Capítulo 9

Dinámica del cuerpo rígido

9.1. Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido no es más que un sistema de partículas donde las distancias entre ellas permanecen invariable, por lo tanto aplica todo lo de un sistema de partículas que ya se estudió. La descripción del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio, es materia de otro curso (Mecánica racional). Por ahora nos limitaremos a la descripción del movimiento plano de un cuerpo rígido, es decir cuando todas las velocidades son paralelas a un plano fijo. Como se explicará, la novedad respecto a un sistema de partículas, es la forma específica como se calculan el momentum angular y la energía cinética del cuerpo, no habiendo más cambios de fondo. La cinemática del cuerpo rígido es una cuestión previa que debe ser explicada. La rigidez del cuerpo introduce simplificaciones a la descripción del movimiento de ese sistema de partícula pues no es necesario conocer las posiciones ni el movimiento de cada una de ellas, sino que el movimiento de unas pocas determina el de todas.

9.2. Cuerpo rígido continuo

Este es un concepto idealizado donde nos olvidamos de las partículas reales que componen el cuerpo, los átomos o moléculas, y el cuerpo es reemplazado por un continuo de masa donde las "*partículas*" son elementos infinitésimos de volumen dV que tiene alguna cantidad de masa también infinitesimal que llamaremos dm. La rigidez se establece aquí manteniendo constantes las distancias entre los puntos de este cuerpo. Esta es otra idealización porque en la vida real no existen cuerpos rígidos. Todos loscuerpos son deformables en alguna medida.

9.3. Cinemática de un cuerpo rígido en el espacio

Un cambio arbitrario de posición de un cuerpo rígido en el espacio puede siempre ser reducido a una traslación paralela seguida de una rotación en torno a un eje fijo. Sin embargo este hecho no es tan simples entender. La cinemática y dinámica de un cuerpo rígido en el espacio es normalmente un tema dificil de comprender por los alumnos. Por esa razón en este curso nos limitaremos a analizar la dinámica y cinemática de un cuerpo rígido en dos dimensiones. Cuando un cuerpo tal como una lámina se mueve sobre un plano fijo, el ángulo que el cuerpo gira se define entre alguna línea fija en el cuerpo con alguna línea fija en el plano.

9.4. Cinemática plana de un cuerpo rígido

9.4.1. Desplazamientos de un cuerpo rígido

Para desplazamientos de un cuerpo rígido en un plano, las cuestiones son más simples pues es bastante evidente que un cambio de posición de un cuerpo rígido en un plano, puede ser logrado de modo equivalente mediante una traslación paralela $\overrightarrow{AA'}$ seguida de una rotación en torno a un eje fijo, perpendicular al plano del movimiento, punto fijo, o bien la rotación primero seguida de la traslación. Lo mismo es cierto en tres dimensiones, pero su demostración es más engorrosa. La figura siguiente muestra lo que acontece cuando en la traslación paralela $\overrightarrow{AA'}$ un punto, digamos A pasa a ocupar su posición final A' mediante esa traslación paralela. Los otros puntos no están aún en su posición final. Basta entonces rotar el cuerpo en un cierto ángulo θ en torno al punto A' para que el cuerpo quede en su posición final. Es decir hay que girar $\overrightarrow{A'P'}$ en un ángulo θ.

Si el tiempo transcurrido es infinitésimo dt entonces todos los desplaza-

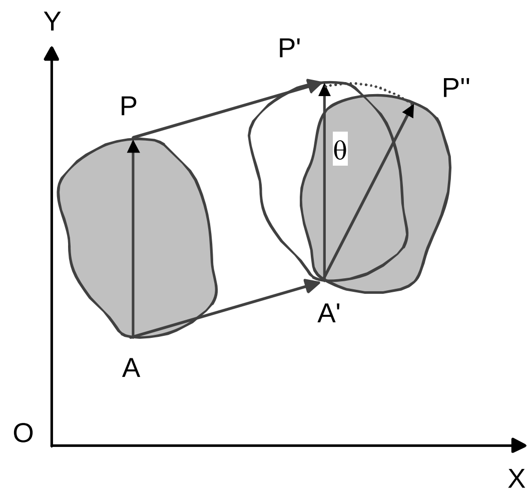


Figura 9.1: Desplazamiento plano de un cuerpo

mientos señalados son infinitésimos. Llamemos

$$\begin{aligned}
\vec{r}_P(t) &= \overrightarrow{OP}, \\
\vec{r}_P(t+dt) &= \overrightarrow{OP''}, \\
\vec{r}_A(t) &= \overrightarrow{OA}, \\
\vec{r}_A(t+dt) &= \overrightarrow{OA'}.
\end{aligned}$$

Para relacionar las cosas necesitamos evaluar $\overrightarrow{P'P''}$. Pero ese desplazamiento es circunferencial con centro en A' luego puede evaluarse mutiplicando la velocidad tangencial por dt. Además el vector unitario tangencial es

$$\hat{T} = \frac{\hat{k} \times \overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|},$$

luegp

$$\overrightarrow{P'P''} = \left|\overrightarrow{A'P'}\right| \dot{\theta}\hat{T}dt = \left|\overrightarrow{AP}\right| \dot{\theta}\hat{T}dt = -\dot{\theta}\hat{k} \times \overrightarrow{AP}dt.$$

Considere ahora que

$$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''},$$

y considerando que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{v}_A dt$ obtendremos

$$\vec{r}_P(t + dt) = \vec{r}_P(t) + \vec{v}_A dt - \dot{\theta}\hat{k} \times \overrightarrow{AP} dt,$$

de manera que

$$\frac{\vec{r}_P(t + dt) - \vec{r}_P(t)}{dt} = \vec{v}_A - \dot{\theta}\hat{k} \times \overrightarrow{AP},$$

y se obtiene la relación fundamental de la cinemática de un cuerpo rígido

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \tag{9.1}$$

donde se ha definido

$$\vec{\omega} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{k}, \tag{9.2}$$

la llamada velocidad angular del cuerpo. El signo colocado frente a $\vec{\omega}$ está de acuerdo a la definición del ángulo y a la regla de la mano derecha. Lo que la relación (9.1) establece es que la velocidad de un punto P es la velocidad de traslación del cuerpo con la velocidad del punto A más lo que resulta de la rotación de P en torno de A. Para el movimiento plano la velocidad angular tiene como magnitud la derivada del ángulo que gira el cuerpo, dirección perpendicular al plano de movimiento y sentido de acuerdo a la regla de la mano derecha de acuerdo al crecimiento del ángulo definido.

9.4.2. Condición de rigidez

De la relación (9.1) se deduce que

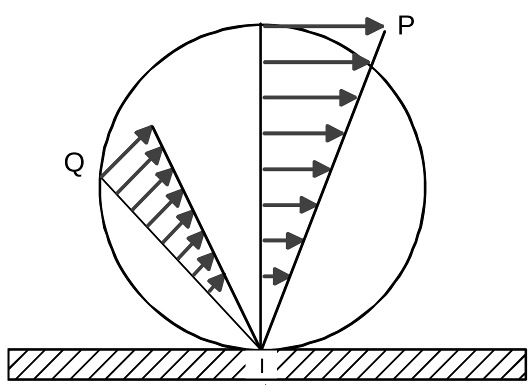
$$\vec{v}_P \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AP} \tag{9.3}$$

que se conoce como condición de rigidez pues establece que ambos puntos tienen las mismas componentes de velocidad en la línea que une los dos puntos. En otras palabras eso significa que la distancia entre los dos puntos no varía.

9.4.3. Ejemplos

Algunas figuras ayudarán a entender lo explicado.

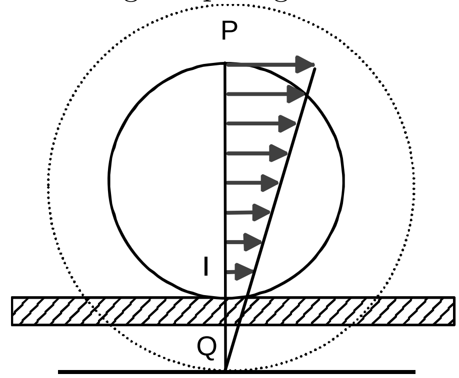
a) Disco que rueda sin deslizar. Por definición de "no deslizamiento", el punto de contacto I con el suelo tiene velocidad nula y en la figura se muestran como resultan las velocidades de puntos del disco que están sobre las rectas IP e IQ. Para este caso la relación anterior con $\vec{v}_I = \vec{0}$ se reduce a
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$$



o sea velocidades perpendiculares a $\overrightarrow{IP}$ y de magnitudes proporcionales a la distancia $\left|\overrightarrow{IP}\right|$. El punto del disco en contacto con el suelo tiene velocidad instantánea nula, pero acelera hacia arriba y luego se moverá en una curva que se denomina cicloide.

b) Disco que avanza girando y su punto de contacto resbala con velocidad $\vec{v}_I \neq \vec{0}$. Ahora será
$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP},$$
de modo que ahora todos los vectores velocidad de la figura anterior es necesario agregarles $\vec{v}_I$. Si hacemos
$$\vec{v}_I = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QI},$$
donde Q es un cierto punto cuya ubicación se muestra en la figura que sigue. Entonces será
$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QI} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP},$$
lo cual significa que los puntos del disco tienen velocidades *tal como* si el disco rodara sin resbalar sobre una línea ubicada más abajo del suelo a distancia
$$d = \frac{|\vec{v}_I|}{|\vec{\omega}|},$$

cuestión que se ilustra en la figura que sigue



En el espacio la demostración es más complicada pero sigue siendo cierto que todo cambio de posición de un cuerpo puede ser logrado equivalentemente mediante una traslación paralela seguida de una rotación en torno a un eje fijo. Ese punto Q se denomina centro instantáneo de rotación y en la sección que sigue, se generaliza.

