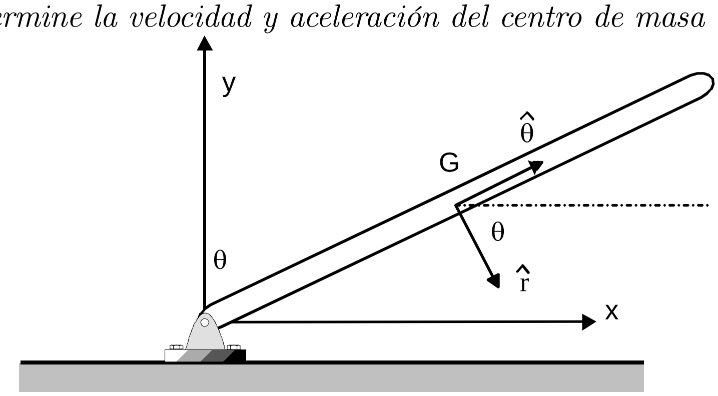
Capítulo 9

Soluciones ejercicios

9.1. Ejercicios de cinemática plana

Ejercicio 9.1 *Una barra de longitud L tiene un extremo fijo y ella rota en un plano fijo respecto a ese extremo de manera que el ángulo que ella forma con un eje fijo en el plano del movimiento es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*



Solución. Como es fácil comprender, G tiene movimiento circunferencial con radio $L/2$ de modo que simplemente podemos usar las expresiones para coordenadas polares

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\dot{\theta}\hat{\theta},\\ \vec{a} &= (R\ddot{\theta})\hat{\theta} - (R\dot{\theta}^2)\hat{r},\end{aligned}$$

pero ahora $\dot{\theta} = \omega_0$ y $\ddot{\theta} = 0$ de manera que resultará

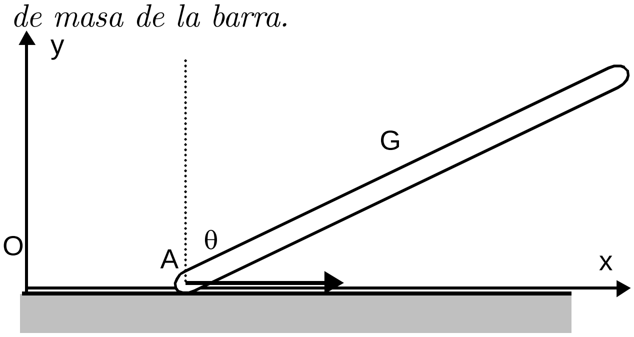
$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \frac{1}{2}L\omega_0\hat{\theta},\\ \vec{a}_G &= -(\frac{L}{2}\omega_0^2)\hat{r},\end{aligned}$$

y en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \frac{1}{2}L\omega(\hat{\imath}\cos\omega_0 t - \hat{\jmath}\sin\omega_0 t),\\ \vec{a}_G &= -(\frac{L}{2}\omega^2)(\hat{\imath}\sin\omega_0 t + \hat{\jmath}\cos\omega_0 t).\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 9.2 *Una barra de longitud L tiene se mueve en un plano vertical de manera que su extremo inferior A desliza sobre un eje OX horizontal con velocidad de magnitud v_A constante y el ángulo que ella forma con la vertical OY es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*



Solución. Aquí

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k} = -\omega_0\hat{k},$$

de manera que

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AG} = v_A\hat{\imath} + (-\omega_0\hat{k})\times\frac{L}{2}(\hat{\imath}\sin\omega_0 t + \hat{\jmath}\cos\omega_0 t)\\ &= v_A\hat{\imath} + \frac{\omega_0 L}{2}(-\hat{\jmath}\sin\omega_0 t + \hat{\imath}\cos\omega_0 t).\end{aligned}$$

Para la aceleración simplemente derivamos respecto al tiempo y resulta

$$\vec{a}_G = \frac{\omega_0^2 L}{2}(-\hat{\jmath}\cos\omega_0 t - \hat{\imath}\sin\omega_0 t).$$

EJERCICIO 9.3 *Para la situación del problema anterior, determine la posición del centro instantáneo en función del desplazamiento x_A del extremo A, de ω_0 y de v_A.*

