

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**



**PROBLEMA DE GRAETZ PARA UN FLUIDO VISCOELÁSTICO EN TUBOS DE  
SECCIÓN TRANSVERSAL NO CIRCULAR**

**CRISTIAN GUZMARO BARRERA HINOJOSA**

Profesor Guía: Dr. Mario Letelier Sotomayor

Tesis para optar al Título Profesional  
de Ingeniero Físico

Santiago de Chile

2014



**PROBLEMA DE GRAETZ PARA UN FLUIDO VISCOELÁSTICO EN TUBOS DE  
SECCIÓN TRANSVERSAL NO CIRCULAR**

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial  
de los requisitos exigidos para optar al título profesional de Ingeniero Físico.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO - CHILE

2014

PROBLEMA DE GRAETZ PARA UN FLUIDO VISCOELÁSTICO EN TUBOS DE  
SECCIÓN TRANSVERSAL NO CIRCULAR  
CRISTIAN GUZMARO BARRERA HINOJOSA

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Mario Letelier Sotomayor, del Departamento de Ingeniería Mecánica y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora del candidato.

Dr. Luis Eugenio Hamm

\_\_\_\_\_

Dr. Raúl Labbé Morales

\_\_\_\_\_

M.S. César Rosas Zumelzu

\_\_\_\_\_

Dr. Luis Gaete Garretón

\_\_\_\_\_

*Profesor Patrocinante*

Dr. Mario Letelier S.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Dr. Yolanda Vargas  
*Directora*

*Profesor Guía*

© **Cristian Guzmaro Barrera Hinojosa**

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

# Dedicatoria

A mis padres...

*"He sospechado alguna vez que la única cosa sin misterio es la felicidad, porque se justifica por sí misma."*

- Jorge Luis Borges

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco de corazón a mis padres, Cristina Hinojosa y Guzmano Barrera, por su amor incondicional, así como también a toda la familia, por su constante confianza. Gracias a mi compañera de viaje, Yanira Colipí, por su comprensión y jovialidad, y también a mis amigos; especialmente a Nicolás Cabezas, por compartir su tranquilidad en los momentos de caos, a Manuel Navarrete y Claudio Aguilera, por siempre tener una palabra de apoyo, y a mis *senseis* Rodrigo Silva y Sergio Rojas, cuyas habilidades nunca dejaron de sorprenderme. ¡A todos ustedes, muchas gracias!

Le agradezco sinceramente al profesor Mario Letelier por haberme encomendado y guiado en este trabajo, confiando en mis capacidades al abordar cada etapa del proyecto. También me gustaría agradecer a los profesores integrantes de la Comisión Calificadora; Eugenio Hamm, Raúl Labbé y César Rosas, por su amabilidad y genuino interés en el trabajo desarrollado, al profesor Luis Gaete, quien desde el primer momento estuvo dispuesto a patrocinarme, así como también al profesor Roberto Bernal, por su gestión diligente y empática. Por último, no puedo dejar de manifestar mi gratitud al profesor Justo López Sarrión, con quien tuve la fortuna de trabajar y compartir en estos últimos años en el Departamento de Física.

Este trabajo de tesis fue posible gracias a la ayuda financiera provista por FONCEDYT, a través del proyecto 1130346.

# Resumen

El llamado 'Problema de Graetz' describe la forma en la cual se enfría o calienta un fluido circulando por una cañería mantenida a temperatura constante. En el presente trabajo se realiza una extensión de tal problema a un fluido viscoelástico descrito por el modelo de Phan-Thien y Tanner Modificado que circula por un tubo de sección transversal no circular. Estos ingredientes influyen en el desarrollo de flujos secundarios que, aunque puedan ser de intensidad relativamente pequeña, tienen efecto directo en la transferencia de calor entre las paredes del ducto y el fluido en su interior.

Para modelar la sección transversal deformada del tubo se utiliza un llamado 'método de factor de forma', que permite estudiar el fenómeno de forma muy general. Dicho método permite fijar de forma posterior la geometría del ducto, lo que posibilita considerar como casos particulares aquellos de interés, evitando el trabajo de resolver o simular cada geometría individualmente, así como también facilita la comparación entre ellas, lo cual potencia el alcance del estudio. En este sentido, aplicando este método el problema se resuelve para un amplio número de geometrías a la vez.

Por otra parte, para incluir la viscoelasticidad se realiza una expansión perturbativa respecto al número de Weissenberg, con lo cual se recupera la descripción Newtoniana en el caso en que éste tiende a cero.

Debido a la descripción matemática del problema, el cual está gobernado por la ecuación de energía, los campos de temperatura resultan ser expansiones sobre autofunciones de un cierto operador diferencial con coeficientes dados en términos de integrales de expresiones muy complejas, las cuales no pueden ser calculadas de forma analítica, por lo cual los métodos indicados anteriormente son complementados

con la elaboración de rutinas de cálculo numérico.

Con el fin de ilustrar los resultados destacamos principalmente los ductos con sección transversal circular (como en el problema original), triangular y cuadrada. No obstante, como se mencionó, el método utilizado permite extender los resultados a otras geometrías de forma directa.

# Notación

Para facilitar la lectura y comprensión, a continuación se incluye una breve lista de los términos más recurrentes:

$u$  : velocidad según la dirección radial  $r$ .

$v$  : velocidad según la dirección azimutal  $\theta$ .

$w$  : velocidad según la dirección axial  $z$ .

$\kappa$  : conductividad térmica.

$\alpha$  : difusividad térmica.

$k$  : número de lados (entero).

$\epsilon$  : parámetro de perturbación de borde.

$G$  : factor de forma.

$\psi_{nk}$  : autofunción.

$\lambda_{nk}$  : autovalor.

$T$  : temperatura.

$T_w$  : temperatura en la pared del tubo.

$T_0$  : temperatura de entrada al tubo.

$T_b$  : temperatura media de una sección transversal.

$R$  : Radio del tubo circular.

$\Psi$  : función de corriente.

Pe : Número de Peclet.

Nu : Número de Nusselt.

Wi : Número de Weissenberg.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El problema de Graetz</b>	<b>5</b>
2.1. Formulación del problema . . . . .	5
2.1.1. Objetivo general del presente trabajo . . . . .	6
2.2. Análisis del problema para un flujo Newtoniano en un ducto de sección transversal circular . . . . .	6
2.2.1. La ecuación de Energía . . . . .	6
2.2.2. Campo de velocidades: Flujo de Poiseuille . . . . .	7
2.2.3. Adimensionalización de variables . . . . .	9
2.2.4. Determinación del campo de temperaturas . . . . .	11
2.2.5. Isotermas y Número de Nusselt . . . . .	15
<b>3. Dinámica de un fluido en un ducto de sección no circular</b>	<b>19</b>
3.1. Consideraciones Generales . . . . .	19
3.2. Fluido Newtoniano en un ducto de sección no circular . . . . .	20
3.3. Método de Factor de Forma . . . . .	22
3.4. Modelado de cantidades Físicas utilizando el factor de forma . . . . .	26
3.5. Fluido no Newtoniano: Modelo de Phan-Thien y Tanner Modificado . . . . .	27
3.6. Determinación del campo de velocidades . . . . .	30
3.6.1. Criterio para la Existencia de Flujos Secundarios . . . . .	32
3.6.2. Esquema de Solución . . . . .	32
3.6.3. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(Wi^0)$ . . . . .	34
3.6.4. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(Wi^1)$ . . . . .	35

3.6.5. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(Wi^2)$ . . . . .	37
3.6.6. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(Wi^3)$ . . . . .	39
<b>4. Problema de Graetz no circular para un fluido viscoelástico</b>	<b>45</b>
4.1. Esquema de solución . . . . .	46
4.2. Temperatura a orden $\mathcal{O}(Wi^0)$ . . . . .	48
4.3. Temperatura a orden $\mathcal{O}(Wi^1)$ . . . . .	53
4.4. Temperatura a orden $\mathcal{O}(Wi^2)$ . . . . .	55
4.5. Temperatura a orden $\mathcal{O}(Wi^3)$ . . . . .	57
<b>5. Gráfico de Curvas Isovelocidades e Isotermas</b>	<b>61</b>
5.1. Isovelocidades . . . . .	61
5.1.1. Geometría de ducto circular ( $k = 0$ ) . . . . .	62
5.1.2. Geometría de ducto triangular ( $k = 3$ ) . . . . .	63
5.1.3. Geometría de ducto cuadrado ( $k = 4$ ) . . . . .	65
5.2. Isotermas . . . . .	67
5.2.1. Geometría de ducto circular ( $k = 0$ ) . . . . .	68
5.2.2. Geometría de ducto triangular ( $k = 3$ ) . . . . .	70
5.2.3. Geometría de ducto cuadrado ( $k = 4$ ) . . . . .	72
<b>6. Discusión de Resultados</b>	<b>75</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>Apéndice A.</b>	<b>79</b>
A.1. El número de Peclet . . . . .	79
A.2. El número de Nusselt . . . . .	80
<b>Apéndice B.</b>	<b>81</b>
B.1. Ecuación Hipergeométrica confluyente . . . . .	81
B.2. Problema de Sturm-Liouville . . . . .	82
B.3. Método de Expansión en Autofunciones . . . . .	83
<b>Apéndice C. Programa Utilizado</b>	<b>87</b>

# Índice de figuras

1.1. Secciones transversales de distintos tipos de microcanales. . . . .	2
2.1. Esquema del problema de Graetz. . . . .	5
2.2. Flujo de Hagen-Poiseuille en un ducto de sección circular. . . . .	8
2.3. Perfiles radiales de temperatura para distintos cortes transversales. . .	15
2.4. Isotermas correspondientes a $T$ entre los valores 0.9 y 0.1, con incrementos de 0.1 (desde fuera hacia el centro), mientras el tubo es mantenido a $T_w = 1$ . Se observa cómo las isotermas se desplazan hacia el centro, indicando que el calor se ha transferido. . . . .	16
2.5. Número de Nusselt asintótico para el problema de Graetz original. . .	18
3.1. Ducto con sección transversal no circular. . . . .	20
3.2. Velocidad axial $w$ para un cierto corte longitudinal del tubo en un ángulo $\theta = \theta_0$ . . . . .	21
3.3. Secuencia del colapso de la geometría triangular ( $k = 3$ ) hacia la geometría circular mediante la disminución del parámetro $\epsilon$ . Los valores correspondientes son (a) $\epsilon = 0,389$ ; (b) $\epsilon = 0,33$ ; (c) $\epsilon = 0,15$ y (d) $\epsilon = 0,01$ . . . . .	23
3.4. Figuras (a)-(c) han sido generadas con el factor de forma de la ecuación (3.8), mientras que para (d)-(f) se ha utilizado un segundo término extra. . . . .	24
3.5. Dependencia del valor crítico del parámetro de forma respecto a la geometría. El número $k$ identifica el número de lados del polígono regular al cual se aproxima la sección. . . . .	25
5.1. Isovelocidades para caso Newtoniano (a) y caso viscoelástico (b). . . .	62

5.2. Perfil radial del flujo axial $w$ . . . . .	62
5.3. Isovelocidades para caso Newtoniano (a) y caso viscoelástico (b). . . . .	63
5.4. Perfil radial del flujo axial $w$ . . . . .	63
5.5. Flujo secundario radial $u$ . . . . .	64
5.6. Perfil radial de $u$ a lo largo del eje de simetría. . . . .	64
5.7. Isovelocidades para caso Newtoniano (a) y caso viscoelástico (b). . . . .	65
5.8. Perfil radial del flujo axial $w$ . . . . .	65
5.9. Flujo secundario radial. . . . .	66
5.10. Perfiles radiales de $u$ a lo largo de distintos ejes que pasan por el centro. . . . .	66
5.11. Isotermas para el corte $z = 0,05$ . . . . .	68
5.12. Isotermas para el corte $z = 0,2$ . . . . .	68
5.13. Temperaturas para distintos valores de la coordenada axial $z$ . . . . .	69
5.14. Isotermas para el corte $z = 0,05$ . . . . .	70
5.15. Isotermas para el corte $z = 0,2$ . . . . .	70
5.16. Temperaturas para distintos valores de la coordenada axial $z$ . . . . .	71
5.17. Isotermas para el corte $z = 0,05$ . . . . .	72
5.18. Isotermas para el corte $z = 0,2$ . . . . .	72
5.19. Temperaturas sobre una eje que conecta dos aristas opuestas. . . . .	73
5.20. Temperaturas sobre un eje que conecta dos vértices opuestos. . . . .	73
5.21. (a): $T_b$ en distintas secciones. (b): $T_b$ normalizadas respecto al valor de la geometría circular. . . . .	74

# Índice de cuadros

2.1. Listado con los primeros autovalores asociados a $\psi_n$ . . . . .	13
2.2. Primeros diez coeficientes de la expansión en serie solución del problema de Graetz. . . . .	15
3.1. Valores críticos $\epsilon_c$ como función del parámetro $k$ . Estos corresponden al valor máximo por sobre el cual la curva del contorno descrito por el factor de forma deja de ser cerrada. . . . .	26
3.2. Esquema donde se ilustra la mezcla de ambos métodos perturbativos; la perturbación de borde controlado por $\epsilon$ y viscoelasticidad controlada por $Wi$ . . . . .	34
4.1. Primeros 10 autovalores del problema de Graetz para un ducto con geometría circular, triangular y cuadrada . . . . .	51
5.1. Valores asintóticos de $Nu$ para el caso triangular. . . . .	74



# Capítulo 1

## Introducción

En diversos sistemas de tipo industriales y biológicos pueden encontrarse fluidos que circulan por conductos de geometría compleja, cuyas secciones transversales son de formas poco convencionales. Casos típicos en los cuales se puede observar tal escenario es en el flujo de metales fundidos o plásticos a través de matrices y moldes. A pesar de que tal complejidad puede estar presente por distintos factores, esta es en muchos casos inherente al proceso de fabricación de los mismos tubos. Esto último ocurre, por ejemplo, en el campo de la Microfluídica, donde las técnicas actuales de manufacturación de microcanales producen típicamente capilares con secciones transversales de tipo no circular [1], como se muestra en la figura 1.1. En consecuencia, para poder dar una descripción física adecuada en tales escenarios, se debe sustituir el clásico tubo cilíndrico por un modelo más general, lo que implica nuevos estudios que den cuenta del impacto de la geometría del ducto sobre el comportamiento del flujo circulante.

Un área donde el abandono de la geometría circular (de la sección transversal del tubo) resulta particularmente interesante es en el de transporte y transferencia de calor, donde se observa que ductos con geometrías distintas a la usual modifican el intercambio de calor entre un fluido en su interior, y el exterior.

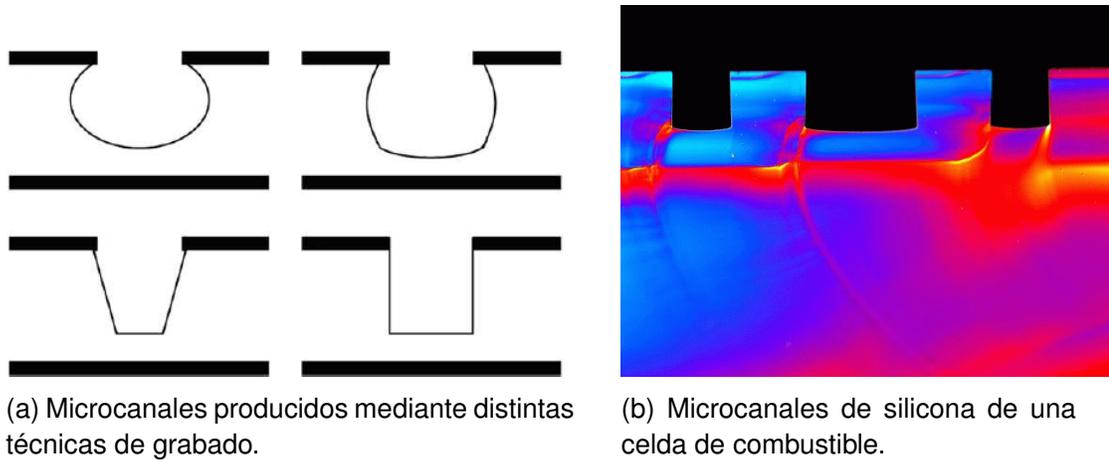


Figura 1.1: Secciones transversales de distintos tipos de microcanales.

