pi/3} (-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta + e^{i11\pi/6} (-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\pi/6}, \\
e^{-5i\pi/6} (-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta + e^{-5i\pi/6 + \pi/2} (-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)(-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
(3 + i\sqrt{3})(-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta - (\sqrt{3} - 3i)(-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= -2, \\
3(-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta - \sqrt{3}(-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= -2, \\
\sqrt{3}(-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta + 3(-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= 0, \\
(-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta &= -\frac{1}{2}, \\
(-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

escribiendo las relaciones de las fases

$$\begin{aligned}
\kappa + \lambda - \epsilon - \delta &= 11\pi/6 + (p + l - m)\pi, \\
\kappa + \delta &= -\frac{4}{3}\pi + (m - k)\pi, \\
\kappa + \lambda - \epsilon &= \frac{7}{6}\pi + (p + l - n)\pi,
\end{aligned}$$

se obtiene en las ecuaciones restantes

$$\begin{aligned}
-e^{i\kappa} (\cos \gamma) e^{i\delta} \sin \beta + e^{i\kappa} e^{i\lambda} (\sin \gamma) e^{-i\epsilon} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{4i\pi/3} e^{-i\pi/2}, \\
(-1)^{m-k} e^{-i\pi/6} \cos \gamma \sin \beta - (-1)^{p+l-n} e^{-i\pi/6 + i\pi/2} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= \frac{-1}{\sqrt{3}}, \\
(-1)^{m-k} (3 - i\sqrt{3}) \cos \gamma \sin \beta - (-1)^{p+l-n} (\sqrt{3} + i3) \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= -2, \\
3(-1)^{m-k} \cos \gamma \sin \beta - \sqrt{3}(-1)^{p+l-n} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= -2, \\
-\sqrt{3}(-1)^{m-k} \cos \gamma \sin \beta - 3(-1)^{p+l-n} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= 0, \\
(-1)^{p+l-n} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\
(-1)^{m-k} \cos \gamma \sin \beta &= \frac{-1}{2},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} (-1)^{n-k} \cos \gamma \cos \beta &= \frac{-1}{2}, & (-1)^{p+l-m} \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ (-1)^{m-k} \cos \gamma \sin \beta &= \frac{-1}{2}, & (-1)^{p+l-n} \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ (-1)^{n+p} \sin \gamma \cos \beta &= \frac{1}{2}, & (-1)^{k+l-m} \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta &= \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \\ (-1)^{p-m} \sin \gamma \sin \beta &= \frac{1}{2}, & (-1)^{n-l} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \cos \gamma \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}}, & (-1)^m \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ (-1)^n \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}, & (-1)^p \sin \gamma \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ (-1)^l \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \epsilon &= -7\pi/6 + (n-l)\pi & \kappa + \eta + \delta &= -11\pi/6 + m\pi \\ \eta &= k\pi - \pi/2 & \kappa + \eta &= -7\pi/6 + n\pi \\ \delta &= -2\pi/3 + (m-n)\pi & \rightarrow \kappa + \eta - \epsilon &= l\pi \\ \kappa &= -2\pi/3 + (n-k)\pi & \kappa + \lambda &= p\pi \\ \lambda &= 2\pi/3 + (n+p-k)\pi & \eta &= k\pi - \pi/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\pi/6, \quad \eta = -\pi/2, \quad \delta = -2\pi/3, \quad \kappa = \pi/3, \quad \lambda = 2\pi/3 \\ \cos \alpha &= -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Para verificar las soluciones multiplicamos las diferentes matrices