Solución. Podemos usar

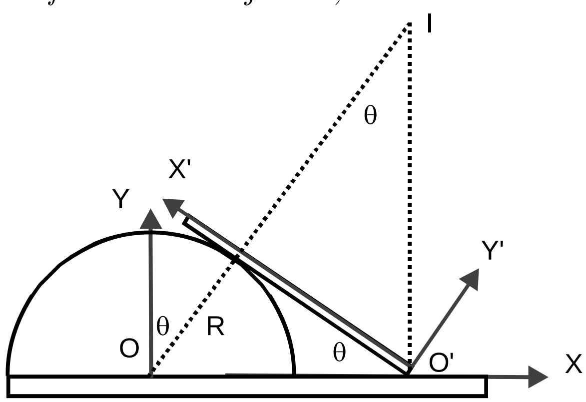
$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}. \tag{9.1}$$

con $\vec{\omega} = -\omega_0 \hat{k}$ y $\vec{v}_A = v_A \hat{\imath}$ de manera que

$$\overrightarrow{AI} = -\frac{\hat{k} \times v_A \hat{\imath}}{\omega_0} = -\frac{v_A}{\omega_0} \hat{\jmath},$$

o sea está debajo del punto A a distancia $\frac{v_A}{\omega_0}$ de él.

EJERCICIO 9.4 *Una barra de longitud L se mueve apoyada sobre un semicírculo de radio R y centro en O y su extremo derecho A desliza sobre un eje OX que coincide con la base del semicírculo con rapidez v_A. Si θ indica el ángulo que la barra forma con el eje OX, determine:*



a) La posición del centro instantáneo en función del ángulo θ.

b) La rapidez del centro de masa de la barra en función del ángulo θ.

Solución. Por las razones explicadas el centro instantáneo está en I y se indica en la figura. Su posición podemos especificarla en términos de sus coordenadas que pueden calcularse por geometría

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{R}{\sin\theta}, \\ y_I &= x_I \cot\theta = \frac{R}{\sin\theta}\cot\theta. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 9.5 *Para la situación del ejercicio anterior, determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.*

Solución. La mitad está resuelta, porque del problema anterior lo que se obtuvo son las ecuaciones paramétricas de la posición de I. Para obtener la ecuación cartesiana debemos eliminar θ. Para ello use

$$y_I = x_A \cot\theta = x_A \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = x_A \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

con

$$\sin\theta = \frac{R}{x_I},$$

de modo que resulta

$$y_I = x_I \cot\theta = x_I \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x_I}{R}\sqrt{x_I^2 - R^2},$$

la ecuación de la curva riel.

Para la curva rueda debemos encontrar las coordenadas relativas a la barra $x_I' = AB$, $y_I' = BI$ por geometría. Así se obtiene

$$\begin{aligned} x_I' &= R\cot\theta, \\ y_I' &= \frac{x_I'}{\tan\theta} = R\cot^2\theta, \end{aligned}$$

y la ecuación cartesiana será (eliminando $\cot\theta$)

$$y_I' = \frac{(x_I')^2}{R}.$$

▲

EJERCICIO 9.6 *Una lámina rígida se mueve en el plano OXY de manera de dos puntos de ella $A = (1,2,0)$ y $B = (2,1,0)$ tienen velocidades $\vec{v}_A = (2,3,0)$ y $\vec{v}_B = (0,1,0)$.*

a) *Compruebe que esos puntos tienen velocidades compatible con la condición de rigidez (**??**).*

b) *Determine la velocidad angular del cuerpo en ese instante.*

Solución. Construimos $\overrightarrow{AB} = (2,1,0) - (1,2,0) = (1,-1,0)$, y calculamos

$$\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB} = (2,3,0) \cdot (1,-1,0) = -1,$$

$$\vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB} = (0,1,0) \cdot (1,-1,0) = -1,$$

que resultan iguales. Ahora debe ser

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB},$$

que la multiplicamos $\times\overrightarrow{AB}$ resultando

$$(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times \overrightarrow{AB} = (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB} = (AB^2)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}$$

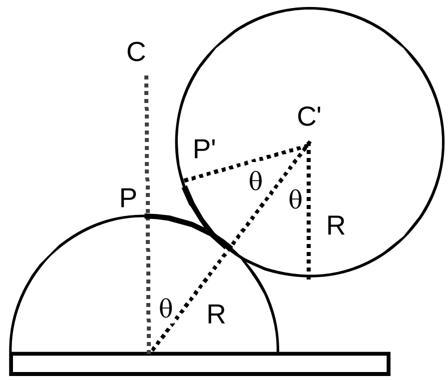
pero por ser el movimiento plano $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ de manera que

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times \overrightarrow{AB}}{(AB)^2} = \frac{(-2,-2,0) \times (1,-1,0)}{2} = (0,0,2)\,.$$