El primer estudio del fenómeno de transferencia de calor en un flujo a lo largo de una cañería fue realizado para un fluido Newtoniano a través de un ducto cilíndrico mantenido a temperatura fija, y se conoce ampliamente como problema de Graetz [2]. Desde su formulación hace ya más de 130 años se han estudiado distintas modificaciones y extensiones de dicho problema para dar cuenta de fenómenos cada vez más complejos, en especial modificando la geometría del ducto y/o incluyendo flujos de naturaleza no Newtoniana.

El estudio del problema de Graetz en tubos de sección transversal no circular ha sido llevado a cabo para distintos tipos de geometrías, tanto de forma teórica [3] como experimental [4]. Estudios de flujos no Newtonianos se han realizado particularmente para el caso circular y flujo a través de un canal, y métodos numéricos (principalmente de elementos finitos) han sido aplicados para el estudio en otras geometrías más complejas [5]. En general estos análisis han mostrado que, al deformar la geometría circular se favorece la transferencia de calor entre el fluido y el ducto, por lo cual un entendimiento acabado de dicho fenómeno abre la posibilidad de diseñar y construir intercambiadores de calor más eficientes, optimizando procesos típicos de calefacción y refrigeración ampliamente utilizados en diversos escenarios, así como también puede mejorar el desempeño de amortiguadores hidráulicos de uso pesado, como por ejemplo, amortiguadores sísmicos.

Particularmente, se ha observado que fluidos no Newtonianos que circulan por tubos de geometría no circular desarrollan movimientos no rectilíneos, es decir, aparecen componentes extras en su campo de velocidades, las que se conocen como "flujos secundarios". Históricamente, Ericksen [6] fue el primero en reconocer la existencia de flujos secundarios de fluidos no lineales en ductos rectos no circulares, mientras que Green y Rivlin [7], en conjunto con Langlois [8] son reconocidos por los primeros cálculos analíticos prediciendo tales flujos. Estos autores mostraron que el cociente de la función corriente  $\Psi$  del flujo secundario y la velocidad del flujo longitudinal  $w$  (principal) es proporcional a un cierto número adimensional  $Wi$ , conocido como número de Weissenberg, elevado a la tercera potencia.

$$\frac{\Psi}{w} = \mathcal{O}(Wi^3) \quad (1.1)$$

La misma conclusión fue también obtenida independiente por Pipkin [9], quien mediante argumentos de análisis dimensional llegó a las mismas conclusiones. Como resultado de la ecuación (1.1), si el número de Weissenberg es muy pequeño, entonces el flujo secundario asociado al plano perpendicular será muy débil, lo que llevó a pensar que su rol era insignificante en el flujo de soluciones diluidas en procesos industriales. Sin embargo, ha sido notado que estos en efecto desempeñan un papel importante en el mejoramiento de la transferencia de calor en un flujo no isotérmico de fluidos viscoelásticos en tubos no circulares [12].

Vale destacar que el presente trabajo de tesis recoge y continúa algunos resultados que fueron obtenidos previamente por los alumnos M. Olguín [10] (2000) y Carlos Medel [11] (2003) en sus tesis de para optar al título de Ingeniero Civil Mecánico, así como también del trabajo de tesis del Ingeniero Matemático Fernando Zapata [12] (2011), todos ex-alumnos de esta misma universidad.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma: en el segundo capítulo se revisa en detalle el problema de Graetz original (flujo Newtoniano a través de un tubo cilíndrico), el cual es la base para el desarrollo del presente estudio. En el tercer capítulo se estudia el movimiento de un fluido en un ducto de sección transversal no circular, con lo cual se introduce el concepto de 'factor de forma', que ayuda a mo-

delar dicha sección del tubo de una forma general, así como también los campos de velocidad y temperatura asociados a tal geometría. Se presentan las relaciones constitutivas del modelo de Phan-Thien y Tanner Modificado (MPTT), y se resuelven perturbativamente las ecuaciones de Navier-Stokes para encontrar su campo de velocidades. El cuarto capítulo muestra el cálculo del campo de temperaturas del flujo en el ducto de sección no circular utilizando como campo convectivo el calculado en el capítulo previo. En el quinto capítulo se muestran las curvas de isovelocidad e isotérmicas para secciones transversales de forma circular, triangular y cuadrada según lo obtenido, y en el sexto se analizan tales resultados. Finalmente, en el capítulo siete se incluyen conclusiones en base al estudio realizado.

# Capítulo 2

## El problema de Graetz

### 2.1. Formulación del problema

El problema de Graetz consiste en determinar la distribución de temperaturas en un flujo tubular estacionario, donde la temperatura de la pared del ducto tiene un cambio brusco en una cierta sección transversal definida, como muestra la figura 2.1. Debido a este gradiente de temperatura, a partir de dicho punto tiene lugar una transferencia de calor desde el fluido hacia el exterior, o vice-versa. El objetivo del problema consiste entonces en determinar distribución de temperaturas en el fluido, y estudiar tal transferencia de calor.

El problema por lo tanto constituye un modelo simple para, por ejemplo, intercambiadores de calor, por lo cual su estudio tiene relevancia en diversos ámbitos.

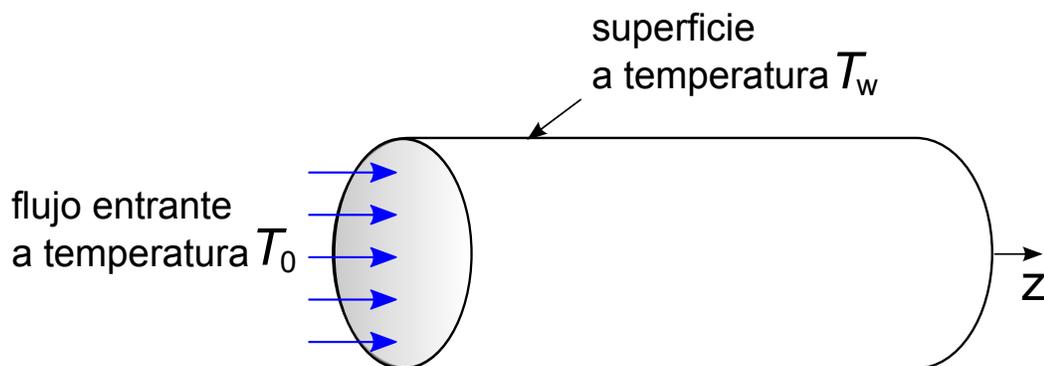


Figura 2.1: Esquema del problema de Graetz.

### 2.1.1. Objetivo general del presente trabajo

El objetivo del presente trabajo es realizar una extensión del problema original a un escenario más general, donde:

- La sección transversal del tubo tiene una forma muy general (arbitraria).
- Se incorpora un fluido viscoelástico.

Como se mencionó en la introducción, la motivación de ambos factores es que en conjunto contribuyen al desarrollo de flujos secundarios que tienen efecto directo la transferencia de calor debido a su aporte a la convección.

A continuación se analiza en detalle el problema de Graetz original, es decir, para un flujo Newtoniano en una tubería cilíndrica, el cual constituye la base del presente estudio.

## 2.2. Análisis del problema para un flujo Newtoniano en un ducto de sección transversal circular

### 2.2.1. La ecuación de Energía

Consideramos el ducto ilustrado en la figura 2.1. El flujo proviene desde una cierta región del tubo, considerada como  $z < 0$ , en el cual se encuentra en equilibrio térmico con el ducto a una temperatura  $T_0$ . Al penetrar en cierta sección transversal del ducto, digamos  $z = 0$ , la temperatura de las paredes de este último cambia a un valor  $T_w \neq T_0$ , con  $T_w$  constante en toda la región  $z > 0$  (el tubo se considera de extensión infinita). Producto de la diferencia entre las temperaturas del fluido y del ducto se genera una transferencia de calor hacia el flujo o desde este, dependiendo si  $T_w > T_0$  ó  $T_w < T_0$ , respectivamente.

El fluido que circula por el ducto en este caso es Newtoniano e incompresible, con las siguientes propiedades físicas constantes; viscosidad dinámica  $\mu$ , conductividad

térmica  $\kappa$  y capacidad calórica a presión constante  $C_p$  (además de incompresible).

La ecuación que gobierna la distribución de temperaturas dentro del fluido es la llamada Ecuación de Energía [14], la cual para un fluido Newtoniano con parámetros constantes puede ser escrita como:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.1)$$

donde hemos definido la difusividad térmica del fluido como  $\alpha \equiv \kappa / (\rho C_p)$ . Podemos interpretar esta ecuación como una generalización de la ecuación de calor estándar bajo el remplazo  $\partial_t \rightarrow D_t$ , donde la derivada material se define como:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (2.2)$$

siendo  $\vec{v}$  es el campo de velocidades del fluido. De esta manera el problema descrito es una extensión de la ecuación de calor, donde sólo se describe la conducción a través de un material, a un escenario más general, donde existe también transporte de calor debido a la convección producida por el campo de velocidades presente.

### 2.2.2. Campo de velocidades: Flujo de Poiseuille

Para resolver la ecuación de energía (2.1) incluyendo el término convectivo es claro que debemos conocer previamente la dinámica del fluido, lo cual supone resolver las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \sigma \quad (2.3)$$

con las condiciones de contorno adecuadas. En este caso, por tratarse de un flujo Newtoniano, el tensor de esfuerzos se descompone de la forma  $\nabla \sigma = -\nabla p \mathbb{I} + \mu \nabla^2 \vec{v}$ , donde  $p$  es la presión hidrostática. En el presente escenario se busca una solución que cumpla con las siguientes características:

1. El flujo es estacionario, esto es:  $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ .

2. Las componentes de flujo radial y angular son nulas:  $\vec{v} = (0, 0, v_z)$ , es decir, se trata de un régimen laminar.
3. El flujo está completamente desarrollado, es decir,  $\partial v_z / \partial z = 0$  (equivalente a tener un ducto de longitud infinita, por lo cual no existe dependencia en la coordenada  $z$ ).

Tomando lo anterior en cuenta, la única componente relevante de las ecuaciones de Navier-Stokes es la según  $z$ , que tiene la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Dado que  $p = p(z)$ , integrando dos veces respecto a  $r$  se obtiene el llamado flujo de Hagen-Poiseuille:

$$\begin{aligned} v_z(r) &= v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), & \text{con } v_0 &= -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \\ v_r &= v_\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde se ha impuesto la condición física de que  $\vec{v}$  debe ser finito en  $r = 0$ , y la condición de borde de no deslizamiento  $\vec{v}(r = R) = 0$ . Este perfil de velocidad se muestra en la figura (2.2.2) y corresponde a una parábola respecto a la coordenada radial  $r$ , con un valor máximo  $v_0$  en  $r = 0$ , correspondiente al centro del ducto.

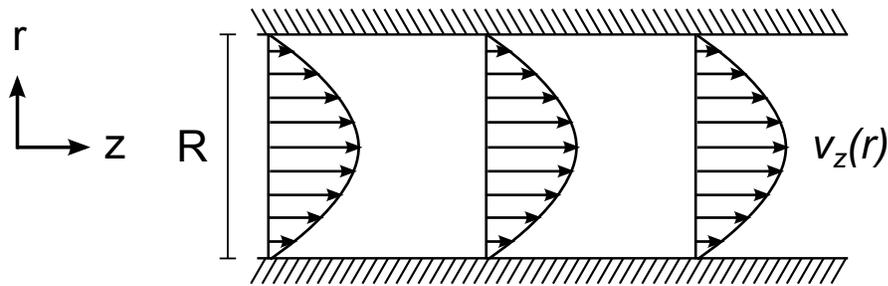


Figura 2.2: Flujo de Hagen-Poiseuille en un ducto de sección circular.

Por otra parte, dado que se trata de un flujo en régimen estacionario la temperatura  $T$  no depende del tiempo. Además, dada la simetría axial del problema, dicha distribución tampoco depende de la coordenada angular  $\theta$ . De esta forma, utilizando un sistema de coordenadas cilíndricas, la ecuación de energía (2.1) tiene la forma:

$$v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (2.6)$$

Para resolver esta ecuación, es necesario tener en cuenta las condiciones de borde térmicas del problema, las cuales se listan a continuación:

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_0 && \text{temperatura de entrada del fluido.} \\ T(R, z) &= T_w && \text{temperatura de la superficie.} \\ T(0, z) &< \infty && \text{temperatura es finita.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Es posible ver que si intentamos resolver directamente la ecuación anterior por el método de separación de variables no tendremos éxito, debido a que el término con segunda derivada en la dirección  $z$  nos impedirá obtener una igualdad donde en un lado sólo se escriban funciones de  $r$  y en el otro sólo funciones de  $z$ , como exige dicho método. Una forma de superar este obstáculo es recurrir a la adimensionalización de variables, lo cual permite realizar una aproximación físicamente razonable que posibilita el uso de tal método.

### 2.2.3. Adimensionalización de variables

Como se mencionó anteriormente, es conveniente reescribir la ecuación de energía en términos de variables y funciones adimensionales, ya que esto, además de posibilitar la resolución del problema, permite hacer observaciones de la solución de forma más directa, ya que se trabaja con cantidades absolutas.

Pasaremos desde el par de variables cilíndricas  $(r, z)$  a unas nuevas variables  $(x, Z)$  funciones de las anteriores, definidas como:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{r}{R} \\ Z &\equiv \frac{z}{R\text{Pe}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde hemos introducido el Número de Peclet:

$$\text{Pe} \equiv \frac{Rv_0}{\alpha} \quad (2.9)$$

La interpretación de este número se realiza en el apéndice (A.1), donde se muestra que su papel en el transporte de calor es análogo al que el número de Reynolds desempeña en la dinámica del fluido definiendo dos regímenes distintos. Definimos también la función de temperatura adimensional:

$$\bar{T}(x, Z) \equiv \frac{T(x, Z) - T_w}{T_0 - T_w} \quad (2.10)$$

Interpretamos  $\bar{T}(x, Z)$  como la temperatura en un punto relativa a la temperatura del manto  $T_w$ , donde esta diferencia está normalizada respecto a la temperatura de entrada  $T_0$  (en  $z = 0$ ) medida también respecto a  $T_w$ . Reescribiendo la ecuación de energía en términos de la nueva función  $\bar{T}$  y nuevas variables  $(x, Z)$ , la ecuación toma la forma:

$$(1 - x^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2} \quad (2.11)$$

En las nuevas variables las condiciones de borde se escriben simplemente como:

$$\bar{T}(1, Z) = 0 \quad (2.12)$$

$$\bar{T}(x, 0) = 1 \quad (2.13)$$

$$\bar{T}(0, Z) < \infty \quad (2.14)$$

La ecuación (2.11) no puede ser resuelta mediante el método de separación de variables debido a la presencia de la segunda derivada respecto a la coordenada  $z$ . Para superar este obstáculo, el problema se considera en el régimen donde solamente consideramos el término de transporte de axial asociado a conducción, despreciando entonces el término convectivo en la misma dirección. De acuerdo a la interpretación física del número de Peclet, en este escenario  $\text{Pe} \gg 1$ , y por lo tanto:

$$\frac{1}{\text{Pe}^2} \ll 1 \quad (2.15)$$

lo cual anula uno de los términos que incluye el transporte respecto a la coordenada

axial  $Z$ :

$$\frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2} \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Esto último, además de posibilitar el éxito del método de separación de variables, hace compatible el conjunto de condiciones de borde del problema, ya que ahora el sistema es solo de primer orden en la variable  $Z$ , y la única condición de borde asociada es suficiente para definir el problema de forma única. Luego, bajo dicha aproximación, la ecuación se reduce a:

$$(1 - x^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

Ahora es posible utilizar efectivamente el método de separación de variables.

