Capítulo 1

Soluciones ejercicios

Nadie es perfecto, luego si encuentra errores, tenga la gentileza de informarnos

Ejercicio 1.1 *Un cuerpo describe una órbita circular de radio $R = 100$ m en torno a un punto fijo con rapidez constante dando una vuelta completa por segundo. Determine la magnitud de la aceleración del cuerpo.*

Solución. La aceleración en órbita circular es de magnitud

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} \\ &= \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 100}{1} = 3947.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 1.2 *Si el cuerpo del ejercicio anterior, repentinamente siguiera en línea recta, determine la rapidez de crecimiento de la distancia al punto fijo en* $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solución. Este problema, es más apropiado hacerlo cuando se tenga claro el concepto de derivada. De todos modos se soluciona por medios geométricos a la manera de Newton. Si v es la rapidez en la órbita circular y sigue en línea recta, el cuerpo recorre una distancia

$$d = vt.$$

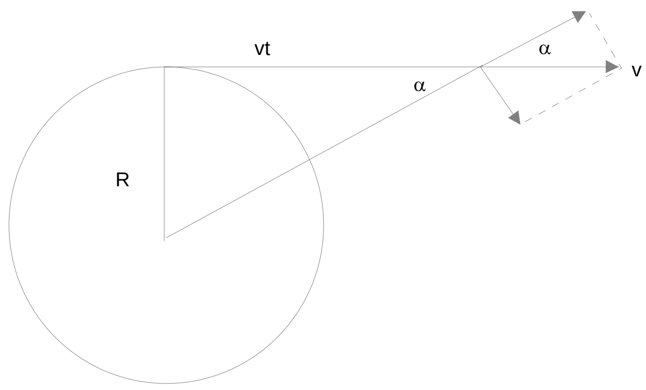

Figura 1.1:

Por el teorema de Pitágoras, la distancia D al centro de la circunferencia original crece de la forma

$$D = \sqrt{R^2 + v^2t^2}$$

ver figura. La velocidad del cuerpo podemos imaginarnos se puede descomponer en una parte paralela a esa distancia, la que la hace crecer y otra parte perpendicular que no la afecta. De modo que la rapidez de crecimiento de esa distancia D será

$$v \cos \alpha$$

pero de la figura

$$\cos \alpha = \frac{vt}{\sqrt{R^2 + v^2t^2}}$$

obteniendo para la rapidez de crecimiento

$$\frac{v^2t}{\sqrt{R^2 + v^2t^2}} \,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

con $R = 100\,\mathrm{m}$ y $v = \frac{2\pi R}{1} = 628.319\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ se tiene una función conocida del tiempo.

▲

Ejercicio 1.3 *Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente* $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg *y* $M_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg *siendo la distancia promedio entre ellos* $3{,}84 \times 10^8$ m. *Determine la fuerza ejercida por la Tierra sobre la Luna y la ejercida por la Luna sobre la Tierra.*

Solución. Ambas son de igual magnitud dada por

$$\begin{aligned} F &= G\frac{M_T M_L}{d^2} \\ &= 6{,}67259\times 10^{-11}\frac{5{,}98\times 10^{24}\times 7{,}36\times 10^{22}}{(3{,}84\times 10^8)^2} \\ &= 1.99\times 10^{20}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 1.4 *De los datos del ejercicio anterior, determine el tiempo empleado por la Luna en dar una vuelta completa en torno a la Tierra, en días.*

Solución. Considerando a la Tierra en reposo, la segunda ley de Newton da

$$G\frac{M_T M_L}{d^2} = M_L\frac{4\pi^2 d}{T^2}$$

o sea

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{G M_T}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2(3{,}84\times 10^8)^3}{6{,}67259\times 10^{-11}\times 5{,}98\times 10^{24}}} \\ &= 2.366\,894\,458\times 10^6\,\mathrm{s} \\ &= 27.39 \text{ días} \end{aligned}$$