▲

EJERCICIO 9.7 *Un disco de radio R rueda sin deslizar apoyado sobre un semicilindro de radio igual R. Si θ es el ángulo que forma la línea que une los centros con una línea fija, demuestre que la velocidad angular del disco tiene magnitud*

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$



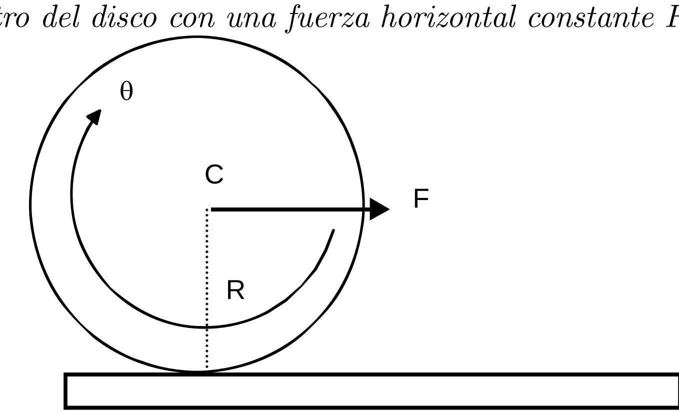
Solución. Como el disco no ha resbalado, los arcos destacados son iguales, las recta $C'P'$ estaba vertical en CP y luego el ángulo que ha girado esa línea que pertenece al disco es 2θ, luego la velocidad angular tiene magnitud

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$

▲

9.2. Ejercicios de dinámica

EJERCICIO 9.8 *Un disco de masa M y radio R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante F, determine:*



a) La aceleración del centro de masa del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La fuerza de roce.

Solución. Sea f la fuerza de roce, de sentido contrario a F. Así tenemos con $\hat{k}$ hacia adentro del papel

$$\begin{aligned} F - f &= Ma_{CM}, \\ \vec{L}_{CM} &= I_{CM}\vec{\omega}, \\ \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} &= I_{CM}\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I_{CM}\frac{d}{dt}\omega(-\hat{k}), \\ \vec{\tau}_{CM} &= Rf(-\hat{k}), \end{aligned}$$

como $I_{CM} = MR^2/2$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR^2\frac{d}{dt}\omega &= Rf, \\ f &= \frac{1}{2}MR\frac{d}{dt}\omega, \end{aligned}$$

pero el disco rueda sin resbalar de manera que

$$a_{CM} = R\frac{d}{dt}\omega,$$

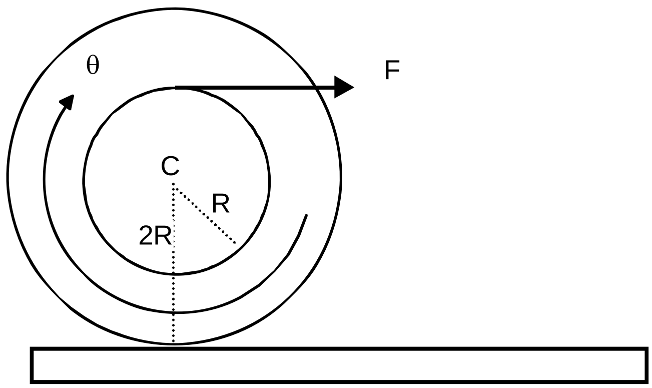
y las dos ecuaciones que tenemos se reducen a

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}Ma_{CM}, \\ F - f &= Ma_{CM}, \end{aligned}$$

de donde salen los resultados

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{2}{3}\frac{F}{M}, \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3}\frac{F}{MR}, \\ f &= \frac{1}{3}F. \end{aligned}$$

EJERCICIO 9.9 *Un disco de masa M y radio 2R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un reborde de radio R como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F, determine:*



a) La aceleración del centro de masa del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La fuerza de roce.

