

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**DISEÑO DE UN SIMULADOR ELECTRÓNICO DE FLUIDOS DE
VON KÁRMAN**

BORIS LEIGHTON INOSTROZA

Profesor Guía: Dr. Raúl Labbé Morales

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar al título de Ingeniero Físico

Santiago-Chile

2012

Índice general

Resumen	IX
1. Introducción	1
2. Resultados de experimentos a considerar	5
2.1. Torques Promedio	5
2.2. Potencia y coeficiente de acoplamiento	10
3. Formulación del Modelo	13
3.1. Obtención de datos a partir de un gráfico	13
3.2. Consideraciones preliminares para la formulación de un modelo .	15
3.3. Modelo Inicial	17
3.3.1. Soluciones estacionarias	22
3.4. Modelo Lineal para T_W	23
3.4.1. Determinación de puntos S de interés	24
3.4.2. Determinación de Expresiones para Ω_f	26
3.5. Modelo cuadrático en Ω_f para T_W	32
3.6. Modelo Implementado	40

3.7. Determinación de $\gamma(\theta)$	47
3.7.1. Corrección de torques promedio	47
4. Diseño y Pruebas de Circuitos	53
4.1. Determinación de $\gamma(\theta)$ en el caso contrarrotativo	54
4.1.1. Determinación de una aproximación para θ	55
4.2. Diseño de γ	58
4.2.1. Implementación	58
4.2.2. Análisis	60
4.2.3. Test Dinámico del circuito	63
4.3. Escalamiento de Ecuaciones Dinámicas	63
4.3.1. Determinación de constantes	66
4.4. Circuito de integración	67
4.4.1. Aplicación de Ruidos en Multisim	71
4.5. Resultados de simulaciones en Multisim	71
4.5.1. Simulación de Filtro	75
4.6. Resultados de cálculos en FORTRAN	75
4.7. Diseño en Eagle	79
4.7.1. Imágenes de circuitos impresos	83
4.8. Adquisición de Datos	87
A. Estadística en aire	91
B. Ruidos en Multisim	93

Índice de figuras

2.1. Montaje experimental utilizado en el trabajo de Cadot y Le Maître, [3].	6
2.2. Torques promedio de la referencia [3]	8
2.3. Configuraciones adoptadas por el fluido en el experimento de Cadot y Le Maître.	9
2.4. Superficie de potencia y coeficiente adimensional de potencia de la referencia [4].	11
2.5. Coeficiente adimensional de potencia para diferentes relaciones de aspecto Γ , a partir de la referencia [4].	11
3.1. Comparación entre ajustes (líneas rojas) con datos experimentales (puntos)	14
3.2. Cambio de Coordenadas	16
3.3. Curva $C(\theta, \Gamma, R_e)$ obtenida a partir del Torque total inyectado al sistema	17
3.4. Definición de intervalos en curva de torques promedio de Cadot y Le Maître	24
3.5. Rotación global en la región II (torques positivos)	28

3.6. Rotacion global del fluido y de los discos (superior). Zoom para el caso corrotativo (inferior).	30
3.7. Comparación de resultados de torques promedio (modelo en azul, datos en negro), del modelo con fricción lineal en las paredes. . .	31
3.8. Comparación de resultados para torques ejercidos por las paredes (modelo en azul, datos en negro)	32
3.9. Curvas de velocidad angular de rotación global y de los discos para caso cuadrático en torque ejercido por paredes.	35
3.10. Comparación Torques promedio entre modelo(azul) y datos experimentales(negro) para dependencia cuadrática de torque ejercidos por paredes.	36
3.11. Torque promedio ejercido por las paredes, modelo (azul) y datos experimentales (negro).	37
3.12. Comparación de los casos lineal (azul) y cuadrático (rojo) en T_W .	38
3.13. Zoom corrotativo figura anterior.	38
3.14. Curvas de ajuste $\gamma(\theta)$, determinadas directamente por división entre datos y modelo.	39
3.15. Soluciones estacionarias para las velocidades angulares de rotación global de fluido (azul) y discos.	42
3.16. Comparación de torques promedio, modelo y datos experimentales	43
3.17. Comparación de torques ejercidos por las paredes, modelo (azul y cian, diferentes η) y datos experimentales (negro).	43
3.18. Comparación de la inversion de datos y el modelo para la velocidad angular de rotación global del fluido.	44
3.19. Potencia inyectada por el disco inferior.	45
3.20. Potencia inyectada por el disco superior.	46

3.21. Potencia total inyectada al sistema.	46
3.22. Modelos de corrección propuestos	49
3.23. Torques corregidos.	50
3.24. Función de acoplamiento medio $\gamma(\theta)$	51
3.25. Comparación de resultados de torque promedio para modelo im- plementado, modelo(azul) y datos (negro).	51
3.26. Torque ejercido por las paredes, modelo (azul) y datos (negro). .	52
4.1. Comparación de modelo para la función $\gamma(\theta)$ normalizada al caso contrarotativo.	55
4.2. Aproximación de la función $\arctan(S)$	57
4.3. Diferencia entre modelo de ajuste y función $\arctan(S)$	57
4.4. Diseño electrónico de $\gamma(\theta)$. Nótese las funciones detalladas dentro del circuito.	59
4.5. Funciones intermedias de el circuito que calcula $\gamma(\theta)$	60
4.6. Comparación del esquema electrónico simulado con una señal tri- angular de entrada de frecuencia 5KHz con el modelo analítico. Nótese que no se aprecian efectos de histéresis.	63
4.7. PDF suma de torques sobre discos y fluido.	66
4.8. Diseño de circuito de integración en Multisim	70
4.9. Fluctuaciones de velocidad angular en unidades de tensión. . . .	72
4.10. PDF fluctuaciones de velocidad angular para $\beta = 0,1$	72
4.11. PDF fluctuaciones de velocidad angular para $\beta = 0,3$	73
4.12. PDF fluctuaciones de velocidad angular para $\beta = 0,5$	73
4.13. Comparación de Espectros de señales para disco inferior y de rotación global de fluido.	74

4.14. Esquema de filtro en Multisim	75
4.15. PDF Caso1	77
4.16. PDF Caso2	77
4.17. PDF Caso3	78
4.18. Relación conjunta de ruidos aplicados	79
4.19. Diseño de rutas de señales en Eagle	81
4.20. Imagen utilizada por la máquina ruteadora para aislar el cobre de la placa.	82
4.21. Diseño de placa $\gamma(\theta)$	84
4.22. Diseño de filtro	84
4.23. Módulo para el cálculo de gama.	85
4.24. Filtro para las señales de torque turbulento.	85
4.25. Placa impresa del circuito integrador.	85
4.26. Circuito integrador y sus componentes.	86
4.27. Circuito Completo	87
A.1. PDF en Aire	92

Agradecimientos

Este trabajo contó con financiamiento proveniente en parte del proyecto FONDECYT #190686, y en parte del proyecto DICYT #041231LM.

Resumen

Este trabajo muestra el proceso tanto de diseño como de fabricación de un circuito impreso, el cual se basa en la computación analógica que resuelve ecuaciones diferenciales en términos de voltajes equivalentes a las que representan la dinámica de un determinado sistema físico. En nuestro caso contamos como sistema a un fluido turbulento generado mediante agitadores en forma de discos con paletas ubicados en los extremos de un cilindro contenedor, los cuales inyectan momento angular al sistema en cuestión.

Se determina, en base a resultados experimentales, una función de acoplamiento promedio entre los torques propagados a través del fluido, que actúan sobre estos agitadores, la cual sirve de nexo entre las ecuaciones propuestas que determinan la dinámica de las respectivas velocidades angulares tanto de los discos coaxiales como del fluido. Todo esto para obtener las ecuaciones que serán, equivalentemente, implementadas en un circuito impreso.

Para ello se elabora el diseño electrónico el que se somete a pruebas en el simulador de circuitos electrónicos Multisim, mostrando resultados de este proceso que avalan el buen funcionamiento de nuestro diseño. Finalmente se muestran tanto el diseño del circuito impreso mediante el software Eagle, como de las placas impresas con sus respectivos componentes.

Capítulo 1

Introducción

Un tópico clásico en turbulencia es el cálculo o la determinación del efecto que sobre las propiedades de transporte macroscópicas tienen los movimientos turbulentos en escalas microscópicas. Estos movimientos son caracterizados por escalas de tiempo muy rápidas y pueden ser consideradas desde un punto de vista macroscópico como fluctuaciones. La aproximación convencional consiste en modelar el valor medio de funciones no lineales en términos de cantidades promedio entregándonos ecuaciones de evolución para magnitudes promediadas. Una alternativa es considerar las fluctuaciones como ruido con una determinada estadística, donde la mayor parte de los problemas de transporte pueden ser resueltos si uno fuese capaz de determinar la relación entre dicha estadística y alguna magnitud global del sistema. En principio esto puede ser abordado suponiendo conocida la función densidad de probabilidad (PDF), para determinar la estadística de las fluctuaciones de la magnitud global de interés a través de una ecuación estocástica. Uno de los ejemplos más simples sería considerar la ecuación de Langevin, que es una ecuación de primer orden, utilizando un ruido blanco (cuya PDF es gaussiana) como estímulo. Esta elección no es arbitraria

ya que hay un resultado experimental que muestra que al deconvolucionar las fluctuaciones (fuertemente no gaussianas) de la velocidad angular de los agitadores en un fluido turbulento de von Kármán en aire, se obtienen PDFs casi gaussianas, lo cual da sustento a la idea de utilizar este tipo de estadística para el ruido que emulará las fluctuaciones de torque que originan las fluctuaciones de velocidad angular. [1, 2, 5, 6]

Hoy en día, gracias a la potencia computacional, se han logrado simular fluidos emulando su comportamiento en simulaciones tridimensionales las que se acercan cada vez más a una descripción precisa de estos. Sin embargo, la utilización de métodos numéricos para la integración de ecuaciones diferenciales estocásticas plantea problemas difíciles de abordar de manera satisfactoria. En este trabajo nos hemos propuesto resolver estas ecuaciones mediante computación analógica. Para tal efecto, se formula en primer lugar un modelo para fluidos de Von Kármán en que las magnitudes globales, velocidades angulares de los agitadores y del fluido, son gobernadas por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, para luego diseñar un circuito electrónico gobernado por las mismas ecuaciones. La aplicación de ruidos blancos, con ancho de banda limitada, a las entradas de este circuito permitirá simular las fluctuaciones de torque asociadas al fluido turbulento del fluido, las que darán origen a fluctuaciones de voltaje que pueden ser asociadas a las fluctuaciones de velocidad angular en los agitadores y a la fluctuación de velocidad angular promedio del fluido. Se tendrá de esta manera un sistema electrónico análogo al montaje para la producción de fluidos de Von Kármán, a través del cual tendremos acceso a procesos no lineales simplificados que afectarán la estadística de las magnitudes globales de interés.

Este trabajo se encuentra organizado en tres capítulos. El primero muestra dos experimentos de referencia cuyos resultados son fundamentales para el desarrollo

de nuestro modelo. El segundo se centra en el desarrollo del modelo a partir de datos experimentales de la referencia principal, determinando una función de acoplamiento promedio entre los torques que actúan sobre los agitadores. El tercero muestra tanto el proceso de diseño como de las ecuaciones que serán necesarias de sintetizar en el circuito, además de diferentes tipos de pruebas como simulaciones en Multisim e integraciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en FORTRAN.

Capítulo 2

Resultados de experimentos a considerar

2.1. Torques Promedio

Las principales referencias de este trabajo corresponden a los trabajos realizados por Titon y Cadot[2] y Cadot y Le Maitre[3], cuyos resultados de torque promedio nos permiten elaborar un modelo basado en la determinación de una función de acoplamiento medio, que permite modelar los valores medios de los torques de reacción del fluido sobre los discos que actúan como agitadores en el montaje de Von Kármán. En el trabajo de Cadot y Le Maître se estudia el efecto de variar la frecuencia de rotación de uno de los discos mientras la otra permanece fija, determinando los torques sobre los discos tanto en el régimen corrotativo, definido cuando el sentido de ambas velocidades angulares de los discos es positivo, como en el contrarrotativo, cuando el sentido de rotación de un disco es el opuesto del otro.

El esquema del montaje experimental se puede apreciar en la figura 2.1. Dos discos coaxiales, provistos de palas rotan a ciertas frecuencias dentro de un cilindro lleno de algún fluido.

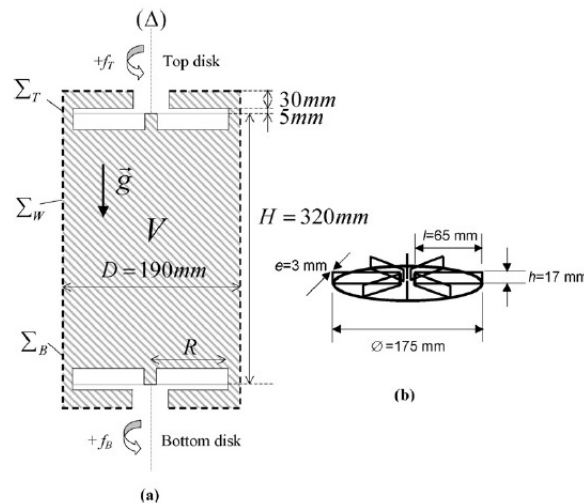


Figura 2.1: Montaje experimental utilizado en el trabajo de Cadot y Le Maître, [3].

La turbulencia es generada en el cilindro de 11Lt lleno de agua, por dos discos coaxiales con paletas de radios 8,75cm separados una distancia de 32cm. Este sistema mantiene las velocidades angulares constantes independientemente del torque ejercido por el fluido sobre los discos, mediante un controlador que ajusta el torque al valor necesario para mantener la velocidad angular deseada. El tiempo de respuesta de este controlador es de 0,05s, lo cual implica una frecuencia de corte de 20Hz, este modo de inyección de energía es denominado modo Ω ya que la frecuencia de rotación permanece fija. Para bajas frecuencias la medición de corriente corresponde a la medición instantánea de torque, dado que estos son directamente proporcionales. La medición del torque ejercido por el fluido es determinada luego de sustraer el torque por fricción viscosa mecánica medido independientemente en el sistema cuando el agua es reemplazado por aire [3].

Para obtener los resultados, el procedimiento consiste en fijar una de las frecuencias a un valor dado f_0 mientras la otra toma un valor variable f , valor característico a cada corrida, midiendo en el régimen estacionario los valores medios de torque de los discos inferior (Bottom), $\langle T_B \rangle$ y superior (Top), $\langle T_T \rangle$, asegurándose de tener una buena estadística. Las mediciones son repetidas alrededor de 100 veces para f variado en el intervalo $[-2f_0, 2f_0]$. Los datos fueron obtenidos realizando tres corridas de mediciones para dos diferentes frecuencias fijas. En dos de ellas la frecuencia se mantuvo fija en un mismo disco mientras que para la tercera se fijó en el disco opuesto.

La figura 2.2 muestra los torques promedios normalizados a su respectiva frecuencia fija de rotación, como función de la razón de frecuencias

$$S = \frac{f_T}{f_B}. \quad (2.1)$$

En el gráfico se muestran tres ensayos que colapsan en la misma curva. Cabe notar que el ensayo #2 no cubre todos los valores de los otros ensayos, aunque los valores medidos permanecen en la misma curva. La variación de la variable S es más acotada que en el resto de los ensayos, debido a que la frecuencia fija utilizada en este caso es distinta. En base a los resultados obtenidos con nuestro modelo los resultados se ven igualmente acotados en S dependiendo de la frecuencia fija.

Los regímenes corrotativo y contrarrotativo a igual rapidez de rotación son definidos en la figura por $S = 1$ y $S = -1$, respectivamente. La particularidad del régimen contrarrotativo es que es la única configuración en la que se conoce el momento angular medio del fluido, en este caso se tiene que $L_{-1} = 0$. Por otro lado, el régimen corrotativo nos entrega información del torque que ejercen las paredes del cilindro sobre el fluido. En la figura 2.2, para $S = 1$, se observa que ambos valores son iguales a un mismo valor distinto de cero. Este es justamente

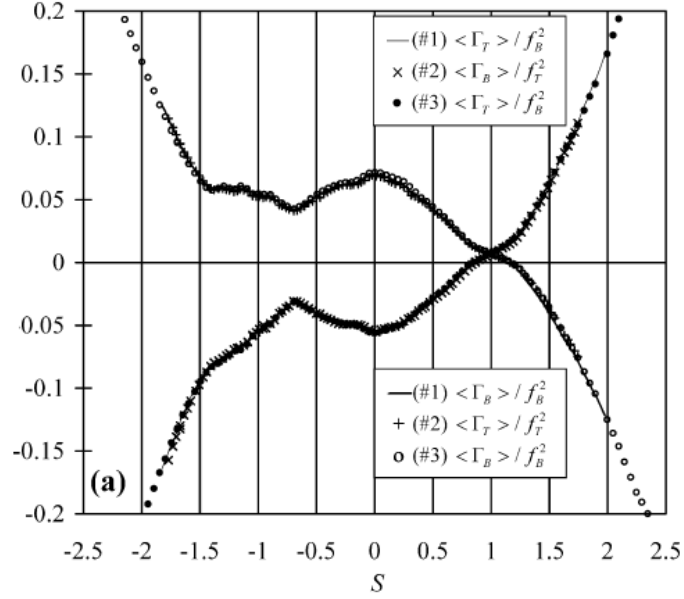


Figura 2.2: Torques promedio de la referencia [3]

el valor del torque ejercido por las paredes del cilindro promediado sobre la superficie interna del cilindro. El fluido total de volumen V es limitado por el cilindro de superficie Σ_W más dos discos de superficies Σ_T y Σ_B . Sea $\Sigma = \Sigma_W + \Sigma_T + \Sigma_B$ la superficie total de interacción del fluido, la ecuación de balance para el momento angular total considerando sólo fuerzas de superficie resulta en

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = T_B + T_T + T_W, \quad (2.2)$$

donde T_T y T_B : Torques ejercidos por los discos sobre el fluido y T_W torque de reacción entre el fluido y las paredes del sistema. Luego, aplicando el valor de expectación a esta relación, tenemos

$$\langle T_B \rangle + \langle T_T \rangle + \langle T_W \rangle = 0, \quad (2.3)$$

lo cual nos indica que los torques promedio ejercidos sobre los discos con paletas

se encuentran fuertemente relacionados con el torque que las paredes del cilindro ejercen sobre el fluido, tal como lo muestra la figura 2.2 para $S = 1$. En la figura 2.3 se pueden apreciar algunas imágenes ilustrando las geometrías que adopta el fluido en función del valor del parámetro S . [3]

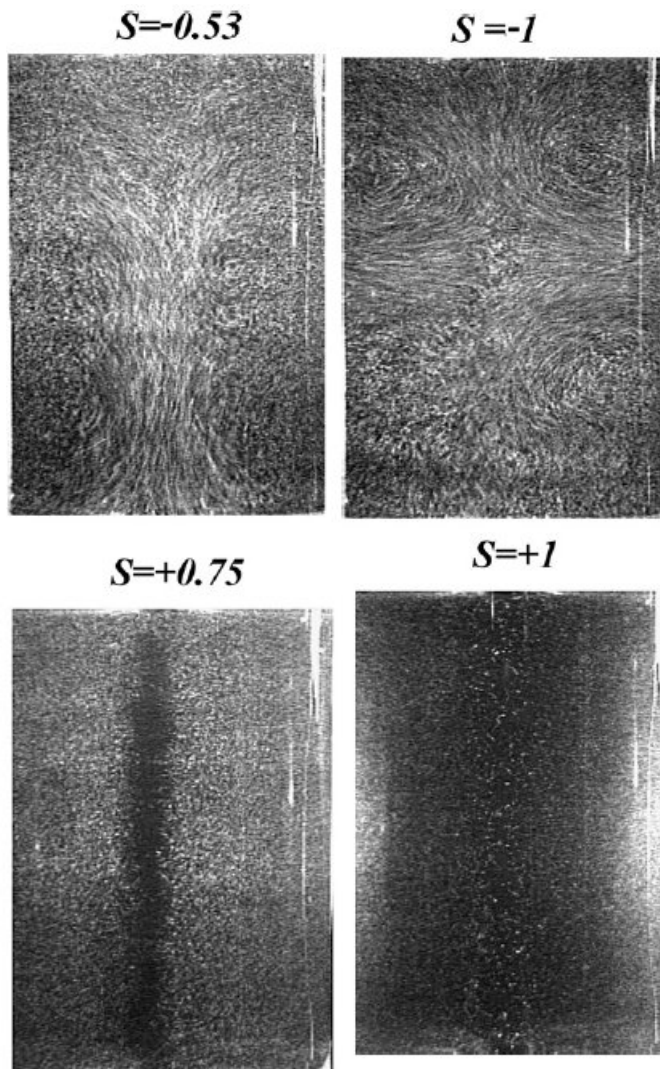


Figura 2.3: Configuraciones adoptadas por el fluido en el experimento de Cadot y Le Maître.

2.2. Potencia y coeficiente de acoplamiento

En un montaje experimental del mismo tipo, pero abierto y usando aire como fluido, se realizó una medición de potencia transferida al fluido en régimen corrotativo[4]. Estos resultados son de relevancia en lo que respecta a cumplir con el objetivo de obtener una función de acoplamiento medio de torques entre los discos. En la figura 2.4 se observa la dependencia cúbica de la potencia con la frecuencia.

La diferencia entre ambos trabajos se encuentra en la elección de coordenadas. En el trabajo de Cadot y Le Maître, al fijar una de las frecuencias se obtiene una curva que representa un corte de la superficie de torques por un plano paralelo a uno de los ejes coordenados. En cambio, en este último trabajo se hace énfasis en la dependencia del coeficiente de potencia en un ángulo definido de forma de preservar la simetría natural del sistema.

Es justamente esta elección la que permite revelar la simetría observada en el coeficiente adimensional de potencia en la figura 2.4 b, la cual permite además clasificar los flujos extendido y confinado en el montaje de fluido abierto.