Sin embargo ambos cuerpos describen órbitas casi circulares en torno al centro de masa de modo que si llamamos R_L y R_T a los radios de las órbitas, con $R_L + R_T = d$ se tiene que

$$\begin{aligned} G\frac{M_T M_L}{d^2} &= M_L\frac{4\pi^2 R_L}{T^2}, \\ G\frac{M_T M_L}{d^2} &= M_T\frac{4\pi^2 R_T}{T^2} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} G\frac{M_T}{d^2} &= \frac{4\pi^2 R_L}{T^2}, \\ G\frac{M_L}{d^2} &= \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} \end{aligned}$$

y si las sumamos

$$G\frac{M_L + M_T}{d^2} = \frac{4\pi^2 d}{T^2},$$

expresión dada en clase en la forma

$$R^3 = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}T^2$$

El efecto del movimiento de la Tierra da el valor

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{G(M_T + M_L)}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2(3{,}84 \times 10^8)^3}{6{,}67259 \times 10^{-11} \times (5{,}98 \times 10^{24} + 7{,}36 \times 10^{22})}} \\ &= 2.\,352\,462\,04 \times 10^6 \text{ s} \\ &= 27.\,23 \text{ días} \end{aligned}$$

Ni uno de los dos cálculos puede ser considerado exacto porque el movimiento de la Luna es mucho mas complejo que una órbita circular.

▲

Ejercicio 1.5 *Determine aproximadamente la fuerza que hace la Luna sobre una persona que está sobre la superficie terrestre y de masa* 80 kg.

Solución. La distancia entre los centros es $d = 3{,}84 \times 10^8$ m. el radio terrestre es aproximadamente $6{,}38 \times 10^6$ m de manera que si la Luna esta sobre la persona la distancia sera $3{,}84 \times 10^8 - 6{,}38 \times 10^6 = 3.\,776\,2 \times 10^8$ m resultando para la fuerza

$$\begin{aligned} F &= G\frac{mM_L}{d^2} \\ &= 6{,}67259 \times 10^{-11}\frac{80 \times 7{,}36 \times 10^{22}}{(3.\,776\,2 \times 10^8)^2} \\ &= 2.\,755 \times 10^{-3} \text{ N} \\ &= 2.\,8 \times 10^{-4} \text{ kg}f \end{aligned}$$

bastante pequeña.

Ejercicio 1.6 *Si el radio de la Luna es* $1{,}74\times10^6$ m *determine cuanto pesa un* kg *de oro en la Luna.*

Solución. El cálculo de la fuerza gravitacional da

$$\begin{aligned} F &= G\frac{mM_L}{d^2} \\ &= 6{,}67259\times10^{-11}\frac{1\times7{,}36\times10^{22}}{(1{,}74\times10^6)^2} \\ &= 1.\,622\,\mathrm{N} \\ &= 0.166\,\mathrm{kg}f \end{aligned}$$

alrededor de $1/6$ de lo que pesa en la superficie terrestre.

Ejercicio 1.7 *De acuerdo a los radios orbitales, evalúe los periodos orbitales usando la tercera ley de Kepler, comparando con los datos tabulados.*

Solución. Los datos tabulados son

	R km	T años	T calculado
Mercurio	$57,909,175$	0,24084445	0,241
Venus	$108,208,930$	0,61518257	0,615
Tierra	$149,597,890$	0,99997862	1,000
Marte	$227,936,640$	1,88071105	1. 881
Júpiter	$778,412,020$	11,85652502	11. 871
Saturno	$1,426,725,400$	29,42351935	29. 458
Urano	$2,870,972,200$	83,74740682	84. 088
Neptuno	$4,498,252,900$	163,7232045	164. 914
Plutón	$5,906,376,200$	248,0208	248. 126

los periodos calculados lo son de acuerdo a

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM_S}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM_S}} \end{aligned}$$

la masa del Sol es aproximadamente $M_S = 1{,}991\times10^{30}\,\mathrm{kg}$ de modo que resulta

▲

Mercurio$T = 0{,}241$ años
Venus $T = 0{,}615$ años
Tierra $T = 1.\,000$ años
Marte $T = 1.\,881$ años
Júpiter $T = 11.\,871$ años
Saturno $T = 29.\,458$ años
Urano $T = 84.\,088$ años
Neptuno $T = 164.\,914$ años
Plutón $T = 248.\,126$ años
Las pequeñas diferencias podrían ser adjudicadas al hecho que las órbitas no son circulares.