Solución. Similarmente sea f la fuerza de roce, de sentido contrario a F. Así tenemos con $\hat{k}$ hacia adentro del papel

$$\begin{aligned} F - f &= Ma_{CM}, \\ \vec{L}_{CM} &= I_{CM}\vec{\omega}, \\ \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} &= I_{CM}\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I_{CM}\frac{d}{dt}\omega(-\hat{k}), \\ \vec{\tau}_{CM} &= (2Rf + RF)(-\hat{k}), \end{aligned}$$

como $I_{CM} = Mr^2/2 = 2MR^2$ tenemos

$$\begin{aligned} 2MR^2\frac{d}{dt}\omega &= (2Rf + RF), \\ f &= MR\frac{d}{dt}\omega - \frac{F}{2}, \end{aligned}$$

pero el disco rueda sin resbalar de manera que

$$a_{CM} = 2R\frac{d}{dt}\omega,$$

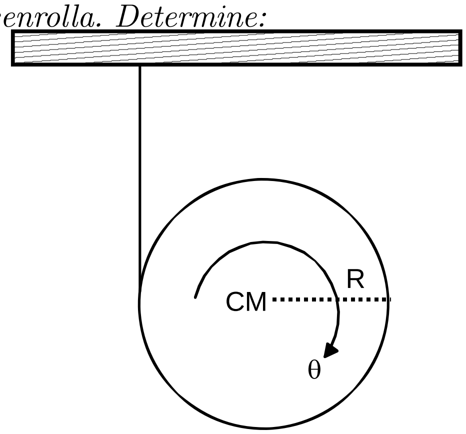
y las dos ecuaciones que tenemos se reducen a

$$\begin{aligned} f + \frac{F}{2} &= \frac{1}{2}Ma_{CM}, \\ F - f &= Ma_{CM}, \end{aligned}$$

de donde salen los resultados

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{F}{M}, \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_{CM}}{2R} = \frac{F}{2MR}, \\ f &= F - Ma_{CM} = 0. \end{aligned}$$

EJERCICIO 9.10 *Un disco de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:*



a) La aceleración de bajada del disco.

b) La tensión de la cuerda.

Solución. Si T es la tensión en la cuerda tenemos

$$\begin{aligned} Mg - T &= Ma_{CM}, \\ \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} &= RT \Longrightarrow \frac{1}{2}MR\frac{d\omega}{dt} = T \\ a_{CM} &= R\frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

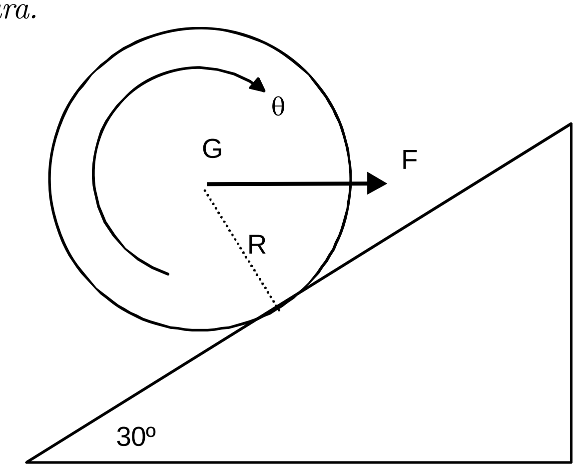
de donde se obtiene

$$Mg - \frac{1}{2}Ma_{CM} = Ma_{CM},$$

de donde

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{2}{3}g, \\ T &= \frac{1}{3}Mg. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.11 *Un disco de masa* 10 kg *y de radio* 2 m *puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en* 30^o *respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud* 100 N *aplicada en su centro, como se indica en la figura.*

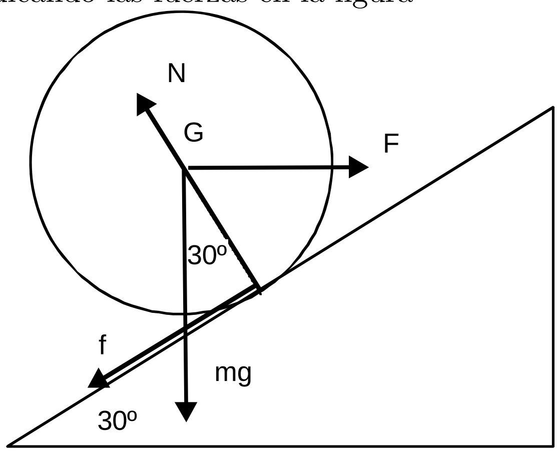


Determine:

a) La aceleración del centro del disco.

b) La fuerza de roce.