El parámetro que cuantifica el grado de interacción entre los dos discos la razón de aspecto, Γ , la cual se define por

$$\Gamma = \frac{H}{R}, \quad (2.4)$$

donde H : Separación de los discos y R : Radio de estos Γ . La figura 2.5 muestra el efecto de esta cantidad sobre el coeficiente adimensional de acoplamiento.[4]

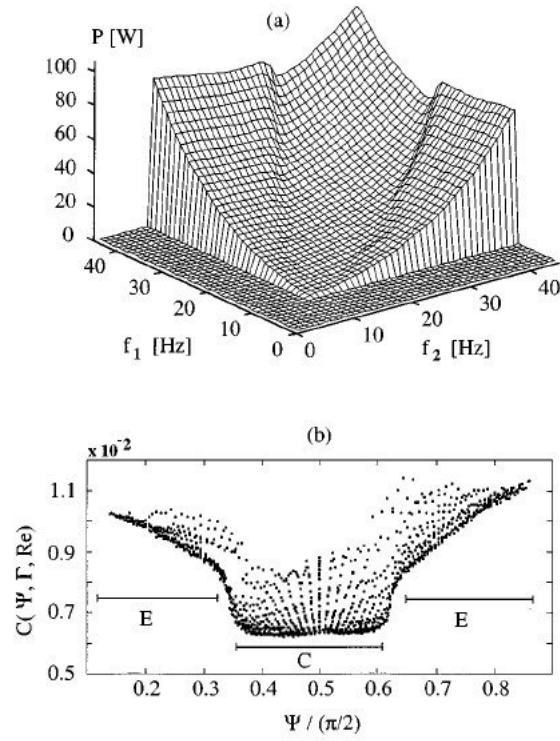


Figura 2.4: Superficie de potencia y coeficiente adimensional de potencia de la referencia [4].

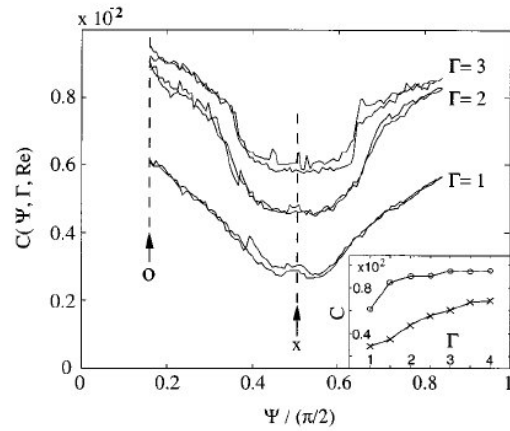


Figura 2.5: Coeficiente adimensional de potencia para diferentes relaciones de aspecto Γ , a partir de la referencia [4].

Capítulo 3

Formulación del Modelo

En este capítulo se recopila el proceso de estudio, análisis y elaboración del modelo sobre la base de resultados experimentales obtenidos por Cadot y Le Maître[3].

3.1. Obtención de datos a partir de un gráfico

Se obtienen los datos de torque promedio obtenidos por Cadot y Le Maître directamente de la imagen 2.2 mediante la aplicación Matlab, `getpts`. Esta función determina el pixel de cada click del mouse sobre la imagen construyendo un vector. Con esto se obtienen los datos de las curvas de torque promedio a partir de la figura 2 a) del trabajo de Cadot y Le Maître[3].

Luego de obtener los datos en coordenadas de pixeles se realizan las respectivas transformaciones para relacionarlos con los valores mostrados en la imagen 2.2. Para ello se utilizan ciertos puntos de control, los cuales hacen la función de referencia por cada eje. Luego de obtener los respectivos vectores de datos con las unidades correctas, se procede a la determinación de una función que los

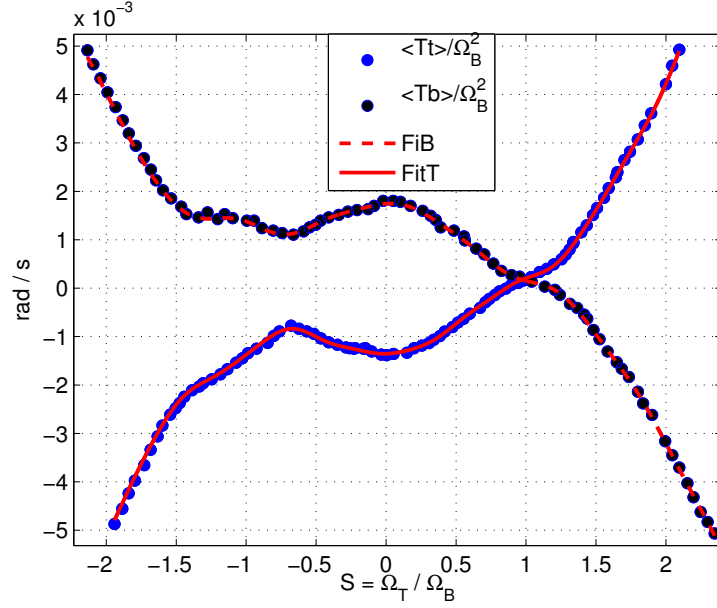


Figura 3.1: Comparación entre ajustes (líneas rojas) con datos experimentales (puntos)

represente, ya que al obtener los datos escalados correctamente no se pueden operar mutuamente al no encontrarse igualmente espaciados. Para obtener datos equiespaciados, se utiliza un ajuste con el siguiente modelo:

$$y(s) = \sum_{n=1}^8 a_n \sin(b_n s + c_n). \quad (3.1)$$

El ajuste mediante mínimos cuadrados permite determinar los coeficientes necesarios para que la función represente los datos. En nuestro caso, se obtiene un ajuste con un coeficiente de correlación esencialmente 1, lo cual permite reemplazar con seguridad los datos del gráfico de la figura 3.1 por los valores obtenidos mediante la ecuación 3.1, los cuales se muestran en la figura 3.1. En rojo los ajustes dados por ec.3.1 mientras que los puntos representan los datos obtenidos a partir de la figura 2.2 de Cadot y Le Maitre.

3.2. Consideraciones preliminares para la formulación de un modelo

En base a la superficie de potencia ilustrada en la figura 2.4, y a partir de la definición del número de Reynolds en función del módulo del vector que caracteriza las frecuencias de rotación de ambos discos en el plano f_1, f_2

$$R_e = \frac{R^2 \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{\nu}, \quad (3.2)$$

se observa una dependencia de la potencia con el ángulo que forman los vectores f_1, f_2 , equivalentemente se puede relacionar al torque con este ángulo. Se define el ángulo en dicho plano como ¹

$$\Psi = \arctan\left(\frac{f_1}{f_2}\right). \quad (3.3)$$

Mediante análisis dimensional para el torque se obtiene

$$T = C\rho R^5 f^2, \quad (3.4)$$

donde C es un coeficiente adimensional el cual contiene información sobre la geometría del sistema.

Para cada disco, se tiene

$$T_B = C\rho R^5 f_B^2, \quad (3.5)$$

$$T_T = C\rho R^5 f_T^2, \quad (3.6)$$

¹Donde f_2 para el caso expuesto por Cadot se mantiene fijo en 4.5Hz.

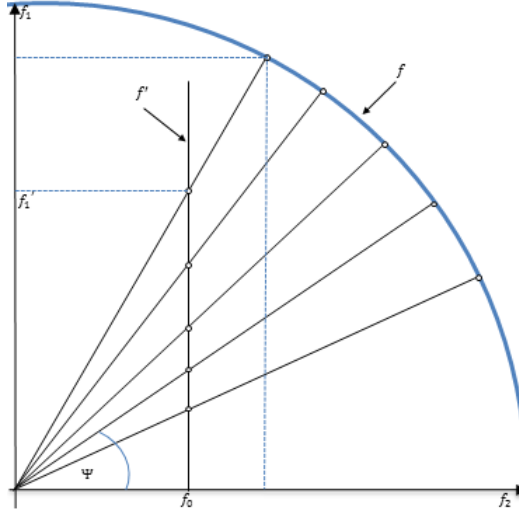


Figura 3.2: Cambio de Coordenadas

por lo que

$$T_B + T_T = C\rho R^5 (f_B^2 + f_T^2) = T. \quad (3.7)$$

Luego a partir del torque inyectado al sistema, se tiene²

$$C(\Psi, \Gamma, R_e) = \frac{T}{\rho R^5 (f_1^2 + f_2^2)}, \quad (3.8)$$

donde el radio es justamente el número de Reynolds, es decir, se obtiene un cambio de coordenadas en el que el número de Reynolds es constante, definición consistente con resultados experimentales[3]. De esto, en las coordenadas correctas, se obtiene el coeficiente dado por 3.8 que se muestra en la figura 3.3.

²Para la Figura de Torque de Cadot f_1 representa la Parte Negativa

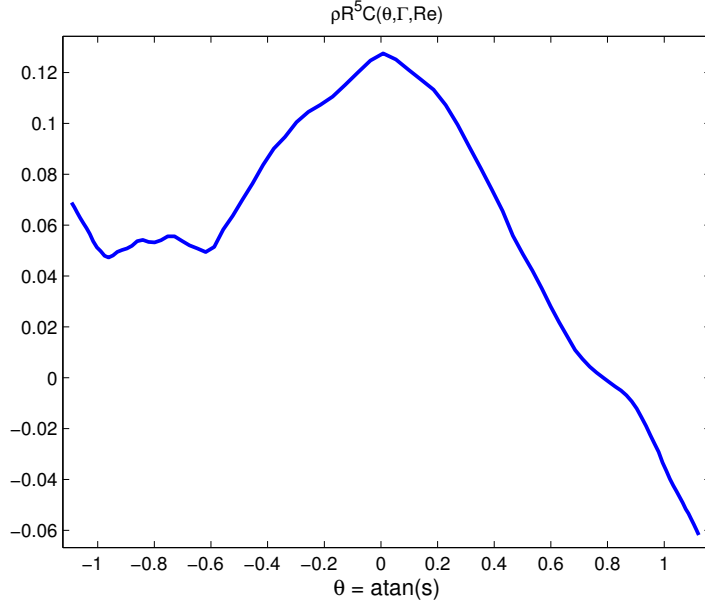


Figura 3.3: Curva $C(\theta, \Gamma, R_e)$ obtenida a partir del Torque total inyectado al sistema

Vemos en esta figura que la simetría esperada para $C(\theta, \Gamma, R_e)$ en torno a los valores $\theta = \pm \arctan(1)$, correspondientes a los valores $S = \pm 1$, se restablece en la representación utilizando la coordenadas definidas en las ecuaciones 3.2 y 3.3.

3.3. Modelo Inicial

Este modelo se sustenta en el concepto de acción y reacción en la zona de transferencia de momento angular entre el fluido y el sistema mecánico que inyecta momento angular al sistema.

En cuanto a velocidades angulares, dichas cantidades para los discos que se encuentran en los extremos del cilindro rotan a frecuencias angulares, Ω_B para la que se encuentra en la base (bottom) y Ω_T para la parte superior (top) referido a el montaje experimental mostrado en la figura 2.1. El fluido se encuentra en un

estado de rotación global promedio con una velocidad angular Ω_f , de modo que la velocidad relativa entre los discos y el fluido tiene magnitud $\Omega_k - \Omega_f$, para $k = B, T$. Podemos considerar en primera instancia que de esta cantidad relativa deriva el torque que el fluido ejerce sobre cada disco, y que son las fluctuaciones de este torque las que finalmente se traducen en las fluctuaciones de velocidad angular de los discos cuando los motores se les suministra corriente constante denominado modo de torque constante.

Resultados experimentales muestran que en régimen turbulento se tiene que el torque medio depende del cuadrado de la velocidad angular. El signo de esta velocidad es una información relevante que indica el sentido de rotación, de modo que el torque sobre cada paleta debido a la acción del fluido, en términos de la velocidad relativa entre el fluido y el disco, adopta la siguiente forma

$$T_k = \gamma (\Omega_k - \Omega_f) |\Omega_k - \Omega_f|, \quad (3.9)$$

donde γ un coeficiente que puede determinarse a partir de los datos experimentales y que posteriormente constituirá la función de acoplamiento promedio entre los discos que ajusta el modelo a los datos experimentales.

La ecuación de movimiento de los discos viene dada de manera general por

$$J \frac{d\Omega}{dt} = T_m - T_f, \quad (3.10)$$

donde T_m es el torque constante aplicado al disco por su respectivo motor y T_f es el torque de reacción del fluido sobre el disco. De este modo, obtenemos para los discos las siguientes ecuaciones dinámicas referidas al mismo sistema de referencia cuyo sentido de rotación se define en la figura 2.1, ecuaciones que

adoptan la forma

$$J \frac{d\Omega_k}{dt} = T_{mk} - \gamma (\Omega_k - \Omega_f) |\Omega_k - \Omega_f| + \xi_k, \quad (3.11)$$

donde Ω_k son las velocidades angulares de los discos, T_{mk} son los torques mecánicos aplicados a los discos y ξ_k son ruidos blancos gaussianos no correlacionados en tiempo continuo, siendo $k = B, T$.

Dada las características del montaje la componente z del momento angular del fluido es la única relevante, luego podemos expresar la componente z de la velocidad angular media del fluido como

$$\Omega_f = \frac{1}{V} \int_V \frac{v_\phi}{r} dV, \quad (3.12)$$

donde v_ϕ es la componente azimutal de la velocidad del fluido en el punto (r, ϕ, z) .

La componente z del momento angular del fluido es

$$L_z = \int_V \rho r \Omega_f dV, \quad (3.13)$$

donde ρ : Densidad del fluido, constante.

La ecuación para la dinámica de la componente z del momento angular del fluido es

$$\frac{dL_z}{dt} = T_B + T_T + T_W, \quad (3.14)$$

donde en la suma de torques sobre el fluido, los dos primeros corresponden a la acción ejercida por los discos con palas sobre el fluido mientras que el tercer término corresponde al torque ejercido sobre el fluido a través de la capa límite en la superficie de contacto entre el fluido y las paredes internas del contenedor cilíndrico.

Ahora el problema es relacionar al momento angular del fluido con la rotación

global Ω_f . Para tener una idea, podemos considerar una configuración extrema, la cual consiste en el volumen completo de fluido girando en rotación sólida. Esta situación se da muy aproximadamente en el estado corrotativo cuando los discos giran con la misma velocidad angular, resultando prácticamente en una rotación global del fluido como si fuese un cilindro sólido. En este caso el momento angular del fluido viene dado por el momento angular de un cilindro sólido rotando en torno a su eje principal, el cual es de la forma

$$L_z^F = \int \rho r v_\phi r d\phi dr dz, \quad (3.15)$$

con

$$v_\phi = r\Omega_f, \quad (3.16)$$

lo cual resulta en

$$L_z^F = 2\pi H \rho \Omega_f \frac{R^4}{4}. \quad (3.17)$$

Reemplazando la densidad como

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}, \quad (3.18)$$

se tiene que el momento angular del fluido rotando como un cilindro rígido es

$$L_z^F = \frac{1}{2} M R^2 \Omega_f, \quad (3.19)$$

donde el momento de inercia, para la configuración de cilindro rígido viene dado por

$$J_z^S = \frac{1}{2} M R^2. \quad (3.20)$$

La relación entre el momento angular en dicha configuración particular y la velocidad angular se relaciona con el momento de inercia a través de la bien

conocida relación

$$L_z^F = J_z^S \Omega. \quad (3.21)$$

Por cierto, lo anterior es aproximadamente válido sólo para un caso muy particular del estado corrotativo. El caso que nos interesa es el contrarrotativo, donde la ecuación anterior claramente no se aplica tal como está escrita. Esto es un problema de gran complejidad ya que en el caso general la dinámica de este sistema implica la recirculación del fluido desde las palas de los discos, que inyectan momento angular hacia el centro del cilindro para luego recircular hacia el mismo o bien hacia el disco opuesto, adoptando geometrías de fluido que deben ser solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, ver figura 2.3.

Sin embargo, podemos suponer que todavía existe una relación entre la componente z de la velocidad angular media y la componente z del momento angular total del fluido. Para ello suponemos que existe un momento de inercia efectivo, que puede ser tratado como un parametro ajustable del problema, pudiendo adoptar un valor entre cero y la magnitud calculada para el caso de rotación sólida. Este momento de inercia efectivo permite modelar linealmente la ecuación para la rotación global del fluido, es decir

$$J_f = \beta J_z^S. \quad (3.22)$$

Luego, la ecuación dinámica para la velocidad angular de rotación global del fluido, Ω_f , es

$$J_f \frac{d\Omega_f}{dt} = -\gamma (\Omega_B - \Omega_f) |\Omega_B - \Omega_f| - \xi_B - \gamma (\Omega_T - \Omega_f) |\Omega_T - \Omega_f| - \xi_T + T_W. \quad (3.23)$$

Para el montaje realizado en aire, utilizando la densidad del aire

$$\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}, \quad (3.24)$$

y considerando que el volumen es de $11Lt$, es decir, $V = 0,011m^3$, tenemos que la cota superior para el momento de inercia del fluido en el experimento de referencia [5] es $J_z^S = 2,1 \times 10^{-3} [kgm^2]$. El momento de inercia de los agitadores, constituidos por el disco con palas, el motor eléctrico, y todos los componentes de sujeción, es de aproximadamente $J_M = 4.7 \times 10^{-3} Kgm^2$. Así, vemos que para el montaje en aire se puede decir que la dinámica de las fluctuaciones de velocidad angular de los discos está dominada por la inercia de estos últimos, cuya estadística asociada a la fluctuación de la velocidad angular de uno de sus discos se encuentra en el apéndice A.

3.3.1. Soluciones estacionarias

Para obtener resultados que estén en concordancia con la información de torques promedio medidos en experimentos[3], es necesaria la determinación de las soluciones estacionarias de nuestro modelo. Para estos efectos, imponemos las condiciones

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad (3.25)$$

$$\xi_k = 0, \quad (3.26)$$

donde $\Omega = (\Omega_T, \Omega_B, \Omega_f)$ y ξ_k , $k = B, T$, ruidos gaussianos. Así, las ecuaciones de balance de torques para el fluido y para los discos que inyectan momento

angular al sistema, respectivamente, quedan como sigue:

$$T_W = \gamma \{ (\Omega_T - \Omega_f) |\Omega_T - \Omega_f| + (\Omega_B - \Omega_f) |\Omega_B - \Omega_f| \}, \quad (3.27)$$

$$\frac{T_T}{\gamma} = (\Omega_T - \Omega_f) |\Omega_T - \Omega_f|, \quad (3.28)$$

$$\frac{T_B}{\gamma} = (\Omega_B - \Omega_f) |\Omega_B - \Omega_f|. \quad (3.29)$$

Como se mencionó anteriormente, el torque ejercido por las paredes del cilindro a través de la capa límite puede ser aproximado mediante una interacción de tipo lineal o cuadrática en la velocidad de rotación global del fluido, es decir

$$T_W = \begin{cases} -\eta\Omega_f & (1) \\ -\eta\Omega_f |\Omega_f| & (2) \end{cases} \quad (3.30)$$

donde η es un coeficiente de dimensiones adecuadas. Para obtener las superficies que relacionan torques con velocidades angulares en los estados estacionarios de este sistema, basta con resolver la ecuación de balance de torques sobre el fluido, ecuación 3.27, con lo que se obtiene una expresión para la velocidad angular de rotación global, Ω_f . Esta última nos permite finalmente obtener los valores de los torques promedio para nuestro modelo que pueden ser comparados con los datos experimentales de la referencia principal.

3.4. Modelo Lineal para T_W

Para analizar el comportamiento de la ecuación de balance de torques sobre el fluido dado por 3.27, basta con observar la figura de torque promedio, ver figura 3.4. En ella se observan tres regiones de interés.

Estas regiones se identifican por:

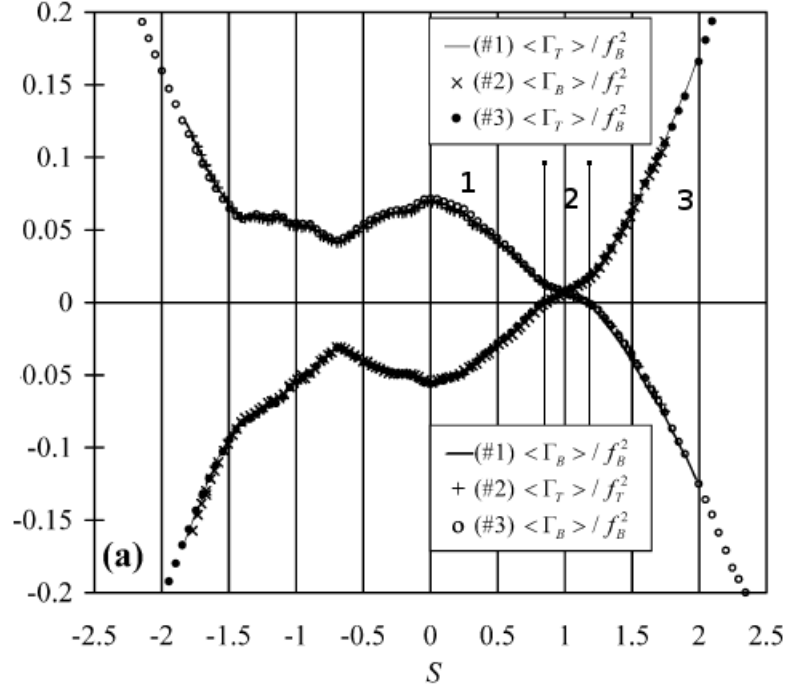


Figura 3.4: Definición de intervalos en curva de torques promedio de Cadot y Le Maitre

1. Valores de S para los cuales $T_T \leq 0$
2. Valores de S para los cuales $T_T \geq 0$ y $T_B \geq 0$
3. Valores de S para los cuales se cumple $T_B < 0$

Para cada uno de estos intervalos se obtienen condiciones para la cantidad S detalladas a continuación.

3.4.1. Determinación de puntos S de interés

1. Se determina S tal que $\langle T_T \rangle = 0$, donde $\Omega_f = \Omega_T$

La ecuación 3.27 es la que se debe resolver, comenzando con $\Omega_f > 0$, se

obtiene

$$(\Omega_B - \Omega_f)^2 = \frac{\eta}{\gamma} \Omega_f. \quad (3.31)$$

Sea

$$C = \frac{\eta}{\gamma}, \quad (3.32)$$

determinado a partir del gráfico de torques promedio, ya que el factor η influye principalmente en la configuración corrotativa mientras que γ lo hace principalmente en el caso contrarrotativo. De la razón entre los valores medios de los torques en estas dos configuraciones, obtenida de los datos experimentales, obtenemos para C la siguiente estimación:

$$C = 0,1. \quad (3.33)$$

Resolviendo la ecuación 3.31 para Ω_f , se tiene

$$\Omega_f = \frac{1}{2} \left\{ C + 2\Omega_B \pm \sqrt{C(C + 4\Omega_B)} \right\}. \quad (3.34)$$

De esta expresión para la rotación global, válida sólo para el respectivo valor de S , y suponiendo un valor fijo de rotación de $5Hz$, lo cual se traduce en $\Omega_B = 31,42 \frac{rad}{s}$, se tiene

$$\Omega_{f+} = 33,24 \frac{rad}{s} \quad \Omega_{f-} = 29,69 \frac{rad}{s}.$$

Esto muestra claramente el signo que debe adoptar la raíz, ya que la frecuencia de rotación global en la cercanía del estado corrotativo no puede superar a la frecuencia del disco que gira más rápido.