#### 2.2.4. Determinación del campo de temperaturas

De esta manera, buscamos una solución de la forma  $\bar{T} = \psi(x)\phi(Z)$ , con lo cual tenemos que:

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{1}{(1 - x^2)} \frac{1}{\psi x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\psi}{dx} \right) = -\lambda^2 \quad (2.18)$$

Hemos obtenido entonces 2 ecuaciones diferenciales ordinarias independientes para cada variable:

$$\frac{d\phi}{dZ} = -\lambda^2 \phi \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\psi}{dx} \right) = -\lambda^2 (1 - x^2) \psi \quad (2.20)$$

La primera de estas ecuaciones tiene como solución  $\phi(Z) = e^{-\lambda^2 Z}$ . Es posible ver que  $\lambda^2$  necesariamente debe ser positivo, debido a que en caso contrario la temperatura aumentaría exponencialmente según la dirección  $z$ , lo cual no es físicamente razonable. Por otra parte, la ecuación radial puede escribirse como:

$$L\psi(x) = \lambda^2 \rho(x) \psi(x) \quad (2.21)$$

con

$$L = -\frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} \right) \quad \text{operador diferencial autoadjunto.} \quad (2.22)$$

$$\rho(x) = x(1-x^2) \quad \text{función de peso de producto interno.} \quad (2.23)$$

Lo cual junto a las condiciones de borde (2.12) y (2.14) define un problema de Sturm-Liouville para el operador  $L$ , el cual es autoadjunto respecto al producto interno definido como:

$$(f, g)_\rho = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) \rho(x) dx \quad (2.24)$$

Es decir, el problema consiste en encontrar las autofunciones  $\psi(x)$  con autovalores  $\lambda^2$ . Para resolver la ecuación (2.20) buscamos una solución de la forma (método utilizado por [16]):

$$\psi(y) = e^{-y/2} M(y) \quad (2.25)$$

donde definimos la nueva variable independiente como  $y = \lambda x^2$ . Reescribiendo la ecuación se tiene entonces:

$$y \frac{d^2 M}{dy^2} + (1-y) \frac{dM}{dy} + \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} \right) M = 0 \quad (2.26)$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación hypergeométrica confluyente, o ecuación de Kummer

$$x \frac{d^2 M}{dx^2} + (c-x) \frac{dM}{dx} - aM = 0 \quad (2.27)$$

con las identificaciones  $a = \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} \right)$  y  $c = 1$  (para más detalles ver (B.1)). De sus 2 soluciones linealmente independientes, sólo una converge en el centro del tubo  $x = 0$ , denotada por  ${}_1F_1(a, c; x) \equiv M$ . En consecuencia, debido a la condición de borde física (2.14) es posible descartar la solución divergente. Luego, la solución de la parte radial es:

$$\psi(x) = \tilde{a} e^{-x^2/2} M \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda x^2 \right) \quad (2.28)$$

donde  $\tilde{a}$  es una constante. Al aplicar la condición de borde radial (2.12) se obtiene una ecuación trascendental para el parámetro  $\lambda$ :

$$M\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda\right) = 0 \quad (2.29)$$

lo cual se escribe explícitamente como

$$1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) \lambda + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} + 1\right)}{2} \lambda^2 + \dots = 0 \quad (2.30)$$

La ecuación anterior es de orden infinito, y por lo tanto tiene un conjunto infinito de soluciones  $\{\lambda \equiv \lambda_n\}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . En consecuencia, debido a que para cada  $\lambda_n$  existe una función asociada  $M\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_n}{4}, 1, \lambda_n x^2\right)$ , se obtiene también un conjunto infinito de soluciones  $\{M_n\}$  que satisfacen la ecuación diferencial (2.20) correspondiente a la coordenada radial. A continuación se incluyen los primeros 10 autovalores que satisfacen la ecuación trascendental (2.30), obtenidos utilizando la función *FindRoot* dentro de un script del programa Mathematica.

$n$	$\lambda_n$	$\lambda_n^2$
1	2.7044	7.3136
2	6.6790	44.609
3	10.673	113.92
4	14.671	215.24
5	18.670	348.57
6	22,6700	513,92
7	26,6687	711,22
8	30,6683	940,54
9	34,6680	1201,87
10	38,6680	1495,21

Cuadro 2.1: Listado con los primeros autovalores asociados a  $\psi_n$ .

Hemos obtenido entonces un conjunto infinito de soluciones para la parte radial, de la forma:

$$\psi_n(x) = e^{-\lambda_n x^2/2} M_n(\lambda_n x^2) \quad (2.31)$$

Recordando que  $\bar{T}(x, Z) = \psi(x)\phi(Z)$ , la solución general al problema entonces es una expansión de la forma:

$$\bar{T}(x, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 Z} \psi_n(x). \quad (2.32)$$

Los coeficientes  $a_n$  de la expansión se determinan al especificar la condición de borde restante (2.13), correspondiente a fijar la temperatura de entrada,

$$\bar{T}(x, 0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x). \quad (2.33)$$

De esta forma, la condición de entrada exige representar la constante 1 mediante una expansión en series respecto al conjunto de autofunciones  $\psi_n(x)$ . Como es usual, para aislar el coeficiente enésimo de la suma, es necesario utilizar la propiedad de ortogonalidad de las soluciones  $\psi_n(x)$ , esto es:

$$\int_0^1 \psi_n(x) \psi_m(x) x(1-x^2) dx = |\psi_n|^2 \delta_{nm} \quad (2.34)$$

con

$$|\psi_n|^2 = \int_0^1 \psi_n^2(x) x(1-x^2) dx. \quad (2.35)$$

Esta operación da como resultado:

$$a_n = \frac{\int_0^1 \psi_n(x) x(1-x^2) dx}{\int_0^1 \psi_n^2(x) x(1-x^2) dx} \quad (2.36)$$

Lo cual determina unívocamente la solución al problema de Graetz. En general, las integrales que aparecen en la expresión anterior deben calcularse usando integración numérica. A continuación se listan los valores para los primeros diez coeficientes, lo cuales fueron calculados utilizando la función *NIntegrate* del programa Mathematica:

coeficiente	valor numérico
$a_1$	1.4764
$a_2$	-0.8061
$a_3$	0.5887
$a_4$	-0.4758
$a_5$	0.4050
$a_6$	-0.3559
$a_7$	0.3192
$a_8$	-0.2907
$a_9$	0.2679
$a_{10}$	-0.2491

Cuadro 2.2: Primeros diez coeficientes de la expansión en serie solución del problema de Graetz.

### 2.2.5. Isotermas y Número de Nusselt

La figura a continuación muestra la distribución de temperaturas en un corte longitudinal del ducto. Se utilizaron los diez primeros términos de la solución (2.32).

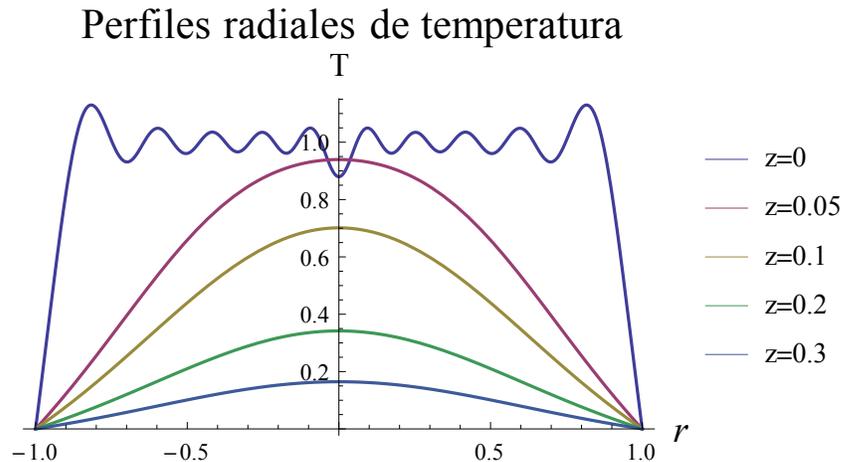
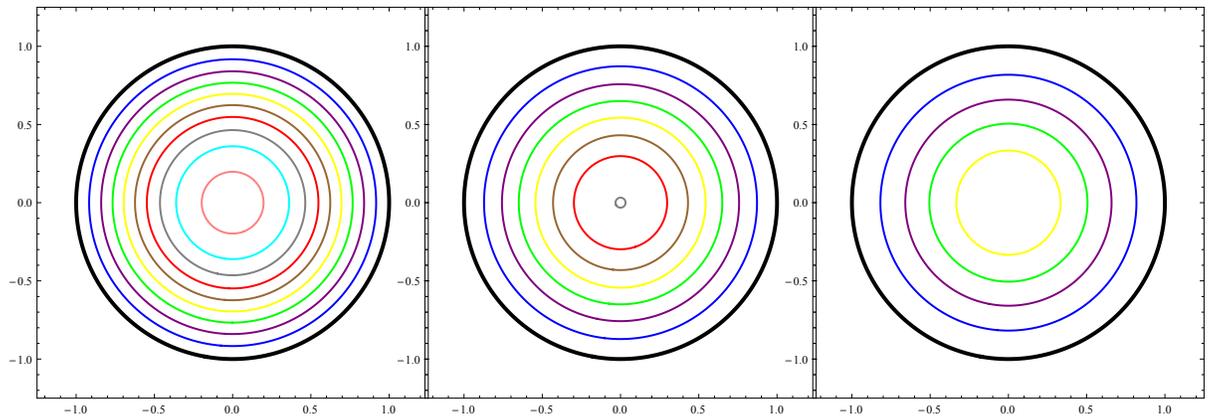


Figura 2.3: Perfiles radiales de temperatura para distintos cortes transversales.

Se observa cómo la transferencia de calor parte por los bordes del ducto, mientras la temperatura central del fluido siempre se mantiene mayor. Vemos que para valores de la coordenada axial  $Z$  cercanos a cero, la isoterma  $T = 1$  no es totalmente vertical,

como fija la condición de borde de entrada. Esto es debido a la lenta convergencia de la solución para valores de  $Z$  extremadamente pequeños. Las exponenciales que aparecen en la expansión en serie producen una rápida convergencia para valores de  $Z$  distintos de cero. Sin embargo, en  $Z = 0$  dichos factores no aparecen, lo cual produce una lenta convergencia a la condición inicial, y se necesita retener un gran número de términos de la serie para reproducirla fielmente. Para los fines de este trabajo, sin embargo, no existe tal necesidad, ya que no estamos particularmente interesados en observar las propiedades cerca de la interfaz donde ocurre el salto en la temperatura, por lo que retener los 10 primeros términos es suficiente.

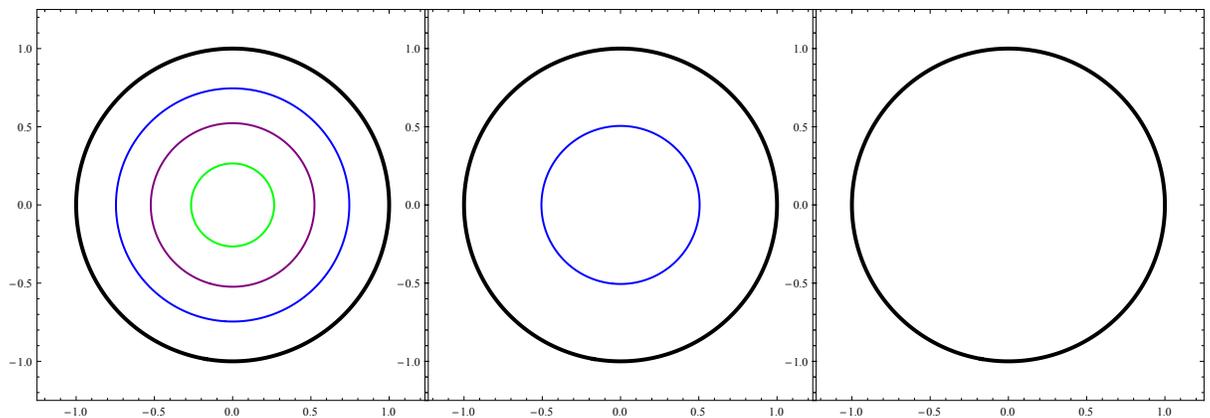
A continuación se muestra la evolución de las isotermas. Cada gráfico representa un corte transversal en un cierto valor de la coordenada axial  $z$ .



(a)  $z = 0,05$

(b)  $z = 0,1$

(c)  $z = 0,15$



(d)  $z = 0,2$

(e)  $z = 0,3$

(f)  $z = 0,4$

Figura 2.4: Isotermas correspondientes a  $T$  entre los valores 0.9 y 0.1, con incrementos de 0.1 (desde fuera hacia el centro), mientras el tubo es mantenido a  $T_w = 1$ . Se observa cómo las isotermas se desplazan hacia el centro, indicando que el calor se ha transferido.

Ya calculada la distribución de temperaturas es posible cuantificar el flujo de calor entre la superficie del ducto y el fluido, en este caso circular dado por:

$$q_w(z) = \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (2.37)$$

Es útil, sin embargo, escribir esto en términos de un coeficiente de transferencia de calor, definido como:

$$h(z) \equiv \frac{q_w(z)}{T_w - T_b} = \kappa \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_{r=R}}{T_w - T_b} \quad (2.38)$$

donde  $T_b(z)$  es la temperatura promedio del fluido en una sección cierta transversal del ducto, que se calcula como:

$$T_b(z) = \frac{\int_0^R 2\pi r v(r) T(r, z) dr}{\int_0^R 2\pi r v(r) dr} \quad (2.39)$$

Es conveniente cuantificar finalmente la transferencia de calor a través del número de Nusselt, dado por:

$$\text{Nu}(Z) \equiv \frac{2R}{\kappa} h(Z). \quad (2.40)$$

Esta cantidad compara la transferencia de calor sobre la superficie del tubo en el régimen convectivo versus una transferencia netamente conductiva, es decir con el fluido hipotéticamente en reposo (para más detalle ver el apéndice A.1). Utilizando la expresión (2.38) lo anterior se escribe como:

$$\text{Nu}(Z) = -2 \frac{\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{(x=1, Z)}}{\bar{T}_b(Z)} \quad (2.41)$$

donde  $\bar{T}_b$  es la temperatura transversal promedio escrita en su forma adimensional. Escribiendo ahora explícitamente el campo  $\bar{T}(x, Z)$ , se tiene que:

$$\text{Nu}(Z) = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 Z} \frac{d\phi_n}{dx}}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 Z} \int_0^1 x(1-x^2)\phi_n(x)dx} \quad (2.42)$$

El denominador puede ser simplificado utilizando la ecuación que satisface  $\phi_n$ , integrándola y evaluando sus condiciones de borde. La expresión final para el número de Nusselt en este caso es:

$$\text{Nu}(Z) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 Z} \frac{d\phi_n}{dx}(1)}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{-\lambda_n^2 Z}}{\lambda_n^2} \frac{d\phi_n}{dx}(1)} \quad (2.43)$$

Observamos que para grandes valores de  $Z$ , el primer término de ambas series es el dominante (correspondiente a  $n = 1$ ). De esta forma, tenemos que:

$$\text{Nu} \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^2}{2} = 3,656 \quad (2.44)$$

Esto define el valor del número de Nusselt para posiciones axiales lejos de la interfaz donde la temperatura del manto cambia abruptamente. A continuación se incluye un gráfico que muestra la dependencia de Nu respecto a la coordenada  $Z$ :

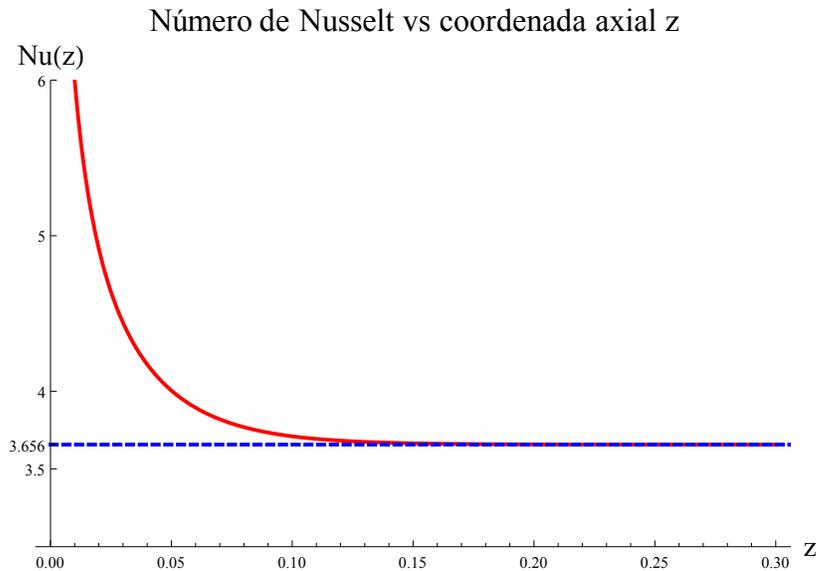


Figura 2.5: Número de Nusselt asintótico para el problema de Graetz original.