Solución. Indicando las fuerzas en la figura



tenemos que

$$\begin{aligned} F\cos 30 - mg\sin 30 - f &= ma, \\ N - mg\cos 30 - F\sin 30 &= 0, \\ \Gamma_G &= fR = I_G\alpha, \end{aligned}$$

donde además

$$\alpha = \frac{a}{R}, \qquad I_G = \frac{1}{2}mR^2.$$

Reemplazando α y colocando valores numéricos

$$\begin{aligned} 50\sqrt{3} - 50 - f &= 10a, \\ N - 50\sqrt{3} - 50 &= 0, \\ f &= 5a, \end{aligned}$$

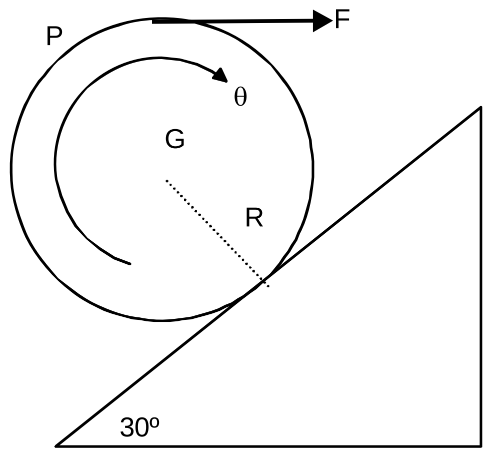
de donde

$$a = \frac{50\sqrt{3} - 50}{15} = \frac{10}{3}\sqrt{3} - \frac{10}{3} = 2.44017\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

$$f = \frac{50}{3}\sqrt{3} - \frac{50}{3} = 12.201\,\mathrm{N}.$$

▲

Ejercicio 9.12 *Un disco de masa* 10 kg *y de radio* 2 m *puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en* 30^o *respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud* 100 N *aplicada en el punto* P*, como* *se indica en la figura.*



Determine:

a) La aceleración del centro del disco.

b) La fuerza de roce.

Solución. La única diferencia respecto al problema anterior es que ahora F también hace torque respecto a G, de manera que

$$\begin{aligned} F\cos 30 - mg\sin 30 - f &= ma, \\ N - mg\cos 30 - F\sin 30 &= 0, \\ \Gamma_G &= fR + FR = I_G\alpha, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} 50\sqrt{3} - 50 - f &= 10a, \\ N - 50\sqrt{3} - 50 &= 0, \\ f + 100 &= 5a, \end{aligned}$$

luego

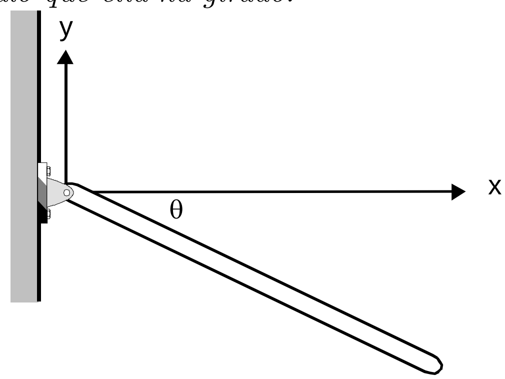
$$a = \frac{50\sqrt{3} - 50 + 100}{15} = \frac{10}{3}\sqrt{3} + \frac{10}{3} = 9.107\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

y

$$f = 5a - 100 = \frac{50}{3}\sqrt{3} - \frac{250}{3} = -54.466\,\mathrm{N},$$

el signo significa que la fuerza de roce actúa hacia arriba.

Ejercicio 9.13 *Una barra de largo 2L y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.*



Solución. Sea N la reacción vertical en la articulación. Conviene usar conservación de energía, esto es

$$E = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta = 0,\ \ I_0 = \frac{4}{3}ML^2,$$

de donde

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{2L}\sin\theta},$$

es la magnitud de la velocidad angular de la barra. La reacción vertical sale de

$$N - Mg = M\frac{d^2}{dt^2}(-L\sin\theta),$$

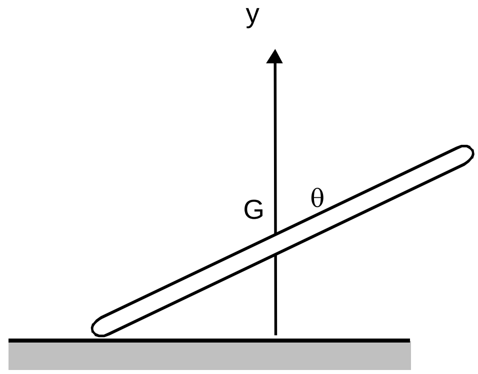
la derivada se puede hacer porque se conoce $\dot{\theta}$ y resulta

$$N = Mg - ML\frac{d^2}{dt^2}\sin\theta,$$

donde damos sólo el resultado

$$N = \frac{5}{2}Mg - \frac{9}{4}Mg\cos^2\theta.$$

EJERCICIO 9.14 *Una barra de longitud* $2L$ *y masa* M *se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.*