Luego de este análisis para la determinación del signo, dado que $\Omega_f = \Omega_T$,

se tiene

$$\Omega_f = S\Omega_B, \quad (3.35)$$

luego, resolviendo para S tenemos que

$$S = \frac{2\Omega_B + C_1 - \sqrt{C_1(C_1 + 4\Omega_B)}}{2\Omega_B} \quad (3.36)$$

lo cual resulta en $S = 0,9427$.

2. Determinar S tal que $\langle T_B \rangle = 0$ donde $\Omega_f = \Omega_B$

De la ecuación 3.27 tenemos

$$(S\Omega_B - \Omega_f)^2 = \frac{\eta}{\gamma}\Omega_f. \quad (3.37)$$

Resolviendo directamente para S se tiene

$$S = 1 \pm \sqrt{\frac{C_1}{\Omega_B}}, \quad (3.38)$$

ya que la condición $\langle T_B \rangle = 0$ se cumple para valores $S > 1$, de lo cual es claro que la solución es:

$$S = 1 + \sqrt{\frac{C_1}{\Omega_B}}, \quad (3.39)$$

al ser evaluada resulta en $S = 1,059$.

3.4.2. Determinación de Expresiones para Ω_f

A partir de la figura de torques promedio de Cadot y Le Maître [3] se pueden determinar los signos de los respectivos torques los cuales serán implementados en el modelo en cuestión para cada región definida en la figura anterior. De la

figura de torques promedio se identifica la región 1, en la cual

$$T_B > 0 \quad T_T \leq 0$$

cuyo límite viene dado por

$$S = \frac{2\Omega_B + C_1 - \sqrt{C_1(C_1 + 4\Omega_B)}}{2\Omega_B}. \quad (3.40)$$

Ahora bien, en la ecuación de balance de torques para la rotación global podemos identificar dos partes, las cuales son válidas para valores positivos y negativos de Ω_f , ya que en $S = -1$ la rotación global es nula. Comencemos con valores positivos, la ecuación 3.27 se vuelve, considerando $\Omega_B = S\Omega_T$,

$$\gamma \left\{ (S\Omega_B - \Omega_f)^2 - (\Omega_B - \Omega_f)^2 \right\} = \eta\Omega_f. \quad (3.41)$$

Resolviendo para Ω_f tenemos

$$\Omega_f = \frac{(1 - S^2)\Omega_B}{C + 2(1 - S)\Omega_B}. \quad (3.42)$$

Al considerar valores positivos de la rotación global se está diciendo que la expresión es válida para $S > -1$, aunque la solución para valores menores que uno es la misma.

Avanzando en valores de S hasta llegar a la zona cercana a la configuración corrotativa, que llamamos región 2, es decir, la región de torques positivos la que se encuentra dentro del intervalo de valores de S

$$\frac{2\Omega_B + C - \sqrt{C(C + 4\Omega_B)}}{2\Omega_B} > S > 1 + \sqrt{\frac{C}{\Omega_B}},$$

con su respectiva ecuación de balance de torques sobre el fluido

$$\gamma \left\{ (S\Omega_B - \Omega_f)^2 + (\Omega_B - \Omega_f)^2 \right\} = \eta\Omega_f. \quad (3.43)$$

Resolviendo para Ω_f tenemos

$$\Omega_f = \frac{1}{4} \left\{ C + 2(1+s)\Omega_B \pm \sqrt{C^2 + 4C(1+s)\Omega_B - 4(s-1)^2\Omega_B^2} \right\}. \quad (3.44)$$

Para dilucidar que signo utilizar, en la figura 3.5 se grafican ambas soluciones con sus respectivos valores de velocidad angular.

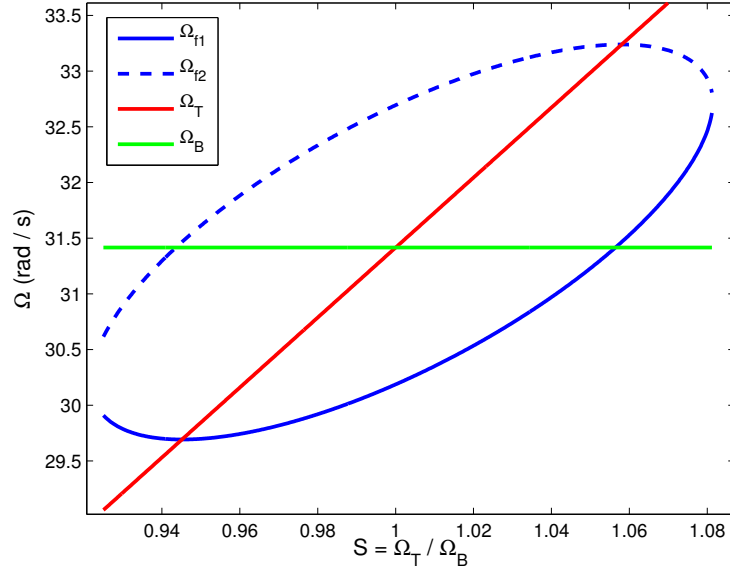


Figura 3.5: Rotación global en la región II (torques positivos)

Para los valores utilizados en las constantes C y Ω_B , se tiene que la rotación global en regimen corrotativo, $S = 1$, corresponde a un 96,1% de la frecuencia de rotación fija Ω_B .

En la tercera y última región, correspondiente a valores de S tales que

$$S > 1 + \sqrt{\frac{C_1}{\Omega_B}}, \quad (3.45)$$

la ecuación de torques sobre el fluido es

$$\gamma \left\{ (S\Omega_B - \Omega_f)^2 - (\Omega_B - \Omega_f)^2 \right\} = \eta\Omega_f. \quad (3.46)$$

Resolviendo para Ω_f se tiene

$$\Omega_f = \frac{(S^2 - 1)\Omega_B}{C_1 + 2(S - 1)\Omega_B}, \quad (3.47)$$

que es una expresión similar a la obtenida en el primer caso.

Luego de obtener las soluciones para la rotación global por intervalos separados por los valores $S = 0,9427$ y $S = 1,059$, se puede observar su comportamiento para el rango completo de valores de la razón S utilizada por Cadot y Le Maître. En la figura 3.6 se observan las curvas de rotación global para el intervalo completo de valores de S , resultado necesario para determinar su efecto en el modelo de torques promedio.

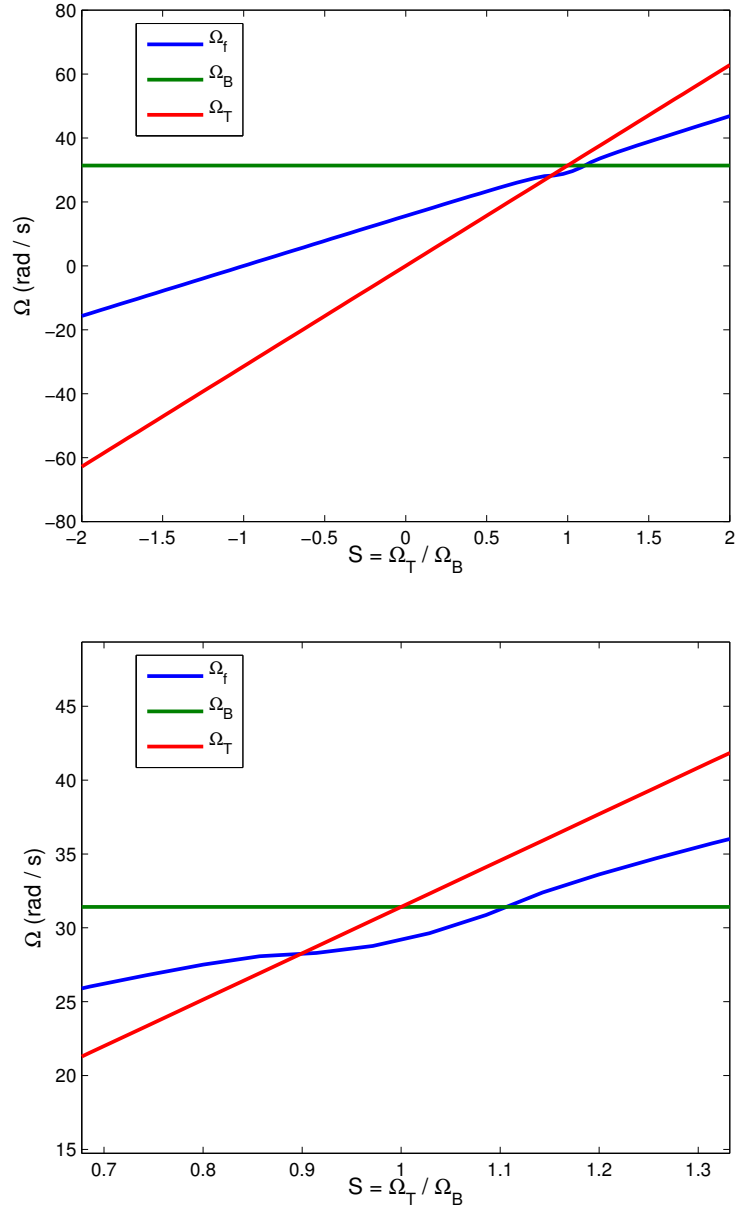


Figura 3.6: Rotación global del fluido y de los discos (superior). Zoom para el caso corrotativo (inferior).

Comencemos por la comparación entre los torques promedio obtenidos experimentalmente por Cadot y Le Maître y los determinados a partir de este modelo. En las figuras 3.7 y 3.8 se muestran las curvas experimentales y las obtenidas mediante el modelo.

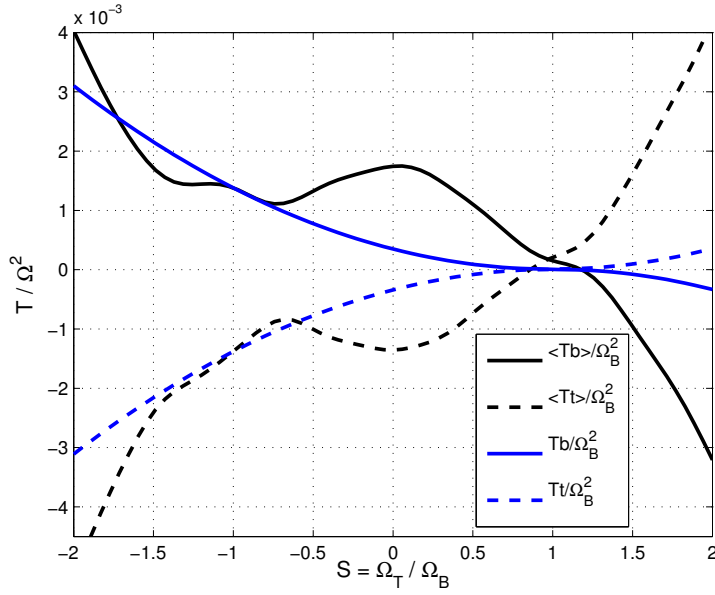


Figura 3.7: Comparación de resultados de torques promedio (modelo en azul, datos en negro), del modelo con fricción lineal en las paredes.

Como se observa, el modelo responde relativamente bien en la región contrarrotativa en cuanto a la tendencia de los torques promedio, pero no en cuanto a torque ejercido por la pared, como se puede ver en la figura 3.8. Para probar que tan buena elección fue considerar una aproximación lineal en la rotación global para el torque ejercido por las paredes, se utilizó este modelo para determinar la rotación global invirtiendo los datos experimentales del torque de fricción de las paredes con el fluido. Los resultados obtenidos difieren demasiado de la realidad como para seguir prestando atención a dicho modelo.

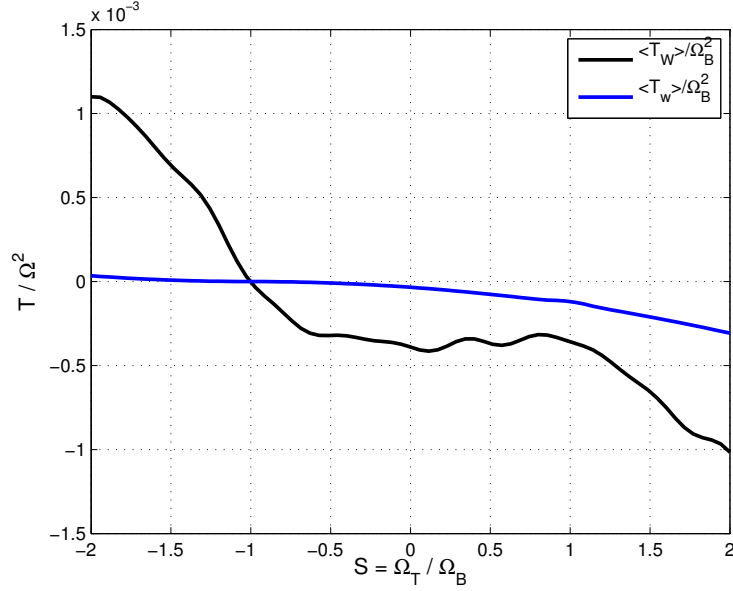


Figura 3.8: Comparación de resultados para torques ejercidos por las paredes (modelo en azul, datos en negro)

3.5. Modelo cuadrático en Ω_f para T_W

El modelo cuadrático en la rotación global para el torque ejercido por las paredes del cilindro sobre el fluido debe contener información sobre el sentido de rotación del fluido global. Para ello basta con utilizar al valor absoluto en la definición del cuadrado de la rotación global como sigue

$$T_W = -\eta\Omega_f |\Omega_f|. \quad (3.48)$$

Ahora, la ecuación a resolver es

$$\gamma \{ (\Omega_T - \Omega_f) |\Omega_T - \Omega_f| + (\Omega_B - \Omega_f) |\Omega_B - \Omega_f| \} = \eta\Omega_f |\Omega_f|. \quad (3.49)$$

Para determinar los límites, observamos que para cada valor límite, $\Omega_f = \Omega_T$ determina el primer punto y $\Omega_f = \Omega_B$ determina el segundo. Aplicando estas restricciones a la ecuación de balance de torques sobre el fluido, ecuación 3.49, y considerando que estamos en la región corrotativa donde la rotación global es mayor que cero, se tiene

$$\gamma (\Omega_B - \Omega_f)^2 = \eta \Omega_f^2, \quad (3.50)$$

$$\Omega_B = \left(1 + \sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}\right) \Omega_f, \quad (3.51)$$

donde el signo se ha escogido considerando que la rotación global no puede ser mayor que la frecuencia angular fija, ya que este punto se encuentra a la izquierda de $S = 1$. Para este caso, que corresponde a $\Omega_f = \Omega_T$, utilizando la definición de la razón S se tiene que el primer punto es

$$S_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}}. \quad (3.52)$$

Para determinar el segundo se aplica la segunda restricción, $\Omega_f = \Omega_B$, resultando en

$$\gamma (\Omega_T - \Omega_f)^2 = \eta \Omega_f^2 \quad (3.53)$$

$$\Omega_T = \left(1 \pm \sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}\right) \Omega_f. \quad (3.54)$$

El signo, análogamente al caso anterior, se determina observando que el punto donde $T_B = 0$, en la figura de torques promedio, figura 3.1, se ubica a la derecha de $S = 1$. De ello se obtiene el segundo punto de interés

$$S_2 = 1 + \sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}. \quad (3.55)$$

Luego de haber determinado los puntos de interés se procede a determinar las expresiones para la rotación global, válidas en los tres intervalos definidos anteriormente. El primer intervalo es definido para valores de S que satisfagan $S \leq \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}}$. Esta región de la curva de torques promedio contiene a los torques con signo opuesto, $T_B > 0$ y $T_T < 0$, por lo que la ecuación de balances de torques sobre el fluido queda de la forma

$$\gamma \left\{ (\Omega_B - \Omega_f)^2 - (\Omega_T - \Omega_f)^2 \right\} = \eta \Omega_f^2. \quad (3.56)$$

Resolviendo para Ω_f y considerando a la razón de los parámetros como $C = \eta/\gamma$ y la rotación fija Ω_B como Ω , tenemos

$$\Omega_f = \Omega \left(\frac{(S-1) \pm \sqrt{(1-S)(1+C+(C-1)S)}}{C} \right), \quad (3.57)$$

La segunda zona corresponde a la región de torques positivos entre los valores S_1 y S_2 determinados anteriormente. En esta región la ecuación de torques sobre el fluido adopta la forma

$$\gamma \left\{ (\Omega_B - \Omega_f)^2 + (\Omega_T - \Omega_f)^2 \right\} = \eta \Omega_f^2, \quad (3.58)$$

dando como resultado

$$\Omega_f = \Omega \frac{(1+S) \pm \sqrt{(C(S^2+1) - (S-1)^2)}}{C-2}, \quad (3.59)$$

La última región, determinada para $S \geq 1 + \sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}$, para la cual $T_B < 0$ y $T_T > 0$, tiene asociada una ecuación de torques sobre el fluido de la forma

$$\gamma \left\{ -(\Omega_B - \Omega_f)^2 + (\Omega_T - \Omega_f)^2 \right\} = \eta \Omega_f^2, \quad (3.60)$$

cuya solución para la rotación global resulta ser

$$\Omega_f = \Omega \frac{1 - S \pm \sqrt{(S-1)(CS + C + S - 1)}}{C}, \quad (3.61)$$

Luego, la unión de estas soluciones, válidas en sus respectivos intervalos, determina la curva de valores promedio de la velocidad angular para la rotación global en el intervalo de valores determinados por el experimento de la referencia [3], la cual se muestra en la figura 3.9.

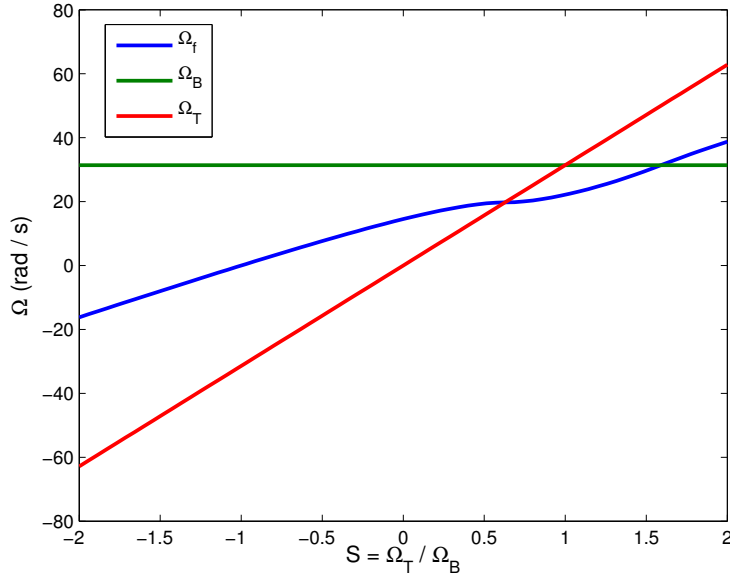


Figura 3.9: Curvas de velocidad angular de rotación global y de los discos para caso cuadrático en torque ejercido por paredes.

Resulta claro de los casos analizados para los modelos de torque entre el fluido y las paredes, que la rotación global para ambos casos muestra una forma similar. En la zona corrotativa disminuye su magnitud, siendo indiferente al cambio de signo en la zona contrarrotativa, y obteniéndose con el modelo cuadrático un valor más cercano a la frecuencia de rotación angular fija que en el caso del

modelo lineal en la rotación global para el torque ejercido por las paredes.

Habiendo obtenido las curvas de los valores para la rotación global en todo el intervalo, procedemos a la determinación de los torques promedio que produce este modelo. La comparación de resultados se pueden apreciar en las figuras 3.10 y 3.11.

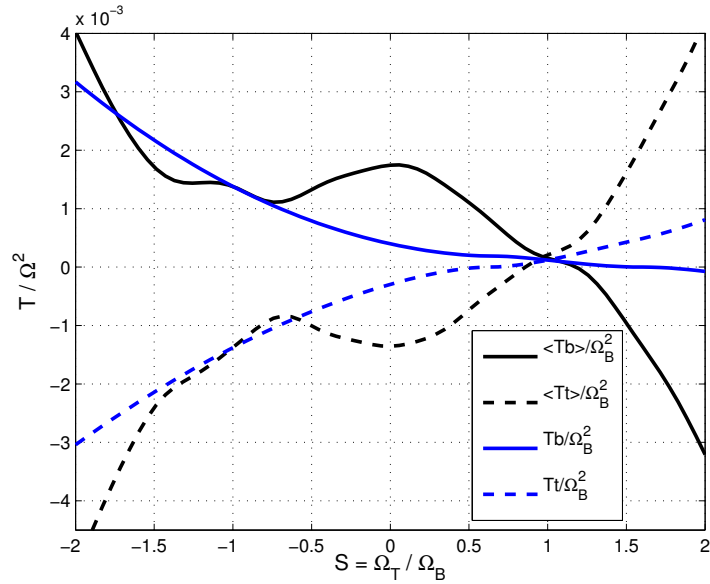


Figura 3.10: Comparación Torques promedio entre modelo(azul) y datos experimentales(negro) para dependencia cuadrática de torque ejercidos por paredes.

La suma de los torques ejercidos por los discos superior e inferior nos proporciona el torque de fricción del fluido con las paredes, lo cual se grafica en la figura 3.11. En relación con el modelo lineal para este torque, se observa una mejora al comparar con los resultados experimentales de Cadot y Le Maitre. En la zona corrotativa se observa la tendencia del modelo a replicar el comportamiento del resultado experimental. Aunque levemente, se observa algo similar en la región contrarrotativa. esto es una evidente mejora respecto a considerar al torque de interacción con las paredes del cilindro lineal en la velocidad angular de rotación

global.

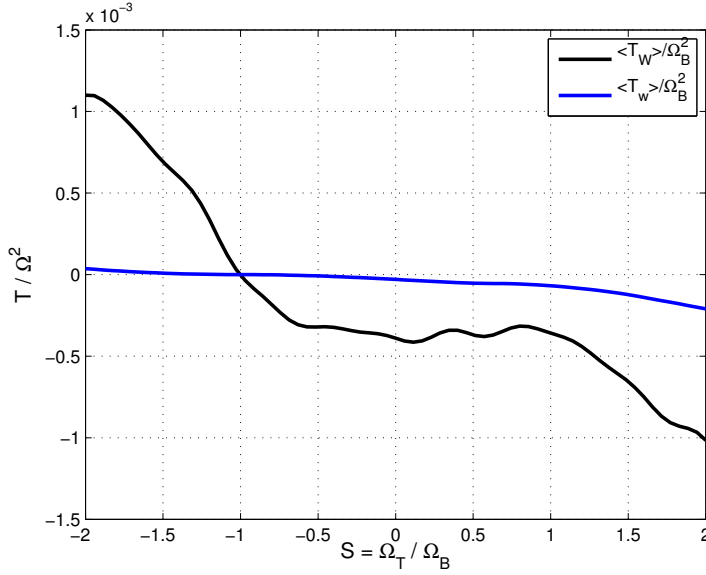


Figura 3.11: Torque promedio ejercido por las paredes, modelo (azul) y datos experimentales (negro).