## Capítulo 3

# Dinámica de un fluido en un ducto de sección no circular

### 3.1. Consideraciones Generales

El primer paso para estudiar el transporte de calor en un fluido que circula por un ducto de sección transversal no circular es conocer su campo de velocidades asociado para poder dar cuenta del término convectivo en la ecuación de energía (2.1). Incluso para el caso de un fluido Newtoniano, en este tipo de cañerías de geometría más general el flujo de Hagen-Poiseuille ya no es el adecuado para su describir su movimiento. Para encontrar el campo de velocidades correcto en este caso, uno debe resolver las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \sigma \quad (3.1)$$

esta vez incluyendo dependencia angular, ya que en general la forma de la sección transversal del tubo depende de dicha variable, y por lo tanto el problema ya no presenta simetría angular. Adicionalmente, la condición de no deslizamiento debe ser incorporada adecuadamente con tal de que el campo de velocidades sea nulo sobre la superficie del tubo. Junto con las ecuaciones (3.1) además es necesario tener en cuenta la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

Para el clásico caso de Hagen-Poiseuille, esta ecuación se cumple automáticamente debido a que el flujo sólo tiene componente no nula en la dirección axial  $z$ , la cual a su vez es independiente de dicha coordenada. Sin embargo, al estudiar flujos no Newtonianos en ductos no circulares aparecen los llamados 'flujos secundarios', correspondientes a componentes radiales y/o azimutales del campo de velocidades, por lo cual satisfacer la ecuación (3.2) no es trivial en tal caso, y para lo cual se introduce una función corriente asociada  $\Psi$ . Al tratar con un fluido no Newtoniano también es necesario indicar la forma particular de cómo se incorpora tal naturaleza a través del tensor de esfuerzos  $\sigma$ , es decir, se debe definir su ecuación constitutiva, la cual en este trabajo será el modelo de Phan-Thien y Tanner modificado (MPTT), introducido posteriormente. A continuación se estudia la dinámica de un fluido Newtoniano en un ducto de sección no circular, el cual sirve como base para posteriormente extender al flujo viscoelástico del modelo MPTT.

### 3.2. Fluido Newtoniano en un ducto de sección no circular

El flujo más sencillo de estudiar en un ducto no circular es uno de naturaleza Newtoniana. Sin embargo, su análisis es valioso, pues permite introducir el concepto de 'factor de forma', el cual será explicado con detalles en la próxima sección.

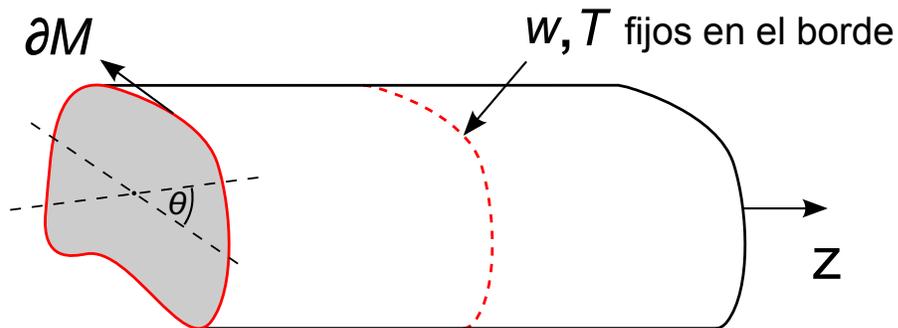


Figura 3.1: Ducto con sección transversal no circular.

Sea  $\vec{v} = (v, u, w)$  las componentes del campo de velocidades en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , tomando  $r$  adimensionalizado respecto a un radio característico  $R$ . Al igual que en el caso circular, la ecuación de Navier-Stokes (3.1) para la componente axial  $z$  es,

$$\nabla^2 w = -4p = \text{const} \quad (3.3)$$

Al contrario del caso circular, donde solo existe dependencia radial, notamos que en este caso  $w = w(r, \theta)$ , ya que perfil de velocidades depende de la orientación del corte longitudinal  $\theta = \theta_0$  que se hace en el ducto (y en general este último no es simétrico).

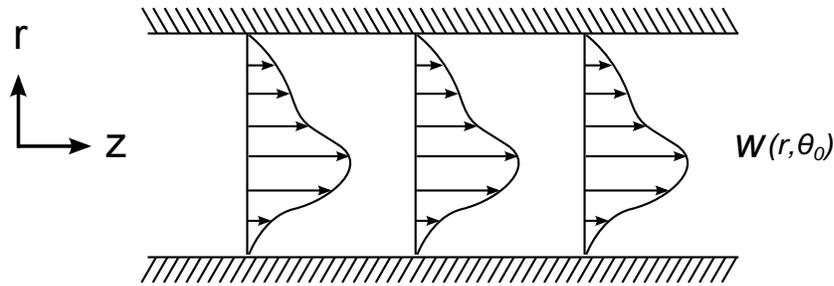


Figura 3.2: Velocidad axial  $w$  para un cierto corte longitudinal del tubo en un ángulo  $\theta = \theta_0$ .

Resolviendo mediante el método de separación de variables, esta vez incluyendo la dependencia angular, se encuentra que la solución general a la ecuación (3.3) puede escribirse como una superposición lineal de la forma

$$w = p \left[ 1 - r^2 + \sum_{k=1}^N \epsilon_k r^k (\cos k\theta + \sin k\theta) \right] \quad (3.4)$$

donde  $k \in N$ . Vemos entonces que este flujo se construye por el original de Pouseuille más una contribución que incluye la nueva dependencia respecto a la geometría, la cual está formada por una combinación lineal de funciones armónicas (que satisfacen la ecuación de Laplace).

Como es usual, velocidad axial  $w$  debe satisfacer la condición de borde de no deslizamiento sobre el manto irregular del tubo  $\partial M$ ,

$$w(r, \theta)|_{\partial M} = 0 \quad (3.5)$$

es decir,

$$1 - r^2 + \sum_{k=1}^N \epsilon_k r^k (\cos k\theta + \sin k\theta) = 0 \quad (3.6)$$

Es posible interpretar la ecuación (3.6) como la *definición* de la superficie del ducto, esto es, el contorno de su sección transversal corresponde al lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen tal ecuación. Esta relación, dependiendo de los valores que tomen los parámetros  $(\epsilon_k, k)$  describe curvas que se identifican como el contorno de la sección transversal del tubo.

Cada término de suma en la ecuación (3.6) da lugar a una familia de curvas; si consideramos sólo uno de ellos de forma aislada, al fijar distintos valores de los parámetros  $(\epsilon, k)$  se genera un amplio conjunto de geometrías. Esto motiva la introducción de un 'método de factor de forma', el cual será detallado en la próxima sección.

### 3.3. Método de Factor de Forma

Como sugiere el análisis anterior hecho para el flujo Newtoniano, para incorporar adecuadamente la sección transversal modificada del ducto tal de que sobre su contorno se satisfaga la condición de no deslizamiento, se utiliza un método (introducido en [17]) llamado "método de factor de forma", el cual se ilustra a continuación. Consideremos en general la expresión,

$$G = 0 \quad (3.7)$$

donde  $G(\vec{x}, \alpha_i)$  es una cierta función dada que depende de coordenadas espaciales  $\vec{x}$ , y que también contiene un cierto número de parámetros reales  $\alpha_i$ . La ecuación (3.7) define una curva, la cual es posible identificar como el contorno de la sección transversal del tubo deformado. Como en este trabajo consideramos un flujo a lo largo de un tubo que se extiende en la dirección  $z$ , el contorno asociado está descrito

particularmente por la expresión

$$G = 1 - r^2 + \epsilon r^k \sin k\theta \quad (3.8)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro de deformación menor que uno y  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Un amplio rango de geometrías pueden ser modeladas por medios de esta elección escogiendo distintos valores de  $(\epsilon, k)$ , tales como secciones triangular y cuadrada para los valores  $k = 3, 4$ . En cada caso,  $\epsilon$  es un parámetro que controla la 'circularidad' de la curva definida, ya que la geometría circular se recupera cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , mientras que para valores  $\epsilon \neq 0$  se obtienen curvas deformadas. La siguiente figura (3.3) ilustra tal conexión:

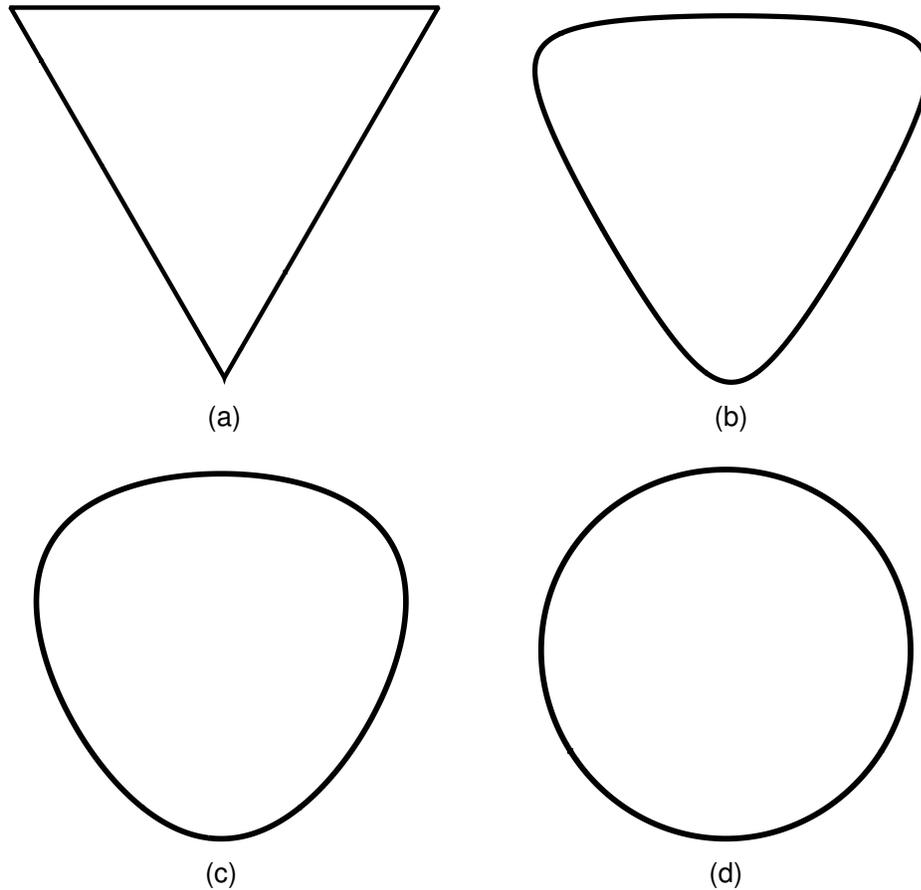


Figura 3.3: Secuencia del colapso de la geometría triangular ( $k = 3$ ) hacia la geometría circular mediante la disminución del parámetro  $\epsilon$ . Los valores correspondientes son (a)  $\epsilon = 0,389$ ; (b)  $\epsilon = 0,33$ ; (c)  $\epsilon = 0,15$  y (d)  $\epsilon = 0,01$ .

A continuación se muestran dos conjuntos de figuras; la primera fila está modelada de acuerdo al factor de forma utilizado en este trabajo, dado por la ecuación (3.8), mientras que las figuras de la segunda fila fueron conseguidas utilizando una segunda contribución proporcional a  $\epsilon_k r^k \sin k\theta$ , de acuerdo a la solución más general dada por la ecuación (3.6):

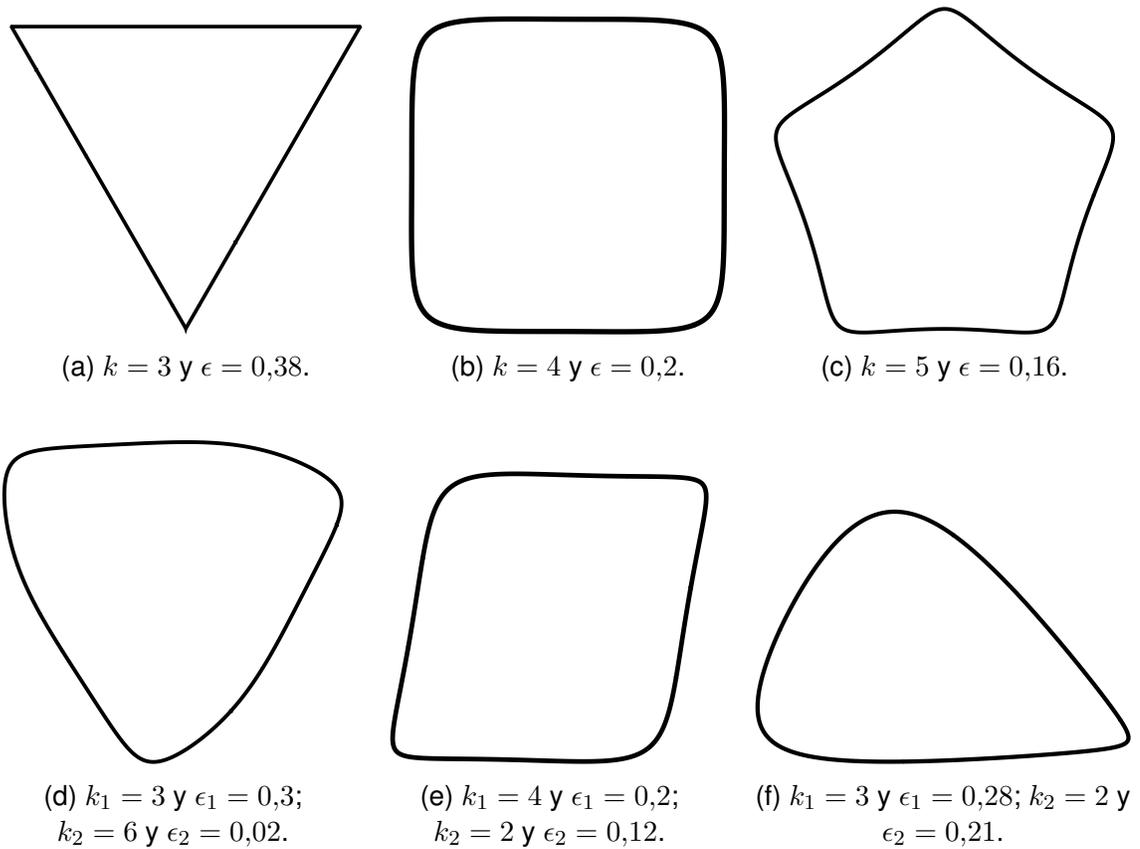


Figura 3.4: Figuras (a)-(c) han sido generadas con el factor de forma de la ecuación (3.8), mientras que para (d)-(f) se ha utilizado un segundo término extra.