Solución. Como no hay fuerzas horizontales, el movimiento del centro de masa ocurre sólo en la dirección vertical, por lo tanto podemos tomar

$$\begin{aligned} x_{CM} &= 0, \\ y_{CM} &= L\cos\theta, \end{aligned}$$

conservación de energía da

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2)\dot{\theta}^2 + MgL\cos\theta = MgL,$$

donde

$$v_{CM} = \dot{y}_{CM} = -\dot{\theta}L\sin\theta,$$

entonces

$$\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(1-\cos\theta),$$

y

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}\frac{(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta + \frac{1}{3}},$$

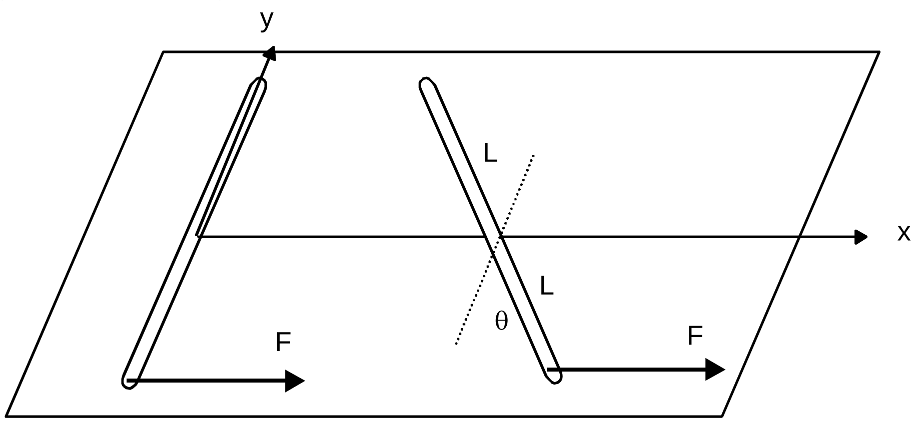
cuando la barra se pone horizontal $\theta = \pi/2$ y luego

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{2L}},$$

y la velocidad del centro de masas en este instante es

$$v_{CM} = -\dot{\theta}L = -\sqrt{\frac{3gL}{2}}.$$

EJERCICIO 9.15 *Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.*



Solución. Sea x_{CM} e y_{CM} las coordenadas del centro de masas sobre el plano horizontal. Si la fuerza está aplicada en la dirección OX la coordenada y_{CM} no varía y puede tomarse cero. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} F &= M\ddot{x}_{CM}, \\ \tau_{CM} &= FL\cos\theta = I_{CM}\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

la última es la que interesa y si reemplazamos $I_{CM} = ML^2/3$ se obtiene

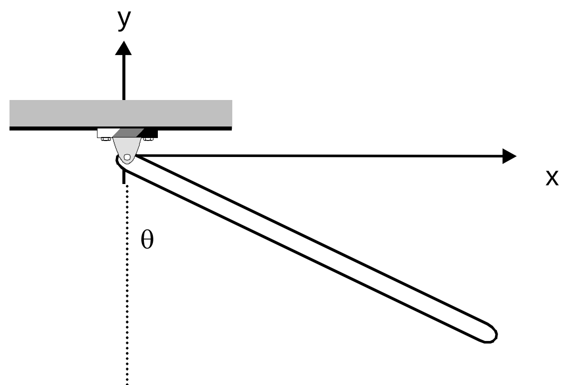
$$FL\cos\theta = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta},$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{3F}{ML}\cos\theta,$$

es la ecuación diferencial que determina el ángulo θ.

EJERCICIO 9.16 *Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.*



Solución. Conservación de energía da

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta,$$

es constante. Luego si derivamos

$$I\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} = 0,$$

de donde

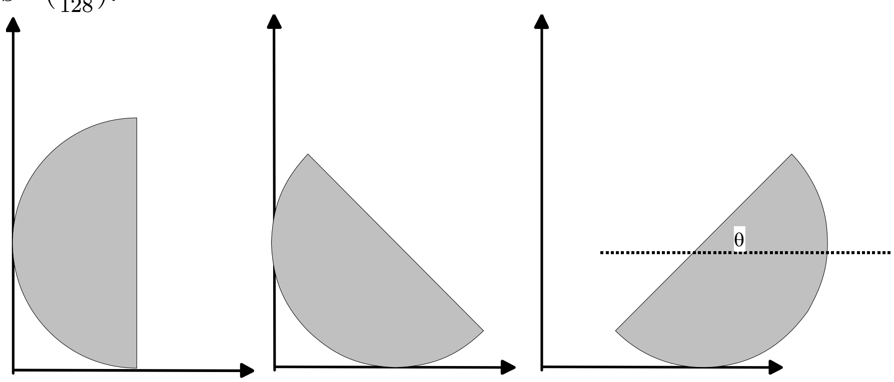
$$I\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0,$$

y si reemplazamos $I = ML^2/3$ resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0,$$

es la ecuación diferencial solicitada.