Este efecto se aprecia de mejor manera al realizar una comparación de torques promedio para ambos casos de estudio. Ver las figuras 3.12 y 3.13.

Luego de este análisis para el primer modelo dinámico es posible determinar γ como una función que permite ajustar el modelo de torques promedio a los obtenidos por Cadot y Le Maître, simplemente igualando los torques proporcionados por el modelo propuesto con los respectivos torques medidos. Para los efectos de un modelo cuyo único propósito sea la determinación de una función que ajuste el modelo con los datos experimentales de Cadot, el pilar que sustenta este trabajo se encuentra en la idea de implementar una función simétrica, tal como lo mostrado por la figura 2.4, que sirva de acoplamiento entre los discos, vale decir, entre los torques promedio ejercidos sobre los discos por los motores que inyectan momento angular al sistema.

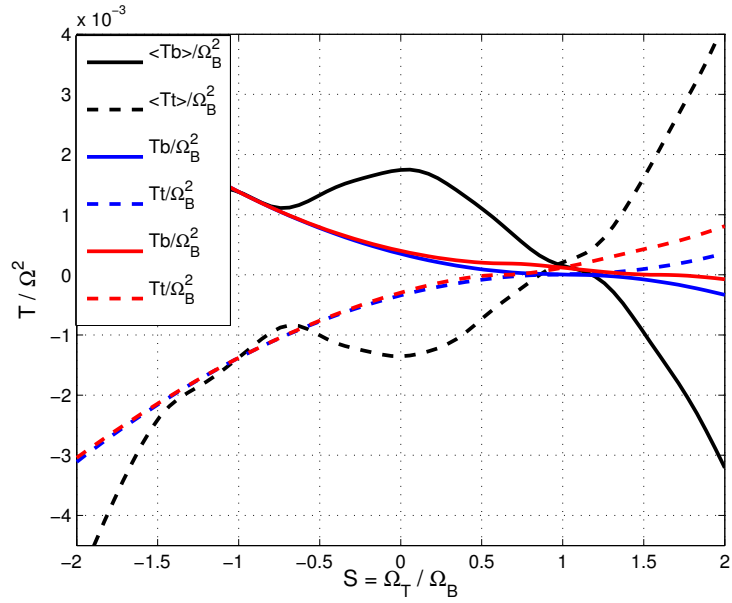


Figura 3.12: Comparación de los casos lineal (azul) y cuadrático (rojo) en T_W .

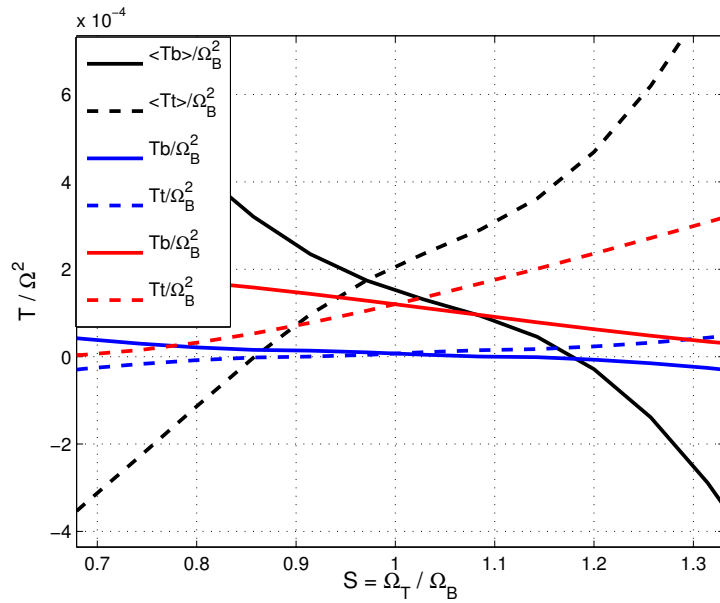


Figura 3.13: Zoom corrotativo figura anterior.

El torque que aparece en el caso de fluido confinado por un cilindro rompe la simetría mostrada por el montaje de fluido abierto, cuyo coeficiente de acoplamiento se muestra en la figura 2.4, esta función simétrica se obtiene cuando el torque ejercido por las paredes es nulo. Dividiendo los valores experimentales de torque promedio por los cuadrados de las diferencias de velocidad angular, se obtienen las curvas para γ que se muestran en la figura 3.14.

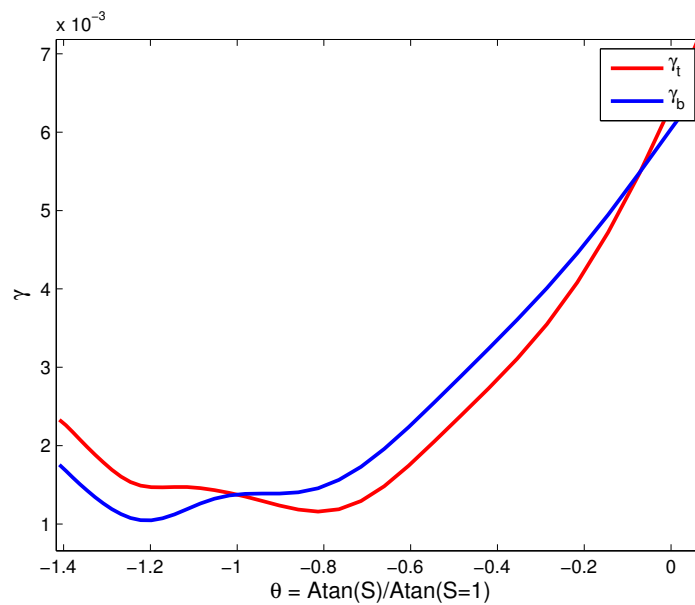


Figura 3.14: Curvas de ajuste $\gamma(\theta)$, determinadas directamente por división entre datos y modelo.

Como se ve, no se superponen ni son simétricas, como cabía esperar, debido a la presencia del torque de las paredes. No se muestra todo el rango de valores en θ debido a que en la zona corrotativa se producen singularidades ya que el cruce por cero del modelo no coincide con el de los datos experimentales donde estas funciones son determinadas por división entre los datos y la respectiva parte del modelo.

3.6. Modelo Implementado

Dado que con los modelos anteriores no se obtuvieron resultados satisfactorios, en cuanto a torques promedio en regimen corrotativo, siendo la tendencia de resultados de torque promedio del modelo un indicador para proponer o rechazar un modelo de interacción, se consideró una modificación de las ecuaciones en las que los torques asociados al fluido dependen de términos cuadráticos en cada una de las velocidades angulares involucradas. Este modelo constituye una simplificación de las secciones anteriores, por cuanto se eliminan los productos cruzados en las frecuencias angulares de rotación, aunque se conserva la dependencia cuadrática en las velocidades angulares para los torques. Así, el torque sobre el disco k ejercido por el disco viene dado por

$$T_k = \gamma (\Omega_k |\Omega_k| - \Omega_f |\Omega_f|). \quad (3.62)$$

Aplicando lo anterior a la ecuación de movimiento del disco sometido a la acción de los torques mecánicos e interacción con el fluido, se obtiene

$$J \frac{d\Omega_k}{dt} = T_{mk} - \gamma (\Omega_k |\Omega_k| - \Omega_f |\Omega_f|) + \xi_k, \quad (3.63)$$

donde T_{mk} es el torque mecánico aplicado al disco $k = B, T$ y ξ_k es un ruido gaussiano centrado en cero que emula las fluctuaciones de torque.

La reacción del torque, esta vez sobre el fluido, determina la ecuación dinámica para este. De la misma manera como se procedió anteriormente, considerando el caso corrotativo en el que se tiene un régimen identificable con un rotación sólida para la cual se puede definir un momento de inercia para el fluido, extrapolando al caso contrarrotativo donde el momento de inercia del fluido se modela como una fracción de su valor para el caso de rotación sólida, se obtiene su respectiva

ecuación dinámica la cual es dada por

$$J_f \frac{d\Omega_f}{dt} = T_B + T_T + T_W, \quad (3.64)$$

donde las dos primeras contribuciones al torque total están dadas por la ecuación 3.62. Como antes, el tercer término corresponde al torque ejercido por las paredes del contenedor cilíndrico sobre el fluido. Para este se utilizó un modelo lineal y uno cuadrático en la velocidad angular de rotación global, pero mostramos sólo resultados para caso cuadrático ya que este último proporciona mejores resultados. El modelo para el torque ejercido por las paredes es de la forma

$$T_W = -\eta\Omega_f |\Omega_f|, \quad (3.65)$$

por lo que la ecuación a resolver es

$$\gamma (\Omega_B^2 - \Omega_f |\Omega_f|) + \gamma (\Omega_T |\Omega_T| - \Omega_f |\Omega_f|) = \eta\Omega_f |\Omega_f|, \quad (3.66)$$

la cual, genera cuatro posibles soluciones, 2 reales y 2 imaginarias, todas con su forma principal igual, sólo difiriendo por un signo, así se tiene

$$\Omega_f = \text{Sign}(S) \frac{(\Omega_B^4 + 2\Omega_B^2\Omega_T |\Omega_T| + \Omega_T^4)^{1/4}}{(4 + 4C + C^2)^{1/4}} \quad (3.67)$$

donde

$$\text{Sign}(s) = \frac{1 + S}{|1 + S|} \quad (3.68)$$

En la figura 3.15 se pueden apreciar las soluciones estacionarias para las velocidades angulares obtenidas con este modelo.

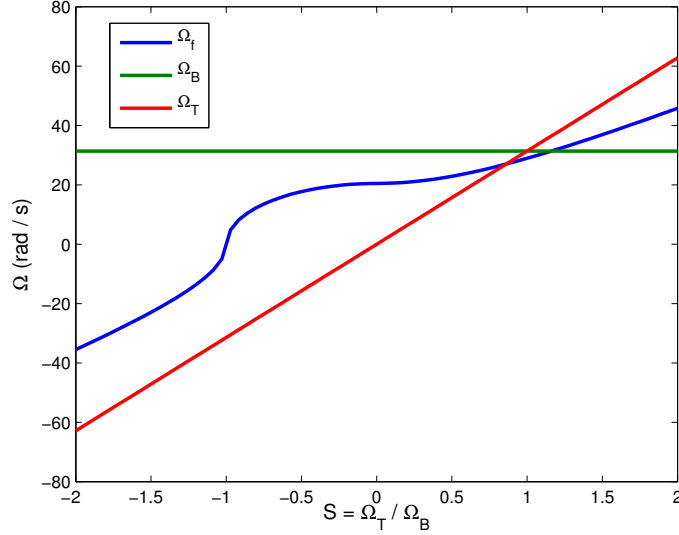


Figura 3.15: Soluciones estacionarias para las velocidades angulares de rotación global de fluido (azul) y discos.

La frecuencia angular de rotación global en régimen corrotativo con los dos discos girando a la misma velocidad, $S = 1$, resulta ser un 97% de la frecuencia angular de rotación de los discos.

Los torques medios obtenidos con este modelo se comparan con los datos experimentales en las figuras 3.16 y 3.17. Vemos que estos resultados aproximan mejor los valores experimentales, aunque no podemos hablar de un excelente acuerdo. Sin embargo, este modelo representa relativamente bien, desde un punto de vista cualitativo, los valores de torque obtenidos en los experimentos.

Por ejemplo, en la figura 3.18 podemos apreciar la velocidad angular de rotación global del fluido (curva azul), comparada con la curva en negro de rotación global determinada a partir de los datos experimentales, invirtiendo estos mediante el modelo cuadrático de torque ejercido por las paredes en la rotación global.

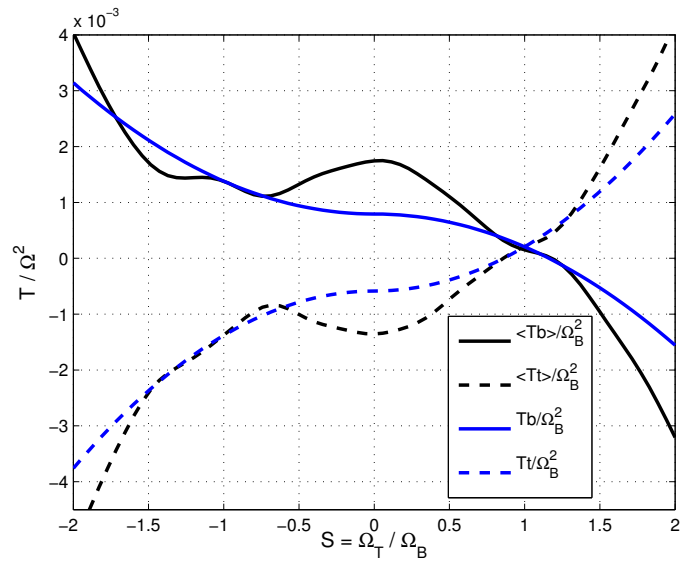


Figura 3.16: Comparación de torques promedio, modelo y datos experimentales

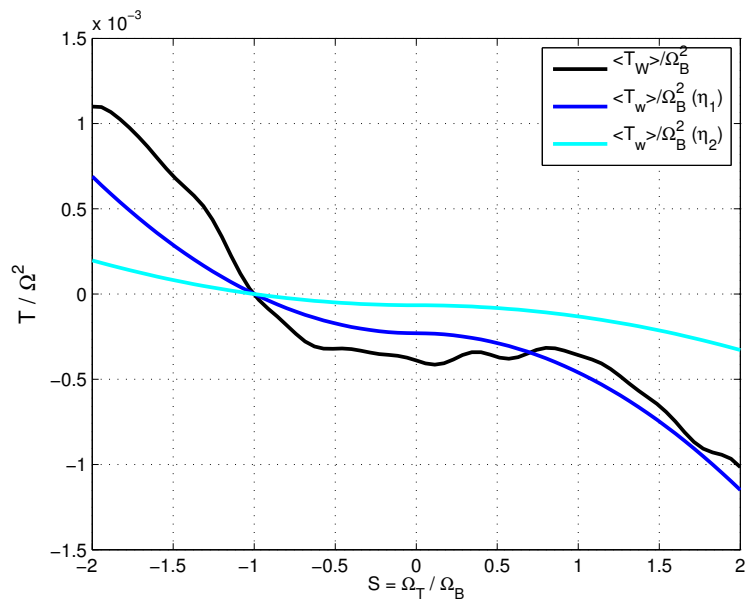


Figura 3.17: Comparación de torques ejercidos por las paredes, modelo (azul y cian, diferentes η) y datos experimentales (negro).

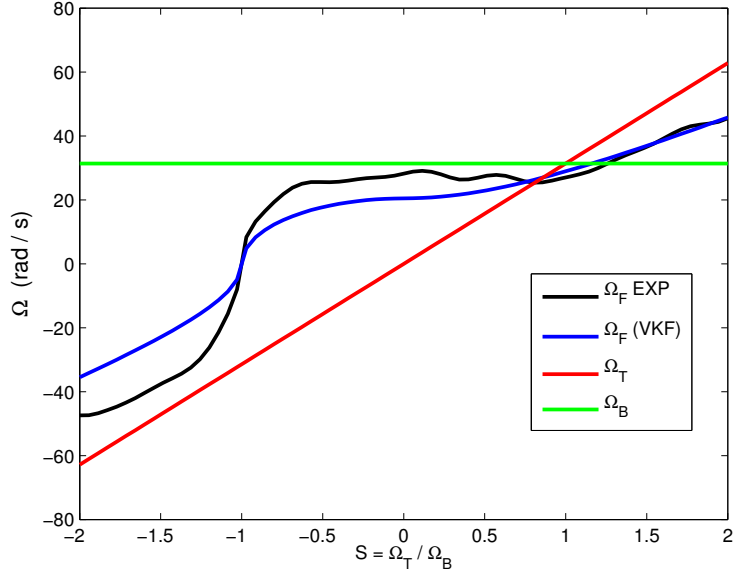


Figura 3.18: Comparación de la inversión de datos y el modelo para la velocidad angular de rotación global del fluido.

Así, para la rotación global se obtiene un resultado bastante similar, evidencia por una parte de un buen modelo descriptivo de los torques promedio y por otra la transición en torno al valor nulo de la rotación global, que muestra una especie de resistencia por parte del fluido a adoptar la configuración simétrica cerca del estado contrarrotativo con $S = -1$. Cabe hacer notar que este efecto se observó en el fluido abierto, lo cual se manifiesta en un pequeño máximo local del coeficiente de potencia inyectada de la figura 2.4, y el aumento local en el coeficiente de torque entre los dos mínimos principales en el lado de valores negativos de θ en la figura 3.3.

Las figuras 3.19, 3.20 y 3.21 muestran el trazado de la superficie de potencia inyectada al fluido por los discos, calculada a partir de este modelo. En ellas se mantiene una configuración similar a la del experimento de Cadot y Le Maître. El disco inferior se mantiene a una frecuencia de rotación constante y positiva

mientras la velocidad angular del disco superior se varía desde un valor negativo hasta el valor positivo simétrico. Se obtienen las superficies al barrer la frecuencia fija sobre una gama de valores.

En la figura 3.20 se observa que una parte de la superficie de potencia para el disco superior es negativa, lo cual indica que el otro disco lo está forzando en el mismo sentido de giro, debido a que su velocidad de rotación es mayor.

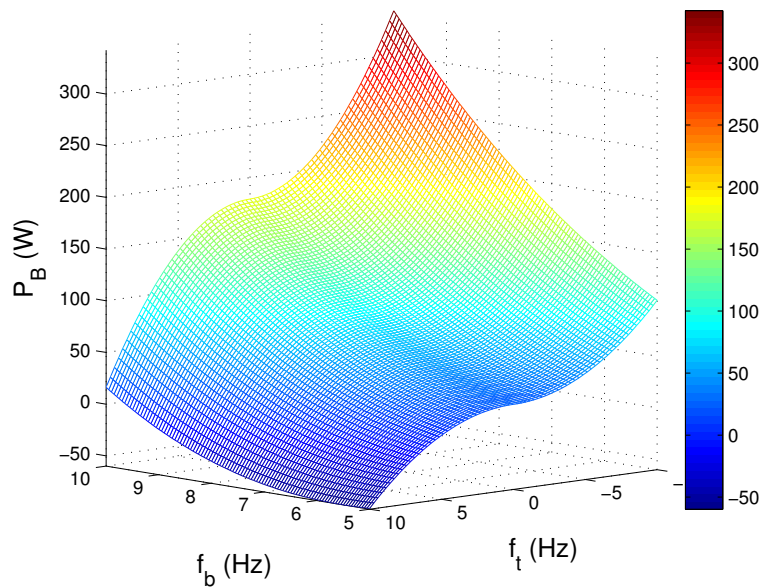


Figura 3.19: Potencia inyectada por el disco inferior.

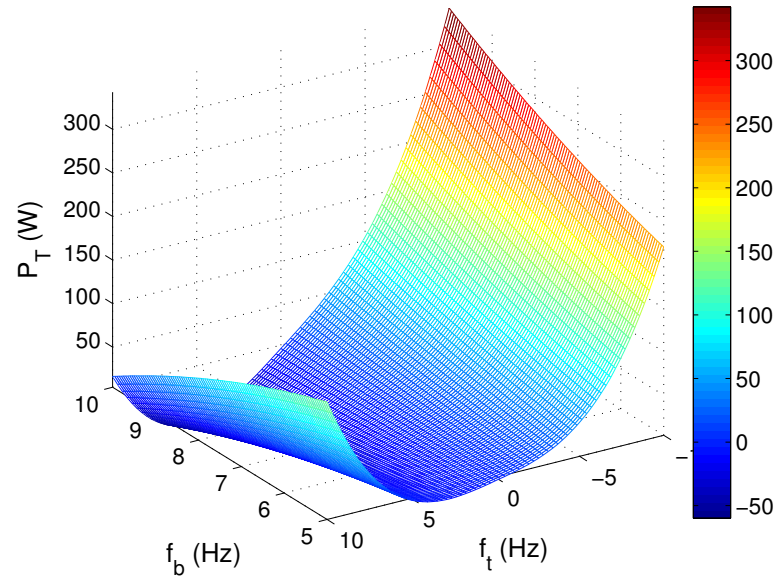


Figura 3.20: Potencia inyectada por el disco superior.

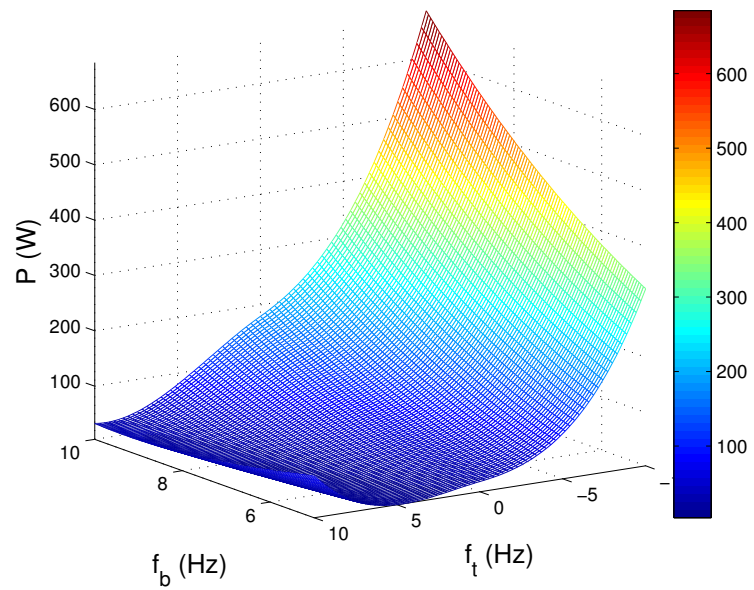


Figura 3.21: Potencia total inyectada al sistema.