En general, no todos los pares de valores  $(\epsilon, k)$  dan como resultado una curva cerrada; para un cierto valor de  $k$  fijo, solo un intervalo de valores de  $\epsilon$  da lugar a dichas curvas. El valor máximo que puede tomar  $\epsilon$  depende del valor de  $k$  seleccionado, sin embargo, es posible ver que en todos los casos éste puede ser en efecto tratado como un parámetro perturbativo. Si se impone la condición de que  $G = 0$  describa una curva cerrada se tiene que en general  $\epsilon < 1$ . Particularmente, el valor crítico (máximo)  $\epsilon_c$  sobre el cual la curva deja de ser cerrada depende de  $k$  de la forma [17]

$$\epsilon_c = \frac{2}{k} \left( \frac{k-2}{k} \right)^{(k-2)/2} \quad (3.9)$$

Es decir, el valor  $\epsilon_c$  depende exclusivamente del parámetro  $k$ , el cual se puede interpretar como el 'número de vértices' que describe la geometría de la curva. Esta dependencia se ilustra en la figura a continuación

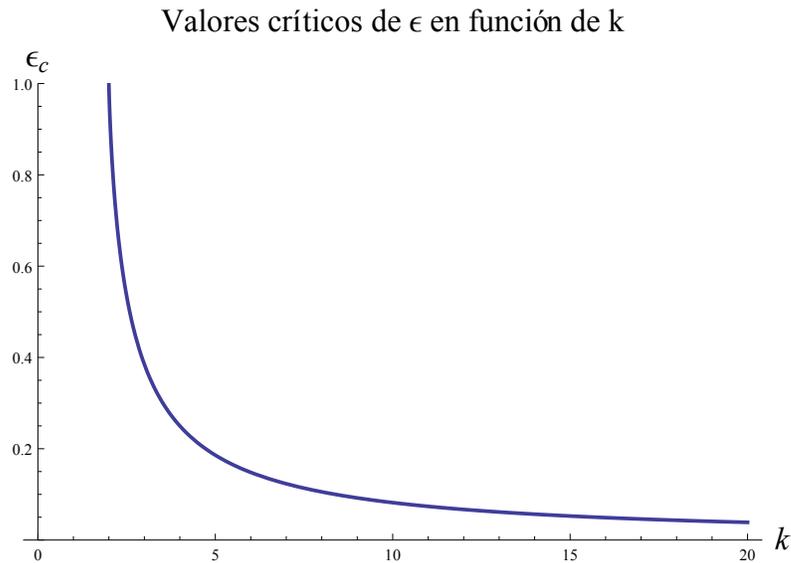


Figura 3.5: Dependencia del valor crítico del parámetro de forma respecto a la geometría. El número  $k$  identifica el número de lados del polígono regular al cual se aproxima la sección.

Del gráfico mostrado en la figura (3.5) vemos consistentemente que para el caso  $k \rightarrow \infty$ , cuyo límite es una circunferencia, el valor de  $\epsilon_c$  va a cero. A continuación se muestran algunos valores específicos de  $\epsilon_c$  para distintas geometrías caracterizadas por el parámetro  $k$ :

k	Valor crítico $\epsilon_c$	geometría
3	0.385	triangular
4	0.250	cuadrada
5	0.186	pentagonal
6	0.148	hexagonal
⋮	⋮	⋮
∞	0	circular

Cuadro 3.1: Valores críticos  $\epsilon_c$  como función del parámetro  $k$ . Estos corresponden al valor máximo por sobre el cual la curva del contorno descrito por el factor de forma deja de ser cerrada.

### 3.4. Modelado de cantidades Físicas utilizando el factor de forma

El factor de forma introducido permite modelar correctamente cantidades físicas sobre las cuales es necesario imponer una condición de borde sobre la superficie deformada del tubo, tal como en la situación descrita en la figura (3.1). Sea  $\Phi$  un cierto campo que cumple una condición de frontera homogénea, esto es

$$\Phi|_{\partial M} = 0, \tag{3.10}$$

entonces es posible modelar tal función de la forma

$$\Phi = GF = G(f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots) \tag{3.11}$$

donde hemos introducido unas funciones 'auxiliares'  $f_i$  que deben ser determinadas. En virtud de la definición del factor de forma  $G$  dada en la ecuación (3.7), el campo  $\Phi$  escrito de esta forma es nulo sobre el contorno  $\partial M$ . En el caso del factor de forma (3.8) que utilizamos en este trabajo, alternativamente escribimos lo anterior como

$$\Phi(r, \theta, z) = \Phi_0(r, z) + \epsilon \Phi_1(r, z) \sin k\theta \tag{3.12}$$

donde  $\Phi_0$  y  $\Phi_1$  se obtienen resolviendo perturbativamente la ecuación que gobierna a  $\Phi$  utilizando una expansión regular respecto al parámetro  $\epsilon$ . Igualando potencias de

$\epsilon$ , vemos que es posible construir las funciones auxiliares  $f_0$  y  $f_1$  hasta orden  $O(\epsilon^1)$  como

$$f_0(r, z) = \frac{\Phi_0}{1 - r^2} \quad (3.13)$$

$$f_1(r, \theta, z) = \frac{\Phi_1 - r^k f_0}{1 - r^2} \sin k\theta. \quad (3.14)$$

Notamos que las expresiones anteriores son discontinuas en la distancia radial  $r = 1$  a menos que impongamos las siguientes condiciones de regularidad

$$\Phi_0(1, z) = 0, \quad (3.15)$$

$$\Phi_1(1, z) = f_0(1, z). \quad (3.16)$$

Las cuales juegan el papel de 'condiciones de frontera' para los campos  $\Phi_0$  y  $\Phi$ . Habiendo indicado entonces como modelar la sección deformada del tubo y así como las cantidades físicamente relevantes, se procede a introducir el modelo del flujo no-Newtoniano.

### 3.5. Fluido no Newtoniano: Modelo de Phan-Thien y Tanner Modificado

A pesar de que el modelo de fluido Newtoniano puede representar un amplio conjunto de sustancias, como por ejemplo aire, agua, gasolina, y algunos aceites minerales (bajo condiciones normales de presión y temperatura), es interesante poder ir un poco más allá de tal aproximación para aumentar el alcance del análisis. Como se mencionó en la introducción, al considerar flujos de naturaleza viscoelástica en ductos de geometría no circular aparecen los denominados 'flujos secundarios', que juegan un rol importante en el transporte y transferencia de calor. Con el fin de incorporar este ingrediente consideramos un modelo que representa un flujo ligeramente no Newtoniano, elaborado por los autores S. C. Xue, N. Phan-Thien y R. I. Tanner [20], conocido como Modelo de Phan-Thien Tanner Modificado (MPTT), el cual supone la disolución de un fluido viscoelástico en uno de naturaleza Newtoniana. A continuación se des-

cribe tal modelo.

Para caracterizar completamente la dinámica del fluido es necesario indicar su naturaleza mediante el tensor de esfuerzos  $\sigma$  que entra en las ecuaciones de Navier-Stokes (3.1). Las componentes de dicho tensor para un fluido ligeramente no newtoniano se pueden escribir en general como:

$$\sigma = -PI + 2\eta_N \mathbf{D} + \tau \quad (3.17)$$

siendo  $P$  la presión hidrostática,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad y  $2\eta_N \mathbf{D}$  representa la contribución Newtoniana al tensor de esfuerzos con  $\eta_N$  como la viscosidad, donde  $\mathbf{D}$  es el tensor tasa de esfuerzo. Por último,  $\tau$  es la contribución no newtoniana al tensor de esfuerzo, la cual puede estar unida a cantidades cinemáticas mediante ecuaciones constitutivas. La matriz de deformación unitaria  $\mathbf{D}$  está definida en términos de las componentes del flujo como:

$$\mathbf{D} \equiv \begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

donde

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.19)$$

$$e_{r\theta} = e_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (3.20)$$

$$e_{rz} = e_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (3.21)$$

$$e_{\theta z} = e_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.22)$$

El modelo de Phan-Thien Tanner supone considerar la relación constitutiva del fluido como:

$$2\eta_m \mathbf{D} = g \left( \frac{\lambda \epsilon_0}{\eta_{m0}} \right) \boldsymbol{\tau} + \lambda \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (3.23)$$

donde:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = (\vec{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\varphi}^T) \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \nabla \vec{v}^T - \xi \mathbf{D} \quad (3.25)$$

$$g \left( \frac{\lambda \epsilon_0}{\eta_{m0}} \right) = 1 + \frac{\lambda \epsilon_0}{\eta_{m0}} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad (3.26)$$

En esto  $T$  denota el operador traspuesto,  $\lambda$  un tiempo de relajación,  $\xi$  y  $\epsilon_0$  son parámetros del material, mientras que  $\eta_{m0}$  es la contribución molecular a la viscosidad del fluido sin esfuerzo de corte, y  $\eta_m$  la viscosidad del fluido viscoelástico.

Este modelo supone que se tiene un líquido con viscosidad  $\eta_N$  y en el se disuelve un líquido viscoelástico con viscosidad  $\eta_m$ , es decir

$$\eta_0 = \eta_{N0} + \eta_{m0} \quad (3.27)$$

donde  $\eta_{N0}$  representa la viscosidad del solvente Newtoniano. Además

$$\eta_m = \frac{1 + \xi(2 - \xi)\lambda^2 \kappa^2}{(1 + \lambda^2 \kappa^2)^{(1-m)/2}} \eta_{m0} \quad (3.28)$$

$$\kappa^2 = 2 \text{Tr} \mathbf{D}^2 \quad (3.29)$$

donde  $\kappa$  es la velocidad de corte. Acá en general el índice de ley de potencia  $m$  es siempre tal que  $m \leq 1$ . Entonces es posible escribir el tensor de esfuerzos como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta_0(1 - \beta)\mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}, \quad \beta = \frac{\eta_{m0}}{\eta_0} \quad (3.30)$$

El modelo de Xue, Phan-Thier y Tanner surge de considerar particularmente el caso  $\beta = m = 1$ , lo cual implica tomar  $\eta_N = \eta_{N0} \rightarrow 0$ , y por lo tanto  $\eta_{m0} = \eta = cte$ . Esto permite escribir finalmente el tensor de esfuerzos y la relación constitutiva como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.31)$$

Notar que aunque ahora no aparece explícitamente el tensor de deformación  $\mathbf{D}$  en el tensor de esfuerzo  $\sigma$ , este está incluido en la ecuación constitutiva de  $\tau$ , por lo cual vuelve a aparecer de forma indirecta en las ecuaciones de Navier-Stokes a través de este último tensor. La ecuación constitutiva para el modelo MPTT se escribe como

$$2\eta[1 + \lambda^2\xi(2 - \xi)\kappa^2]\mathbf{D} = \left(1 + \frac{\lambda\epsilon_0}{\eta_{m0}} \text{Tr } \tau\right) \tau + \lambda\hat{\tau} \quad (3.32)$$

### 3.6. Determinación del campo de velocidades

En esta sección se resuelven las ecuaciones perturbativas igualando órdenes semejantes, con lo cual se obtienen las curvas de isovelocidad y se caracterizan los flujos secundarios. Este cálculo fue previamente llevado a cabo en [12] para otro caso, por lo cual acá se aporta una verificación de los resultados y análisis adicional.

Las componentes radial, angular y axial de las ecuaciones de Navier-Stokes pueden escribirse explícitamente como

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = F_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \eta_N \left[ \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (3.33)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \eta_N \left[ \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (3.34)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta_N \nabla^2 w \quad (3.35)$$

donde  $F_i = (\nabla \cdot \tau)_i$  son llamados términos forzantes, y provienen directamente de la contribución no Newtoniana del tensor de esfuerzo. Sus formas explícitas son las siguientes:

$$F_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \quad (3.36)$$

$$F_\theta = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \quad (3.37)$$

$$F_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (3.38)$$

De acuerdo al modelo de MPTT, podemos introducir un esquema de adimensionalización de la forma:

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad z^* = \frac{z}{R}, \quad u^* = \frac{u}{w_0}, \quad w^* = \frac{w}{w_0} \quad (3.39)$$

$$P^* = \frac{RP}{\eta w_0}, \quad \tau^* = \frac{R\tau}{\eta w_0}, \quad \mathbf{D}^* = \frac{R}{w_0} \mathbf{D}, \quad \varphi^* = \frac{R}{w_0} \varphi \quad (3.40)$$

Siendo  $R$  un radio característico y  $w_0$  la velocidad central del flujo axial. De esta forma podemos escribir las ecuaciones (3.36)-(3.38) en forma adimensional como

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} = F_r^* - \frac{\partial P^*}{\partial r^*} \quad (3.41)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \frac{u^* v^*}{r^*} = F_\theta^* - \frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \quad (3.42)$$

$$u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = F_z^* - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \quad (3.43)$$

donde el tensor de esfuerzos en forma adimensional es

$$\boldsymbol{\sigma}^* = -P^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^* \quad (3.44)$$

Además, la ecuación constitutiva en forma adimensional tiene la forma

$$2[1 + 2\xi(2 - \xi)\text{Wi}^2 \text{Tr} \mathbf{D}^{*2}] \mathbf{D}^* = (1 + \epsilon_0 \text{Wi} \text{Tr} \boldsymbol{\tau}^*) \boldsymbol{\tau}^* + \text{Wi} \hat{\boldsymbol{\tau}}^* \quad (3.45)$$

En el esquema de adimensionalización utilizado hemos introducido el número de Weissenberg definido como

$$\text{Wi} = \frac{\lambda w_0}{a} \quad (3.46)$$

Desde este punto en adelante entenderemos que las todas las ecuaciones presentadas están escritas en términos de variables y funciones adimensionales según las definiciones dadas, y descartaremos la notación de asterisco para simplificar la notación.

### 3.6.1. Criterio para la Existencia de Flujos Secundarios

Para analizar las componentes transversales del flujo es conveniente introducir una función corriente  $\Psi(r, \theta)$  definida de forma tal que:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.47)$$

Debido a que se trata de un flujo completamente desarrollado (no tiene dependencia en  $z$ ), escribir las componentes  $u$  y  $v$  en términos de la función corriente satisface automáticamente la ecuación de continuidad. Por otra parte, derivando parcialmente las ecuaciones de momentos de las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se encuentra que la función corriente satisface la ecuación biarmónica inhomogénea:

$$\nabla^4 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \chi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_r}{\partial \theta} \quad (3.48)$$

donde hemos definido los términos forzantes como

$$\chi_r = (\nabla \hat{\tau})_r \quad (3.49)$$

$$\chi_\theta = (\nabla \hat{\tau})_\theta \quad (3.50)$$

Es sabido que en ausencia de términos forzantes, o más generalmente, si  $\nabla^4 \Psi = 0$ , entonces no se tienen componentes asociadas  $u$  y  $v$  y por lo tanto el flujo es puramente axial. Por el contrario, si la expresión anterior es distinta de cero, entonces se está en presencia de flujos secundarios.

### 3.6.2. Esquema de Solución

Para encontrar las componentes radial  $u$ , angular  $v$  y axial  $w$  del campo de velocidades, se utiliza un método sistemático para resolver las ecuaciones (3.41)-(3.43), cuyos pasos se indican a continuación:

1. **Expansión.** Se expande cada variable de campo  $\{\vec{v}, P, \tau, \varphi, \sigma, \mathbf{D}\}$  en una serie perturbativa respecto al número de Weissenberg  $Wi$ :

$$\Phi = \Phi^{(0)} + Wi\Phi^{(1)} + \dots = \sum_{i=0}^N Wi^i \Phi^{(i)} \quad (3.51)$$

donde  $N$  es el orden más alto al cual se desea calcular. Para efectos prácticos tomaremos  $N = 3$ , orden al cual se espera la presencia de flujos secundarios.