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & ie^{2i\pi/3} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ ie^{-2i\pi/3} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & ie^{-i\pi/6} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & ie^{i\pi/6} \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -e^{-2i\pi/3} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -e^{2i\pi/3} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3} & \frac{1}{12}i(1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})\sqrt{3} \\ \frac{1}{12}(\sqrt{3}+i)\sqrt{3}(-1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{6}(\sqrt{3}+i)\sqrt{3} & \frac{1}{12}i(\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}+i)\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}i\sqrt{3} & -\frac{1}{3}i\sqrt{3} & -\frac{1}{3}i\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3}i\sqrt{3} & -\frac{1}{3}i\sqrt{3} & -\frac{1}{3}i\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto las transformaciones unitarias que permiten la descomposición de la Transformada de Fourier para Qutrits son

$$U_d = \begin{pmatrix} e^{i\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\kappa+\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & ie^{i\epsilon} \sin \alpha \\ 0 & ie^{-i\epsilon} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & i\frac{e^{-i\pi/6}}{\sqrt{3}} \\ 0 & i\frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & ie^{i\lambda} \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ ie^{-i\lambda} \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & i\frac{e^{2i\pi/3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ i\frac{e^{-2i\pi/3}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} \cos \beta & -e^{i\delta} \sin \beta & 0 \\ -e^{-i\delta} \sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{-2i\pi/3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{e^{2i\pi/3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estas relaciones se usan en el capítulo 4 a fin de determinar los parámetros físicos, asociados a los grados de libertad de los iones atrapados, que posibilitan la realización física de la Transformada de Fourier para qutrits.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Peres, “Quantum Theory: Concepts and Methods”. Kluwer Academic, Dordrecht, (1993).
- [2] H. Golstein, “Classical Mechanics”, Addison Wesley (1980)
- [3] C. Cohen-Tannoudji, “Quantum Mechanics”, John Wiley and Sons, 1989.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, “Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics”, John Wiley and Sons, 1989.
- [5] S. Haroche, G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, and J. M. Raimond AIP Conference Proceedings Vol 551(1) pp. 143-157. January 30, (2001)
- [6] H. J. Metcalf y P. van der Straten, “Laser Cooling and Trapping” Springer Verlag, New York, (1999)
- [7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information” Cambridge Univ. Press., Cambridge, (2000).
- [8] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.*, **21**, 467 (1982)
- [9] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys.Rev.Lett.* **76**, 722 (1996); C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys.Rev. A* **54** 3824 (1996).
- [10] Q. A. Turchette et al., C. S. Wood, B. E. Kibbenett96ng, C. J. Myatt, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3631 (1998).
- [11] S. Schneider, G.J. Milburn, *Phys. Rev. A* **65**, 042107 (2002).
- [12] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett* **75**, 4714 (1995).
- [13] D. Deutsch and R. Joza. *Proc. R. Soc. London A*, 439 (1992).
- [14] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Bassard, L. Salvail, and J. Smolin *J. Criptology* **5**, 5-28 (1992).
- [15] A. Einstein, N. Rosen and Podolski, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [16] J. S. Bell “Speakable and unspeakable in quantum mechanics” Cambridge Univ. Press., Cambridge, (1998)
- [17] G. Vidal, R.F. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002)
- [18] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245(1998); S. Hill and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).