3.7. Determinación de $\gamma(\theta)$

Luego de haber determinado el modelo de interacción de las velocidades angulares del sistema, procedemos a determinar la función que ajusta el modelo a los datos experimentales de forma única para ambos torques medios. Para ello es necesario contar con valores promedios de torque tales que

$$T_B = -T_T, \quad (3.69)$$

los cuales permitan obtener la respectiva función que ajuste el modelo a estos torques corregidos. De lo anteriormente estudiado, esta relación implica necesariamente que

$$T_W = 0, \quad (3.70)$$

es decir, los torques necesarios para determinar la función de acoplamiento medio no son directamente los determinados experimentalmente por Cadot t Le Maître, sino que una versión corregida de estos.

3.7.1. Corrección de torques promedio

La corrección de torques llevándolos a un sistema de paredes lisas no interactuantes con el fluido puede ser satisfecha por una variedad de modelos que finalmente cumplan con 3.69.

La ecuación estacionaria de balances de torque sobre el fluido es

$$\langle T_T \rangle + \langle T_B \rangle + \langle T_W \rangle = 0. \quad (3.71)$$

Esta ecuación implica realizar una transformación sobre los torques T_B y T_T para cumplir con la condición deseada, dicha transformación implica una repartición

de torque, T_W , hacia cada torque sobre los discos, es decir

$$\langle T_B \rangle \rightarrow \langle T_B \rangle + f(\Omega) \langle T_W \rangle, \quad (3.72)$$

$$\langle T_T \rangle \rightarrow \langle T_T \rangle + g(\Omega) \langle T_W \rangle, \quad (3.73)$$

sujeto a la condición

$$f(\Omega) + g(\Omega) = 1, \quad (3.74)$$

donde $\Omega = (\Omega_T, \Omega_B, \Omega_f)$. Con ello el lado izquierdo de las transformaciones cumple con 3.69. El punto es determinar las funciones f y g de la manera más simple posible.

Lo primero que se puede venir a la mente es repartir el torque de fricción resultante entre el fluido y las paredes de manera igualitaria a cada disco, es decir $f = g = 1/2$, pero ¿En todo el intervalo de valores que adopta la razón $S = \Omega_T/\Omega_B$, el fluido interactúa de la misma manera con las paredes?. Lo más razonable es decir que no, evidencia de esto son las imágenes que muestra la referencia principal de este trabajo en la figura 2.3, donde se observan vórtices para ciertos valores de S , por ejemplo en $S = 0,75$. En el caso de rotación sólida podría cumplirse la condición para las funciones f y g , pero en otros casos la inyección de momento angular desde los discos hacia el centro del sistema y el retorno de momento angular desde el centro del sistema hacia las paletas no es simétrico para distintos valores de S , es más, en algunos casos es claro que uno de los dos discos se encuentra mayormente exigido, por lo que el fluido en las cercanías de este interactúa de distinta forma con las paredes del cilindro.

Una manera simple de realizar lo anterior sería la siguiente:

$$\langle T_B \rangle \rightarrow \langle T_B \rangle + \frac{\Omega_B}{\Omega_B + \Omega_T} \langle T_W \rangle, \quad (3.75)$$

$$\langle T_T \rangle \rightarrow \langle T_T \rangle + \frac{\Omega_T}{\Omega_B + \Omega_T} \langle T_W \rangle. \quad (3.76)$$

Lamentablemente, este modelo no acepta la condición $\Omega_T = -\Omega_B$ es decir $S = -1$, que es un punto de importancia mayor. Para corregir esto se utiliza un modelo derivado de este mismo

$$\langle T_B \rangle \rightarrow \langle T_B \rangle + \frac{\Omega_B^2}{\Omega_B^2 + \Omega_T^2} \langle T_W \rangle \quad (3.77)$$

$$\langle T_T \rangle \rightarrow \langle T_T \rangle + \frac{\Omega_T^2}{\Omega_B^2 + \Omega_T^2} \langle T_W \rangle \quad (3.78)$$

lo cual evita la singularidad. En la figura 3.2 podemos ver como se comportan las funciones f y g .

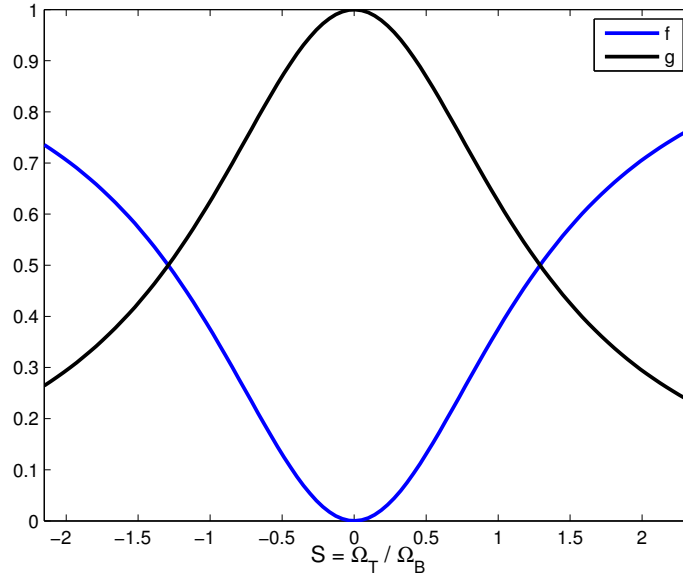


Figura 3.22: Modelos de corrección propuestos

Vemos que en $S = 0$, cuando uno de los discos se encuentra quieto, todo el torque de interacción con las paredes es absorbido por el otro. El efecto en los torques

calculados con esta corrección se muestra en la figura 3.23, donde es claro que en $S = 1$ se tiene $T_W = 0$. De los torques corregidos se puede obtener la función $\gamma(\theta)$, que ajusta el modelo a estos torques para $\eta = 0$, cilindro con paredes lisas no interactuantes con el flujo. En la figura 3.24 se puede apreciar la curva $\gamma(\theta)$, que es una función de las velocidades angulares de los discos.

Esta función, introducida en el modelo considerado, determina los torques mostrados en la figura 3.23, y es a partir de ellos que se pretenden replicar los resultados experimentales. Evaluando $C = 0,35$ en el modelo, el resultado que se obtiene para los torques promedio junto con los resultados experimentales se pueden ver en la figura 3.25, mientras que en la figura 3.26 se muestra el valor calculado del torque de las paredes del modelo comparado con su valor experimental.

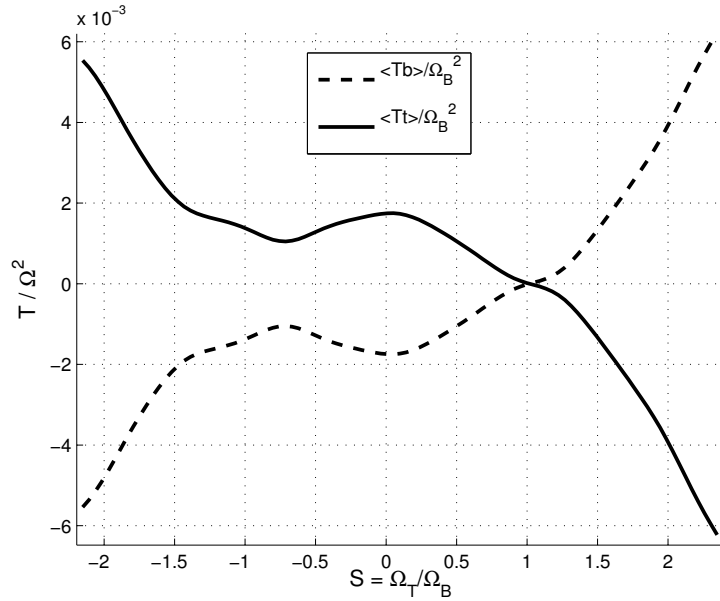


Figura 3.23: Torques corregidos.

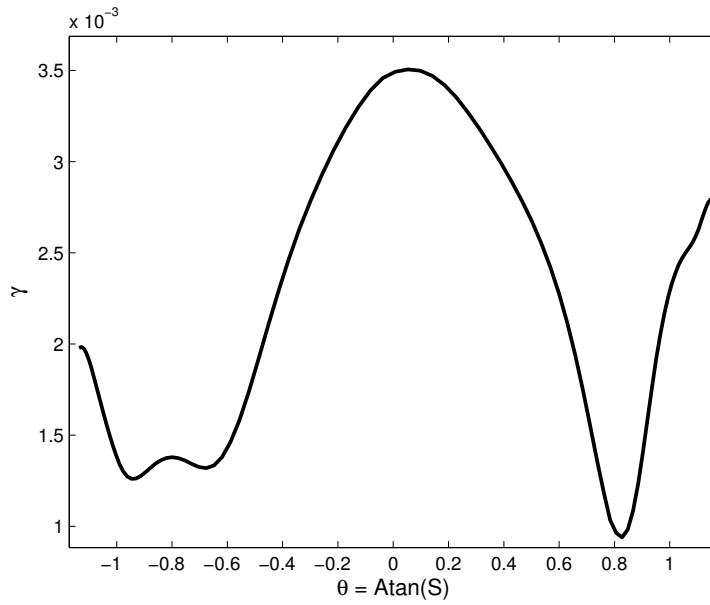


Figura 3.24: Función de acoplamiento medio $\gamma(\theta)$.

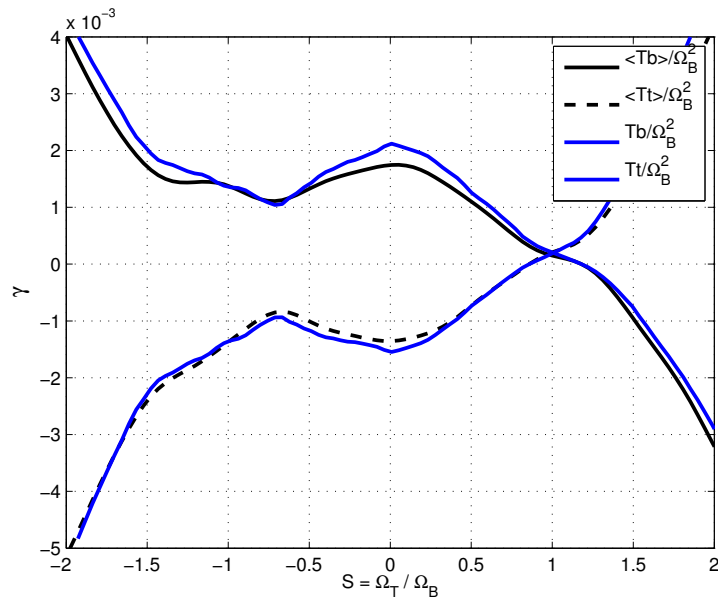


Figura 3.25: Comparación de resultados de torque promedio para modelo implementado, modelo (azul) y datos (negro).

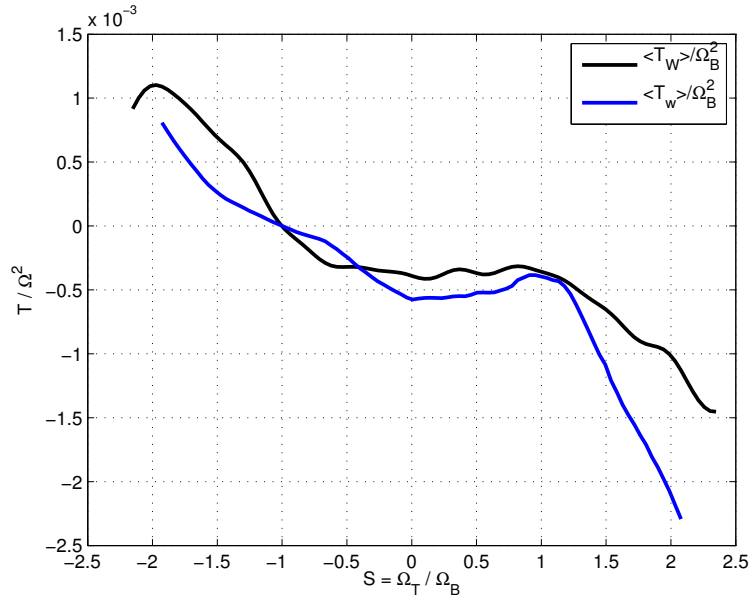


Figura 3.26: Torque ejercido por las paredes, modelo (azul) y datos (negro).

Como se observa, en la región contrarrotativa los torques medios sobre los discos son bastante bien representados por el modelo, esto constituye la prueba de buen funcionamiento del modelo de interacción planetado, en cuanto a torques promedio. Este modelo será implementado electrónicamente, su procedimiento será detallado en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Diseño y Pruebas de Circuitos

Para implementar un sistema electrónico que reproduzca el modelo dinámico expuesto en el capítulo anterior, es necesaria la utilización de modelos anexos que son necesarios para la completitud en la implementación electrónica. Se plantean dichos modelos con sus respectivos circuitos y pruebas de funcionamiento en conjunto con el circuito completo. Se muestra el proceso de escalamiento de ecuaciones dinámicas con el objeto de trabajar en un rango de valores de voltaje acorde a las limitaciones tanto de componentes utilizados como del sistema de adquisición de datos, además de resultados de las simulaciones del circuito en Multisim como de las ecuaciones dinámicas en FORTRAN para luego finalizar con el diseño e implementación del circuito impreso en Eagle.

4.1. Determinación de $\gamma(\theta)$ en el caso contrarrotativo

Para la determinación de un circuito capaz de reproducir la curva ilustrada en la figura 3.24 para régimen contrarrotativo, es necesaria la implementación de un modelo que reproduzca esa parte de $\gamma(\theta)$ normalizada a su configuración contrarrotativa.

Lo primero que se intenta es reproducir la convexidad de la zona central. A partir de dos funciones, una cóncava y otra convexa, se puede obtener esta función. Para ello se propone utilizar el siguiente modelo

$$y_1 = \frac{0,5}{0,5 + 8(\theta + d)^2}, \quad (4.1)$$

$$y_2 = 11(\theta + d)^2, \quad (4.2)$$

$$y = y_1 + y_2, \quad (4.3)$$

donde $d = \arctan(1)$. La figura 4.1 muestra esta función junto la curva $\gamma(\theta)$ que representará.

Aunque la función $\gamma(\theta)$, determinada por el ajuste del modelo de torques de interacción entre los discos y el fluido con el torque promedio experimental de Cadot y Le Maitre, no sea del todo simétrica respecto a $\theta_0 = \arctan(-1)$, se utiliza un modelo simétrico que se aproxime a los datos experimentales. Esto se inspira en el resultado que se muestra en la figura 2.4, obtenido a partir de la potencia inyectada al sistema en fluido abierto[4] y en la figura 3.3, obtenida a partir de torque total[3] siendo ambas simétricas. Después de obtener una representación analítica de la función de acoplamiento medio entre los discos y el fluido, se procede a la elaboración de un circuito que reproduzca dicho

modelo.

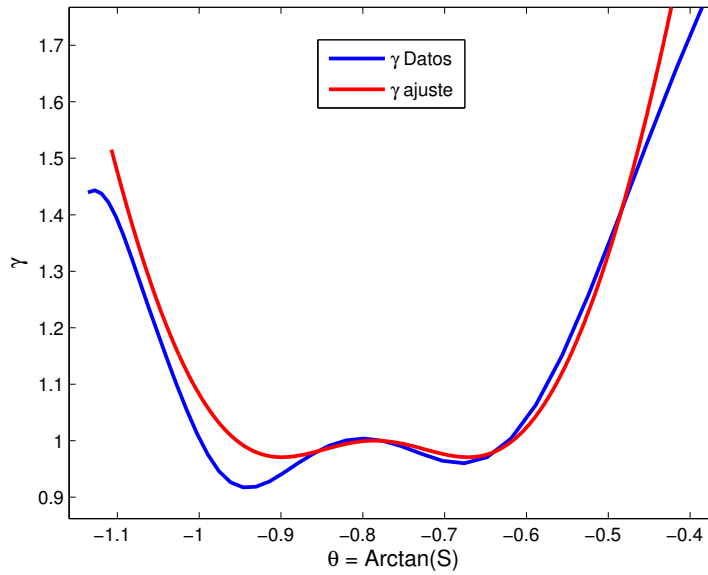


Figura 4.1: Comparación de modelo para la función $\gamma(\theta)$ normalizada al caso contrarrotativo.

4.1.1. Determinación de una aproximación para θ

Lo primero es contar con el circuito que permita obtener el ángulo θ en la región contrarrotativa.

$$\theta = \arctan(S). \quad (4.4)$$

Para ello es necesario contar con una función que aproxime la función arcotangente con argumento negativo. Para este proceso se encuentran distintas posibilidades, algunos de los casos probados fueron

1. Polinomios

- a) Cuadrático con $r = 99\%$. Cerca de $S = -2$ la diferencia es mayor.
- b) Cúbico con $r = 99,12\%$. Cerca de $S = -2$ la diferencia es mayor.

- c) Quinto Orden con $r = 99,94\%$ de representatividad, perfecto casi en todo el rango de s .

2. Razones de Polinomios

- a) Lineal sobre Cuadrático. $r = 99,96\%$.
- b) Cúbico sobre Cuadrático. $r = 1$
- c) Cúbico sobre Cúbico. $r = 1$

Aunque para la función $\gamma(\theta)$ también se probaron razones de polinomios y otras opciones, para seleccionar el modelo adecuado un factor de importancia es la cantidad de componentes que será necesario utilizar, es decir, se necesita una expresión que sea lo más simple posible, por lo que para aproximar la función $\arctan(S < 0)$ se utiliza la siguiente expresión:

$$\theta \cong 0,2434(S + 2,1)^2 - 1,08. \quad (4.5)$$

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran una comparación del ajuste dado por la ecuación 4.5 con la función analítica, y la diferencia entre las dos curvas, respectivamente. Cerca de $s = -1$ la diferencia porcentual entre la función aproximativa y la arcotangente es de aproximadamente 0,01 %, lo que indica que es una muy buena aproximación.

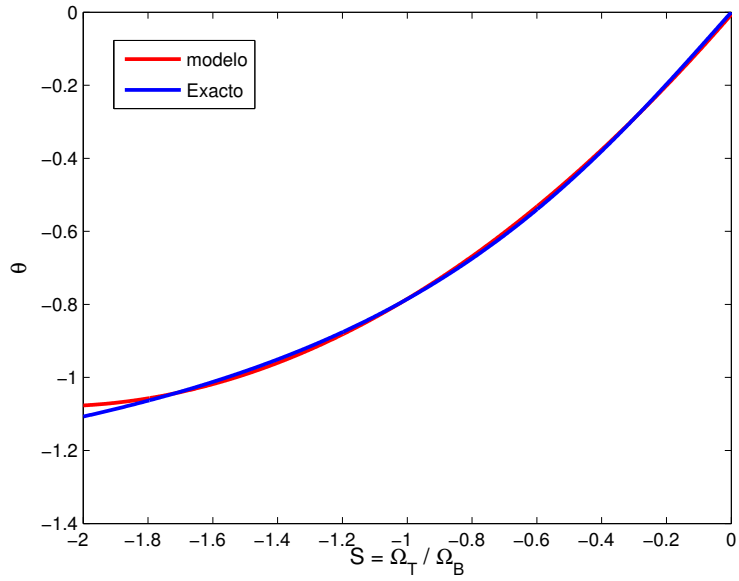


Figura 4.2: Aproximación de la función $\arctan(S)$.

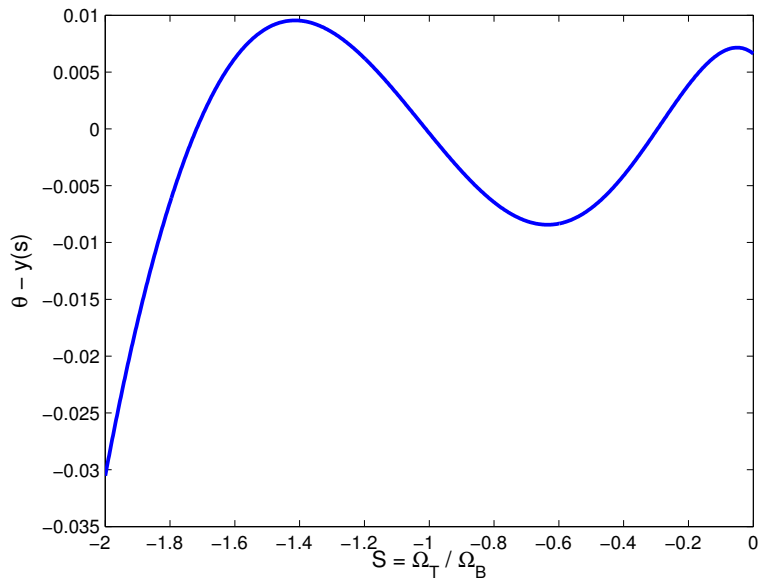


Figura 4.3: Diferencia entre modelo de ajuste y función $\arctan(S)$.

4.2. Diseño de γ

Luego del diseño, pensado en la optimización de recursos, se debe analizar por partes el circuito de manera tal de no exeder las limitaciones características de cada componente, en particular, los límites de las tensiones de entrada y salida.

A modo de resumen tenemos que el modelo de aproximación de $\theta = \arctan(s)$ es

$$\theta = a(S+b)^2 + c. \quad (4.6)$$

con $a = 0,2434$, $b = 2,11V$ y $c = -1,08V$. La función $\gamma(\theta)$ es simétrica respecto a $S = -1$ o bien a $\theta_0 = \arctan(-1)$.

El modelo que aproxima a dicha función es:

$$\gamma(\theta) = 11(\theta+d)^2 + \frac{0,5}{0,5+8(\theta+d)^2}, \quad (4.7)$$

donde $d = \arctan(1)$.

4.2.1. Implementación

El circuito equivalente del modelo determinado para la representación de $\gamma(\theta)$ en la región contrarrotativa se muestra en la figura 4.4. En ella se observan funciones intermedias de los distintos términos del modelo de representación de la curva $\gamma(\theta)$. En las salidas de los multiplicadores y el último divisor se obtienen las siguientes funciones

$$f_1 = \sqrt{80}(\theta+d) \quad (4.8)$$

$$f_2 = -8(\theta+d)^2 \quad (4.9)$$

$$f_3 = -\frac{5}{0,5+f_2} \quad (4.10)$$

donde $d = \arctan(s = 1)$.