2. **Reemplazo.** Se introducen las expansiones (3.51) en las ecuaciones de Navier-Stokes (3.41)-(3.43), así como en la ecuación constitutiva (3.45), y se igualan términos con potencias semejantes en  $Wi$ , lo cual da lugar a ecuaciones perturbativas jerarquizadas por orden.
3. **Criterio Flujos Secundarios.** Se analiza la existencia de las componentes transversales del flujo  $u^{(n)}$  y  $v^{(n)}$  para cada orden introduciendo una función corriente  $\Psi^{(n)}(r, \theta)$ , junto con los términos forzantes asociados a tal orden dados por,

$$\chi_r^{(n)} = (\nabla \hat{\tau}^{(n-1)})_r \quad (3.52)$$

$$\chi_\theta^{(n)} = (\nabla \hat{\tau}^{(n-1)})_\theta \quad (3.53)$$

Utilizando esto se analiza si se cumple o no la condición indicada para la ecuación (3.48) según el criterio indicado, con lo cual afirmamos o descartamos la presencia de flujos secundarios.

4. **Solución.** Se resuelve la ecuación de Navier-Stokes perturbativa según la coordenada  $z$  para el flujo longitudinal  $w^{(n)}$  y se le da la forma final a la solución introduciendo el factor de forma, escrito en este caso como  $w^{(0)}$ .

Debido a que consideramos un flujo completamente desarrollado, por lo cual no existe dependencia en la coordenada  $z$ , la discusión sobre modelado con el factor de forma según lo discutido en la sección 3.4 se simplifica bastante, ya que no existen condiciones de borde de entrada, al contrario de lo que sucede con la temperatura, como veremos en el capítulo 4.

Para mayor claridad, antes de continuar es preciso notar que estamos utilizando la mezcla de dos métodos perturbativos. Por un lado se tiene la perturbación de borde, controlada por el parámetro  $\epsilon$ , en virtud del cual el método de factor de forma extiende el problema circular al caso más general. Por otra parte, como mencionamos en el punto 1 del esquema de solución anterior, también realizamos la expansión de las funciones en términos del número de Weissenberg  $Wi$ , lo permite extender el problema al flujo viscoelástico. Recordamos que, como se mencionó en la introducción, es necesaria la presencia de ambos factores para que exista presencia de los flujos secundarios. La tabla a continuación ilustra los posibles casos como resultado de la combinación de ambos métodos.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon \neq 0$
$Wi = 0$	Circular Newtoniano	No Circular Newtoniano
$Wi \neq 0$	Circular Viscoelástico	No Circular Viscoelástico

Cuadro 3.2: Esquema donde se ilustra la mezcla de ambos métodos perturbativos; la perturbación de borde controlado por  $\epsilon$  y viscoelasticidad controlada por  $Wi$ .

### 3.6.3. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(Wi^0)$

A continuación se presentan las ecuaciones para orden  $\mathcal{O}(Wi^0)$ :

$$\vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \vec{v}^{(0)} = \nabla \sigma^{(0)} \quad (3.54)$$

$$\sigma^{(0)} = -P^{(0)} \mathbf{I} + \tau^{(0)} \quad (3.55)$$

$$2\mathbf{D}^{(0)} = \tau^{(0)} \quad (3.56)$$

Explícitamente, esta última ecuación se escribe como,

$$\tau^{(0)} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Debido a que estas ecuaciones provienen de los términos que no contienen al número de Weissenberg, corresponden a la contribución Newtoniana del fluido. Es decir, estas

proveerían la descripción completa del flujo para el caso  $Wi = 0$ , donde el modelo de Phan-Thien-Tanner simplemente se reduce al del fluido Newtoniano.

A este orden no existe presencia de términos forzantes  $\chi$ , y por lo tanto se cumple idénticamente que

$$\nabla^4 \Psi^{(0)} = 0 \quad (3.58)$$

es decir, no existen flujos secundarios.

$$u^{(0)} = v^{(0)} = 0 \quad (3.59)$$

Por otra parte, la ecuación de Navier-Stokes en la coordenada  $z$  (3.54) produce,

$$\nabla^2 w^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z} = cte = -4p \quad (3.60)$$

cuya solución en el ducto no circular modelado por el factor de forma  $G$  introducido anteriormente es

$$w^{(0)} = p(1 - r^2 + \epsilon r^k \sin k\theta) \quad (3.61)$$

De acuerdo a lo discutido anteriormente en la sección 3.4, este flujo principal  $w^{(0)}(r, \theta)$  satisface automáticamente la condición de no deslizamiento sobre la superficie del tubo para una gran familia de geometrías descrita por distintos valores de  $(\epsilon, k)$ .

### 3.6.4. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(Wi^1)$

A primer orden en la expansión perturbativa se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \nabla \vec{v}^{(0)} = \nabla \sigma^{(1)} \quad (3.62)$$

$$\sigma^{(1)} = -P^{(1)} \mathbf{I} + \tau^{(1)} \quad (3.63)$$

$$2\mathbf{D}^{(1)} = (1 + \epsilon_0 \text{Tr} \tau^{(0)}) \tau^{(1)} + \hat{\tau}^{(0)} \quad (3.64)$$

$$\hat{\tau}^{(0)} = \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \tau^{(0)} - \varphi^{(0)} \tau^{(0)} - \tau^{(0)} \varphi^{(0)T} \quad (3.65)$$

Del análisis del orden anterior vemos que  $\text{Tr } \tau^{(0)} = 0$ , según la ecuación (3.57). Por otra parte, la expresión explícita para  $\hat{\tau}^{(0)}$  es

$$\hat{\tau}^{(0)} = \begin{pmatrix} \xi \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right)^2 & \frac{\xi}{r} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \right) & 0 \\ \frac{\xi}{r} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \right) & \frac{\xi}{r^2} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\xi - 2) \left[ \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \end{pmatrix}$$

Podemos analizar los flujos secundarios introduciendo una función corriente  $\nabla^4 \Psi^{(1)}$ . A este orden vemos que:

$$\chi_r^{(1)} = (\nabla \hat{\tau}^{(0)})_r = 0 \quad (3.66)$$

$$\chi_\theta^{(1)} = (\nabla \hat{\tau}^{(0)})_\theta = 0 \quad (3.67)$$

lo que implica que  $\nabla^4 \Psi^{(1)} = 0$ , y por lo tanto concluimos que a primer orden no existen flujos secundarios:

$$u^{(1)} = v^{(1)} = 0 \quad (3.68)$$

La componente  $z$  de la ecuación de Navier-Stokes tiene la forma

$$0 = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} + \nabla^2 w^{(1)} - (\nabla \hat{\tau}^{(0)})_z \quad (3.69)$$

donde  $\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z} = 0$ , y también  $(\nabla \hat{\tau}^{(0)})_z = 0$ . Luego, tenemos que,

$$\nabla^2 w^{(1)} = 0 \quad (3.70)$$

Esta expresión es análoga a la ecuación (3.60), que rige el flujo  $w^{(0)}$ , pero anulando el gradiente de presión  $p$ . Así, en este caso tenemos que

$$w^{(1)} = 0 \quad (3.71)$$

es decir, no existe contribución alguna al campo de velocidades a este orden.

$$\vec{v}^{(1)} = 0 \quad (3.72)$$

### 3.6.5. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(\text{Wi}^2)$

A segundo orden en el número de Weissenberg se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones perturbativas:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \vec{v}^{(2)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \nabla \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)} \cdot \nabla \vec{v}^{(0)} &= \nabla \sigma^{(2)} \\ \sigma^{(2)} &= -P^{(2)} \mathbf{I} + \tau^{(2)} \\ 2\mathbf{D}^{(2)} + 4\xi(2 - \xi) \text{Tr} \mathbf{D}^{(0)^2} \mathbf{D}^{(0)} &= \tau^{(2)} + \epsilon_0 (\text{Tr} \tau^{(0)} \tau^{(1)} + \text{Tr} \tau^{(1)} \tau^{(0)}) + \hat{\tau}^{(1)} \\ \hat{\tau}^{(1)} &= \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \tau^{(1)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \nabla \tau^{(0)} - \varphi^{(0)} \tau^{(1)} \\ &\quad - \tau^{(0)} \varphi^{(1)T} - \varphi^{(1)} \tau^{(0)} - \tau^{(0)} \varphi^{(1)T} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Esta última expresión para  $\hat{\tau}^{(1)}$  se reduce directamente ya que, según lo calculado en el apartado anterior a orden  $\mathcal{O}(\text{Wi}^1)$ , se tiene  $\vec{v}^{(1)} = 0$ , y por lo tanto  $\varphi^{(1)} = 0$ . Luego, se tiene que

$$\hat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W \\ 0 & 0 & W/r \\ W & W/r & 0 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

donde  $W(r, \theta) = -\xi(\xi - 2) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 \right]$ . Utilizando esto obtenemos que los términos forzantes de este orden son nulos:

$$\chi_r^{(2)} = (\nabla \hat{\tau}^{(1)})_r = 0 \quad (3.75)$$

$$\chi_\theta^{(2)} = (\nabla \hat{\tau}^{(1)})_\theta = 0 \quad (3.76)$$

Introduciendo nuevamente una función de corriente  $\Psi^{(2)}$  se tiene entonces que:

$$\nabla^4 \Psi^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\chi_\theta^{(2)})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\chi_r^{(2)}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.77)$$

lo cual implica que tampoco existen flujos secundarios a segundo orden, esto es

$$u^{(2)} = v^{(2)} = 0 \quad (3.78)$$

Por otra parte, la ecuación de Navier-Stokes para la componente longitudinal  $w^{(2)}$  es,

$$\nabla^2 w^{(2)} = 16p^3 \{ [\xi(2-\xi) - 4(1-\xi)\epsilon_0] r^2 + k[-\xi(2-\xi) + (k+3)(1-\xi)\epsilon_0] \epsilon r^k \sin k\theta \} \quad (3.79)$$

Para resolver esta ecuación proponemos una solución de la forma,

$$w^{(2)} = h_0(r) + \epsilon h_1(r) \sin k\theta \quad (3.80)$$

Insertando esta función de prueba en la ecuación anterior e igualando potencias de  $\epsilon$  obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\nabla^2 h_0(r) = a_0 r^2 \quad (3.81)$$

$$\nabla^2 [h_1(r) \sin k\theta] = a_1 r^k \sin k\theta \quad (3.82)$$

donde  $a_0 \equiv 16p^3[\xi(2-\xi) - 4(1-\xi)\epsilon_0]$  y  $a_1 \equiv 16p^3k[-\xi(2-\xi) + (k+3)(1-\xi)\epsilon_0]$ . Las correspondientes soluciones son:

$$h_0(r) = -\frac{a_0}{16}(1-r^4) \quad (3.83)$$

$$h_1(r, \theta) = \left[ C + \frac{a_1 k}{4(k+1)} r^2 \right] \epsilon r^k \sin k\theta \quad (3.84)$$

donde  $C$  es una constante. Para obtener una expresión de  $w^{(2)}$  que satisfaga la condición de no deslizamiento sobre la superficie del ducto, esto es  $w^{(2)}(r, \theta)|_{\partial D} = 0$ , utilizamos el factor de forma y escribimos  $w^{(2)} = w^{(0)}(f_0 + \epsilon f_1)$ , procedimiento que fija  $C$ . De esta forma obtenemos la expresión

$$w^{(2)} = w^{(0)} p^3 \left\{ [4(1 - \xi)\epsilon_0 - \xi(2 - \xi)](1 + r^2) + \epsilon \frac{\xi(2 - \xi)(3k - 1) - 4(1 - \xi)(k^2 + 2k - 1)\epsilon_0}{(k + 1)} r^k \sin k\theta \right\} \quad (3.85)$$

### 3.6.6. Campo de velocidades a orden $\mathcal{O}(\text{Wi}^3)$

El conjunto de ecuaciones perturbativas para el orden  $\mathcal{O}(\text{Wi}^3)$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma}^{(3)} &= \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \vec{v}^{(3)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \nabla \vec{v}^{(2)} + \vec{v}^{(2)} \cdot \nabla \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(3)} \cdot \nabla \vec{v}^{(0)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(3)} &= -P^{(3)} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^{(3)} \\ \boldsymbol{\tau}^{(3)} &= 2\mathbf{D}^{(3)} + 4\xi(2 - \xi) \text{Tr} \mathbf{D}^{(0)^2} \mathbf{D}^{(1)} + \text{Tr}[\mathbf{D}^{(0)} \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{D}^{(0)}] \mathbf{D}^{(0)} \\ &\quad - \epsilon_0 [\text{Tr} \boldsymbol{\tau}^{(0)} \boldsymbol{\tau}^{(2)} + \text{Tr} \boldsymbol{\tau}^{(1)} \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \text{Tr} \boldsymbol{\tau}^{(2)} \boldsymbol{\tau}^{(0)}] - \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(2)} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(2)} &= \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}^{(2)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}^{(1)} + \vec{v}^{(2)} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}^{(0)} - \boldsymbol{\varphi}^{(0)} \boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(0)} \boldsymbol{\varphi}^{(2)T} \\ &\quad - \boldsymbol{\varphi}^{(1)} \boldsymbol{\tau}^{(1)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)} \boldsymbol{\varphi}^{(1)T} - \boldsymbol{\varphi}^{(2)} \boldsymbol{\tau}^{(0)} - \boldsymbol{\tau}^{(2)} \boldsymbol{\varphi}^{(0)T} \end{aligned} \quad (3.86)$$

La forma matricial para  $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(2)}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{rr}^{(2)} & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta}^{(2)} & 0 \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta}^{(2)} & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\theta\theta}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\boldsymbol{\tau}}_{zz}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

donde las expresiones para sus componentes son:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{rr}^{(2)} &= -\frac{2\xi(1 - \xi)\epsilon_0}{r^2} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} + r^2 \left( \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right)^3 + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right) \right] \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta}^{(2)} &= -\frac{\xi}{2r^3} \left[ 4\xi(1 - \xi)\epsilon_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right)^3 + r^2 \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \theta} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. - r^2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \left( 4(1 - \xi)\epsilon_0 \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right)^3 \right) + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{\theta\theta}^{(2)} &= -\frac{2\xi(1-\xi)\epsilon_0}{r^4}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)^3+r^2\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta}-r^2\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta}\right)\right] \\ \hat{\tau}_{zz}^{(2)} &= \frac{(2-\xi)}{r^4}\left[2(1-\xi)\epsilon_0\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta}\right)^4+r^2\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta}+\right. \\ &\quad \left.4(1-\xi)\epsilon_0r^2\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta}\right)^2+2(1-\xi)\epsilon_0r^4\left(\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)^4+\frac{\partial w^{(2)}}{\partial r}\right)\right]\end{aligned}$$

Notemos que en la ecuación constitutiva  $\mathbf{D}^{(1)} = 0$ , dado que el análisis a  $\mathcal{O}(\text{Wi}^1)$  muestra que  $\vec{v}^{(1)} = 0$ , así como también se tiene que  $\text{Tr } \hat{\tau}^{(0)} = \text{Tr } \hat{\tau}^{(2)} = 0$ .