- 
- [19] P. Rungta, V. Buzek, C. M. Caves, M. Hillery, G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **64**, 042315 (2001).
- [20] A. Peres, *Phys. Rev. Lett* **77**, 1413 (2002).
- [21] A. Peres, *Phys.Rev.Lett.* **77** (1996) 1413-1415
- [22] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996).
- [23] W. Dür, G. Vidal, J. I. Cirac, N. Linden, S. Popescu, *Phys. Rev. Lett* **87**, 137901 (2001).
- [24] R.Guzmán, J. L. Romero, J. C. Retamal y C. Saavedra, *Phys. Lett. A.* **323**, 382(2004).
- [25] D. P Dvincenzo *Science*, 275(1995).
- [26] D. Deutsch *Proc. R. Soc. London A*, 425 (1989).
- [27] D. P Dvincenzo *Phys. Rev. A* **51**, 1015(1995).
- [28] C. W. Gardiner, “Handbook of stochastic methods”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1985).
- [29] C. W. Gardiner and P. Zoller “Quantum noise”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2000).
- [30] J. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [31] I. L. Chuang, N. Gershenfeld, and M. Kubinec, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3408 (1998).
- [32] R. Laflamme, E. Knill, W. H. Zurek, P. Catasti, and S. V. S. Mariappan, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **356**, 1941 (1998).
- [33] D. G. Cory, M. D. Price, W. Maas, E. Knill, R. Laflamme, W. H. Zurek, T. F. Havel, and S. S. Somaroo, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2152 (1998).
- [34] D. Loss and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
- [35] B. E. Kane, *Nature (London)* **393**, 133 (1998).
- [36] G. Burkard, D. Loss, and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. B* **59**, 2070 (1999).
- [37] T. P. Orlando, J. E. Mooij, L. Tian, C. H. van der Wal, L. Levitov, S. Lloyd, and J. J. Mazo, *Phys. Rev. B* **60**, 15398 (1999).
- [38] Y. Yu, S. Han, X. Chu, S. Chu, and Z. Wang, *Science* **296**, 889 (2002).
- [39] Y.A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D.V. Averin, J.S. Tsai, *Nature* **421**, 823 (2003); T. Yamamoto, Y. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, D. V., and J. S. Tsai, *Nature* **425**, 944 (2003).
- [40] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai, *Nature* **398**, 786 (1999); *Phys. Rev. Lett.* **87**, 246601 (2002); *Phys. Rev. Lett.* **88**, 047901 (2002). *Phys. Rev. A* **67**, 044301 (2003).
- [41] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
- [42] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M. H. Devoret, *Science* **296**, 886 (2002).

- 
- [43] C. P. Yang and S. I. Chu, *Phys. Rev. A* **67**, 042311 (2003)
- [44] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J.M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1175 (1983).
- [45] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [46] D. Bouwmeester *et al.*, *Nature (London)* **390**, 575 (1997).
- [47] D. Boschi *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998).
- [48] Alber G., Delgado A., Gisin N., Jex I, *Journal of Physics A* **34**, 42 (2001).
- [49] P. W. Shor, *Proceedings, 35<sup>th</sup> Annual Symposium on Fundamental of Computer Science*, IEEE Press, Los Alamos, CA(1994).
- [50] A. Ekert and R. Jozsa, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1 (1996).
- [51] B. M. Terhal, *Phys. Lett. A* **271**, 319 (2000).
- [52] A. B. Klimov, R. Guzmán, J. C. Retamal y Carlos Saavedra, *Phys. Rev. A* **67**, 062313(2003).
- [53] R. J. Glauber, en *Quantum Optics and electronics*. Les Houches, editado por C. De Witt, A. Blandit y Cohen-Tannoudji (Gordon y Breach, New York 1965)
- [54] L. Mandel, *Optics Lett.*, **4**, 205, (1979)
- [55] H. P. Yuen y J. H. Shapiro, *IEEE, trans. inf. theory* **24**, 78 (1980).
- [56] H. P. Yuen y V. W. S. Chan, *Opt. Lett.*, **8**, (1983), 177; B. L. Schumaker, *Opt. Lett.*, **9**, (1984), 189.
- [57] *Squeezed Light*, editado por O. Hirota (Elsevier, Netherlands 1992).
- [58] G. J. Milburn, *J. Phys. A*, **17**, 737, (1984)
- [59] C. Caves y B. L Schumaker, *Phys. Rev. D*, **31**, 3068, (1985)
- [60] R. Loudon, P. L. Knight, *Journal of Moderns Optics*, **34**, 709 (1987).
- [61] H. A. Bachor, “A Guide to Experiments in Quantum Optics”, Wiley-VCH, Weinheim (1998)
- [62] J. Preskill, <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.
- [63] M. O. Scully y M. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge university Press (1997)
- [64] J. C. Retamal, “Modern Challenges in Quantum Optics”, M. Orszag y J. C. Retamal, Eds., Springer Verlag New Yorc, (2000) .
- [65] C. W. Gardiner, M. J. Collett, *Phys. Rev. A*, **31**, 3761 (1985)
- [66] Walter Greiner, “Quantum Mechanics Symmetries (Research and Perspectives in Neurosciences)”, Springer-Verlag Telos; (January 1994) .
- [67] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin y H. Weinfurter, *Phys. Rev. A* **52**, 3457 (1995)