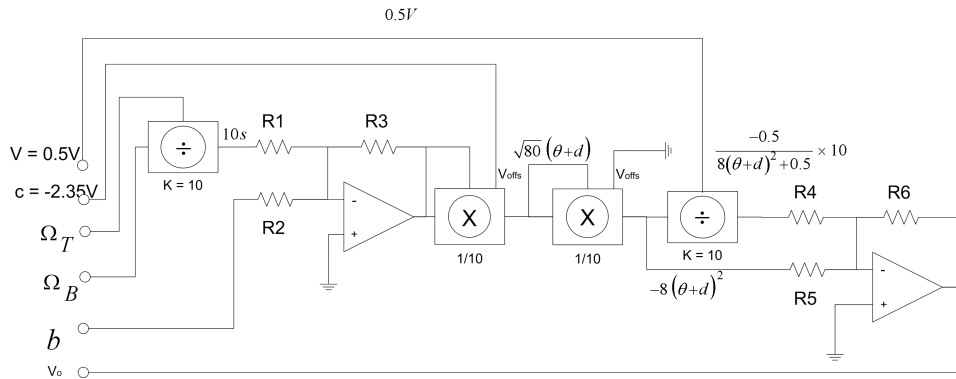


Figura 4.4: Diseño electrónico de $\gamma(\theta)$. Nótese las funciones detalladas dentro del circuito.

Siempre existe la posibilidad de saturación de algún circuito integrado al tratar de obtener las funciones intermedias. La figura 4.5 muestra la amplitud en voltios de las funciones intermedias del modelo, f_1 , f_2 y f_3 definidas anteriormente, en la cual se observa que f_3 logra llegar a los 10V. Esta señal se obtiene en la salida del último divisor, en realidad debido a su ganancia intrínseca que es 10. Lo anterior no es un inconveniente, ya que la tensión de salida de pico para este componente es $1,25SF$ donde SF es el fondo de escala, que en este caso es 10V.

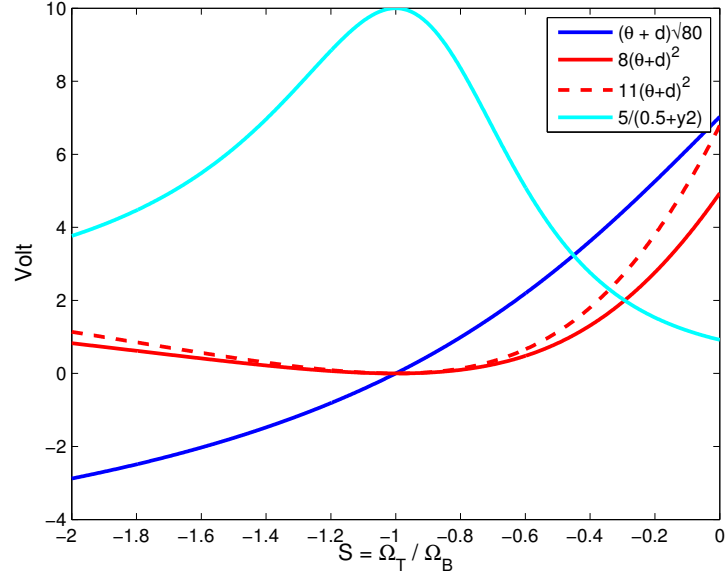


Figura 4.5: Funciones intermedias de el circuito que calcula $\gamma(\theta)$.

4.2.2. Análisis

La salida del primer divisor de la figura 4.4, entrega la cantidad $10S$ debido a la ganancia intrínseca del divisor, donde S se encuentra centrada en $-1V$. Para efectos prácticos se supondrá $|S| = 1 \pm 0,1V$, relación acorde con datos experimentales. En el caso general contrarrotativo, S se encuentra dentro del intervalo $[-2 \ 0]$. Suponiendo que la razón S pudiese efectivamente adoptar estos valores, nos encontraríamos con un problema para valores cercanos a $-2V$, debido a que la ganancia del primer divisor llevaría Esta salida a $20V$. A partir de esto, la salida de este divisor, $V_{oD_1} = 10S$, debe ser tal que $|V_{oD_1}| \leq 11V$, dada por el fabricante, lo cual determina la restricción $|S| \leq 1,1V$. Como se ve, el límite impuesto por estas restricciones contiene los límites deducidos a partir del experimento en aire[5], por lo que no hay problemas de este tipo. Luego, el límite máximo es justamente $|S| \leq 1 \pm 0,1V$.

Es necesario notar que hay una restricción para b , que es uno de los parámetros de θ . En la configuración usada en el circuito debe cumplirse

$$|b| \leq 10V, \quad (4.11)$$

por lo cual no se puede factorizar por 10 la expresión

$$V_{01} = -R_3 \left(\frac{10S}{R_1} + \frac{b}{R_2} \right), \quad (4.12)$$

que da cuenta de la tensión de salida del primer amplificador operacional, ver figura 4.4 y que debe entregar un factor proporcional a $S + 2,1V$. Aplicando la condición

$$R_1 = 10R_2, \quad (4.13)$$

se tiene la salida del primer amplificador operacional

$$V_{01} = -\frac{R_3}{R} (S + b), \quad (4.14)$$

pudiendo aplicar directamente a la resistencia R_2 una tensión $b = 2,1V$. Dado que la función de transferencia del multiplicador en modo cuadrado es

$$V_o = \frac{(X_1 - X_2)^2}{10} + Z_2, \quad (4.15)$$

en la salida del primer multiplicador, se tiene

$$V_{02} = \frac{1}{10} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 (s + b)^2 + V_{offset}. \quad (4.16)$$

la que debe cumplir con

$$\frac{1}{10} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 (s+b)^2 + V_{offset} = \sqrt{80}(\theta+d). \quad (4.17)$$

Del modelo para θ en Ec 4.6, se tiene

$$\frac{1}{10} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 = 0,2434\sqrt{80} \quad (4.18)$$

$$b = 2,1 \quad (4.19)$$

$$V_{offset} = \sqrt{80}(-1,0800 + 0,7856), \quad (4.20)$$

de lo cual se obtienen los valores

$$\frac{R_3}{R} = 4,66 \quad (4.21)$$

$$V_{offset} = -2,635V. \quad (4.22)$$

Para la última etapa, figura 4.4 derecha, las condiciones sobre las resistencias tal que la salida del segundo amplificador operacional sea efectivamente $\gamma(\theta)$ contrarrotativa, es necesario transformar la función $-8(\theta+d)^2$ en $11(\theta+d)^2$, para ello basta con que se aplique

$$\frac{R_6}{R_5} = \frac{11}{8} = 1,375, \quad (4.23)$$

y para compensar la ganancia del último divisor, tenemos necesariamente que

$$\frac{R_6}{R_4} = \frac{1}{10}. \quad (4.24)$$

Estas razones se pueden obtener con los valores comerciales de resistencias con tolerancias del 1%.

4.2.3. Test Dinámico del circuito

Para probar el buen funcionamiento dinámico del esquema electrónico propuesto para el cálculo de la función $\gamma(\theta)$, el circuito de la figura 4.4 se simula en Multisim con una señal de entrada tipo onda triangular de frecuencia 5kHz centrada en $-1V$ con una amplitud de $900mV$, mostrando una excelente respuesta dinámica sin efectos apreciables de histeresis. Lo anterior es la prueba final en la validación de este circuito como modelo de $\gamma(\theta)$ contrarrotativo.

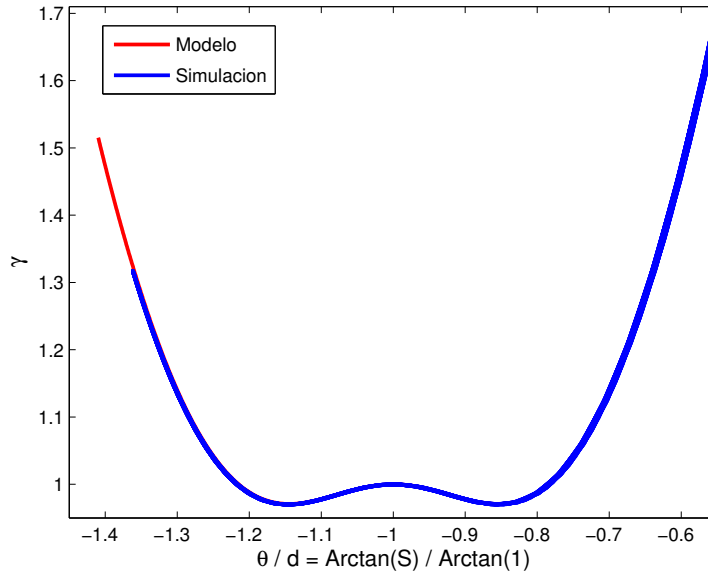


Figura 4.6: Comparación del esquema electrónico simulado con una señal triangular de entrada de frecuencia 5KHz con el modelo analítico. Nótese que no se aprecian efectos de histeresis.

4.3. Escalamiento de Ecuaciones Dinámicas

La razón de ser de este procedimiento proviene de la limitación en voltaje a la cual estamos sujetos. Este no debe superar los 10V debido a las limitaciones

tanto de los componentes analógicos como de la tarjeta de adquisición de datos.

Para nuestro caso de interés, consideremos un rango de frecuencias de rotación de los discos comprendido entre $[1-5]Hz$, determinado en base a valores experimentales, lo cual en unidades naturales de rotación, base de nuestras ecuaciones dinámicas, se convierte en $[6,14-31,4]\frac{rad}{s}$. Este intervalo de valores de frecuencia angular no se puede traducir directamente a voltajes en una relación 1 : 1, ya que supera ampliamente el límite de $10V$.

Es por ello que esta relación debe ser del tipo 1 : K donde K es la constante de escalamiento que aplica de la forma

$$\Omega = KV. \quad (4.25)$$

Se tienen las ecuaciones que gobiernan la dinámica de nuestro sistema

$$T_B = \gamma(\theta) \{ \Omega_B^2 - \Omega_f |\Omega_f| \} + \xi_B \quad (4.26)$$

$$T_T = \gamma(\theta) \{ -\Omega_T^2 - \Omega_f |\Omega_f| \} + \xi_T \quad (4.27)$$

$$T_w = -\eta \Omega_f |\Omega_f| \quad (4.28)$$

$$J \frac{d\Omega_B}{dt} = T_{mB} - T_B \quad (4.29)$$

$$J \frac{d\Omega_T}{dt} = T_{mT} - T_T \quad (4.30)$$

$$J_f \frac{d\Omega_f}{dt} = T_B + T_T + T_W. \quad (4.31)$$

El primer paso en este proceso es multiplicar las ecuaciones diferenciales por un mismo factor k_1 . Este factor nos conduce a un escalamiento sólo de las constantes, no de la dinámica del sistema.

Reemplazando la relación de escalamiento 4.25 junto con la multiplicación de las ecuaciones por el factor k_1 , nos conduce a obtener el modelo en términos de

voltajes como sigue

$$k_1 K J \frac{dV_B}{dt} = k_1 T_{mB} - k_1 K^2 \gamma(\theta) \{V_B^2 - V_f |V_f|\} \quad (4.32)$$

$$k_1 K J \frac{dV_T}{dt} = k_1 T_{mT} + k_1 K^2 \gamma(\theta) \{V_T^2 + V_f |V_f|\} \quad (4.33)$$

$$k_1 K J_f \frac{dV_f}{dt} = k_1 K^2 \gamma(\theta) \{V_B^2 - V_T^2 - 2V_f |V_f|\} - k_1 K^2 \eta V_f |V_f|. \quad (4.34)$$

Luego, las ecuaciones dinámicas en término de voltajes, que son en realidad las cantidades medibles, son

$$J' \frac{dV_B}{dt} = T'_{mB} - \gamma'(\theta) \{V_B^2 - V_f |V_f|\} \quad (4.35)$$

$$J' \frac{dV_T}{dt} = T'_{mT} + \gamma'(\theta) \{V_T^2 + V_f |V_f|\} \quad (4.36)$$

$$J'_f \frac{dV_f}{dt} = \gamma'(\theta) \{V_B^2 - V_T^2 - 2V_f |V_f|\} - \eta' V_f |V_f|. \quad (4.37)$$

Los escalamientos aplicados se resumen en el cuadro 4.1

Ω	V
\overline{J}	$\overline{k_1 K J}$
$\overline{\gamma}$	$\overline{k_1 K^2 \gamma}$
$\overline{\eta}$	$\overline{k_1 K^2 \eta}$
$\overline{T_m}$	$\overline{k_1 T_m}$

Cuadro 4.1: Resumen de escalamiento

Estas últimas ecuaciones y sus constantes son las necesarias para elaborar un circuito que reproduzca la dinámica del modelo planteado. Es por ello que es necesario saber de antemano el factor de conversión, es decir, a qué nivel de voltaje se escalará efectivamente, construyendo a partir de ello toda la analogía electrónica.

4.3.1. Determinación de constantes

Luego de obtener las ecuaciones escaladas es necesario probar hasta que valores tanto de amplitud de ruido como de funciones traducidas en voltaje serán aplicadas. Como ejemplo la función $\gamma(\theta)$ en contrarrotativo, evaluado en $\theta_0 = \arctan(-1)$, a partir de las curvas de torque promedio experimentales, adquiere el valor $1,38 \times 10^{-3} Nm \left(\frac{s}{rad}\right)^2$. Su escalamiento a valores de voltaje debe resultar en una señal por encima de los $10mV$ con el objetivo de contar con una señal medible con una relación señal-ruido aceptable. En efecto, para la constante de escalamiento escogida, $K = 10$, el valor $\gamma(\theta_0)$ es escalado a $V_\gamma = 138mV$.

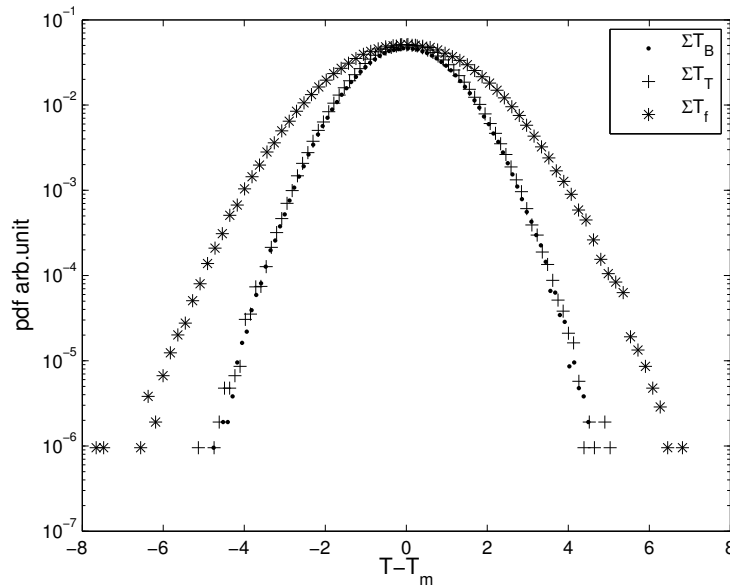


Figura 4.7: PDF suma de torques sobre discos y fluido.

La multiplicación de las ecuaciones por un factor común, viendo la figura 4.7, no es de gran ayuda, ya que aplicando ruido gaussiano centrado en 0 con desviación estándar unitaria, con los parámetros definidos en la tabla 4.1, utilizados en la integración numérica realizada en FORTRAN mediante un intergrador de paso

fijo Runge Kutta de orden 4, con un factor $k_1 = 1$, un momento de inercia $J = 2 \times 10^{-3} [kgm^2]$ y $\beta = 0,1$ (fracción del momento de inercia del fluido respecto a rotación sólida), se tiene la distribución de probabilidad para los torques escalados ilustrados en la figura 4.7. La aplicación del escalamiento al torque considera sólo una constante, como se ve en el cuadro 4.1 para T, de ello se desprende que dicha constante es la unidad, ya que en términos de tensión no se aplicarán valores mayores a $10V$ en la entrada de los integradores.

4.4. Circuito de integración

Para esto Multisim cuenta con una gran variedad de clases de componentes, entre ellos modelos virtuales y reales de un mismo componente. Los modelos virtuales, esencialmente se encuentran para entregar un mayor grado de libertad en cuanto al ajuste de parámetros del componente deseado. En cambio los reales son componentes con propiedades eléctricas fijas que emulan el comportamiento del respectivo componente.

Para validar el diseño de circuito, luego de definir uno de tantos esquemas posibles, la primera prueba sobre este es reproducir los resultados que se obtienen mediante integración numérica, es decir, es necesario comenzar por el circuito eléctricamente ideal y verificar que reproduzca el comportamiento de las ecuaciones dinámicas para las velocidades angulares. Luego de diseñar un esquema tentativo de circuito, en base a componentes virtuales y no importando la cantidad de circuitos integrados en diseños preliminares, se obtienen resultados de acuerdo a las ecuaciones dinámicas reproduciendo los valores para las tensiones en régimen contrarrotativo para ensayos sin ruidos. Luego de este procedimiento, eléctricamente ideal, se comienza por utilizar modelos reales pero en base a componentes virtuales, es decir, las opciones de modificación de parámetros

eléctricos se obtienen a partir de las respectivas hojas de datos, como por ejemplo en amplificadores operacionales las resistencias de entrada y salida, slew rate, ganancia de lazo, etc. Utilizando estos componentes, con parámetros ajustados, en la elaboración del circuito que integra las ecuaciones dinámicas para las velocidades angulares del sistema, no se obtienen resultados satisfactorios. La condición contrarrotativa sobre la rotación global nula no se cumple registrándose un valor de offset sobre $100mV$ para el valor estacionario de la tensión proporcional a la velocidad angular de rotación del fluido. Respecto a las tensiones proporcionales a las velocidades angulares de los discos que son del orden de $3V$, lo anterior representa un problema. A partir de estos tipos de componentes se diseñan diversos circuitos equivalentes, todos manifestando el mismo problema en mayor o menor medida.

Es por ello que se decide utilizar un circuito de integración basado en un principio de funcionamiento básico. Sin fluctuaciones de tensión, la solución de uno de los circuitos para la dinámica de los discos debe ser la opuesta de la otra. Para régimen contrarrotativo, esto se logra aplicando una tensión de $1V$, respectivamente $-1V$ haciendo las veces de torque cte, a la entrada inversora de los integradores de las velocidades angulares de los discos.

Para un sistema ideal en estado contrarrotativo la solución de esta ecuación debe ser el inverso aditivo del resultado de la ecuación dinámica para la rotación del disco opuesto. En realidad es este el pilar que sustenta la idea que da un buen resultado, siendo posible realizar la analogía de poseer dos discos coplanares con la misma ecuación dinámica. En base a esta idea se escoge Ω_B , para luego invertir el torque de reacción con el fluido y aplicarlo al tercer integrador, de manera tal que esta tercera ecuación se vea inalterada. En ecuaciones, esto es

equivalente a resolver el siguiente conjunto

$$J' \frac{dV_B}{dt} = T'_{mB} + \gamma'(\theta) \{-V_B^2 + V_f |V_f|\} + \xi_B, \quad (4.38)$$

$$J' \frac{dV_T}{dt} = T'_{mT} + \gamma'(\theta) \{-V_T^2 + V_f |V_f|\} + \xi_T, \quad (4.39)$$

$$J'_f \frac{dV_f}{dt} = \gamma'(\theta) \{V_B^2 - V_T^2 - 2V_f |V_f|\} - \xi_B - \xi_T - \eta' V_f |V_f|, \quad (4.40)$$

donde la tercera de estas ecuaciones pertenece al primer conjunto determinado en la sección 4.3. La ecuación para la rotación global del fluido permanece invariante.

Ahora bien, para entender directamente el circuito diseñado a partir de esta analogía, es de ayuda saber que se ha pensado en el negativo de la tercera ecuación. El esquema está diseñado a partir de

$$-J'_f \frac{dV_f}{dt} = \gamma'(\theta) \{V_T^2 - V_B^2 + 2V_f |V_f|\} + \xi_B + \xi_T + \eta' V_f |V_f|, \quad (4.41)$$

con la finalidad de aprovechar las salidas de los torques de los otros dos circuitos, ya que recordando el principio de acción y reacción aplicado en la determinación de ecuaciones dinámicas, la entrada a esta última ecuación sin el cambio de signo, debieran ser los negativos de los torques T_B y T_T , lo que agregaría dos amplificadores operacionales inversores. El cambio de signo en la tercera ecuación dinámica hace que sea innecesario el cambio de signo en los torques de los discos. Pensando además en la necesidad de compensar la ganancia 0,1 de los mutliplicadores, y en la obligación de utilizarlos en cascada en una misma ruta para configurar las ecuaciones dinámicas de los discos, ver figura 4.8, a cada lado del bloque que calcula $\gamma(\theta)$ se cuenta con los circuitos que entregan la dinámica de ellos. Es de utilidad agregar amplificadores operacionales en modo inversor para compensar la ganancia de cada multiplicador, ya que no es buena idea compenazar la ganancia 1/100 que resulta de utilizarlos en cascada.