Al igual que en los desarrollos anteriores, para analizar los flujos secundarios  $v^{(3)}$  y  $u^{(3)}$  definimos una función corriente  $\Psi^{(3)}$ , que satisface

$$\nabla^4\Psi^{(3)} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\chi_\theta^{(3)})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\chi_r^{(3)}}{\partial\theta} \quad (3.89)$$

Donde los términos forzantes a este orden son:

$$\chi_r^{(3)} = (\nabla\hat{\tau}^{(2)})_r = 80r^2 - 24k(k+4)\epsilon r^{k+1}\sin k\theta \quad (3.90)$$

$$\chi_\theta^{(3)} = (\nabla\hat{\tau}^{(2)})_\theta = -2kp^4\epsilon r^{k-5}\cos k\theta[16r^6 + 4kr^6] \quad (3.91)$$

Calculando el lado derecho de la ecuación anterior en base a los valores encontrados para tales términos se tiene que

$$r\nabla^4\Psi^{(3)} = 8\epsilon p^4\xi^2(\xi-2)k(k-1)(k+4)r^{k+1}\cos k\theta \quad (3.92)$$

expresión que, al ser distinta de cero, indica la presencia de flujos secundarios. Para calcular de manera precisa la función  $\Psi^{(3)}$  que determina tales flujos, debemos resolver la ecuación diferencial expuesta anteriormente. El lado derecho de la ecuación anterior tiene la forma,

$$B(r, \theta) = \epsilon p^4\xi^2(\xi-2)g(r)\cos k\theta \quad (3.93)$$

donde

$$g(r) = 8k(k-1)(k+4)r^{k+1} \quad (3.94)$$

Proponemos una solución de la forma,

$$\Psi(r, \theta) = \epsilon \xi^2 (\xi - 2) p^4 f(r) \cos \theta \quad (3.95)$$

con lo cual obtenemos la ecuación

$$\nabla^4 [f(r) \cos k\theta] = g(r) \cos k\theta \quad (3.96)$$

El operador  $\nabla^4$ , al actuar sobre una función del tipo  $\cos k\theta$  produce factores multiplicativos, y la misma función. De esta forma se tiene:

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 f}{dr^3} - (2k^2 + 1) \frac{d^2 f}{dr^2} + (2k^2 + 1)r \frac{df}{dr} + k^2(k^2 - 4)f = r^4 * g \quad (3.97)$$

Buscamos primero una solución a la ecuación homogénea, que corresponde a

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 f}{dr^3} - (2k^2 + 1) \frac{d^2 f}{dr^2} + (2k^2 + 1)r \frac{df}{dr} + k^2(k^2 - 4)f = 0 \quad (3.98)$$

Esta ecuación corresponde a una ecuación de Cauchy-Euler de 4º orden, por lo cual es posible buscar soluciones de la forma  $f_h = r^m$ . Introduciendo esta función de prueba se obtienen una ecuación algebraica de 4º que determina los posibles valores de  $m$ . Así, la solución de la ecuación homogénea es:

$$f_h = c_1 r^k + c_2 r^{-k} + c_3 r^{k+2} + c_4 r^{-k+2} \quad (3.99)$$

Físicamente debemos exigir que la función sea continua en el origen, por lo cual imponemos que  $c_2 = c_4 = 0$ . Por otra parte, la solución particular es

$$f_p = r^{k+4} \quad (3.100)$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_3$  quedan fijas al imponer que tanto  $\Psi^{(3)}$  como su derivada sea anule en  $r = 1$ . De esta forma, la función corriente  $\Psi^{(3)}$  es:

$$\Psi^{(3)}(r, \theta) = \epsilon \xi^2 (\xi - 2) p^4 \frac{k(k-1)(k-4)}{4(k+1)(k+2)} (1-r^2) r^k \cos k\theta \quad (3.101)$$

En virtud de que los flujos secundarios calculados según las ecuaciones (3.47) satisfagan la condición de no deslizamiento sobre la superficie del tubo  $\partial M$ , podemos escribir la función corriente como  $\Psi = \epsilon w^{(0)2} F(r) \cos k\theta$ . Utilizando el resultado recién obtenido, se obtiene:

$$\Psi^{(3)}(r, \theta) = \epsilon \xi [(k+5)\xi(2-\xi) - 5(k+4)(1-\xi)\epsilon_0] p^4 \frac{k(k-1)}{4(k+1)(k+2)} w^{(0)2} r^k \cos k\theta$$

Encontrada la función de corriente  $\Psi$ , es directo obtener la expresión para los flujos secundarios según las relaciones (3.47). Estos son

$$\begin{aligned} u^{(3)}(r, \theta) &= -\epsilon \xi [(k+5)\xi(2-\xi) - 5(k+4)(1-\xi)\epsilon_0] p^4 w^{(0)2} \\ &\quad \times \frac{k(k-1)}{4(k+1)(k+2)} r^{k-1} \sin k\theta \\ v^{(3)}(r, \theta) &= \epsilon \xi [(k+5)\xi(2-\xi) - 5(k+4)(1-\xi)\epsilon_0] (k - (k+4)r^2) p^4 w^{(0)} \\ &\quad \times \frac{k(k-1)}{4(k+1)(k+2)} r^{k-1} \cos k\theta \end{aligned} \quad (3.102)$$

Por otra parte, la ecuación para el flujo longitudinal es

$$u^{(3)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} + \frac{v^{(3)}}{r} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} = \nabla^2 w^{(3)} \quad (3.103)$$

Resolviendo esta ecuación al igual que anteriormente e introduciendo el factor de forma encontramos que la solución es

$$\begin{aligned} w^{(3)} &= \epsilon \frac{p^4 k^2 (k-1) \xi [\xi(2-\xi)(n+5) - 5(n+4)(1-\xi)\epsilon_0]}{24(k+1)^2 (k+2)^2 (k+3)} w^{(0)} \left\{ 11 - 7r^2 \right. \\ &\quad \left. + 2r^4 + (r^2 - 1)(k^2(r^2 - 1) + 3k(r^2 - 2)) \right\} r^k \sin k\theta \end{aligned} \quad (3.104)$$

Vale notar que el análisis presentado es consistente con las conclusiones obtenidas por Pipkin, Green y Langlois, ya que se encuentra que los flujos secundarios  $u$  y  $v$  no aparecen sino a partir de exactamente el tercer orden en el número de Weissen-

berg. Además, se observa que las expresiones para tales flujos (así como también de la función corriente  $\Psi^{(3)}$ ) son proporcionales al parámetro de perturbación de forma  $\epsilon$ , incluso al orden más bajo. Esto refleja el hecho de que, además del carácter no Newtoniano del fluido, una condición adicional necesaria para la presencia de tales flujos es la no circularidad del tubo. Es decir, en el caso viscoelástico ( $Wi \neq 0$ ) pero circular ( $\epsilon = 0$ ) tales flujos desaparecen. De la expresión para  $w^{(3)}$  se aprecia que esta componente del flujo es también al menos proporcional a  $\epsilon$ , por lo cual en el caso circular tampoco existiría aporte al flujo longitudinal proveniente del orden tercero en el número de Weissenberg, similarmente a lo que sucede para  $\mathcal{O}(Wi^1)$ , donde incluso en este caso de ducto con geometría no circular no aparece un aporte al flujo principal en tal orden.



## Capítulo 4

# Problema de Graetz no circular para un fluido viscoelástico

En la presente sección utilizamos como campo convectivo el calculado en el capítulo anterior y con el generalizaremos el problema de Graetz al caso en el cual la cañería por el cual circula el fluido tiene una sección transversal no circular y el flujo es de naturaleza viscoelástica, descrito particularmente por modelo de Phan-Thien-Tanner Modificado (MPTT).

Al igual que en el caso del tubo de sección circular, la ecuación de energía que rige el campo de temperaturas del fluido  $T(r, \theta, z)$  en régimen estacionario es:

$$\vec{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (4.1)$$

siendo  $\alpha$  la difusividad térmica del fluido y  $\vec{v}$  la solución a las ecuaciones de Navier-Stokes satisfaciendo la condición de no deslizamiento sobre las paredes del tubo previamente obtenidas. El flujo tiene una temperatura  $T_0$  en la entrada ( $z = 0$ ), mientras que las paredes del tubo se mantienen a una temperatura  $T_w$  para todo  $z > 0$ . Al igual que se hizo anteriormente, estas condiciones de borde térmicas pueden simplificarse al adimensionalizar el campo de temperaturas en la forma  $T^* = (T - T_w)/(T_0 - T_w)$  (en lo subsiguiente se omite el asterisco para no sobrecargar la notación). Así, la condición de entrada y la condición térmica sobre la superficie del tubo son respecti-

vamente:

$$T(r, \theta, 0) = 1 \quad (4.2)$$

$$T(r, \theta, z)|_{\partial M} = 0 \quad (4.3)$$

## 4.1. Esquema de solución

Al igual que para encontrar el campo de velocidades en la sección 2 también se utiliza un método sistemático para resolver la ecuación de energía (4.1) para la distribución de temperaturas  $T$ , el cual puede resumirse en los siguientes pasos:

1. **Expansión.** Se expande el campo de temperaturas  $T$  y el campo de velocidades  $v$  en la forma

$$\Phi = \Phi^{(0)} + Wi\Phi^{(1)} + \dots = \sum_{i=0}^N Wi^i \Phi^{(i)} \quad (4.4)$$

Estas expansiones se introducen en la ecuación de energía (4.1) y se igualan términos con potencias semejantes en  $Wi$ , lo cual da lugar a ecuaciones perturbativas jerarquizadas por orden (y se utiliza además el mismo esquema de adimensionalización usado anteriormente).

2. **Solución.** Una vez escrita la enésima ecuación de energía asociada al orden  $O(Wi^n)$ , se busca una solución para ella en la forma

$$T^{(n)} = T_0^{(n)}(r, z) + \epsilon T_1^{(n)}(r, \theta, z) \sin k\theta + \dots \quad (4.5)$$

Usando la anterior función de prueba uno puede coleccionar términos con potencias similares, esta vez del parámetro  $\epsilon$ , dentro de la ecuación enésima de energía.

3. **Regularidad.** Debido a que el campo de temperaturas escrito en la forma (4.5) no satisface la condición de borde en el contorno del tubo, reescribiremos tal solución introduciendo el factor de forma como

$$T^{(n)} = G(f_0^{(n)} + \epsilon f_1^{(n)} + \dots) \quad (4.6)$$

De tal manera que la condición térmica  $T^{(n)} = 0$  se satisface sobre la superficie del tubo de forma automática, para todo orden en  $Wi$ . Igualando ambas expresiones para  $T^{(n)}$ , ecuaciones (4.5) y (4.6), vemos que estas nuevas funciones  $f_0^{(n)}$  y  $f_1^{(n)}$  hasta orden  $O(\epsilon^1)$  vienen dadas por

$$f_0^{(n)}(r, z) = \frac{T_0^{(n)}}{1 - r^2} \quad (4.7)$$

$$f_1^{(n)}(r, \theta, z) = \frac{T_1^{(n)} - r^k f_0^{(n)}}{1 - r^2} \sin k\theta, \quad (4.8)$$

Para que las funciones auxiliares sean continuas a la distancia radial  $r = 1$  imponemos

$$T_0^{(n)}(1, z) = 0 \quad (4.9)$$

$$T_1^{(n)}(1, z) = f_0^{(n)}(1, z) \quad (4.10)$$

Estas condiciones de regularidad deben ser tomadas en cuentas al resolver la enésima ecuación de energía para el enésimo campo de temperaturas. Estas condiciones juegan el papel de 'condiciones de borde' para las funciones  $T_0^{(n)}$  y  $T_1^{(n)}$ .

4. **Condición de entrada.** Como una condición de consistencia vemos que para recuperar efectivamente la solución original de Graetz (caso Newtoniano y circular) cuando  $\epsilon$  y  $Wi$  tienden a 0, la condición de entrada en  $z = 0$  se descompone de la forma siguiente para los campos de temperatura  $T_0^{(n)}$  y  $T_1^{(n)}$ ,

$$T_0^{(n)}(r, 0) = \delta_{n0} \quad (4.11)$$

$$T_1^{(n)}(r, 0) = 0 \quad \forall n, \quad (4.12)$$

donde  $\delta_{n0}$  es la delta de Kronecker. En otras palabras, los campos de temperatura asociados a los ordenes superiores en  $\epsilon$  y  $Wi$  tienen una condición de entrada cero.

Vale la pena notar que de acuerdo a lo mencionado en el punto 3 la condición de regularidad para la función  $T_1^{(n)}$  dada por (4.10) corresponde matemáticamente a una

condición de borde inhomogenea y dependiente de  $z$ . En general, además, las ecuaciones encontradas serán ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con términos inhomogeneos que dependen particularmente de la coordenada axial  $z$ . Para resolver este tipo de ecuaciones se adaptó un método utilizado originalmente en ecuaciones donde existen términos inhomogeneos dependientes del tiempo (obtenido del libro [15]). Para utilizar tal método en nuestro caso, hemos interpretado la coordenada axial  $z$  como una coordenada 'temporal' del sistema. Se empleará tal método en todas las ecuaciones encontradas que sean de la naturaleza descrita, y en particular se ilustrará en detalle al resolver la ecuación de orden  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ , dentro de la ecuación de energía de orden  $\mathcal{O}(\text{Wi}^0)$ .

Como se observó en el capítulo anterior, la primera contribución a los flujos secundarios aparece a orden  $\mathcal{O}(\text{Wi}^3)$ , por lo cual trabajaremos con  $N = 3$ . Para orden  $\mathcal{O}(\text{Wi}^0)$  naturalmente no hay presencia viscoelástica, y por lo tanto corresponde a la descripción de un flujo Newtoniano en un ducto no circular. En la siguiente sección estudiamos este caso.

## 4.2. Temperatura a orden $\mathcal{O}(\text{Wi}^0)$

La ecuación a orden cero en la expansión respecto al parámetro  $\text{Wi}$  es

$$\nabla^2 T^{(0)} = w^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \quad (4.13)$$

donde  $T^{(0)} = T^{(0)}(r, \theta, z)$ , y  $w^{(0)} = \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\theta \right]$ . Adimensionalmente el operador Laplaciano de la ecuación anterior se escribe explícitamente como:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T^{(0)} = w^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \quad (4.14)$$

Trabajando en el mismo régimen convectivo del problema original, esto es  $\text{Pe} \gg 1$ , la ecuación anterior se reduce a

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) T = (1 - r^2 + \epsilon r^k \sin k\theta) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.15)$$

De acuerdo al punto 2 del esquema de solución usamos entonces una expansión en torno al parámetro de perturbación de borde  $\epsilon$  en la forma

$$T^{(0)} = T^{(0)}_0(r, z) + \epsilon T^{(0)}_1(r, \theta, z) \sin k\theta + \dots \quad (4.16)$$

De esta forma a orden cero en  $\epsilon$  igualando potencias se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^{(0)}_0}{\partial r} \right) = (1 - r^2) \frac{\partial T^{(0)}_0}{\partial z} \quad (4.17)$$

Naturalmente, Eq. (4.17), junto a sus correspondientes condiciones de borde y de entrada reproduce el problema original de Graetz para el flujo Newtoniano a lo largo de un conducto cilíndrico, cuyo análisis se mostró en detalle en el capítulo 1. Según lo visto ahí, la temperatura puede expresarse en términos de una expansión sobre un conjunto completo en la forma:

$$T^{(0)}_0(r, z) = \sum_n a_{n0} \psi_{n0}(r) e^{-\lambda_{n0}^2 z} \quad (4.18)$$

donde las autofunciones  $\psi_{n0}$  satisfacen la ecuación de autovalores

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \psi_{n0} = -\lambda_{n0}^2 (1 - r^2) \psi_{n0} \quad (4.19)$$

y los coeficientes son fijados por la condición de entrada en  $z = 0$ . Las correspondientes autofunciones pueden obtenerse mediante la sustitución  $a_{n0} \psi_{n0} = e^{-y/2} M_{n0}(y)$ , donde  $y = \lambda_{n0} r^2$ . Utilizando esto en la ecuación Eq. (4.19), uno obtiene la siguiente ecuación hipergeométrica

$$y \frac{d^2 M_{n0}}{dy^2} + (1 - y) \frac{dM_{n0}}{dy} + \left( \frac{\lambda_{n0}}{4} - \frac{1}{2} \right) M_{n0} = 0 \quad (4.20)$$

donde  $M(a, c, y)$  es la solución regular, conocida como función de Kummer. Aquí  $a = \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda_{n0}}{4} \right)$ ,  $c = 1$ , y los autovalores asociados  $\lambda_{n0}$  se determinan aplicando la condición de borde sobre el ducto Eq. (4.9), esto es  $M_{n0}(1) = 0$ , lo cual resuelve el problema hasta este punto.