Ejercicio 1.8 *Determine a qué distancia entre la Tierra y la Luna, un cuerpo no es atraído hacia ninguno de los dos cuerpos.*

Solución. Sea x la distancia al centro de la Tierra y d la distancia entre la Tierra y la luna. Debe tenerse

$$G\frac{mM_T}{x^2} - G\frac{mM_L}{(d-x)^2} = 0$$

o sea

$$\frac{(d-x)}{x} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{1+\sqrt{\left(\frac{M_L}{M_T}\right)}} \\ &= \frac{3{,}84 \times 10^8}{1+\sqrt{\left(\frac{7{,}36\times10^{22}}{5{,}98\times10^{24}}\right)}} \\ &= 3.\,456\ \times 10^8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 1.9 *Un péndulo de longitud $L = 2$ m efectúa oscilaciones en la superficie terrestre. Determine el número de oscilaciones que efectúa en cada segundo.*

Solución. De acuerdo a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

resulta

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}8}} \\ &= 2.84\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

y entonces la frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = 0.352\ \mathrm{osc/s}$$

▲

Ejercicio 1.10 *Utilizando las leyes de Kepler, discuta la existencia del planeta X, hipotético planeta igual a la Tierra, en su misma órbita elíptica en torno al Sol, pero que permanece siempre oculto detrás del Sol y por eso no ha sido observado.*

Solución. No es posible porque si en algún instante ellos están en línea recta con el Sol, más tarde, el que tiene mayor rapidez, se adelantará.

▲

Ejercicio 1.11 *Si la distancia promedio de la Tierra al Sol es aproximadamente* $1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ *determine aproximadamente la masa del Sol.*

Solución. Suponemos que además se conocen otros datos tal como que el periodo de la órbita terrestre $T = 365 \times 24 \times 3600\,\mathrm{s} = 3.1536 \times 10^{7}\,\mathrm{s}$ de manera que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{sol}}R^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} M_{sol} &= \frac{4\pi^2}{GT^2}R^3 \\ &= \frac{4\pi^2}{6{,}67259 \times 10^{-11}(3.1536 \times 10^{7})^2}(1.496 \times 10^{11})^3 \\ &= 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.12 *Verifique con los datos de la tabla, el cumplimiento de la tercera Ley de Kepler.*

Ejercicio 1.13 *De acuerdo a las masas de los planetas, evalúe las velocidades de escape desde sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

Solución. De acuerdo a los datos (dos primeras columnas)

	Masa kg	R km	v_e km s^{-1}	v_e km s^{-1} calculada
Mercurio	$0{,}33022 \times 10^{24}$	2439,7	4,25	4. 250 1
Venus	$4{,}8690 \times 10^{24}$	6051,8	10,36	10. 361 9
Tierra	$5{,}9742 \times 10^{24}$	6378,14	11,18	11. 180 3
Marte	$0{,}64191 \times 10^{24}$	3397	5,02	5. 021 7
Júpiter	$1898{,}7 \times 10^{24}$	71492	59,54	59. 533 5
Saturno	$568{,}51 \times 10^{24}$	60268	35,49	35. 480 3
Urano	$86{,}849 \times 10^{24}$	25559	21,29	21. 294 8
Neptuno	$102{,}44 \times 10^{24}$	24764	23,71	23. 495 6
Plutón	$0{,}013 \times 10^{24}$	1195	1,27	1. 204 9

y

$$v_e(M,R) = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

podemos calcular

Mercurio $v_e = 4.\,250\,1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Venus $v_e = 10.\,361\,9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Tierra $v_e = 11.\,180\,3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Marte $v_e = 5.\,021\,7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Júpiter $v_e = 59.\,533\,5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Saturno $v_e = 35.\,480\,3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Urano $v_e = 21.\,294\,8\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Neptuno $v_e = 23.\,495\,6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Plutón $v_e = 1.\,204\,9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Ejercicio 1.14 *De acuerdo a las masas de los planetas y sus radios, evalúe la aceleración de gravedad en sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

Solución. La aceleración de gravedad es la fuerza gravitacional dividida por la masa es decir

$$g = \frac{GM_P}{R_P^2}$$

donde R_P y M_P son el radio y la masa del planeta.