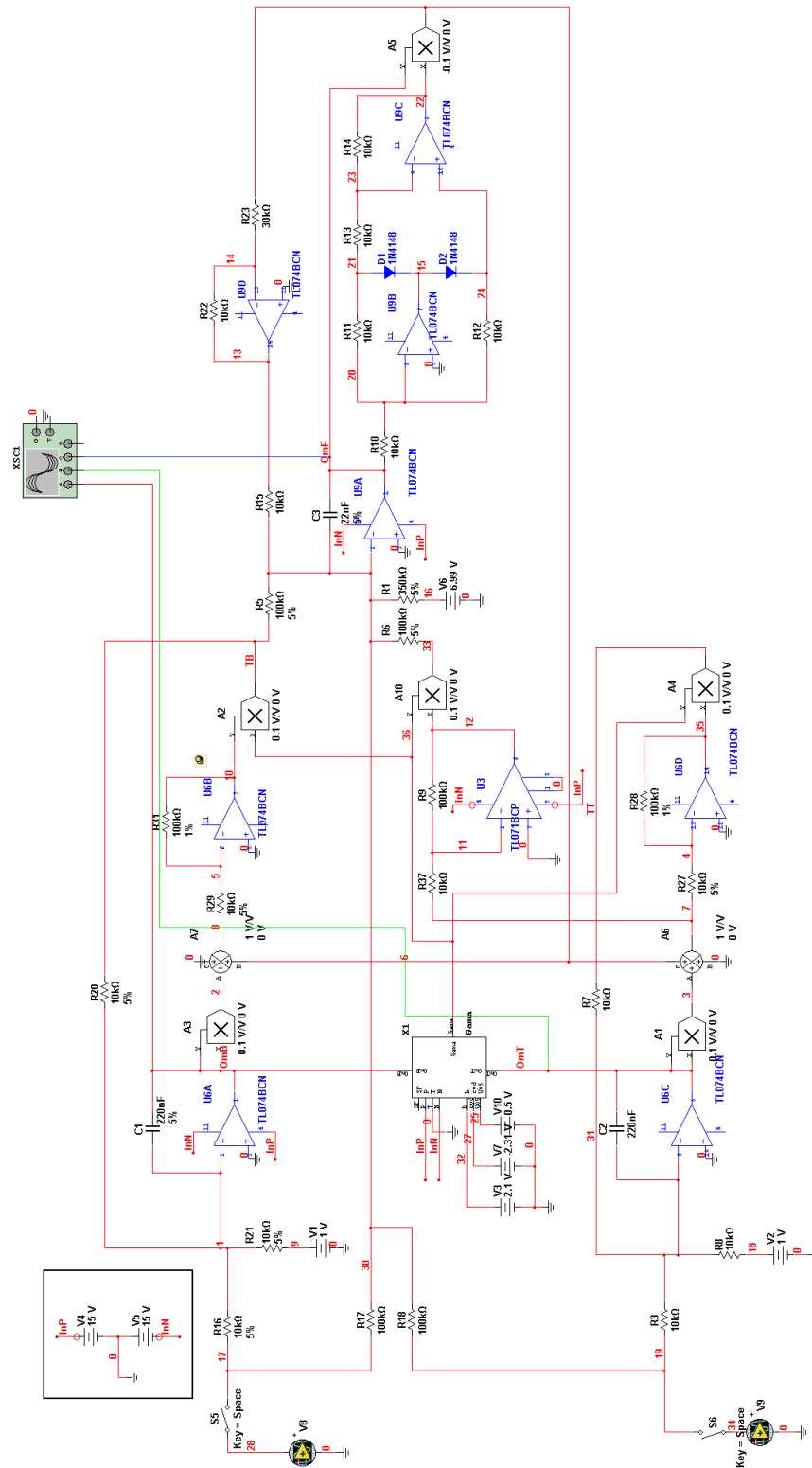


Figura 4.8: Diseño de circuito de integración en Multisim

La salida del mutlicador en la sección de la tercera ecuación, extremo derecho del circuito en figura 4.8, es negativa. La entrada al integrador de esta parte es determinada por el operacional inversor de realimentación cuya ganancia es análoga al coeficiente η . Para corregir el offset en la tensión proporcional a la rotación global, se aplica una tensión constante a la entrada inversora del integrador, de modo tal de forzar el transiente para obtener un valor cercano a cero, en realidad del orden de $10mV$, para valores no fluctuantes y $0,014V$ aplicando los respectivos ruidos.

4.4.1. Aplicación de Ruidos en Multisim

La posibilidad de utilizar una fuente de señal de ruido de cualquier tipo es crucial en la simulación de este tipo de sistema. Para ello se utiliza la opción que permite utilizar un archivo de señal tipo lvm, Labview measurement file. Para más detalles véase el Apéndice B.

4.5. Resultados de simulaciones en Multisim

La señal resultante para los discos es de $V_B = 3,172V$ a $1s$, el valor medio de la tensión proporcional a la rotación global es de $V_f = 0,0142V$. El resultado esperado para contrarrotativo es $V_B = 3,162V$.

Se obtiene la estadística de las fluctuaciones de velocidad angular para un cálculo de $30s$ con una cantidad de datos aproximadamente 700000 , debido a las limitaciones de memoria del computador en las que fueron realizadas. Se prueba cómo depende la estadística de la fracción β del momento angular efectivo del fluido para valores $\beta = \{0,1,0,3,0,5\}$. El valor medio de la rotación global se mantiene casi constante, con una ligera tendencia al alza desde $0,0019V$ hasta $0,017V$, al igual que las otras dos velocidades angulares.

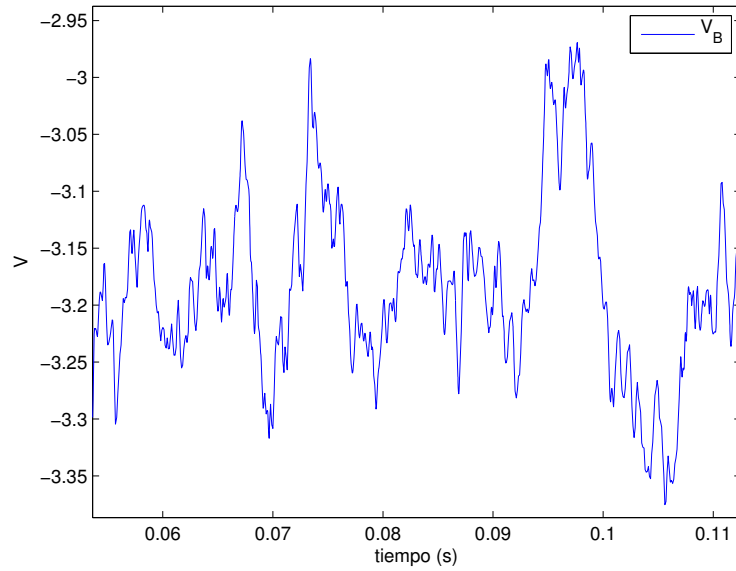


Figura 4.9: Fluctuaciones de velocidad angular en unidades de tensión.

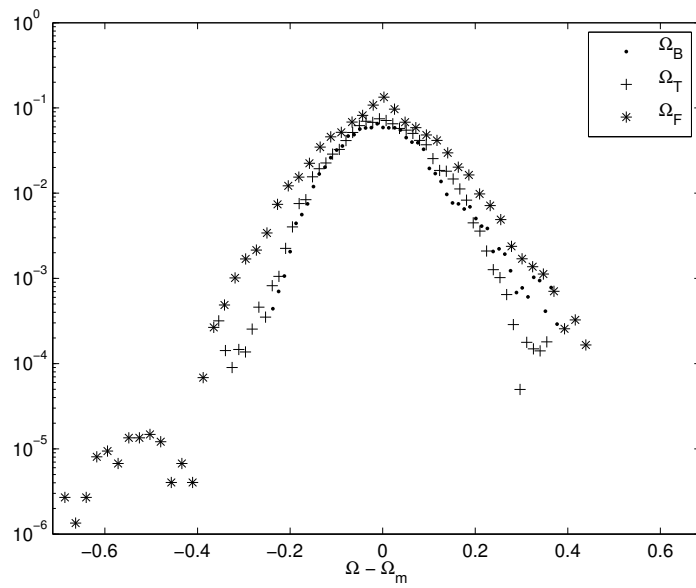
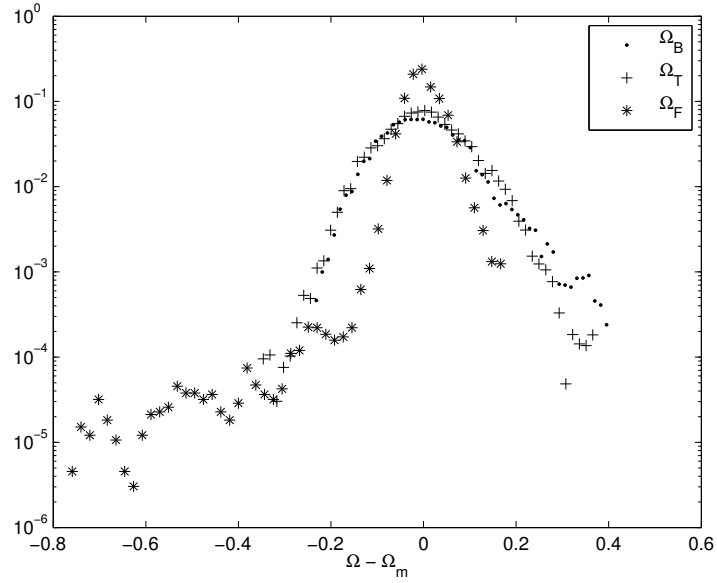
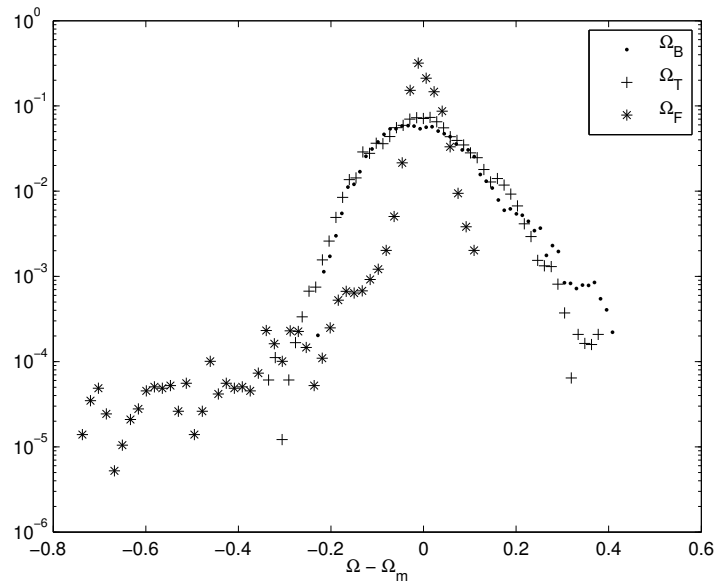


Figura 4.10: PDF fluctuaciones de velocidad angular para $\beta = 0,1$

Figura 4.11: PDF fluctuaciones de velocidad angular para $\beta = 0,3$ Figura 4.12: PDF fluctuaciones de velocidad angular para $\beta = 0,5$

Es evidente la dependencia de la asimetría de la estadística obtenida con el factor de modulación del momento angular de la componente z del fluido. Los espectros de las fluctuaciones de velocidad angular, correspondientes a los valores extremos de β utilizados en estas simulaciones, se muestran en la figura 3.13, donde se indican las pendientes de las regiones en las que se verifica una ley de potencia.

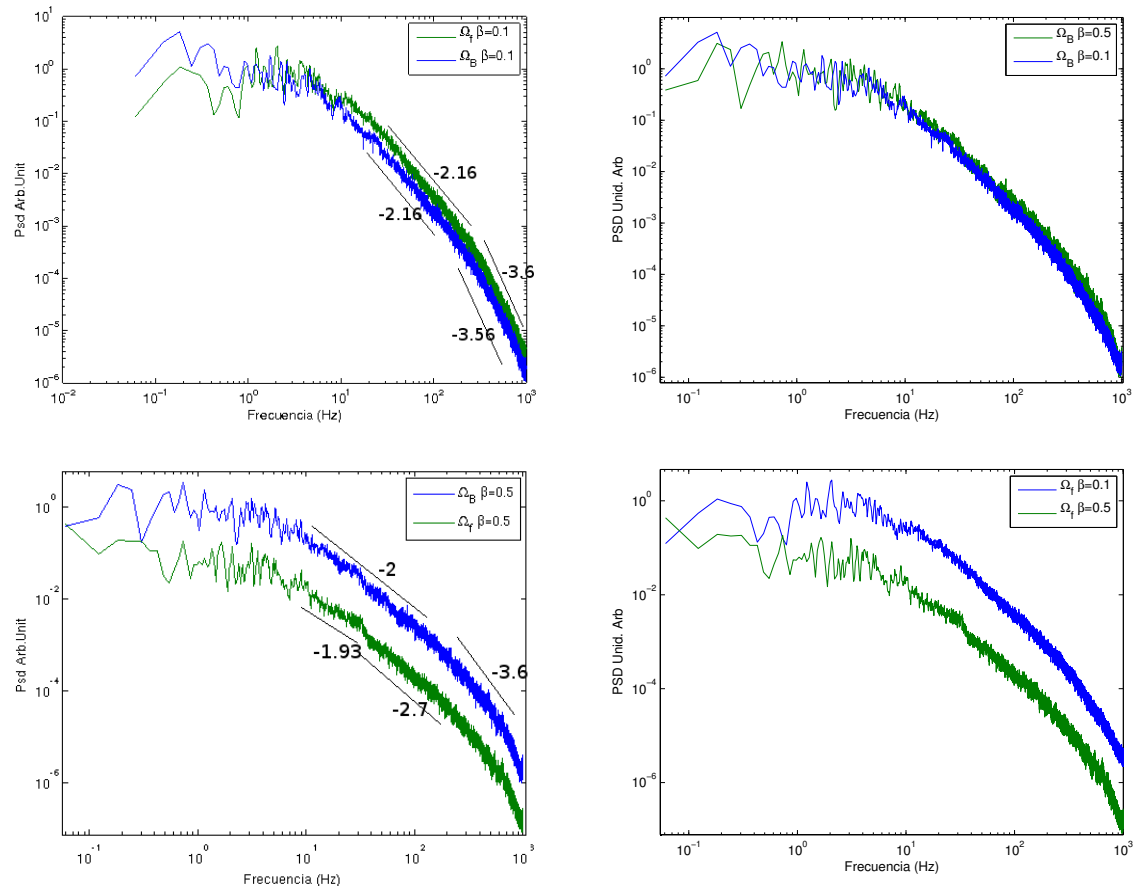


Figura 4.13: Comparación de Espectros de señales para disco inferior y de rotación global de fluido.

Respecto a las pendientes del espectro de potencia, se espera observar una región con pendiente -2, dado que las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los discos

son de orden 1. un circuito que funciona

4.5.1. Simulación de Filtro

La figura 4.14 muestra el esquemático del filtro de Butterworth de orden 8 en multisim. Este filtro se utiliza para limitar el ancho de banda del ruido gaussiano que simula los torques fluctuantes asociados a la turbulencia del fluido. La idea es evitar la presencia de señales de muy alta frecuencia, que podrían acoplarse capacitivamente a las distintas etapas del circuito simulador, alterando los resultados de la simulación.

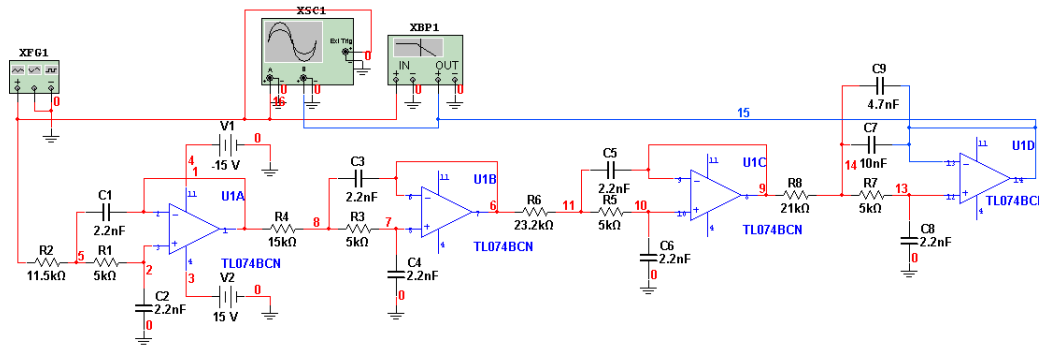


Figura 4.14: Esquema de filtro en Multisim

La frecuencia de corte de este filtro es de $2,5kHz$ y su roll-off es de $48 \frac{db}{8^{va}}$.

4.6. Resultados de cálculos en FORTRAN

Este cálculo explora la posibilidad de cambio de signo del factor de rotación global en el modelo para torque propuesto

$$T_k = \gamma (\Omega_k^2 - \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.42)$$

Se prueban tres casos de torques, considerando la posibilidad de un cambio de

signo debido al principio de acción y reacción del fluido turbulento sobre los discos. Esto genera una variación del sistema de ecuaciones propuesto, resultando que la primera elección, en cuanto al signo de la rotación global, fue acertada.

$$T_B = \gamma (\Omega_B^2 - \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.43)$$

$$T_T = \gamma (-\Omega_T^2 + \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.44)$$

$$T_B = \gamma (\Omega_B^2 + \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.45)$$

$$T_T = \gamma (-\Omega_T^2 - \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.46)$$

$$T_B = \gamma (\Omega_B^2 - \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.47)$$

$$T_T = \gamma (-\Omega_T^2 - \Omega_f |\Omega_f|) \quad (4.48)$$

A continuación se muestran los resultados de integrar las ecuaciones con estos modelos de torque con la aplicación de ruido con desviación estándar 0,1 al igual que el factor β , para un valor de momento de inercia de las paletas $2 \times 10^{-3} [Kgm^2]$.

La amplitud de ruido no fue seleccionada al azar, sino que fue la de mayor amplitud que el sistema de integración soportó con una cantidad de datos de 2^{20} puntos.

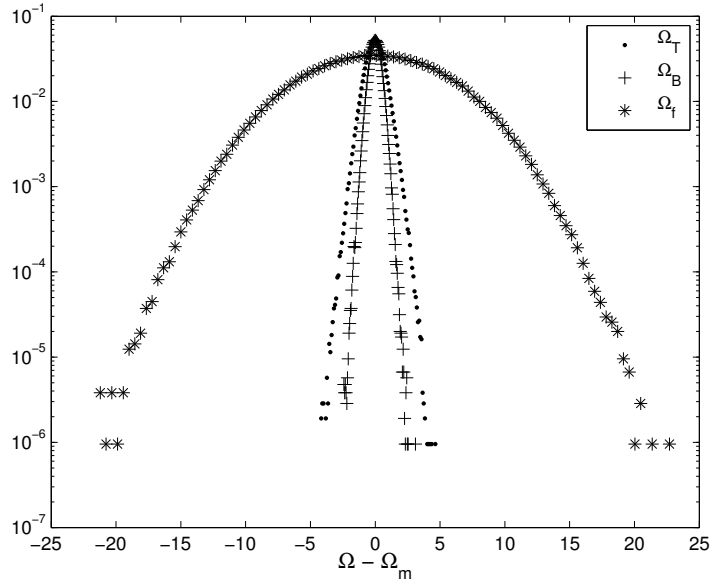


Figura 4.15: PDF Caso1

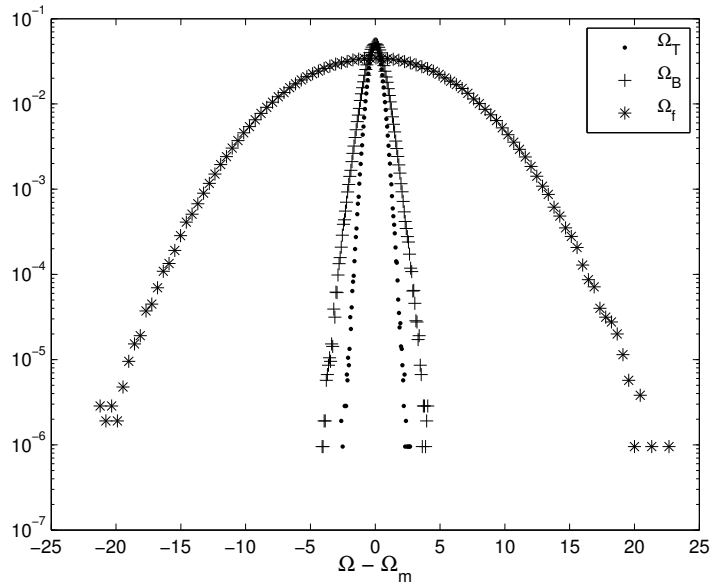


Figura 4.16: PDF Caso2

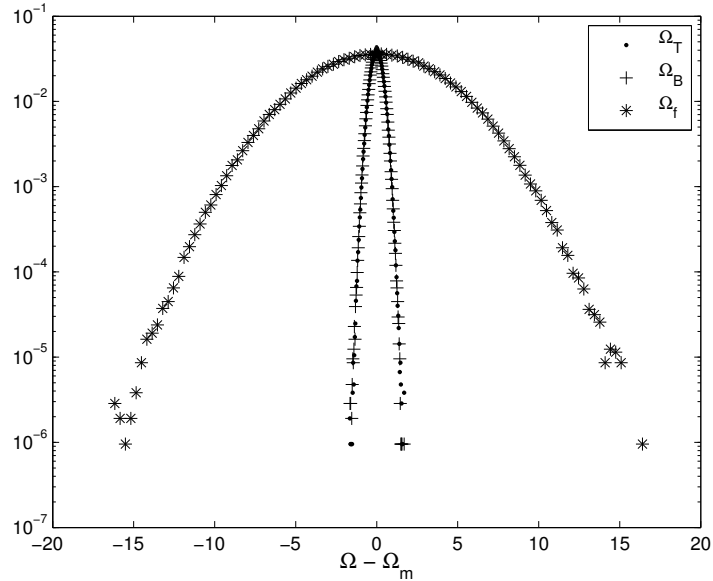


Figura 4.17: PDF Caso3

Como se aprecia en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17, la posibilidad de que la turbulencia del fluido que actúa sobre cada disco con paletas obedezca el sentido de la acción de esta muestra resultados que no se condicen con los resultados esperados por lógica, luego la elección de signo para la rotación global propuesta en el modelo de torques promedio que es implementado es acertada.

La figura 4.18 muestra la distribución conjunta de los ruidos gaussianos que emulan los torques fluctuantes. La inexistencia de una dirección privilegiada, es decir, dado el comportamiento isotrópico se tienen ruidos gaussianos centrados en cero no correlacionados.

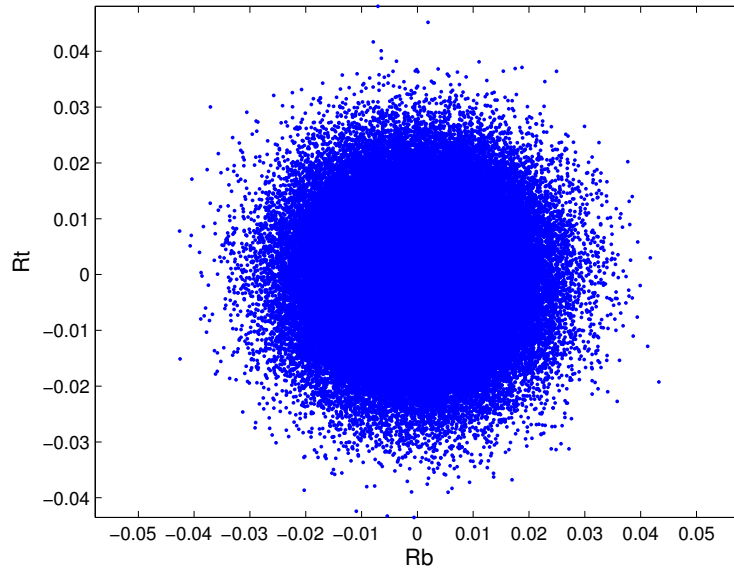


Figura 4.18: Relación conjunta de ruidos aplicados

4.7. Diseño en Eagle

La figura 4.19 muestra el diseño a ser impreso en la placa de fibra de vidrio con ambas caras cubiertas por una delgada lámina de cobre. En esta se observan las rutas organizadas por colores que indican en qué lado de la placa se encuentran. rojo indica rutas en la cara superior y azul la cara inferior. En rojo principalmente se encuentran las alimentaciones, salvo excepciones en señales que no puedan ser ruteadas en la cara inferior. Esta notación es de gran ayuda al momento de soldar los componentes, ya que la gran mayoría de las rutas de señales se encuentran en la cara inferior, la cual es de menor dificultad que la superior al momento de utilizar el cautín de precisión, dado que en esta cara no hay componentes.