9.4.4. Centro instantáneo de rotación

En el movimiento plano de un cuerpo rígido se tiene el siguiente teorema:

▶ Teorema 9.1
En el movimiento plano de un cuerpo rígido, siempre existe un punto de él (o de una extensión rígida de él) que tiene velocidad instantánea nula y en consecuencia el movimiento equivale a una pura rotación instantánea del cuerpo en torno de ese punto. Tal punto se conoce como centro instantáneo de rotación.

Demostracion 1 *Como*

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$

entonces si existe un punto $A = I$ con velocidad nula debe ser

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} \tag{9.4}$$

entonces $\vec{v}_P$ es perpendicular a $\overrightarrow{IP}$, o bien $\overrightarrow{IP}$ está sobre una recta en el plano de movimiento que es perpendicular a $\vec{v}_P$. En consecuencia si se conocen las velocidades (no paralelas) de dos puntos de un cuerpo $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$, el *centro instantáneo estará donde se intersecten las perpendiculares a esas dos velocidades. La excepción la constituyen los cuerpos que tienen traslaciones puras, es decir cuando el cuerpo se traslada paralelamente y entonces $\vec{\omega} = \vec{0}$. En estos casos se podría decir que el centro instantáneo está en el infinito.*

La posición del centro instantáneo también puede determinarse si se conoce una velocidad y la velocidad angular del cuerpo. En efecto de (9.4) se puede despejar $\overrightarrow{PI}$. para ello multiplique $\times\vec{\omega}$ y desarrolle

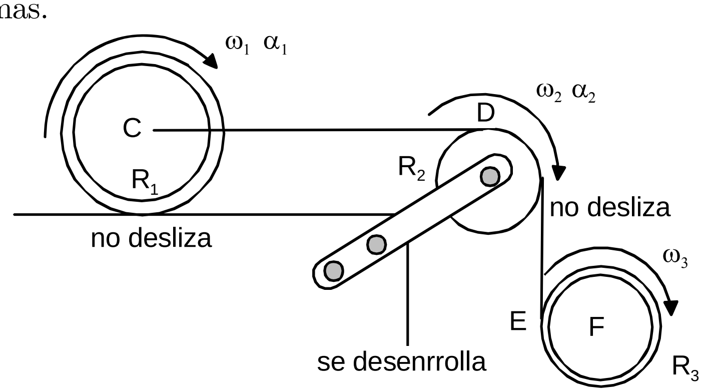
$$\begin{aligned} \vec{v}_P \times \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}) \times \vec{\omega}, \\ &= \omega^2 \overrightarrow{IP} - (\overrightarrow{IP} \cdot \vec{\omega})\vec{\omega}, \end{aligned}$$

pero $(\overrightarrow{IP} \cdot \vec{\omega}) = 0$ porque son vectores perpendiculares. Entonces si $\omega^2 \neq 0$ se deduce que

$$\overrightarrow{PI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_P}{\omega^2}. \tag{9.5}$$

9.4.5. Algunas relaciones entre velocidades y aceleraciones

En diversas aplicaciones existen relaciones debidas a la presencia de cuerdas inextensibles, cuerdas apoyadas o enrolladas en poleas, cuerpos que no resbalan y otras. En las siguiente figura se ilustra una situación donde hay diversas velocidades lineales (v), velocidades angulares (ω), aceleraciones lineales (a) y angulares (α) que están relacionadas de alguna manera entre sí. Esas relaciones son necesarias cuando deben determinarse las aceleraciones de los sistemas.



Hay un disco que rueda sin deslizar, una cuerda que pasa por una polea sin deslizarse y otro disco baja desenrrollando la cuerda. Primero, la velocidad de C estará dada por

$$v_C = \omega_1 R_1.$$

Además por pertenecer a una cuerda, la velocidad de C y D son iguales de donde se deduce que

$$\omega_1 R_1 = v_C = v_D = R_2 \omega_2.$$

Por la misma razón el punto D tiene la misma velocidad (en magnitud) que el punto E, de modo que

$$v_E = v_D = v_{C.}$$

El punto F tiene una velocidad adicional debida a la rotación de ese disco respecto al punto E, ω_3 de modo que

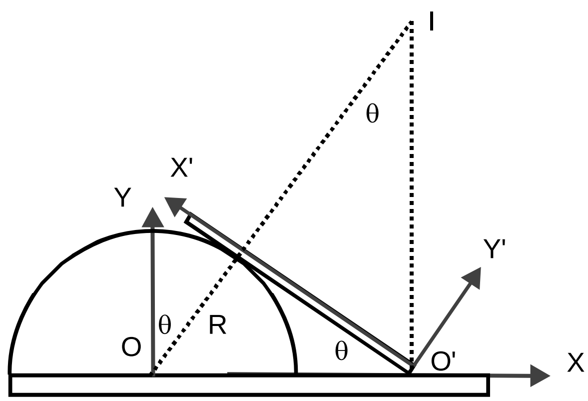
$$v_F = v_E + R_3\omega_3 = R_2\omega_2 + R_3\omega_3.$$

Si usted necesita relacionar aceleraciones, derive las relaciones anteriores respecto al tiempo obteniendo las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} a_C &= \alpha_1 R_1, \\ \alpha_1 R_1 &= \alpha_2 R_2, \\ a_F &= R_2\alpha_2 + R_3\alpha_3. \end{aligned}$$

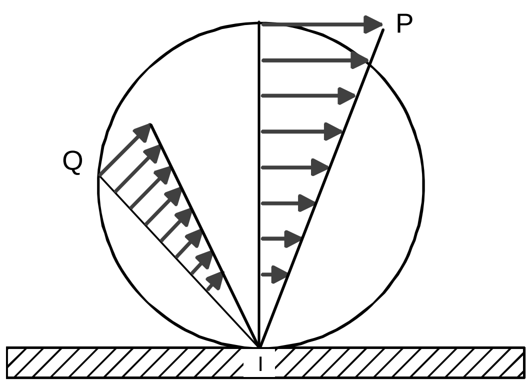
Existen muchísimas posibilidades más de modo que trate de comprender cabalmente este ejemplo.

EJEMPLO 9.4.1 *La figura ilustra una barra que se desliza apoyada en el suelo y sobre una semicircunferencia y en ella se muestra la ubicación del centro instantáneo I.Por las condiciones de apoyo, hay dos puntos de la barra que tienen direcciones conocidas y eso determina la posición de I. Como usted puede comprender, las velocidades de todos los puntos de la barra son, en el instante mostrado, perpendiculares a la línea que va desde I al punto que sea.*



9.4.6. Curvas rueda y riel

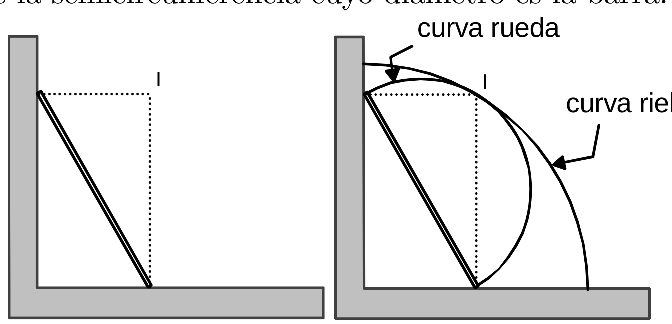
Como se explicó, en el movimiento plano de un cuerpo rígido siempre existe un punto de él, o de una extensión rígida del cuerpo, que tiene velocidad instantánea cero. Esto significa que en todo instante el cuerpo está moviéndose como si solamente rotara respecto a ese punto. pero ese punto en general se mueve, de manera que el centro instantáneo describe una curva. El movimiento de ese punto puede ser mirado desde un sistema fijo y en ese caso la curva que describe se denomina curva riel. Si el movimiento de ese punto es observado desde un sistema de referencia fijo al cuerpo, la curva que se observa, se denomina curva rueda. El caso más simple es el de un disco que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, como en la figura. Las velocidades de los puntos son perpendiculares a la línea que va del punto de contacto al punto y crecen proporcionalmente a su distancia al punto de contacto.



Como se observa, a medida que el cuerpo se mueve, el punto I se mueve en línea recta sobre el suelo de manera que la curva riel es la línea horizontal sobre la cual el disco rueda. Si se observa el movimiento de I desde el cuerpo, ese punto permanece a distancia el radio R del disco de su centro, por lo cual la curva rueda coincide con el perímetro del disco, de allí su nombre.

Cualquiera que sea la forma del cuerpo que se mueve ocurre algo parecido..

La clave para esta descripción es comprender que I está donde se intersectan las perpendiculares a dos velocidades de direcciones conocidas del cuerpo. En las dos figuras que siguen se explica esto para el caso de una barra que se mueve apoyada en dos paredes. El centro instantáneo I resulta estar donde está indicado porque las velocidades de los extremos de la barra son paralela a la pared vertical y paralela al suelo. Por razones geométricas simples I resulta estar a distancia constante del origen y respecto de la barra I permanece sobre una semicircunferencia donde la barra es su diámetro. De manera que la curva riel es la circunferencia con centro en el origen y la cura rueda es la semicircunferencia cuyo diámetro es la barra.