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte
Masa$\times 10^{-27}$ g	0.33022	4.8690	5.9742	0.64191
Gravedad en la superficie $\mathrm{cm\,s^{-2}}$	370	887	980	371
Radio medio ecuatorial (Km)	2,439.7	6,051.8	6,378.14	3,397

Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
1,898.7	568.51	86.849	102.44	0.013
2312	896	869	1100	81
71,492	60,268	25,559	24,764	1,195

Calculando para el primero y el ultimo

$$\begin{aligned} g_{Mercurio} &= \frac{6{,}67259 \times 10^{-11}(0{,}33022 \times 10^{24})}{(2{,}4397 \times 10^{6})^2} \\ &= 3.\,702\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ &= 3\,70{,}2\,\mathrm{cm\,s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{Pluton} &= \frac{6{,}67259 \times 10^{-11}(0{,}013 \times 10^{24})}{(1{,}195 \times 10^{6})^2} \\ &= 0.\,607\ \mathrm{m\,s^{-2}} \\ &= 60{,}7\ \mathrm{cm\,s^{-2}} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 1.15 *Estudie si existe alguna ley que de cuenta de las distancias de los planetas al Sol. (Por razones históricas, considere unidades donde la distancia Tierra Sol sea* 10*). Si existe alguna discontinuidad en su ley, aventure alguna hipótesis.*

Solución. Los datos, la primera columna de la tabla, cuando son expresados tomando arbitrariamente $R_T = 10$, dan los valores de la segunda columna. Esos números, con imaginación y paciencia se parecen a la secuencia de números enteros de la tercera columna, números llamados de Titius-Bode.

	R km	$10 \times R/R_T$	Titius-Bode
Mercurio	57909175	3,87	4
Venus	108208930	7,23	7
Tierra	149597890	10	10
Marte	227936640	15,22	16
Júpiter	778412020	5 2,03	52
Saturno	1426725400	9 5,37	100
Urano	2870972200	19 1,91	196
Neptuno	4498252900	30 0,69	388

Con esfuerzo y algo más, se puede ver que esos números corresponden a la secuencia $4 + 3 \times 2^{n-1}$ con $n = 1, 2, 3, \cdots$. Si se observa la tabla de esos valores, se descubre que correspondería la existencia de un planeta con $n = 4$

n	$4 + \frac{3}{2}2^n$
1	7
2	10
3	16
4	28
5	52
6	100
7	196
8	388

esto es, la secuencia predice un planeta con $10 \times R/R_T = 28$, entre Marte y Júpiter, precisamente donde está el cinturón de Asteroides. Nadie ha podido justificar esta "ley" de modo que al parecer se trataría de una coincidencia.

▲

Ejercicio 1.16 *Considere un satélite artificial en órbita ecuatorial geoestacionaria, es decir que permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Determine entonces la altura del satélite sobre la superficie terrestre y la rapidez de él en su órbita.*

Solución. Si Ω denota la velocidad angular terrestre esto es

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/s}$$

o bien que el periodo de la rotación T =día= $24 \times 3600 = 86400{,}0\,\mathrm{s}$, entonces la condición para que el satélite esté geo estacionario será

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

pero la rapidez en órbita circular es

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

de modo que tenemos

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

elevando al cuadrado

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r}$$

de donde podemos despejar r

$$\begin{aligned} r^3 &= \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \end{aligned}$$

cálculos numéricos para
$T = 86400{,}0$
$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$
$G = 6{,}67259 \times 10^{-11}$
$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 4.226 \times 10^7\,\mathrm{m}$
entonces la altura sobre la superficie terrestre será

$$\begin{aligned} h &= r - \underset{=}{R_T} \\ &= 4.226 \times 10^7 - 6{,}38 \times 10^6 \\ &= 3.588 \times 10^7\,\mathrm{m} \\ &= 3.588 \times 10^4\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

y

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 3072.791\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 11062.05\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