- 
- [68] M. Mottonen, J. J. Vartiainen, V. Bergholm, M. M. Salomaa, “Universal quantum computation”, quant-ph/0404089
- [69] C. H. Bennett, S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992)
- [70] G. Toth, C. Simon, J. I. Cirac, Physical Review A **68**, 062310 (2003)
- [71] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, P. Horodecki, Optimization of entanglement witnesses, quant-ph/0005014 (2000)
- [72] J. Schliemann, J. I. Cirac, M. Kus, M. Lewenstein, D. Loss; Phys. Rev. A, **64**, 022303 (2001)
- [73] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Berenstein y P. Bertani. Phys. Rev. Lett. **73**,58, (1994)
- [74] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**,89 (1963)
- [75] D. Meschede, H. Walther y G. Muller, Phys. Rev. Lett. **54**,551 (1985)
- [76] P. Filipowicz, J. Javanainen, P. Meystre Phys. Rev. A **34**,3077 (1986)
- [77] M. O. Scully, W. E. Lamb, M. J. Stephen, *Proceedings of the International Conference on the physics of quantum Electronics*, Puerto Rico, 1965. Editado por P. Kelley, B. Lax y P. Tannanwald (New York, 1966), p 75
- [78] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner and R. Blatt, Nature **422**, 408-411 (2003).
- [79] W. Paul ,Rev. Mod. Phys. **62**, 531-540 (1990)
- [80] A. Barenco, C. h. Bennett, r. Cleve, D. P. Divicenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, y H. Weinfurter Phys. Rev. A **52**,3457 (1995)
- [81] L. Davidovich, M. Orszag y N. Zagury, Phys. Rev. A **54**,5118 (1996)
- [82] C. H. Bennett Phys. Rev. Lett. **68**,3121 (1992)
- [83] K.-P. Marzlin y J. Audresht, Phys. Rev. **57**,1333 (1998)
- [84] D. Wineland y G. Dehmelt, Bull. Am. Phys. **20**,637 (1975)
- [85] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. E. Toscheck y H. G. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **41**,233 (1978)
- [86] J. Lawall, S. Kulin, B. Saubamea, N. Bigelow, M. Leduc y C. Cohen- Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **75**,4194 (1995)
- [87] J. I. Cirac, A. S. Parkins, R. Blatt y P. Zoller, Phys. Rev. A **70**,556 (1993)
- [88] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano y D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett, **76**,1796 (1996)
- [89] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. A **53**, 1295(1996)
- [90] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887(1996)
- [91] A. Rauschenbeutel, G. Nagues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche Phys. Rev. Lett. **83**, 5166(1999)