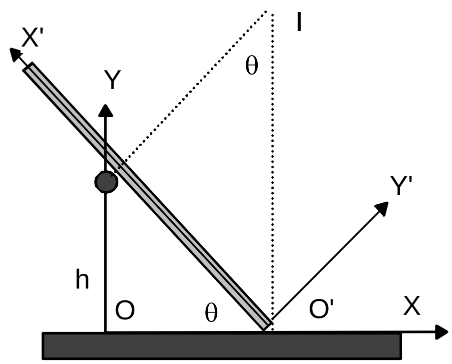


.

Note que todos los puntos del semicírculo cuyo diámetro es la barra son aquí considerados una extensión rígida de la barra.

Ejemplo 9.4.2 *Una barra se mueve de manera que uno de sus extremos se mueve sobre una línea horizontal y además permanece apoyada sobre un tarugo a altura h sobre el suelo. Determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.*

Solución. Considere la figura



Las coordenadas del centro instantáneo serán

$$\begin{aligned} x &= OO' = h\cot\theta, \\ y &= O'I = h + x\cot\theta, \end{aligned}$$

y eliminando θ se determina la ecuación de la curva riel

$$y = h + \frac{x^2}{h}.$$

Las coordenadas relativas al cuerpo x', y' serán

$$\begin{aligned} x' &= \frac{h}{\sin\theta}, \\ y' &= x'\cot\theta = \frac{h}{\sin\theta}\cot\theta = \frac{h\cos\theta}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

donde debemos eliminar θ. Así resulta

$$y' = \frac{x'}{h}\sqrt{(x')^2 - h^2},$$

la ecuación de la curva rueda.

▲

9.4.7. Modelo continuo de un cuerpo rígido

Como se explicó, aún cuando un cuerpo rígido sea un sistema de partículas, resulta preferible en la mayoría de los casos olvidarse de ello y suponer que el cuerpo es un continuo de masa donde las distancias entre sus puntos permanecen constantes. Las partículas del cuerpo son entonces reemplazadas por elementos de volumen dV los cuales tienen masa dm. Las sumatorias sobre partículas pasarán entonces a ser integrales sobre el volumen del cuerpo, esto es

$$\sum m_i \rightarrow \int dm$$

lo cual es en general más fácil de realizar sobre todo cuando el número de partículas reales del cuerpo es muy grande.

9.4.8. Momentum angular y energía cinética

Como las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido están relacionadas de acuerdo a 9.1, es una tarea más o menos simple establecer expresiones que permiten el cálculo de la energía cinética y del momentum momentum angular. Deberemos distinguir dos casos. Cuando en el movimiento del cuerpo se mantiene un punto fijo y cuando no. Cuando hay un punto que se mantiene fijo el movimiento se denomina rotacional.

Movimiento rotacional

Si el cuerpo puede moverse manteniendo un punto O fijo, entonces el movimiento del cuerpo es se llama rotacional. Si plano de movimiento es el plano OXY entonces el eje de rotación es el eje OZ. Si el ángulo que describe la rotación del cuerpo lo llamamos θ, y su aumento corresponde según la regla de la mano derecha al eje OZ, entonces

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k},$$

dado que $\vec{v}_O = 0$ las velocidades de los otros puntos del cuerpo serán

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}, \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

con esto evaluaremos el momentum angular y la energía cinética.

9.4.9. El momentum angular

Todas las partículas del cuerpo, los elementos de masa dm, tienen movimiento circunferencial con centro en O y podemos calcular el momentum angular como sigue

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \to \int dm(\vec{r} \times \vec{v}), \\ &= \int dm(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})),\end{aligned}$$

desarrollando el doble producto cruz

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}, \tag{9.7}$$

donde para movimiento plano el segundo término se anula, luego

$$\vec{L}_O = (\int r^2 dm)\vec{\omega}.$$

En esta expresión se ha separado el factor que tiene que ver con el movimiento $\vec{\omega}$ con otro factor que sólo tiene que ver con la distribución de masa del cuerpo

$$I_O = \int r^2 dm, \tag{9.8}$$

luego tenemos

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}, \tag{9.9}$$

$$\vec{L}_O = I_O \dot{\theta} \hat{k}. \tag{9.10}$$

Aquí I_O se conoce como el momento de inercia en el punto O del cuerpo respecto al eje OZ . Si miramos a la integral como una sumatoria entonces el momentum angular es "la suma de las masas por sus distancias al cuadrado al eje de la rotación".

9.4.10. Ejemplos de cálculo de momentos de inercia

Los momentos de inercia serán dados pero es conveniente entender como se calculan.

- Para una barra de largo L y de masa M en un extremo. Si se elige el eje OX a lo largo de la barra entonces como la densidad lineal de masa es $\frac{M}{L}$

$$\begin{aligned}dm &= \frac{M}{L}dx, \\ I_O &= \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2.\end{aligned}$$

- Para una barra de largo L y de masa M en su centro de masa. Si se elige el eje GX a lo largo de la barra entonces respecto al cálculo anterior, los límites de la integral son otros

$$\begin{aligned} dm &= \frac{M}{L}dx, \\ I_G &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L}dx = \frac{1}{12}ML^2. \end{aligned}$$

- Para un disco de masa M y radio R en su centro. Ahora podemos tomar como elemento de masa la masa entre r y $r + dr$. La densidad superficial de masa es $\frac{M}{\pi R^2}$ de modo que

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr,$$

resultando

$$I_G = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2}MR^2.$$

- Aro de masa M y radio R en su centro. Ahora todas las masas están a distancia R de modo que

$$I_G = \int R^2 dm = MR^2.$$

9.4.11. Momentum angular y momentum lineal

Para comprender mejor sobre el significado del momento de inercia, comparemos las expresiones para el momentum lineal $\vec{P}$ y el momentum angular $\vec{L}_O$ es decir

$$\begin{aligned} \vec{P} &= M\vec{v}_G, \\ \vec{L}_O &= I_O\vec{\omega}, \end{aligned}$$

y las respectivas ecuaciones de movimiento sobre las cuales se profundizará más adelante

$$\begin{aligned} M\vec{a}_G &= \vec{F}^{ext}, \\ I_O\vec{\alpha} &= \vec{\Gamma}_O^{ext}, \end{aligned}$$

donde $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ es la aceleración angular.

Se puede entonces comprender que la cantidad de movimiento lineal es proporcional a la velocidad de traslación $\vec{v}_G$ y la constante de proporcionalidad es la masa. Similarmente resulta que la cantidad de movimiento angular es proporcional a la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. O sea el momento de inercia juega el rol de la masa cuando hay rotaciones. Similarmente se pueden comparar los roles dinámicos. A una dada fuerza, el cuerpo acelera menos a mayor masa. A un dado torque un cuerpo acelera angularmente menos a mayor momento de inercia.

9.4.12. La energía cinética

Haciendo un cálculo similar para la energía cinética, resultará

$$\begin{aligned} K &= \sum m_i v_i^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\int v^2 dm = \\ &= \frac{1}{2}\int \vec{\omega}\times\vec{r}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}dm = \frac{1}{2}\int \vec{\omega}\cdot\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dm, \\ &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O, \end{aligned} \tag{9.11}$$

pero

$$\vec{L}_O = I_O\vec{\omega},$$

de modo que

$$K = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2, \tag{9.12}$$

que nuevamente puede compararse con la energía cinética cuando hay pura traslación

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2. \tag{9.13}$$

9.4.13. Movimiento de rotación y traslación

Si el cuerpo se mueve en el plano OXY sin restricciones, entonces el cuerpo tiene simultáneamente movimiento de traslación y de rotación. El cuerpo se desplaza y además gira un ángulo θ, por lo tanto nuevamente

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}.$$

Entonces el momentum angular respecto al centro de masa G resultará

$$\vec{L}_G = I_G \dot{\theta} \hat{k}, \tag{9.14}$$

y el teorema de Koenig determina el momentum angular respecto a O que resulta ser

$$\vec{L}_O = M\vec{r} \times \vec{v}_G + I_G \dot{\theta} \hat{k}. \tag{9.15}$$

La energía cinética será, de acuerdo al teorema de Koenig, la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2. \tag{9.16}$$

El término I_G se denomina momento de inercia del cuerpo en el centro de masa respecto al eje GZ y está dado por

$$I_G = \int (x'^2 + y'^2) dm. \tag{9.17}$$

donde x', y' son coordenadas de los elementos de masa respecto al centro de masa G. La expresión (9.16) muestra que la energía cinética es la suma de la parte traslacional $\frac{1}{2} M v_G^2$ más la parte rotacional en torno al centro de masa $\frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$.

9.4.14. Movimiento en el espacio

Aún cuando este tema no será profundizado en este texto, explicaremos algo de lo que ocurre cuando un cuerpo rígido se mueve libremente en el espacio, esto es en tres dimensiones. Ahora su velocidad angular no permanece con dirección fija y en general tendremos

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{\imath} + \omega_y \hat{\jmath} + \omega_z \hat{k},$$

siendo las componentes de la velocidad angular funciones de las derivadas de los ángulos de orientación del cuerpo.