EJERCICIO 1.17 *Respecto a la situación del problema anterior, si la altura del satélite es reducida a la mitad pasando a otra órbita circular, determine el número de vueltas que da el satélite por día en torno a la Tierra.*

Solución. Ahora la altura es la mitad, es decir

$$h = \frac{3.588 \times 10^7}{2} = 1.794 \times 10^7 \,\mathrm{m}$$

de donde

$$\begin{aligned} r &= 6{,}38 \times 10^6 + 1.794 \times 10^7 \\ &= 2.432 \times 10^7 \,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$r = 2.432 \times 10^7$
entonces

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 4050.569 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Suponiendo que la velocidad es en el mismo sentido de la rotación terrestre, esto corresponde a un periodo

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 37724.8398 \,\mathrm{s}$$

esto es en un día el satélite da

$$\frac{86400{,}0}{37724.8398} = 2{,}29$$

vueltas y la Tierra da una, luego relativo a la Tierra el satélite da

$$1{,}29$$

vueltas.

EJERCICIO 1.18 *Considere a una persona en el Ecuador terrestre. Producto de la rotación terrestre esa persona está acelerada hacia el centro de la Tierra. Determine la magnitud de esa aceleración. Si la persona se para sobre una balanza y ella tiene una masa de* $80\,\mathrm{kg}$ *determine la lectura de la balanza en* $\mathrm{kg}f$. *(*$1\,\mathrm{kg}f = 9{,}8\,\mathrm{N}$*)*

Solución. Si N es la fuerza que hace la balanza sobre la persona hacia arriba, la segunda ley de Newton da

$$mg - N = m\frac{v^2}{R_T}$$

donde v es la rapidez Ecuatorial de la Tierra que puede calcularse de acuerdo a

$$v = \frac{2\pi R_T}{T}$$

donde T es el periodo de rotación terrestre (un día). Así resulta

$$\begin{aligned} N &= mg - m\frac{v^2}{R_T} \\ &= mg - m\frac{4\pi^2 R_T}{T^2} \end{aligned}$$

y numéricamente
$m = 80\,\mathrm{kg}$
$R_T = 6{,}38 \times 10^6\,\mathrm{m}$
$g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$$\begin{aligned} N &= 781.\,301\,\mathrm{N} \\ &= \frac{781.\,301}{9{,}8} \\ &= 79.\,72\,\mathrm{kg}f. \end{aligned}$$

O sea la rotación terrestre disminuye algo el peso de la persona.

▲

Ejercicio 1.19 *Determine el radio que debería tener un planeta con la misma masa terrestre, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

Solución. La velocidad de escape es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

e igualando a $c = 2{,}99792458 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$$c = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}},$$

podemos despejar

$$\begin{aligned} R &= \frac{2GM_T}{c^2} = 0{,}008\,9\,\mathrm{m} \\ &= 0{,}89\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

(Si el radio Terrestre fuera reducido a un valor menor que ese, tendríamos un agujero negro con la masa de la Tierra)

▲

Ejercicio 1.20 *Determine el radio que debería tener una estrella con la misma masa que el Sol, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

Solución. Es igual, pero ahora $M_S = 1{,}991 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ obteniendo

$$R = \frac{2GM_S}{c^2} = 2956.\,339 \text{ m}$$

▲

Ejercicio 1.21 *Determine la velocidad de rotación que debería tener un planeta como la Tierra, en vueltas por día, para que despegáramos de la superficie en el Ecuador.*

Solución. Como sabemos que la rapidez para órbita circular a nivel del suelo sería

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

ello da $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7908.\,378\,974\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ de modo el periodo de la rotación debe ser

$$T = \frac{2\pi R_T}{v} = 5068.\,892\,\mathrm{s}$$

lo que corresponde a

$$\frac{86400{,}0}{5068.\,892} = 17.\,05$$

vueltas por día.