EJERCICIO 9.17 *Una semiesfera homogénea de radio "a" está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa,* *sobre la cual la superficie semi esférica se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre, además que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son* $\omega = \sqrt{\frac{15}{8}g/a}$, $v = \frac{3}{8}a\omega$ *respectivamente. Demuestre además, durante el movimiento siguiente, que el ángulo entre la base y la horizontal no excede de* $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$.



Solución. El centro de masa del cuerpo está a distancia $3a/8$ del centro. Mientras no despega, el cuerpo mantiene su centro fijo, y la única fuerza que realiza torque respecto a ese punto es el peso. Si en la segunda figura θ es el ángulo que ha girado la línea que contiene el centro de masa, entonces

$$I_C\ddot{\theta} = Mg\frac{3}{8}a\cos\theta,$$

donde el momento de inercia es $I = 2Ma^2/5$, luego

$$\frac{2Ma^2}{5}\ddot{\theta} = Mg\frac{3}{8}a\cos\theta,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\cos\theta,$$

que podemos integrar porque

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\dot{\theta}^2,$$

obteniendo

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\sin\theta,$$

y cuando la base se coloca horizontal $\theta = \pi/2$ resultando

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}},$$

y

$$v_{CM} = \frac{3}{8}a\omega.$$

Puede probarse que en esta posición el cuerpo despega y tiene una energía inicial (respecto a la posición inicial del centro)

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3}{8}a = 0,$$

y su momentum en la dirección horizontal es

$$P_x = M\frac{3}{8}a\omega = M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}.$$

Esas dos cantidades son conservadas, pero ahora todo el cuerpo se traslada y rota, de manera que la coordenada x del centro de masa varía. Así la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0,$$

además

$$\begin{aligned} M\dot{x} &= M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}, \\ y_{CM} &= \frac{3a}{8}\cos\theta, \\ \dot{y}_{CM} &= -\frac{3a}{8}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Cuando θ sea un extremo, $\dot{\theta} = 0$, y en ese caso, $\dot{y}_{CM} = 0$ y la ecuación de energía da

$$\frac{1}{2}M(\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}})^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0$$

que se reduce a

$$\cos\theta = \frac{45}{128},$$

o sea $\theta = 69.417^o$.

EJERCICIO 9.18 *Un disco uniforme de radio a que está rotando con rapidez angular inicial Ω alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es μ. Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$.*

Solución. Supondremos que la normal que es el peso se distribuye uniformemente de manera que su densidad superficial es

$$\sigma = \frac{Mg}{\pi a^2}.$$

Considere un anillo entre r y $r + dr$. La fuerza de roce en ese anillo produce un torque retardador dado por

$$\begin{aligned} d\tau &= -\mu(\sigma 2\pi r dr)r \\ &= -\mu\frac{Mg}{\pi a^2}2\pi r^2 dr \\ &= -\mu\frac{2Mg}{a^2}r^2 dr, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} \tau &= -\mu\int_0^a \frac{2Mg}{a^2}r^2 dr \\ &= -\frac{2\mu Mga}{3}. \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} I\alpha &= -\frac{2\mu Mga}{3}, \\ \frac{1}{2}Ma^2\alpha &= -\frac{2\mu Mga}{3}, \\ \alpha &= -\frac{4\mu g}{3a}, \end{aligned}$$

y como la condición de frenado es

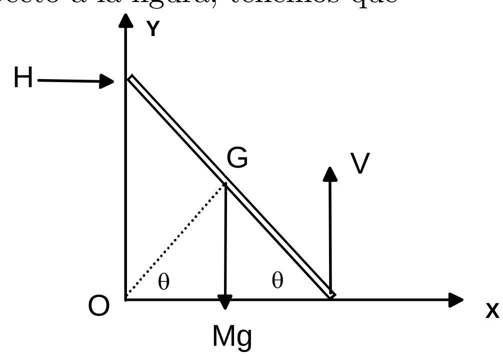
$$0 = \Omega + \alpha t,$$

resulta

$$t = \frac{3a\Omega}{4\mu g}.$$

EJERCICIO 9.19 *Una barra de masa M y largo $2a$ se mueve apoyada en superficies lisas OY vertical y OX horizontal. Inicialmente la barra estaba vertical con $\theta = \pi/2$ y se perturbó levemente. Determine $\dot{\theta}$ y las reacciones en función de θ.*