Si el cuerpo mantiene un punto fijo, entonces sigue siendo válido que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

de manera que igualmente se obtiene

$$\vec{L}_O = \int dm (\vec{r} \times \vec{v}) = \int dm (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})).$$

Si desarrollamos el doble producto cruz se obtiene

$$\vec{L}_O = \int dm(r^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}).$$

Ahora, a diferencia del movimiento plano,

$$\vec{\omega}\cdot\vec{r} \neq 0,$$

luego debemos desarrollar

$$\vec{L}_O = \int dm((x^2+y^2+z^2)\vec{\omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\vec{r}). \tag{9.18}$$

Si tomamos las componentes cartesianas de esta ecuación se obtienen tres ecuaciones

$$\begin{aligned}
L_{O_x} &= \int dm((y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z),\\
L_{O_y} &= \int dm((x^2+z^2)\omega_y - yx\omega_x - yz\omega_z),\\
L_{O_z} &= \int dm((x^2+y^2)\omega_z - zx\omega_x - zy\omega_y).
\end{aligned}$$

Al usar notación de matrices, estas ecuaciones lineales en ω_x, ω_y y ω_z pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} L_{O_x} \\ L_{O_y} \\ L_{O_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_x \\ \omega_x \end{bmatrix}, \tag{9.19}$$

donde los elementos de la diagonal de la matriz indicada, denominados momentos de inercia respecto a los ejes, están dados por

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int dm((y^2+z^2), \qquad (9.20)\\
I_{yy} &= \int dm(x^2+z^2),\\
I_{zz} &= \int dm(x^2+y^2),
\end{aligned}$$

y los elementos de fuera de la diagonal, denominados productos de inercia, están dados por

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\int xydm, \\ I_{xz} &= I_{zx} = -\int xzdm, \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\int yzdm. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Esta matriz 3×3 la denotaremos por H_O y se conoce como la *matriz* de inercia del cuerpo en el origen O, es decir

$$H_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \tag{9.22}$$

y la relación fundamental entre cantidad de movimiento angular y velocidad angular, puede escribirse

$$\vec{L}_O = H_O\vec{\omega}, \tag{9.23}$$

en el entendido que tanto $\vec{L}_O$ como $\vec{\omega}$ son matrices columna con las componentes de los respectivos vectores como sus elementos. Similarmente, para la energía cinética puede demostrarse que

$$K = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_O\vec{\omega}. \tag{9.24}$$

No ahondaremos más en este tema en estos apuntes porque el curso se limitará a casos de dos dimensiones solamente.

9.5. Dinámica de un cuerpo rígido

9.5.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido son las mismas que se indicaron en el capítulo de sistemas de partículas, es decir

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \tag{9.25}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_G = \vec{\Gamma}_G^{ext} \text{ o } \frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \tag{9.26}$$

Además para un punto arbitrario A se tiene la relación general

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\overrightarrow{AG} \times \vec{a}_A, \tag{9.27}$$

que es de utilidad en ciertos problemas donde el movimiento de un punto A es conocido.

9.5.2. Ecuaciones para el caso de movimiento plano

Cuando el movimiento es plano, las ecuaciones anteriores pueden escribirse

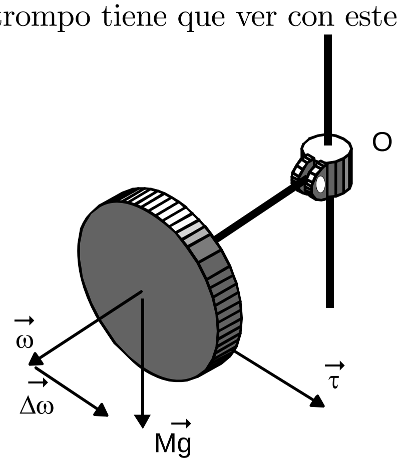
$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \tag{9.28}$$

$$I_G \frac{d}{dt}\vec{\omega} = \vec{\Gamma}_G^{ext} \text{ o } I_O \frac{d}{dt}\vec{\omega} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \tag{9.29}$$

El resultado

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O^{ext}$$

nos dice que la derivada del momentum angular, esto es el cambio del momentum angular, está en la dirección del torque. En la figura que sigue se ilustra el curioso efecto que el peso que actúa hacia abajo sobre un disco que gira sobre su eje. El torque del peso $\vec{\tau}$ está en un plano horizontal y luego el cambio de $\vec{\omega}$ también o está. O sea el efecto del torque del peso hará que el sistema tienda a girar respecto a la vertical en vez de a caer. La explicación del movimiento de un trompo tiene que ver con este efecto.



Estas complejidades del movimiento en tres dimensiones no están presentes en los problemas de dinámica en un plano. En efecto, cuando el movimiento es plano, tanto la velocidad angular como el torque están en dirección perpendicular al plano de movimiento, digamos el eje z, de manera que

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= I_O\dot{\theta}\hat{k},\\ \vec{\tau}_O &= \tau_O\hat{k},\end{aligned}$$

y luego resultará

$$I_O\ddot{\theta} = \tau_O,$$

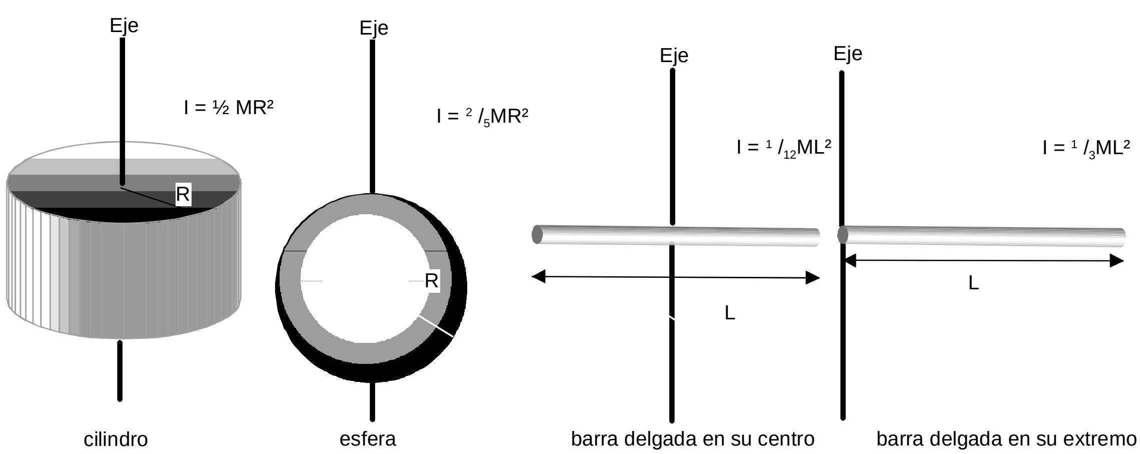
o si llamamos $\alpha = \ddot{\theta}$ a la aceleración angular

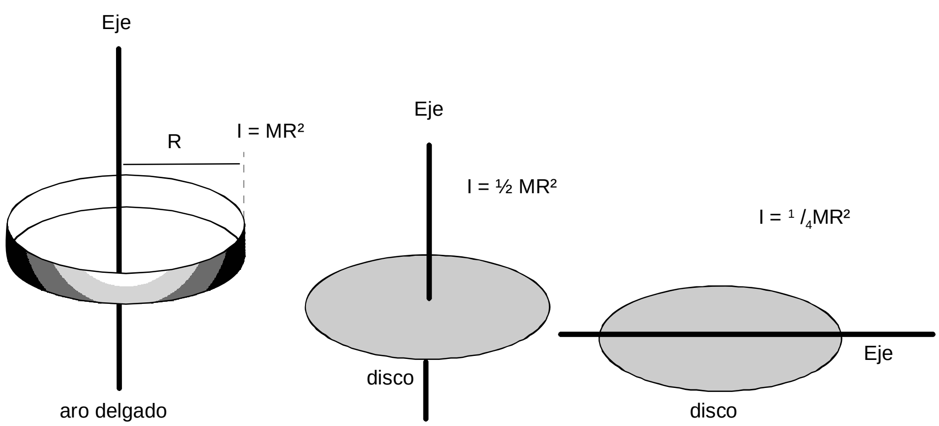
$$I_O\alpha = \tau_O,$$

de modo que el único efecto del torque será causar una aceleración angular $\alpha = \ddot{\theta}$.

9.5.3. Momentos de Inercia

El cálculo de momentos de Inercia requiere realizar integraciones. Además el cálculo debe ser en algún origen específico del cuerpo y para ejes determinados. Normalmente se encuentran los momentos de Inercia para orígenes coincidiendo con el centro de masa y para ejes que coinciden con ejes de simetría, cuando los hay. Se darán algunos ejemplos de cálculo, pero ahora daremos los resultados para los cuerpos de formas más simples.