Además se tienen los conectores de alimentación de 3 pines y dos conectores de

10 pines cada uno con la misma separación de que el circuito integrado TL074. Uno de ellos utiliza casi por completo el conector. El conector inferior izquierdo en la figura 4.19 se utiliza para conectar la placa que procesa la función $\gamma(\theta)$ con la placa de integración. El otro conector de 10 pines, sólo posee dos conexiones de señal más la tierra en medio de ambas. La decisión de utilizar los 10 pines y no sólo tres mejora la estabilidad mecánica de la placa que va a ser insertada. Este conector está reservado para el filtro utilizado para reducir el ancho de banda de los ruidos de entrada.

Debido a la complejidad del enrutado de ciertas partes, se hace necesario pasar de un lado de la placa hacia el otro, esto se hace mediante vías del mismo grosor que las rutas. El ancho de todas las rutas es de 0.032 pulgadas. Las vías forman un puente entre ambas caras siendo lo primero que se realiza en el proceso de soldadura.

Los componentes circulares son los multiplicadores de precisión AD534. Los dos amplificadores operacionales TL074 de la izquierda, parte superior y media, se encargan de entregar las tensiones constantes que los modelos necesitan, las que se encuentran determinadas mediante potenciómetros de 50 k Ω . La referencia de voltaje es determinada por un diodo zener LM336Z de 5V, situado a un costado del conector de alimentación. El resto del circuito se encarga de la integración de las ecuaciones del sistema. Los potenciómetros de 50 k Ω se encuentran conectados en paralelo entre tierra y la salida del diodo LM336Z. Este no necesita disipador ya que suministra a cada potenciómetro sólo 0,1mA, resultando una corriente total de salida de 0,7mA, muy por debajo del límite de este componente, que es de 10mA en corriente directa y 15mA en inversa. Los círculos de las esquinas son de utilidad para fijar la placa en la caja metálica que contiene al circuito completo.

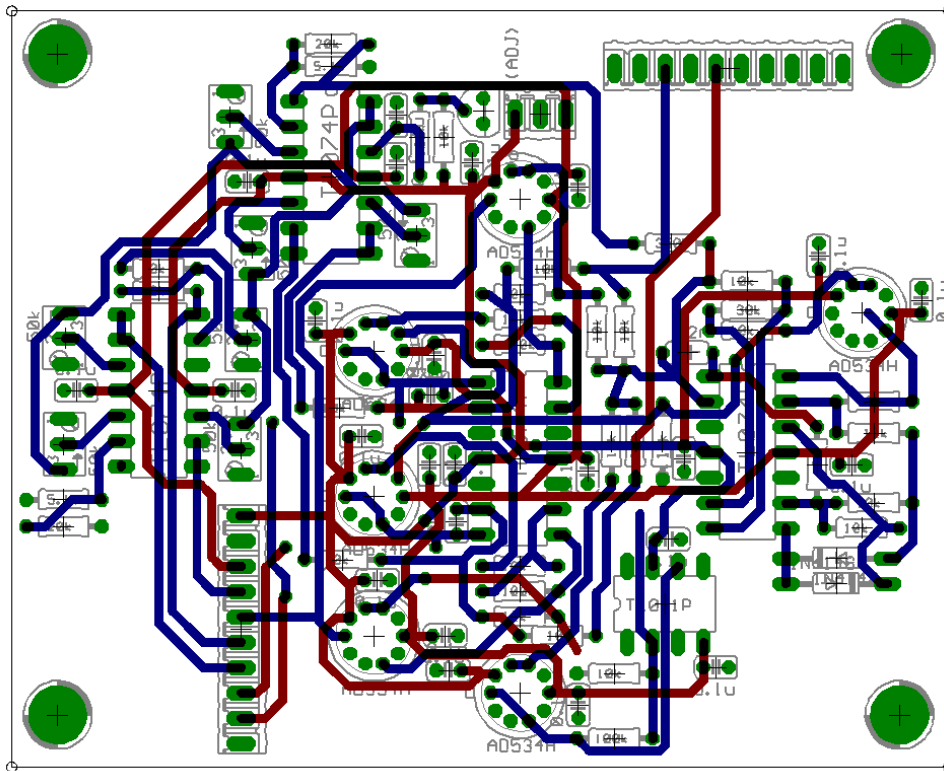


Figura 4.19: Diseño de rutas de señales en Eagle

El proceso de diseño no termina ahí, luego del diseño se determina una imagen con las rutas aisladas del resto de la placa. ¿Por qué así?, por la razón del método que emplea la máquina ruteadora marca Bungard, modelo CCD.

La placa, sobre la cual será impreso el circuito, define el plano de tierra. Este método aísla las pistas de la tierra formando las rutas de transmisión de señal, y conservando el resto del cobre, que actúa como plano de tierra. En la figura 4.20, los trazos negros, que representan el cobre que se retira, rodean a las pistas que transmiten señales y tensiones. El resto, en blanco, es el cobre que constituye el plano de tierra.

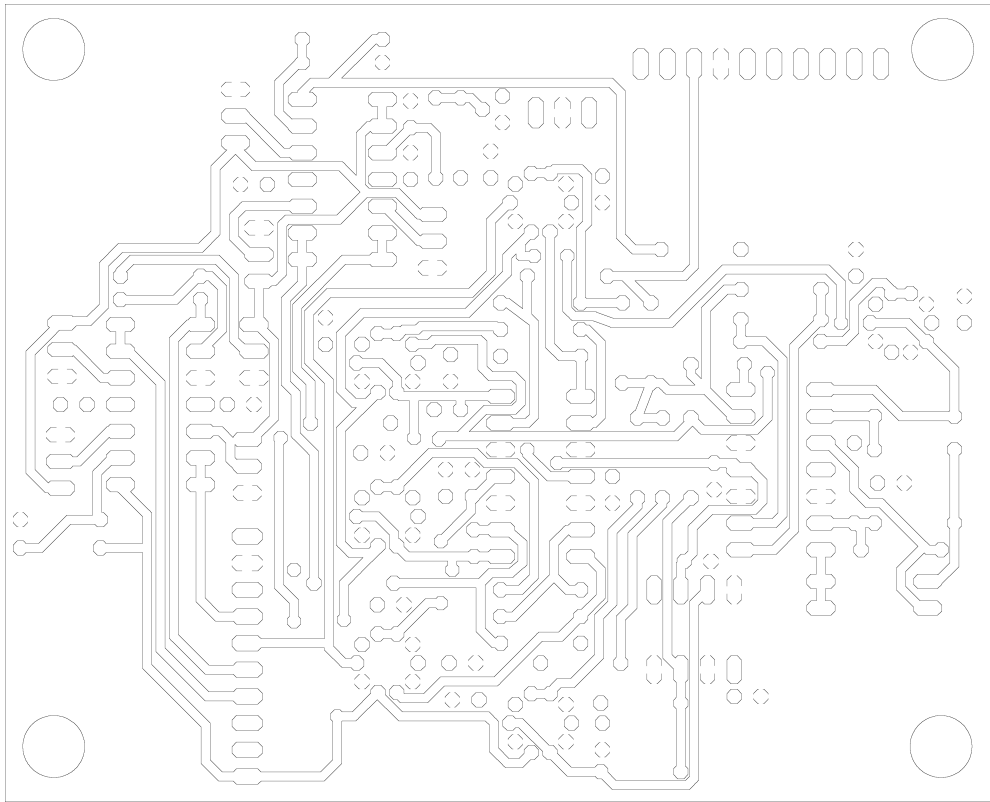


Figura 4.20: Imagen utilizada por la máquina ruteadora para aislar el cobre de la placa.

Esta imagen fue obtenida mediante Matlab utilizando la función *wbperim*. Dicha función tiene la posibilidad de escoger de manera indirecta el grosor de estas líneas, ya que su algoritmo no se encuentra limitado al cambio en la derivada de los primeros vecinos en términos de píxeles, sino que tiene la opción de considerar la preferencia del usuario. Esta imagen es construida a partir del negativo de la correspondiente cara de la placa, la cual contiene sólo las rutas en azul de la imagen anterior.

El negativo entregado por Eagle no posee los pines conectados a tierra, como se muestra en la imagen 4.21, por lo que fue necesaria la edición de la imagen

preliminar. Se ubican estos conectores a tierra uno por uno, siendo un problema el aumento en la probabilidad de falla. Eso se soluciona contrastando la imagen de salida del circuito completo, la imagen con las rutas en color y las conexiones a tierra conectadas con las líneas amarillas que utiliza Eagle para indicar *airwires*. A partir de ella se determina una cara, y la otra por comparación con su opuesta, ya que sólo se determinan los conectores que serán tierra. En estricto rigor siempre se está comparando, aunque cualquiera de las etapas se haya realizado con gran antelación.

La colocación de los componentes que vienen en cápsulas rectangulares no presenta problemas, ya que el software define una rejilla por defecto de 0.05 pulgadas. Si fuese el caso, se puede ubicar una mayor cantidad de rutas en un determinado lugar dividiendo la grilla en factores de 2.

El diseño que posea rutas demasiado juntas puede resultar un problema en cuanto a la definición de las rutas en sí, ya que por las líneas demarcadas, una fresa de 0,6mm de ancho quita el metal cuando copia la figura 4.20 en la superficie de cobre, pudiendo resultar en rutas más delgadas o bien en dejar residuos de cobre delgados que pueden producir cortocircuitos con el plano de tierra.

4.7.1. Imágenes de circuitos impresos

Se muestran los diseños impresos y las correspondientes placas terminadas en las figuras 4.23 - 4.26. La superficie sobre la cual se encuentran es la tapa de la caja metálica que los alberga, lo cual actúa como referencia de longitudes. Dicha tapa tiene las dimensiones 114mm x 89mm x 54mm.

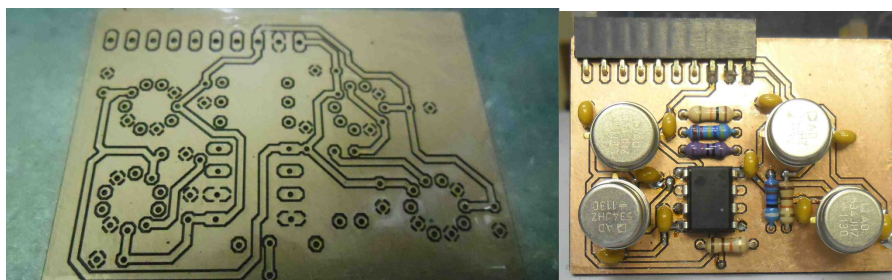


Figura 4.23: Módulo para el cálculo de gama.

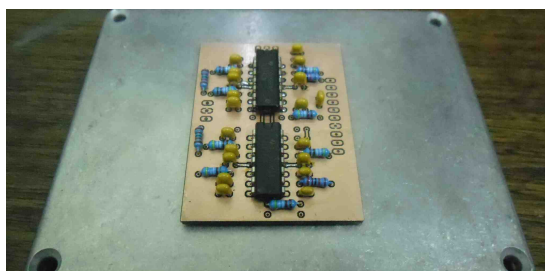


Figura 4.24: Filtro para las señales de torque turbulento.

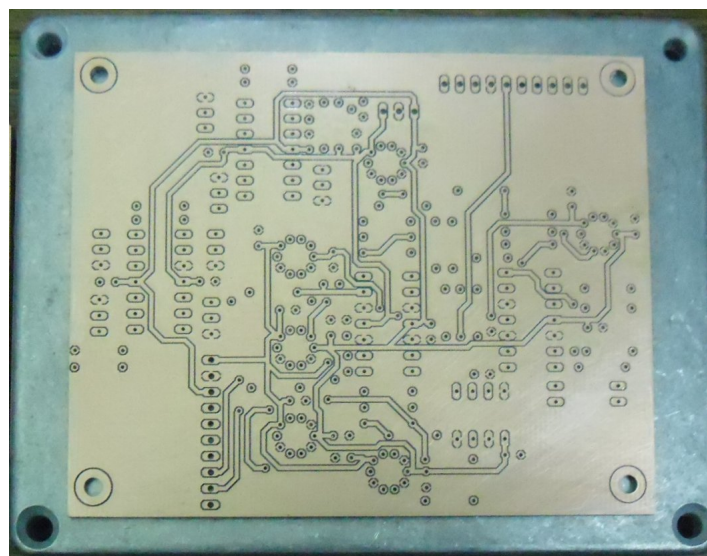


Figura 4.25: Placa impresa del circuito integrador.

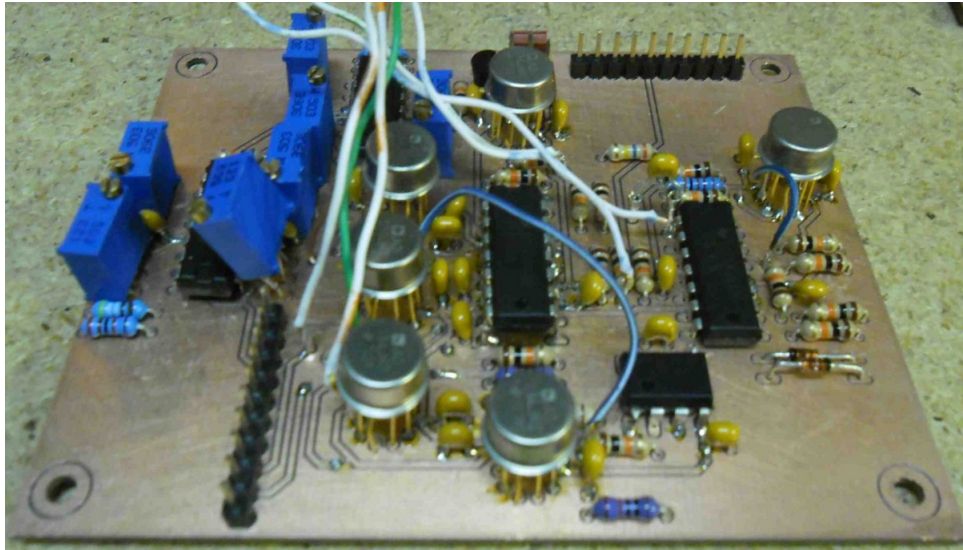


Figura 4.26: Circuito integrador y sus componentes.

Los cables se encuentran conectados a las señales con motivo de verificar su correcto funcionamiento. Luego del proceso de soldado comienza la verificación del funcionamiento por tramos. El potenciómetro suelto, que se observa en la figura 4.26, constituye una de las intervenciones luego del primer proceso de verificación al no funcionar como debió ser. Las tensiones ajustadas mediante estos 7 potenciómetros finalmente tienen el valor esperado.

4.8. Adquisición de Datos

Esta etapa se encuentra pendiente, debido principalmente a que luego de soldar los componentes, gran parte del tiempo fue destinado a verificar el correcto funcionamiento de las partes periféricas a la integración en sí, por ejemplo, la corrección de fallas en la placa de circuito impreso, la determinación de las señales constantes reguladas por potenciómetros y un inesperado malfuncionamiento de los multiplicadores AD534. Actualmente se está trabajando en resolver este problema.

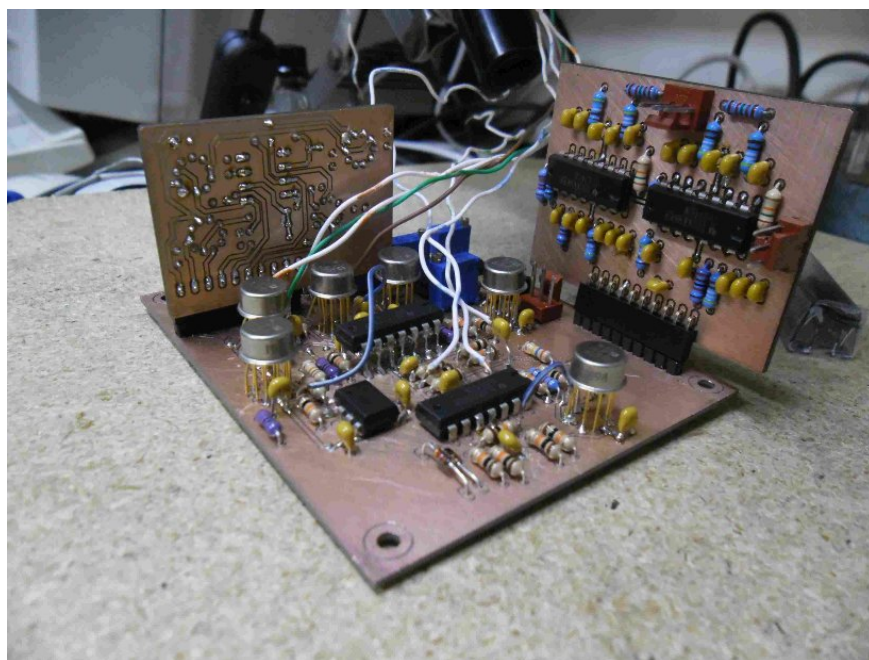


Figura 4.27: Circuito Completo

Conclusión

- Se ha elaborado un modelo dinámico basado en datos experimentales de valores medios de torques de acoplamiento entre los agitadores de un montaje para la producción de fluidos turbulentos de von Kármán. Para ello se muestra el proceso de evolución en base a un primer modelo de interacción pasando de basarse en la velocidad angular relativa al disco a un supuesto torque relativo, no definido a partir de primeros principios si no que como una variación del primer modelo propuesto, entre rotación global y la velocidad angular del disco.
- Se ha diseñado un circuito electrónico que realiza las ecuaciones dinámicas del modelo.
- En las simulaciones del circuito se obtienen resultados similares a los obtenidos en montajes para agua y aire.
- Se han adquirido capacidades en cuanto a diseño, fabricación y soldadura de circuitos impresos de precisión.

Apéndice A

Estadística en aire

La figura A.1 muestra la función densidad de probabilidad para las fluctuaciones de velocidad angular de uno de los discos del montaje diseñado para funcionar con aire. La asimetría de la PDF en este caso contrasta con la que se obtiene cuando el fluido utilizado es agua, la cual resulta ser casi gaussiana. Se espera que la simulación mediante el circuito electrónico contribuya a dilucidar el origen de la discrepancia entre estos dos resultados experimentales.

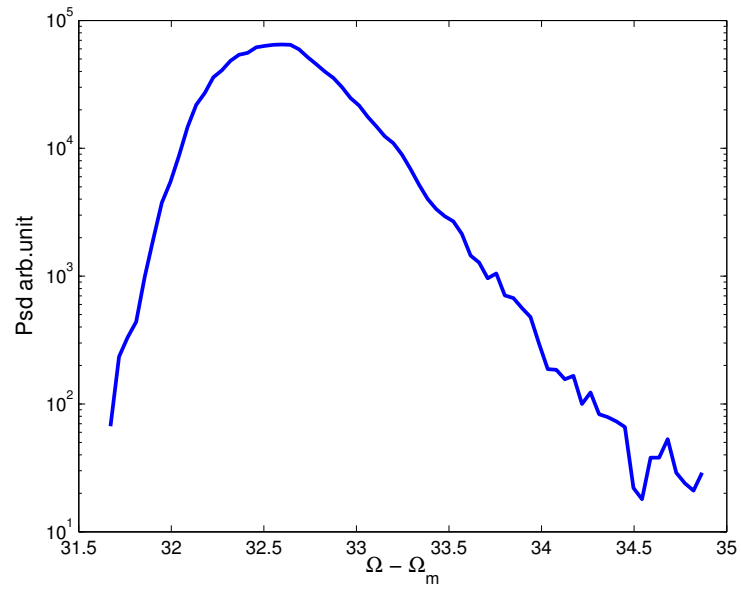


Figura A.1: PDF en Aire

Apéndice B

Ruidos en Multisim

La aplicación lvm, Labview Measurement file, consta de la siguiente información de cabecera

```
LabVIEW Measurement
Writer_Version 0.92
Reader_Version 1
Separator Tab
Multi_Headings Yes
X_Columns Multi
Time_Pref Relative
Description Generated from Multisim
Date 2011/04/04
Time 19:27:12
***End_of_Header***
***Start_Special***
Page_tab_name Oscilloscope
Page title      Noise
***End_Special***
```

```

***Start_Special***
Graph name Untitled
Left Axis LINEAR
Label=voltaje (V)
Top Axis LINEAR
Right Axis LINEAR
Bottom Axis LINEAR
Label=Time (S)
***End_Special***
Channels 1
Samples 10000
Date 2011/04/04
Time 19:27:12
Y_Dimension voltaje
Y_Unit_Label V
X_Dimension Time
X_Unit_Label S
X0 0.000000e+000
Delta_X 1.000100e-04
***End_of_Header***
X_Value_1 Trace_1(Channel A) Comment

```

A continuación se inserta el vector de ruido generado mediante Matlab. Se genera un vector con 30000 puntos, correspondiente a 1s de señal. El formato de este vector debe ser tal que no comience con espacio alguno, en notación $n.nnnnnne \pm nn$, es decir, 8 caracteres, 1 destinado como primer dígito, 6 números decimales más el punto, seguido por el exponente, constituido por el caracter e, el signo, y dos dígitos. Los valores deben estar separado por una tabulación. Con esto se consigue un archivo .lvm válido. No respetar alguna de estas especificaciones resulta en una salida nula.

Bibliografía

- [1] H. Tennekes and J. L. Lumley. A first course in turbulence. The MIT Press. Massachusetts. 1972. 2
- [2] J. H. Titon and O. Cadot. “The statistics of power injected in a closed turbulent flow: constant torque forcing versus constant velocity forcing.” *Phys. Fluids* **15**, 625 (2003). 2, 5
- [3] O. Cadot, O. Le Maître. “The turbulent flow between two rotating stirrers: similarity laws and transitions for the driving torques fluctuations.” *Eur. J. Mech. B/Fluids* **26**, 258 (2007). III, III, 5, 6, 8, 9, 13, 16, 22, 26, 35, 54
- [4] R. Labbé, J.-F. Pinton, S. Fauve. “Study of the von Kármán flow between coaxial corotating disks.” *Phys Fluids* **8**, 914 (1996). III, III, 10, 11, 54
- [5] R. Labbé, G. Bustamante. “Extreme Statistics, Gaussian statistics and superdiffusion in global magnitude fluctuations in turbulence.” *Phys. Fluids* (Submitted) 2, 22, 60
- [6] N. Leprovost, L. Marié, and B. Dubrulle. “A Stochastic model of torques in von Kármán swirling flow.” *Eur. Phys. J. B* **39**, 121(2004).