Solución. Respecto a la figura, tenemos que



$$x_G = a\cos\theta, \qquad y_G = a\sin\theta, \qquad v_G = a\dot{\theta},$$

y la energía es constante

$$E = Mga = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + Mga\sin\theta = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ma^2)\dot{\theta}^2 + Mga\sin\theta,$$

de donde

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}(1-\sin\theta)},$$

donde el signo se debe a que θ está disminuyendo. Para determinar las reacciones utilizamos $\vec{F} = M\vec{a}_G$ que en componentes es

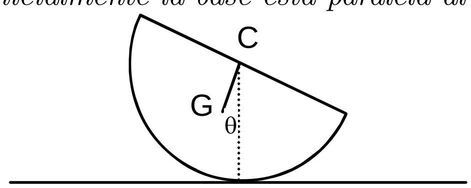
$$\begin{aligned} H &= M\frac{d^2}{dt^2}a\cos\theta, \\ V - Mg &= M\frac{d^2}{dt^2}a\sin\theta, \end{aligned}$$

en el apéndice se explica como hacer estas segundas derivadas con facilidad y resulta

$$\begin{aligned} H &= Ma\frac{1}{-2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\sin\theta)^2 = \frac{3}{4}Mg\,(3\sin\theta - 2)\cos\theta, \\ V &= Mg + Ma\frac{1}{2\cos\theta}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}Mg\left(10 - 9\cos^2\theta - 6\sin\theta\right). \end{aligned}$$

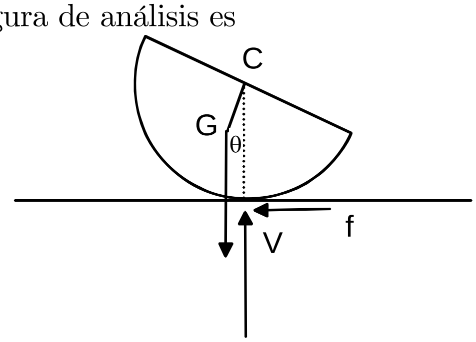
Note que la barra pierde el contacto con la pared cuando $\sin\theta = 2/3$ es decir cuando $\theta = 41{,}81^o$.

EJERCICIO 9.20 *Una semiesfera de masa M y radio R se coloca apoyada sobre una superficie horizontal con roce de modo que la semiesfera sólo puede rodar sin resbalar. Inicialmente la base está paralela al plano horizontal.*



Si se le da a la esfera una velocidad angular inicial $\dot\theta(0) = \Omega$ sin que el cuerpo resbale, determine $\dot\theta$ en función de θ.

Solución. La figura de análisis es



Pueden calcularse $CG = \frac{3}{8}R$ y $I_C = \frac{2}{5}MR^2$. A pesar que hay roce como el punto de contacto no desliza, se conserva la energía

$$E = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot\theta^2 + Mg(R - CG\cos\theta).$$

Las coordenada de G serán (el centro C avanza $R\theta$ por no haber deslizamiento)

$$\begin{aligned} x_G &= R\theta - CG\sin\theta, \\ y_G &= R - CG\cos\theta, \end{aligned}$$

de donde evaluamos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_G &= R\dot{\theta} - CG\dot{\theta}\cos\theta, \\
\dot{y}_G &= CG\dot{\theta}\sin\theta, \\
v_G^2 &= R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}^2 CG\cos\theta + CG^2\dot{\theta}^2, \\
&= \frac{1}{64}R^2\left(73 - 48\cos\theta\right)\dot{\theta}^2,
\end{aligned}$$

reemplazando en E

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}M\frac{1}{64}R^2\left(73 - 48\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(R - \frac{3}{8}R\cos\theta) \\
&= \frac{1}{640}MR^2\left(493 - 240\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + MgR(1 - \frac{3}{8}\cos\theta) \\
&= \frac{1}{640}MR^2\left(493 - 240\cos\theta\right)\Omega^2 + MgR(1 - \frac{3}{8})
\end{aligned}$$

de allí despejamos $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{g}{R}\frac{1-\cos\theta}{\left(\frac{493}{240} - \cos\theta\right)}}.$$