9.5.4. Teorema de Steiner

Conocido el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa G, se puede calcular el momento de inercia para otro eje paralelo al anterior en un punto A mediante la relación conocida como teorema de Steiner

$$I_A = I_G + Md^2,$$

donde d es la distancia entre esos dos ejes. Para demostrarlo considere ejes $GX'Y'Z'$ con origen en G, y ejes paralelos $AXYZ$ con origen en A. Consideremos solamente momentos de inercia respecto al eje Z, porque la demostración para los otros es análoga. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} I_G &= \int dm(x'^2 + y'^2), \\ I_A &= \int dm(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

pero las coordenadas están relacionadas. De

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}'$$

se obtienen

$$\begin{aligned} x &= x_G + x', \\ y &= y_G + y', \\ z &= z_G + z', \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x_G + x')^2 + (y_G + y')^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + 2x_G x' + 2y_G y' + x_G^2 + y_G^2, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} I_A &= \int dm(x^2 + y^2) = \int dm(x'^2 + y'^2 + 2x_G x' + 2y_G y' + x_G^2 + y_G^2) \\ &= I_G + \int dm(2x_G x' + 2y_G y') + (x_G^2 + y_G^2) \int dm. \end{aligned}$$

Pero

$$\int dm(x') = \int dm(y') = 0,$$

porque son coordenadas relativas al centro de masa y $\sqrt{(x_G^2 + y_G^2)} = d$ es la distancia entre los ejes Z. Ha resultado entonces

$$I_A = I_G + Md^2, \tag{9.30}$$

o sea entre dos ejes paralelos, uno que pasa por el centro de masa y otro que pasa por el punto A estando ambos eje a una distancia d, al momento de inercia en el centro de masa hay que agregarle Md^2 para obtener el momento de inercia en A. Por ejemplo considere una barra donde el momento de inercia respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro es

$$I_G = \frac{1}{12} ML^2,$$

entonces respecto a su extremo será

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3} ML^2.$$

9.6. Ejemplos de dinámica plana

9.6.1. Dinámica de rotación

El caso más simple ocurre cuando el cuerpo puede solamente girar en torno a un eje fijo. Si llamamos O al punto del cuerpo por donde pasa el eje de rotación, nuestra relación fundamental entre torque y momentum angular es

$$I_O\ddot{\theta} = \tau_O,$$

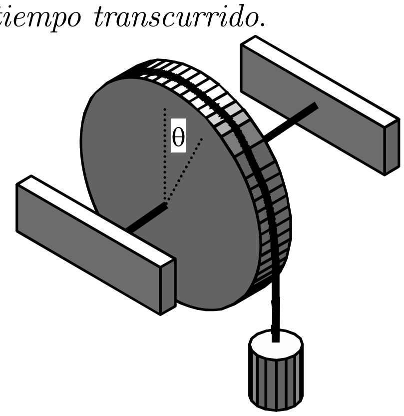
la energía cinética del cuerpo es

$$K = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2,$$

que pueden también escribirse

$$\begin{aligned} I_O\alpha &= \tau_O, \\ K &= \frac{1}{2}I_O\omega^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 9.6.1 *Un disco de masa M y radio R puede rotar respecto a un eje fijo que pasa por su centro. Mediante un hilo enrollado se sostiene otro cuerpo de masa m que cuelga. Si el sistema se libera y comienza a moverse, determine la aceleración angular del disco y la altura que baja el cuerpo que cuelga en función del tiempo transcurrido.*



Solución. Si llamamos T a la tensión del hilo, tenemos:

$$I\ \ddot{\theta} = \tau = TR,$$

y para el cuerpo que baja

$$mg - T = ma.$$

Pero lo que baja el cuerpo está relacionado con lo que gira el cilindro en la forma (y hacia abajo)

$$y = R\theta,$$

de manera que

$$a = \ddot{y} = R\ddot{\theta}.$$

Si colocamos además $I = \frac{1}{2}MR^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} &= T, \\ mg - T &= mR\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

o bien

$$mg - \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} = mR\ddot{\theta},$$

de donde se obtiene la aceleración angular del disco

$$\ddot{\theta} = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}\frac{g}{R}.$$

Esto es simple de integrar dos veces y se obtiene

$$\dot{\theta} = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}\frac{g}{R}t,$$

$$\theta = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}\frac{g}{2R}t^2,$$

y luego lo que baja el cuerpo es

$$y = R\theta = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}\frac{g}{2}t^2.$$

▲

NOTA 9.1 Es interesante comprobar que la energía se conserva. En efecto la energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M + m)R^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{(\frac{1}{2}M + m)}g^2t^2 \end{aligned}$$

y la energía potencial es

$$V = -mgy = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{\frac{1}{2}M + m}g^2t^2,$$

esto es

$$K + V = 0.$$

Nota 9.2 Si un cuerpo rota respecto a un eje fijo y el torque es nulo, entonces

$$\frac{d}{dt}I_O\dot{\theta}=0,$$

entonces se conserva el momentum angular

$$I_O\dot{\theta}=\text{ constante.}$$

Si I_O es constante el último resultado dice simplemente que la velocidad angular es constante. Si el momentum angular varía, entonces varía la velocidad angular.

Ejemplo 9.6.2 *Colapso de una estrella. Este es un ejemplo de la astrofísica, donde se establece que la última forma estable de una estrella que tiene suficiente masa y que a terminado su energía, es en la forma de estrella neutrónica, donde toda la materia de ella se ha transformado en neutrones, uno al lado del otro y de un tamaño bien pequeño y de muy alta densidad. Supongamos entonces que la estrella tenía antes del colapso un radio del orden de nuestro Sol* $R\approx 7\times 10^5\,\mathrm{km}$ *y que da una revolución cada* 10 *días. Si al transformarse en estrella neutrónica su radio se reduce a* $R'=10\,\mathrm{km}$, *determine su nueva velocidad angular.*

Solución. De acuerdo a la última nota (conservación del momentum angular) tenemos que

$$I_O\dot{\theta}=I_O'\dot{\theta}',$$

o bien

$$\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}=\frac{2}{5}MR'^2\dot{\theta}'$$

de donde

$$\dot{\theta}'=\frac{R^2}{R'^2}\dot{\theta}=(\frac{7\times 10^5}{10})^2\dot{\theta},$$

pero $\dot{\theta}=\frac{2\pi}{10\times 24\times 3600}\mathrm{rad/\,s}$ y calculando se obtiene

$$\dot{\theta}'=35633.\,8\ \mathrm{rad/\,s}$$

o bien una frecuencia de

$$f'=\frac{\dot{\theta}'}{2\pi}=5671.\,3\ \ \mathrm{Hz},$$

un valor enorme de vueltas por segundo.

Nota 9.3 No tome demasiado en serio este cálculo. La velocidad radial resultaría $v = 10000 \times 35633.8 = 3.56338 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ mayor que la velocidad de la Luz (?). En realidad esta situación pertenece al ámbito de la relatividad general, cuestión que escapa a este curso.

▲

9.6.2. Dinámica de rotación y traslación

En estos casos el cuerpo se traslada y además rota respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento. En estos casos es conveniente considerar las rotaciones respecto a un eje que pasa por el centro de masa porque se cumple que

$$I_G \frac{d}{dt}\vec{\omega} = \vec{\Gamma}_G^{ext} \tag{9.31}$$

o bien para la componente perpendicular al plano del movimiento

$$I_G \frac{d}{dt}\omega = \Gamma_G^{ext}, \tag{9.32}$$

$$I_G \alpha = \Gamma_G^{ext}, \tag{9.33}$$

además de

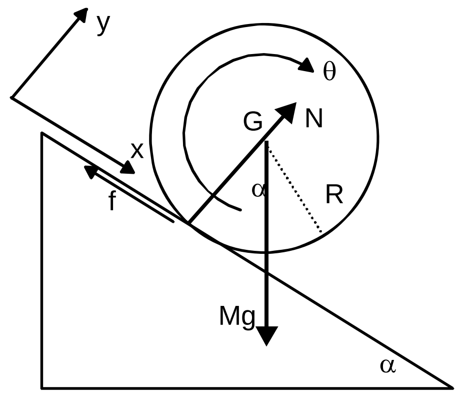
$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}. \tag{9.34}$$

Puede ser útil la energía cinética, cuya expresión es

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2, \tag{9.35}$$

siendo la primera parte $\frac{1}{2}Mv_G^2$ llamada energía cinética de traslación y la segunda parte $\frac{1}{2}I_G\omega^2$ energía cinética de rotación.

Ejemplo 9.6.3 *Un disco de masa M y radio R baja rodando sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. Determine (a) la aceleración angular del disco, (b) la aceleración lineal de G, (c) la fuerza de roce.*



Solución. Aquí ω está hacia adentro del papel al igual que el torque de f respecto de G, de manera que tenemos

$$I_G \frac{d\omega}{dt} = Rf,$$

además de la ecuación para el eje X

$$Mg \sin \alpha - f = Ma_G,$$

pero como no hay deslizamiento lo que avanza el disco está relacionado con el ángulo que gira de la forma

$$x = R\theta$$

de donde se deduce que

$$a_G = R\frac{d\omega}{dt}.$$

Combinando estas ecuaciones podemos obtener

$$\begin{aligned} \frac{I_G}{R}\frac{d\omega}{dt} &= f, \\ Mg \sin \alpha - f &= MR\frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

o bien

$$MgR \sin \alpha = (I_G + MR^2)\frac{d\omega}{dt}$$

o sea la aceleración angular es

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR\sin\alpha}{I_G + MR^2},$$

la aceleración lineal es

$$a_G = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR^2\sin\alpha}{I_G + MR^2},$$

y la fuerza de roce es

$$f = \frac{I_G}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{I_G}{I_G + MR^2}Mg\sin\alpha.$$

Faltaría solamente reemplazar $I_G = \frac{1}{2}MR^2$. Si se hace los resultados son

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{2g\sin\alpha}{3R}, \\
a_G &= \frac{2g\sin\alpha}{3}, \\
f &= \frac{1}{3}Mg\sin\alpha.
\end{aligned}$$

▲

9.6.3. Casos donde el movimiento de un punto es conocido

En varios ejemplos se ilustra la potencia de la relación

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\overrightarrow{AG} \times \vec{a}_A. \tag{9.36}$$

entre torque y derivada del momentum angular en un punto arbitrario. Como se explica esta relación es particularmente útil cuando el movimiento o la aceleración del punto A es conocida. El movimiento dado del punto A y por lo tanto su aceleración es causada por alguna fuerza desconocida aplicada en A, por lo cual conviene considerar el torque respecto a ese punto porque esa fuerza no produce torque respecto a ese punto. En los ejemplos que siguen es una buena tarea para el lector intentar llegar a los mismos resultados sin usar la relación (9.36) como se muestra en un ejemplo con soluciones (a) y (b).