- 
- [92] E. Solano, G. S. Agarwal, and H. Walther Phys. Rev. Lett. 90, 027903 (2003)
- [93] A. Biswas and G. S. Agarwal, Phys. Rev. A 69, 062306 (2004)
- [94] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 165 (1952).
- [95] A. Aspect P. Grangier G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [96] Yoon-Ho Kim, Phys. Rev. A **67**, 040301(R) (2003).
- [97] X. Zou, K. Pahlke, W. Mathis,
- [98] R. F. Werner and M. M. Wolf, Phys. Rev. A **61**, 062102 (2000); M. Zukowski, C. Brukner, Phys. Rev. Lett **88**, 210401 (2002).
- [99] O. Guehne, P. Hyllus, D. Bruss, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello, A. Sanpera, Phys. Rev. A **66**, 062305 (2002).
- [100] X. X. Yi, H. T. Cui, X. G. Wang, Phys. Lett. A **306**, 286 (2003).
- [101] E. Gerjuoy, Phys. Rev. A **67**, 052308 (2003).
- [102] J. B. Xu, S. B. Li, quant-ph/0303026.
- [103] C. M. Caves and G. J. Milburn, Opt. Comm. **179**, 439 (2000).
- [104] D. Bruss and C. Macchiavello, Phys. Rev. Lett 88, 127901 (2002); N. J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, and N. Gisin, Phys. Rev. Lett. **88**, 127902 (2002).
- [105] V. M. Kendon, K. Zyczkowski, W. J. Munro, Phys. Rev. A **66**, 062310 (2002)
- [106] M. Dusek, Discrimination of the Bell states of qudits by means of linear optics, quant-ph/0107119.
- [107] K. A. Dennison, W. K. Wootters, quant-ph/0106058.; P. Rungta , W. J. Munro , K. Nemoto , P. Deuar , G. J. Milburn , C. M. Caves, “Directions in Quantum Optics ”, Carmichael, H.J.; Glauber, R.J.; Scully, M.O. (Eds.), Springer (2001)
- [108] N. J. Cerf , S. Massar , S. Pironio, Phys. Rev. Lett. **89**, 080402 (2002)
- [109] S. D. Bartlett, H. Guise, B. C. Sanders, Phys. Rev. A **65**, 052316 (2002)
- [110] R.T.Thew, K.Nemoto, A.G.White, W.J. Munro, Phys. Rev. A **66**, 012303 (2002)
- [111] J. Bouda, V. Buzek, Journal of Phys. A Math. Gen. **34** 4301-4311 (2001).
- [112] T. Yamamoto, K. Tamaki, M. Koashi, N. Imoto, Phys. Rev. A **66**, 064301 (2002).
- [113] Caslav Brukner, Marek Zukowski, and Anton Zeilinger quant-ph/ 0205080.
- [114] Alipasha Vasiri, George Weihs, and Anton Zeilinger, prl **89**, 240401 (2002).
- [115] C. Raab, J. Bolle, H. Obetrst, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, Appl. Phys. B **67**, 683 (1998).
- [116] D. Reiss, A. Lindner, and R. Blatt, PRA **54**, 5133 (1996).
- [117] Hilmar Oberst, “Resonance fluoresce of single Barium atoms”, Diplomarbeit Innsbruck University, 1999.
- [118] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **14**,664 (1926)

- 
- [119] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**,2529 (1963).
- [120] C. M. Caves, Phys. Rev. D **23**,1693 (1981)
- [121] D. F. Walls, Nature **324**,210 (1986)
- [122] H. P Yuen, Phys. Rev. A **23**,2226 (1976)
- [123] N. N. Bogoliubov y D. V. Shirkov, *Quantum Fields* (Benjamin-Cummings, Massachusetts, 1983).
- [124] D. Mundarain, M. Orszag, Optics Express, **4**,131 (1998).
- [125] A. S. Sørensen and K. Mølmer Phys. Rev. A **66**, 022314 (2002)
- [126] N. Vilenkin and A. Klimyk, *Representation of Lie Group and Special Functions* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1991), Vols. 1-3.
- [127] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [128] H. Walther, Phys. Rep. **219** , 263 (1992); O. Benson, G. Raithel and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **72**, 3506 (1994).
- [129] R. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [130] M. Tavis and F. W. Cummings, Phys. Rev. **170**, 379 (1968).
- [131] M. Koziarowski, A. A. Mamedov and S. M. Chumakov, Phys. Rev. A **42**, 1762 (1990); M. Koziarowski, S. M. Chumakov, J. Światłowski and A. A. Mamedov, *ibid.* **46**, 7220 (1992); S. M. Chumakov and M. Koziarowski, Quant. and Semi-class. Optics, **8**, 775 (1996).
- [132] G. Drobny and I. Jex, Optics Comm. **102**, 141(1993).
- [133] P. L. Knight and B. W. Shore, Phys. Rev. A **48**, 642(1993).
- [134] R. Loudon and P. L. Knight Journal of Modern Optics, **34**,709(1987).
- [135] C. M. Caves and B. L. Schumaker, Phys, Rev. A. **31** 3068, (1985)
- [136] F. Casagrande, L.A. Lugiato, W. Lange and H. Walther, Phys. Rev. A, **48**, 790 (1993).
- [137] S. J. Phoenix and P. L. Knight, Phys. Rev. Lett. **66**, 2833 (1991).
- [138] B. J. Krauss J. I. Cirac, Discrete entanglement distribution with squeezed light, quant-ph/0307158(2003).