Ejemplo 9.6.4 *Péndulo de longitud L, masa M cuyo punto de suspensión A oscila verticalmente de la forma $y_A = a \sin \omega t$. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

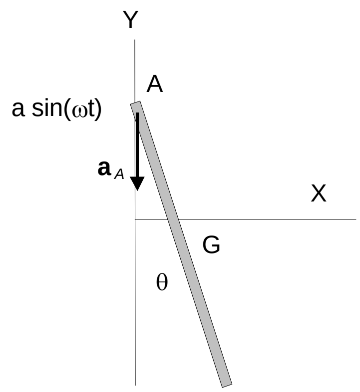


Figura 9.2: Péndulo cuyo punto de suspensión oscila

Solución. Para este caso tenemos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero puede fácilmente verse que $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta$ obteniendo en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2} \sin \theta + M\frac{L}{2} a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta.$$

▲

Ejemplo 9.6.5 *Péndulo de longitud L, masa M cuyo punto de suspensión A oscila horizontalmente en la forma $x_A = a \sin \omega t$.Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

Solución. Para este caso

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero similarmente $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a\omega^2 \sin \omega t \cos \theta$ entonces obtenemos en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2} \sin \theta + M\frac{L}{2} a\omega^2 \sin \omega t \cos \theta.$$

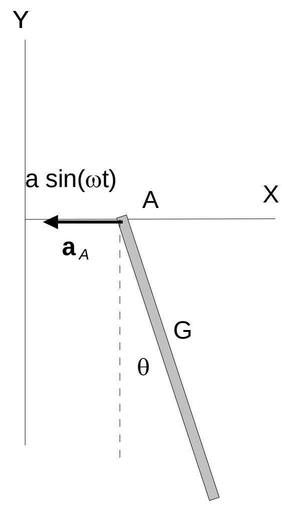


Figura 9.3: Péndulo forzado

Ejemplo 9.6.6 *Péndulo de longitud L, masa M cuyo punto de suspensión A se mueve sobre una circunferencia vertical de radio R con velocidad angular constante ω.*

Solución. Para este caso tenemos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t + \theta)$ obteniendo

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + M\frac{L}{2}a\omega^2\cos(\omega t - \theta).$$

Ejemplo 9.6.7 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica (su centro de masa está desplazado de su centro geométrico), de radio R y masa M sobre un plano horizontal. En este caso la aceleración del punto de contacto A del cuerpo con el suelo es de magnitud $a_A = R\dot{\theta}^2$ hacia arriba. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

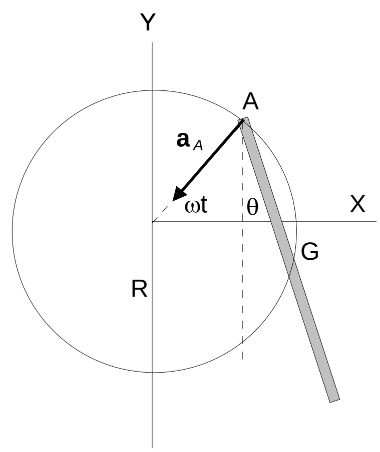


Figura 9.4: Problema de barra

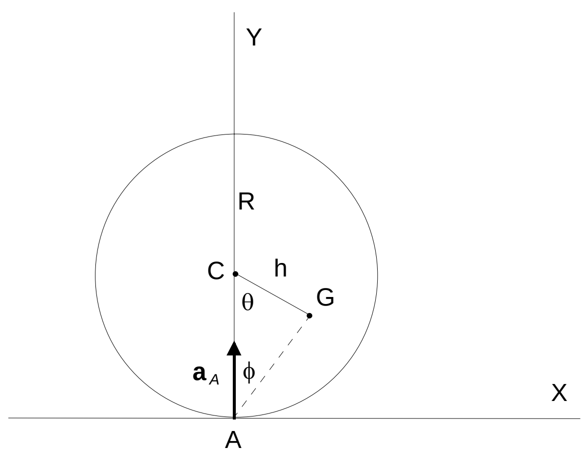


Figura 9.5: Disco que rueda

solución (a). Suponiendo que el centro de masas está a distancia h del centro geométrico, tenemos

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = |\vec{r}_G - \vec{r}_A| \, R\dot{\theta}^2 \sin\phi,$$

pero

$$\frac{\sin\phi}{h} = \frac{\sin\theta}{|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A|},$$

entonces

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = R\dot{\theta}^2 h \sin\theta,$$

y finalmente

$$I_A\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta - MRh\dot{\theta}^2 \sin\theta.$$

El momento de inercia puede ser obtenido mediante el teorema de Steiner

$$I_A = I_G + M(h^2 + R^2 - 2hR\cos\theta).$$

solución (b). El torque respecto a G debido a la fuerza de roce f (supuesta hacia la derecha) y la normal N son es

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma}_G &= f\,|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A| \sin(90-\phi)\hat{k} - Nh\sin\theta\hat{k}, \\
\vec{L}_G &= I_G\dot{\theta}\hat{k}, \\
x_G &= -R\theta + h\sin\theta, \\
y_G &= R - h\cos\theta,
\end{aligned}$$

de modo que las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned}
f &= M\frac{d^2}{dt^2}(-R\theta + h\sin\theta), \\
N - Mg &= M\frac{d^2}{dt^2}(-h\cos\theta), \\
I_G\ddot{\theta} &= f\,|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A| \sin(90-\phi) - Nh\sin\theta,
\end{aligned}$$

$$I_G\ddot{\theta} = f(R - h\cos\theta) - Nh\sin\theta,$$

en la última reemplazamos N y f obteniendo (con bastante álgebra)

$$\begin{aligned}
I_G\ddot{\theta} &= M(R - h\cos\theta)\frac{d^2}{dt^2}(-R\theta + h\sin\theta) \\
&\quad -(Mg + M\frac{d^2}{dt^2}(-h\cos\theta))h\sin\theta, \\
(I_G + M(R^2 + h^2 - 2hR\cos\theta))\ddot{\theta} &= -Mgh\sin\theta - MhR\dot{\theta}^2\sin\theta,
\end{aligned}$$

que es la misma ecuación que habíamos obtenido

$$I_A\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta - MRh\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

▲

▲

Ejemplo 9.6.8 *El mismo ejemplo anterior, pero ahora actúa sobre la rueda una fuerza horizontal constante de magnitud F aplicada en su centro. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

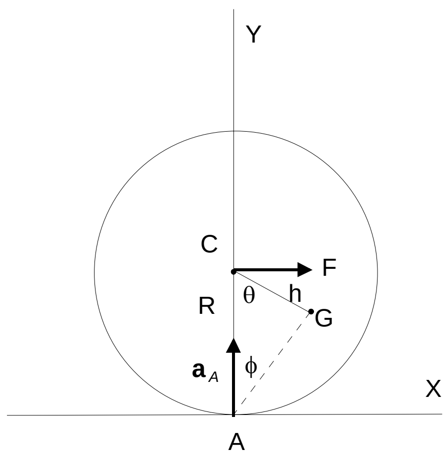


Figura 9.6: Rueda tirada con una fuerza.

Solución. Simplemente agregamos el torque de F obteniendo

$$I_A\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta - FR - MR\dot{\theta}^2h\sin\theta.$$

▲

Ejemplo 9.6.9 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio a sobre un cilindro fijo de radio R. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

Solución. En este caso, demuestre primero que la aceleración del punto A del cuerpo en contacto con el cilindro es de magnitud $a_A = aR\omega^2/(R+a)$ hacia el centro de la rueda. Aquí la velocidad angular de la rueda está

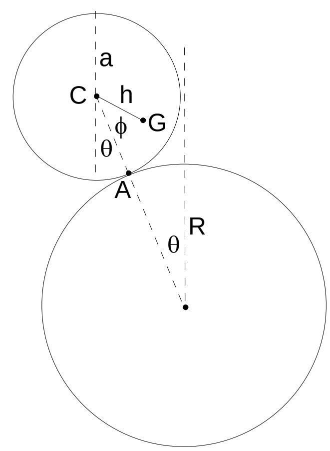


Figura 9.7: Rueda sobre cilindro.

relacionada con el ángulo θ mediante $\omega = (R+a)\dot{\theta}/a$ y $R\theta = a\phi$. Si el centro de masa está a distancia h del centro geométrico, podemos obtener

$$\begin{aligned}(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} &= a_A h \sin\phi \\ &= \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin\phi,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}I_A\alpha &= -Mg(h\sin(\theta+\phi) - a\sin\theta) - M\frac{aR\omega^2}{R+a}h\sin\phi, \\ \frac{R+a}{a}I_A\ddot{\theta} &= -Mgh\sin(1+\frac{R}{a})\theta + Mga\sin\theta - M\frac{aR\dot{\theta}^2}{R+a}h\frac{(R+a)^2}{a^2}\sin\frac{R}{a}\theta, \\ I_A\ddot{\theta} &= -Mgh\frac{a}{R+a}\sin\frac{R+a}{a}\theta + \frac{Mga^2\sin\theta}{(R+a)} - MR\dot{\theta}^2 h\sin\frac{R}{a}\theta,\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 9.6.10 *Movimiento de rodadura de una rueda de masa M y radio R, sobre una plataforma que oscila de la forma $a\sin\omega t$.*

Solución. Aquí la aceleración del punto A tiene dos componentes, $a\omega^2\sin\omega t$, $R\dot{\theta}^2$ pero solo la primera importa, dando por simple inspección $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = Ra\omega^2\sin\omega t$ lo cual conduce a

$$I_A\ddot{\theta} = -MRa\omega^2\sin\omega t.$$

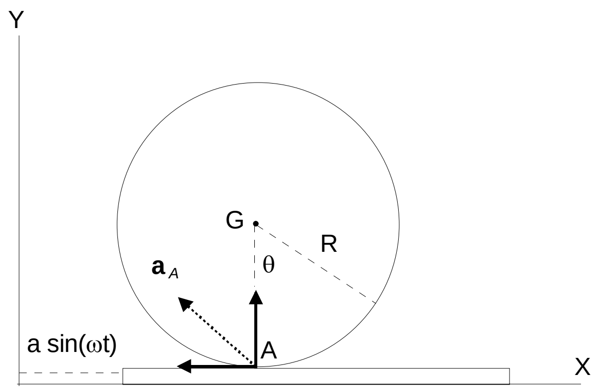


Figura 9.8: Rueda sobre plataforma móvil.

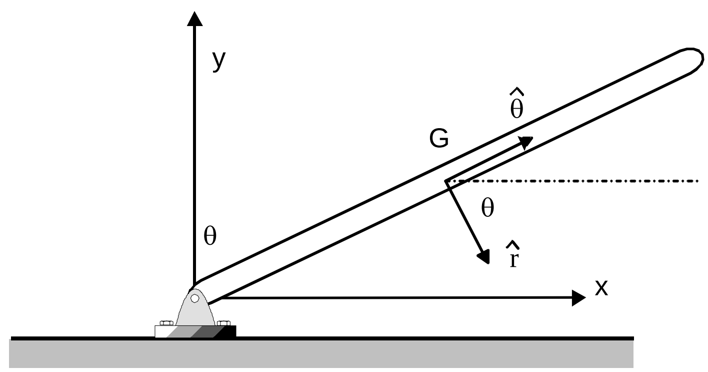
PROBLEMA 9.6.1 *Repita los ejemplos anteriores, pero calculando el torque respecto del centro de masa, es decir haciendo uso de la ecuación*

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}.$$

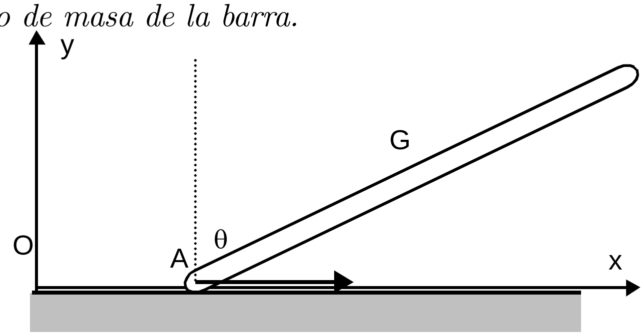
9.7. Ejercicios

9.7.1. Ejercicios de cinemática plana

EJERCICIO 9.1 *Una barra de longitud L tiene un extremo fijo y ella rota en un plano fijo respecto a ese extremo de manera que el ángulo que ella forma con un eje fijo en el plano del movimiento es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*

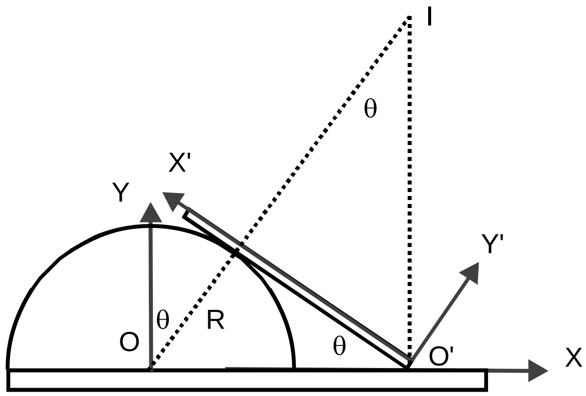


Ejercicio 9.2 *Una barra de longitud L tiene se mueve en un plano vertical de manera que su extremo inferior A desliza sobre un eje OX horizontal con velocidad de magnitud v_A constante y el ángulo que ella forma con la vertical OY es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*



Ejercicio 9.3 *Para la situación del problema anterior, determine la posición del centro instantáneo en función del desplazamiento x_A del extremo A, de ω_0 y de v_A.*

Ejercicio 9.4 *Una barra de longitud L se mueve apoyada sobre un semicírculo de radio R y centro en O y su extremo derecho A desliza sobre un eje OX que coincide con la base del semicírculo con rapidez v_A. Si θ indica el ángulo que la barra forma con el eje OX, determine:*



a) *La posición del centro instantáneo en función del ángulo θ.*

b) *La rapidez del centro de masa de la barra en función del ángulo θ.*

Ejercicio 9.5 *Para la situación del ejercicio anterior, determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.*

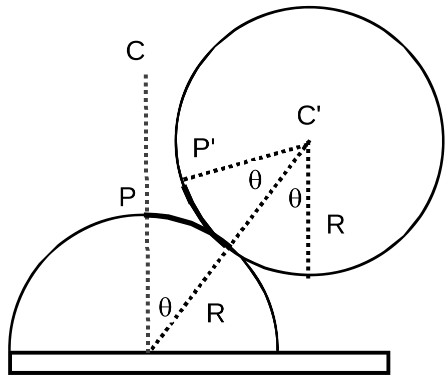
Ejercicio 9.6 *Una lámina rígida se mueve en el plano OXY de manera de dos puntos de ella $A = (1, 2, 0)$ y $B = (2, 1, 0)$ tienen velocidades $\vec{v}_A = (2, 3, 0)$ y $\vec{v}_B = (0, 1, 0)$.*

a) *Compruebe que esos puntos tienen velocidades compatible con la condición de rigidez (9.3).*

b) *Determine la velocidad angular del cuerpo en ese instante.*

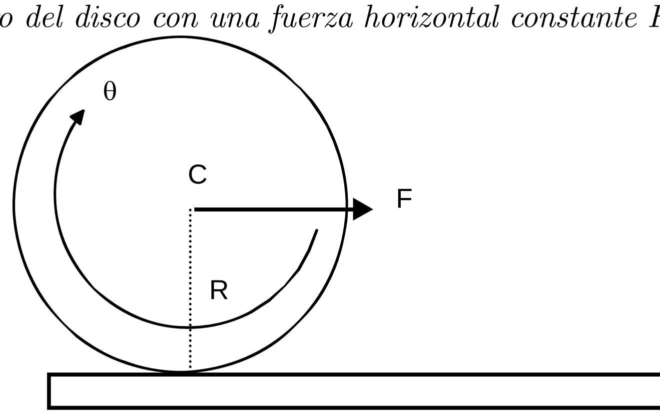
Ejercicio 9.7 *Un disco de radio R rueda sin deslizar apoyado sobre un semicilindro de radio igual R. Si θ es el ángulo que forma la línea que une los centros con una línea fija, demuestre que la velocidad angular del disco tiene magnitud*

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$



9.7.2. Ejercicios de dinámica

EJERCICIO 9.8 *Un disco de masa M y radio R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante F, determine:*

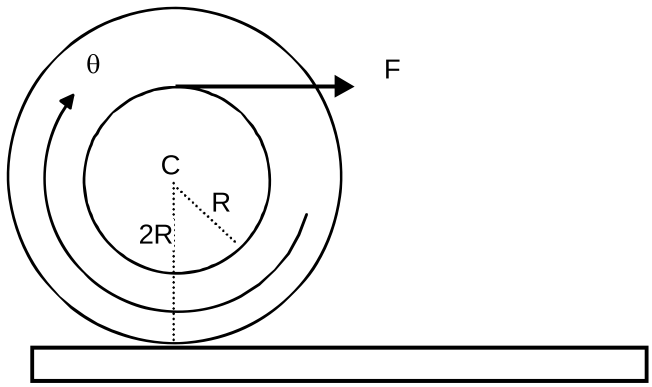


a) La aceleración del centro de masa del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La fuerza de roce.

EJERCICIO 9.9 *Un disco de masa M y radio $2R$ se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un reborde de radio R como se indica en la figura, en el cual* *se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F, determine:*

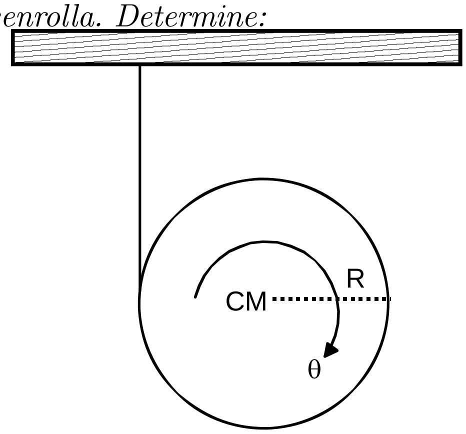


a) La aceleración del centro de masa del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La fuerza de roce.

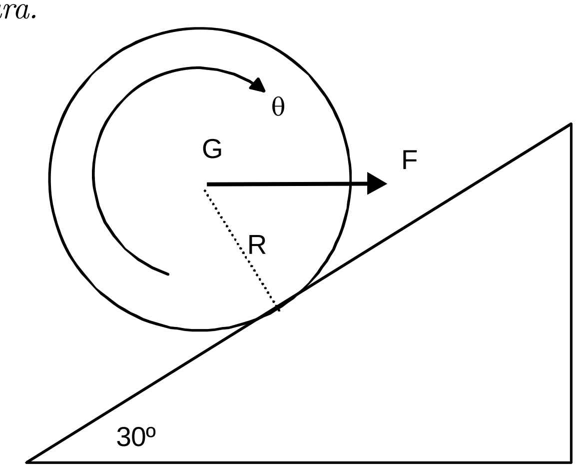
EJERCICIO 9.10 *Un disco de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:*



a) La aceleración de bajada del disco.

b) La tensión de la cuerda.

Ejercicio 9.11 *Un disco de masa* 10 kg *y de radio* 2 m *puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en* 30º *respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud* 100 N *aplicada en su centro, como se indica en la figura.*

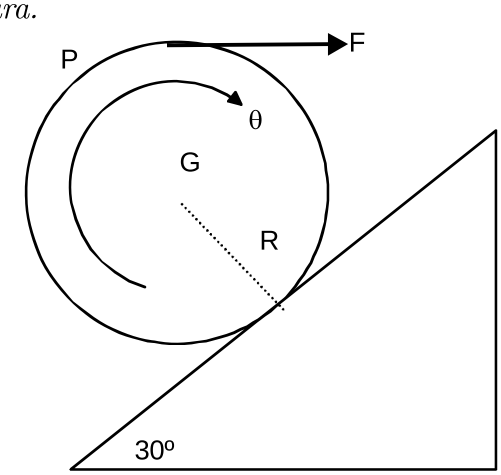


Determine:

a) La aceleración del centro del disco.

b) La fuerza de roce.

Ejercicio 9.12 *Un disco de masa* 10 kg *y de radio* 2 m *puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en* 30º *respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud* 100 N *aplicada en el punto P, como se indica en la figura.*

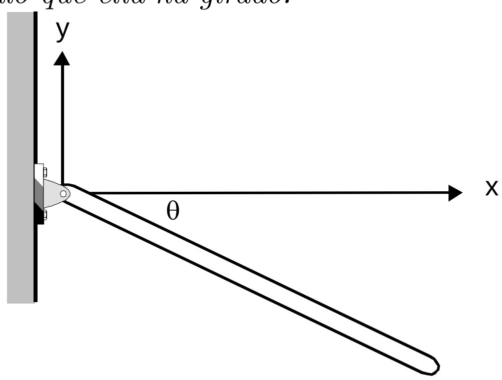


Determine:

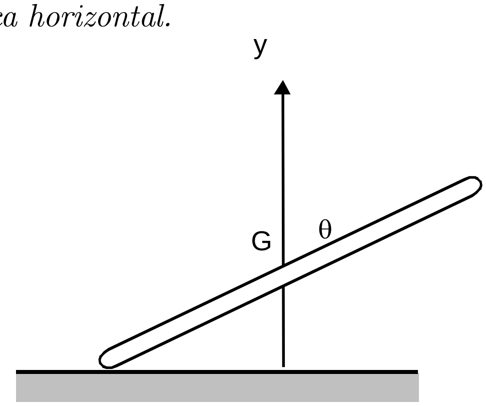
a) *La aceleración del centro del disco.*

b) *La fuerza de roce.*

EJERCICIO 9.13 *Una barra de largo 2L y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.*

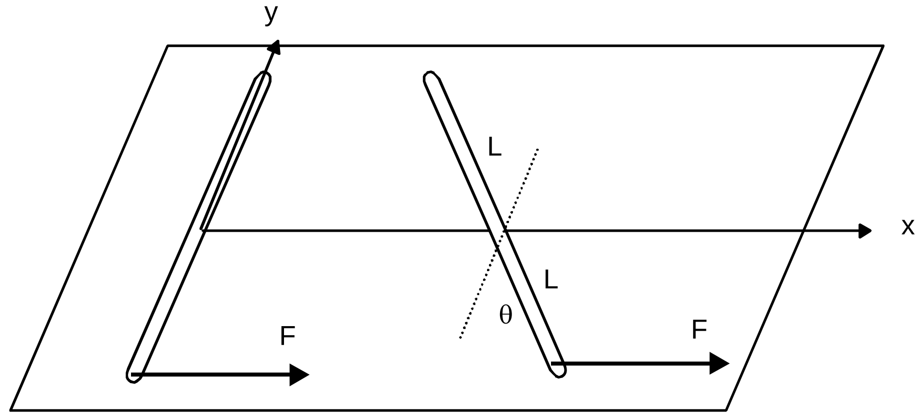


EJERCICIO 9.14 *Una barra de longitud* $2L$ *y masa* M *se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.*

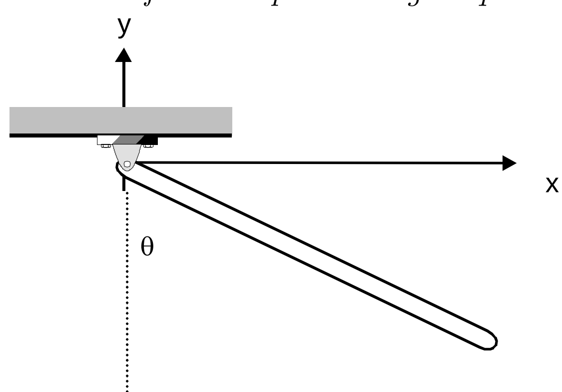


EJERCICIO 9.15 *Una barra de longitud* $2L$ *y masa* M *se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante* F*, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a*

moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.

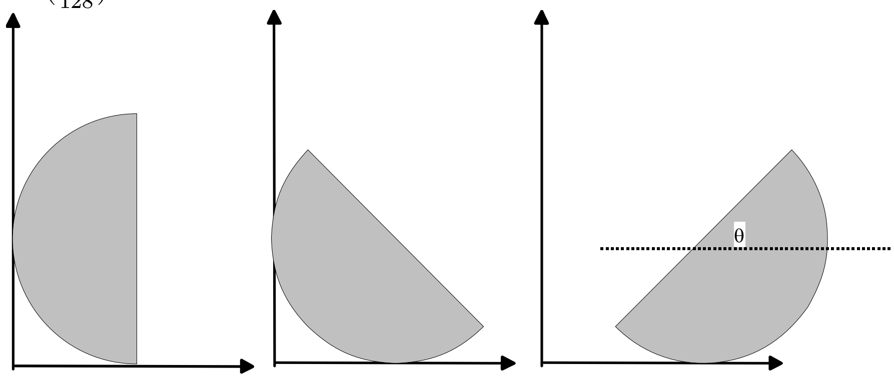


EJERCICIO 9.16 *Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.*



EJERCICIO 9.17 *Una semiesfera homogénea de radio "a" está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre, además que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son* $\omega = \sqrt{\frac{15}{8} g/a}$, $v = \frac{3}{8} a\omega$ *respectivamente. Demuestre además, durante*

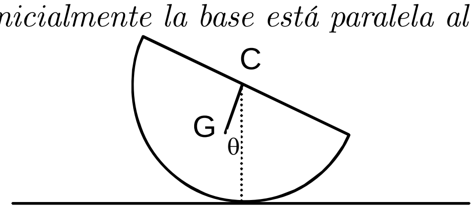
el movimiento siguiente, que el ángulo entre la base y la horizontal no excede de $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$.



Ejercicio 9.18 *Un disco uniforme de radio a que está rotando con rapidez angular inicial* Ω *alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es* μ. *Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo* $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$.

Ejercicio 9.19 *Una barra de masa* M *y largo* $2a$ *se mueve apoyada en superficies lisas* OY *vertical y* OX *horizontal. Inicialmente la barra estaba vertical con* $\theta = \pi/2$ *y se perturbó levemente. Determine* $\dot{\theta}$ *y las reacciones en función de* θ.

Ejercicio 9.20 *Una semiesfera de masa* M *y radio* R *se coloca apoyada sobre una superficie horizontal con roce de modo que la semiesfera sólo puede rodar sin resbalar. Inicialmente la base está paralela al plano horizontal.*



Si se le da a la esfera una velocidad angular inicial $\dot{\theta}(0) = \Omega$ *sin que el cuerpo resbale, determine* $\dot{\theta}$ *en función de* θ.