Habiendo identificado la descripción a orden cero respecto al desarrollo en series en el

parámetro  $\epsilon$ , procedemos a resolver el siguiente orden, el cual aporta la contribución no circular al caso Newtoniano. A primer orden en el parámetro  $\epsilon$ , sustituyendo la función dada en Eq. (4.16) en la ecuación Eq. (4.15) produce

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] T_1^{(0)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} + r^k \frac{\partial T_0^{(0)}}{\partial z} \quad (4.21)$$

Esta ecuación ahora incluye explícitamente la dependencia en la forma del tubo a través del parámetro  $k$  utilizado para identificar la geometría deseada. Acá la distribución de temperatura  $T_0^{(0)}$  (o más precisamente, su derivada respecto a  $z$ ) aparece como un término no homogéneo que depende de la coordenada  $z$ . Además, la condición impuesta por la ecuación (4.10) sobre  $T_1^{(0)}$  es una condición de borde no homogénea que depende de  $z$ . Esto último puede ser superado definiendo convenientemente una nueva función en la forma  $T_1'^{(0)} = T_1^{(0)} - g$ , donde

$$g(r, z) = -\frac{1}{2} r^{k-1} \frac{\partial T_0}{\partial r} \quad (4.22)$$

De esta manera, la condición de borde para  $T^{(0)'}_1$  es homogénea, es decir  $T^{(0)'}_1(1, z) = 0$ . De esta forma, se obtiene la ecuación

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] T^{(0)'}_1 = (1 - r^2) \frac{\partial T^{(0)'}_1}{\partial z} + Q(r, z) \quad (4.23)$$

donde ahora el término no homogéneo tiene la forma

$$Q(r, z) = r^k \frac{\partial T_0}{\partial z} + (1 - r^2) \frac{\partial g}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \right] g \quad (4.24)$$

Para resolver (4.23) utilizamos un procedimiento estándar originalmente usado para resolver ecuaciones diferenciales parciales que incluyen términos no homogéneos que dependen del tiempo [15] (discutido brevemente en el apéndice B.3), donde aquí interpretamos  $z$  como una coordenada 'temporal' del sistema (para establecer la analogía). Para obtener la solución general, primero resolvemos el caso homogéneo  $Q = 0$ . Al igual que en el caso circular, podemos resolver el caso homogéneo mediante una expansión

$$T^{(0)'}_1 = \sum_n a_{nk} \psi_{nk}(r) e^{-\lambda_{nk}^2 z} \quad (4.25)$$

donde ahora la correspondiente ecuación de autovalores es

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] \psi_{nk} = -\lambda_{nk}^2 (1 - r^2) \psi_{nk} \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) puede ser resuelta similarmente a la Eq. (4.19) definiendo  $\psi_{nk} = e^{-y/2} y^{k/2} M_{nk}(y)$ , con  $y = \lambda_{nk} r^2$ . De esta manera obtenemos la siguiente ecuación hipergeométrica:

$$y \frac{d^2 M_{nk}}{dy^2} + (k + 1 - y) \frac{dM_{nk}}{dy} + \left( \frac{\lambda_{nk}}{4} - \frac{k + 1}{2} \right) M_{nk} = 0 \quad (4.27)$$

Como se indicó anteriormente, la solución a esta ecuación es la función de Kummer  $M(a, c, y)$ , donde esta vez identificamos que  $a = \left( \frac{k+1}{2} - \frac{\lambda_{nk}}{4} \right)$  and  $c = k + 1$ . Observamos consistentemente que para  $k = 0$  la influencia de la geometría deformada desaparece, ya que Eq. (4.27) reproduce Eq. (4.20) en tal caso.

n	Autovalores $\lambda_{nk}$		
	Circular (k=0)	Triangular (k=3)	Cuadrado (k=4)
1	2,7044	8,4221	10,3391
2	6,6790	12,5208	14,4534
3	10,6730	16,5655	18,5116
4	14,6710	20,5905	22,5465
5	18,6700	24,6064	26,5695
6	22,6700	28,6172	30,5858
7	26,6687	32,6251	34,5878
8	30,6683	36,6310	38,6070
9	34,6680	40,6355	42,6134
10	38,6680	44,6392	46,6201

Cuadro 4.1: Primeros 10 autovalores del problema de Graetz para un ducto con geometría circular, triangular y cuadrada

Para incorporar la influencia del término no homogéneo  $Q$  en la solución homoge-

nea Eq. (4.25), hacemos variar los coeficientes de la expansión como  $a_{nk} \rightarrow a_{nk}(z)$ . Sustituyendo esta solución modificada en Eq. (4.23), y utilizando la ecuación de autovalores Eq. (4.26), obtenemos

$$(1 - r^2) \sum_n \dot{a}_{nk} \psi_{nk} e^{-\lambda_{nk}^2 z} = -Q \quad (4.28)$$

Acá  $\dot{a}_{nk} \equiv da_{nk}/dz$ . Utilizando la relación de ortogonalidad para las autofunciones  $\psi_{nk}$  (que puede leerse de la Eq. (4.26)), e integrando ambos lados con  $\int_0^z \int_0^1 dz' dr r \psi_{lk}$ , encontramos la siguiente expresión para los coeficientes:

$$a_{lk}(z) = a_{lk}(0) - \frac{\int_0^z \int_0^1 dz' dr r \psi_{lk} Q e^{\lambda_{lk}^2 z}}{\int_0^1 dr r (1 - r^2) \psi_{lk}^2} \quad (4.29)$$

Usando la forma explícita de  $Q$  Eq. (4.24), y haciendo las siguientes definiciones

$$F_{ln}^{k0} \equiv \frac{\int_0^1 dr r \psi_{lk} F_{n0}(r)}{\int_0^1 dr r (1 - r^2) \psi_{lk}^2} \quad (4.30)$$

$$F_{0n} \equiv \lambda_{n0}^2 r^k \left( \psi_{n0} - (1 - r^2) \frac{\psi'_{n0}}{2r} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \right] (r^{k-1} \psi'_{n0}) \quad (4.31)$$

la solución general al problema Eq. (4.25) puede escribirse como

$$T^{(0)}_1 = \sum_l \left[ a_{lk}(0) - \sum_n a_{n0} F_{ln}^{k0} \frac{(e^{-(\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2)z} - 1)}{\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2} \right] \psi_{lk} e^{-\lambda_{lk}^2 z} \quad (4.32)$$

Ahora imponemos la condición de entrada en  $z = 0$ , con lo cual obtenemos que los coeficientes  $a_{lk}(0)$  se anulan para todos los valores de  $l$  y  $k$ , de tal forma que la solución en términos de  $T_1^{(0)}$  es

$$T^{(0)}_1 = \sum_n a_{n0} e^{-\lambda_{n0}^2 z} \frac{r^{k-1} \psi'_{n0}(r)}{-2} - \sum_{l,n} a_{n0} F_{ln}^{k0} \frac{(e^{-(\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2)z} - 1)}{\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2} \psi_{lk} e^{-\lambda_{lk}^2 z} \quad (4.33)$$

Con esta expresión para  $T_1^{(0)}$ , el campo de temperaturas expresado en la forma de la

expansión Eq. (4.16) conservando términos hasta orden  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  es

$$T^{(0)} = \sum_n a_{n0} \psi_{n0} e^{-\lambda_{n0}^2 z} + \epsilon \left[ \sum_n a_{n0} e^{-\lambda_{n0}^2 z} \frac{r^{k-1} \psi'_{n0}(r)}{-2} - \sum_{l,n} a_{n0} F_{ln}^{k0} \frac{(e^{-(\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2)z} - 1)}{\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2} \psi_{lk} e^{-\lambda_{lk}^2 z} \right] \sin k\theta \quad (4.34)$$

Como se mencionó anteriormente, la solución final se escribe introduciendo el factor de forma  $w$  como en la Eq. (3.12). Así, la distribución de temperaturas tiene es

$$T^{(0)} = w \frac{\sum_n a_{n0} \psi_{n0} e^{-\lambda_{n0}^2 z}}{1 - r^2} - \epsilon \frac{\sum_n a_{n0} r^k \left( \frac{\psi'_{n0}}{2r} + \frac{\psi_{n0}}{1-r^2} \right) e^{-\lambda_{n0}^2 z} + \sum_{l,n} a_{n0} F_{ln}^{k0} \frac{(e^{-\lambda_{n0}^2 z} - e^{-\lambda_{lk}^2 z})}{\lambda_{n0}^2 - \lambda_{lk}^2} \psi_{lk}}{1 - r^2} \sin k\theta \quad (4.35)$$

Este campo de temperaturas obedece la condición de borde térmica en las paredes del ducto deformado, y puede utilizarse para cualquier valor entero positivo de  $k$ . Así, Eq. (4.35) es una solución general para una amplia familia de geometrías, cuyas deformaciones se caracterizan escogiendo valores de  $\epsilon$ , y sirve para caracterizar un fluido de naturaleza Newtoniana.

### 4.3. Temperatura a orden $\mathcal{O}(\text{Wi}^1)$

La ecuación para el campo de temperaturas a primer orden en el número de Weissenberg  $\text{Wi}$  es

$$\nabla^2 T^{(1)} = w^{(0)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} + w^{(1)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \quad (4.36)$$

en el análisis del campo de velocidades se encontró que la componente axial  $w^{(1)}$  (así como transversales) era idénticamente cero, por lo cual la ecuación anterior se reduce a

$$\nabla^2 T^{(1)} = w^{(0)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \quad (4.37)$$

La forma de esta ecuación es igual a la encontrada a  $\mathcal{O}(\text{Wi}^0)$ . Utilizando  $w^{(0)} = 1 - r^2 + \epsilon r^k \sin k\theta$  y proponiendo  $T^{(1)} = T_0^{(1)}(r, z) + \epsilon T_1^{(1)}(r, z) \sin k\theta$  al igual que anteriormente, uno encuentra que

$$\nabla^2 T_0^{(1)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_0^{(1)}}{\partial z} \quad (4.38)$$

$$\nabla^2 T_1^{(1)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} + r^k \frac{\partial T_0^{(1)}}{\partial z} \sin k\theta \quad (4.39)$$

La primera ecuación tiene la condición de regularidad  $T_0(1, z) = 0$ , y la condición inicial  $T_0(r, 0) = 0$ , por lo cual uno encuentra que

$$T_0^{(1)} = 0 \quad (4.40)$$

Esto reduce la segunda ecuación a la forma

$$\nabla^2 T_1^{(1)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \quad (4.41)$$

debido a que  $T_0^{(1)} = 0$ , la condición de regularidad para  $T_1^{(1)}$  es que sea idénticamente cero en  $r = 1$ , lo cual implica entonces que

$$T_1^{(1)} = 0 \quad (4.42)$$

por lo cual concluimos que a primer orden en  $\text{Wi}$  el campo de temperaturas es idénticamente nulo

$$T^{(1)} = 0 \quad (4.43)$$

A pesar de tratarse de un sistema esencialmente distinto, vale mencionar que esta contribución nula al campo de temperaturas a orden  $\mathcal{O}(\text{Wi})$  es idéntica a la encontrada en [12] para un escenario donde la transferencia de calor en la superficie del tubo (en vez de la temperatura) es mantenida constante. Esto se debe a la estructura de las ecuaciones perturbativas es similar, lo que en conjunto a las condiciones de borde genera soluciones idénticamente nulas en ciertos ordenes perturbativos.

## 4.4. Temperatura a orden $O(Wi^2)$

La ecuación de energía a segundo orden en  $Wi$  produce

$$\alpha \nabla^2 T^{(2)} = \vec{v}^{(2)} \cdot \nabla T^{(0)} + \vec{v}^{(1)} \cdot \nabla T^{(1)} + \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla T^{(2)} \quad (4.44)$$

En la sección anterior se encontró que el campo de velocidades asociado a este orden es  $\vec{v}^{(2)} = (0, 0, w^{(2)})$ , donde el campo longitudinal se escribe como:

$$w^{(2)} = w^{(0)} p^3 \left\{ [4(1 - \xi) - \xi(2 - \xi)\epsilon_0](1 + r^2) + \epsilon \frac{\xi(2 - \xi)(3k - 1) - 4(1 - \xi)(k^2 + 2k - 1)\epsilon_0}{(k + 1)} r^k \sin k\theta \right\}. \quad (4.45)$$

En esta expresión,  $p$  es el gradiente adimensional de presión a lo largo de la coordenada axial, mientras que  $\epsilon_0$  y  $\xi$  son parámetros constitutivos incluidos por el modelo. Reemplazando los campos de velocidad hasta segundo orden en  $Wi$  encontramos la siguiente ecuación inhomogénea a orden  $O(\epsilon^0)$ :

$$\nabla^2 T_0^{(2)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_0^{(2)}}{\partial z} + Q_0(r, z), \quad (4.46)$$

donde el término inhomogéneo es

$$Q_0(r, z) = -\frac{A_0}{16} (1 - r^4) \frac{\partial T_0^{(0)}}{\partial z}, \quad (4.47)$$

con  $A_0 \equiv 16p^3[\xi(2 - \xi) - 4(1 - \xi)\epsilon_0]$ . Primero resolvemos el problema homogéneo por medio de la expansión sobre el conjunto completo de autofunciones encontrado anteriormente, esto es:

$$T_0^{(2)} = \sum_n a_{n0} \psi_{n0}(r) e^{-\lambda_{n0}^2 z} \quad (4.48)$$

donde  $\psi_{n0}$  satisfacen la ecuación (4.19). Aplicando la condición de regularidad en  $r = 1$  encontramos el mismo conjunto de autovalores  $\{\lambda_{n0}\}$  que anteriormente. Sin embargo, para obtener la solución general a la ecuación inhomogénea ahora debemos variar coeficientes como  $a_{n0} \rightarrow a_{n0}(z)$ , al igual que se hizo previamente. Por este

método encontramos que

$$T_0^{(2)} = \sum_n \left[ a_{n0}(0) - \sum_l a_{l0} F_{nl}^{00} \frac{(e^{-(\lambda_{l0}^2 - \lambda_{n0}^2)z} - 1)}{\lambda_{l0}^2 - \lambda_{n0}^2} \right] \psi_{n0} e^{\lambda_{n0}^2 z}. \quad (4.49)$$

Imponiendo ahora la condición de entrada dada por la ecuación (4.12) se tiene que  $a_{n0}(0) = 0 \forall n$ . Al igual que antes, a orden  $O(\epsilon)$  la condición de regularidad para  $T_1^{(2)}$  es una condición de frontera no homogénea y dependiente de  $z$ , por lo cual trabajamos en términos de la función  $T_1^{(2)} = T_1^{(2)} - g^{(2)}$ , donde  $g^{(2)}$  está dada por

$$g^{(2)} = \sum_{l,n} a_{l0} F_{nl}^{00} \frac{e^{-\lambda_{l0}^2 z} - e^{-\lambda_{n0}^2 z}}{\lambda_{l0}^2 - \lambda_{n0}^2} \frac{r^k \psi'_{n0}}{2r} \quad (4.50)$$

De esta forma tenemos que

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] T_1^{(2)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial z} + Q_1^{(2)}(r, z) \quad (4.51)$$

donde el término inhomogeneo en este caso es

$$\begin{aligned} Q_1^{(2)} &= r^k \frac{\partial T_0^{(2)}}{\partial z} - \frac{A_0}{16} (1 - r^4) \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} + \frac{2A_1 k (1 - r^2) - A_0 (k + 1)}{8(k + 1)} r^k \frac{\partial T_0^{(0)}}{\partial z} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] g^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

con  $A_1 \equiv 16p^3 k [-\xi(2 - \xi) + (k + 3)(1 - \xi)\epsilon_0]$ . Para resolver la ecuación asociada homogénea escribimos

$$T_1^{(2)} = \sum_n a_{nk} \psi_{nk}(r) e^{-\lambda_{nk}^2 z} \quad (4.53)$$

donde  $\psi_{nk}$  satisface la ecuación de autovalores (4.26), y la condición de regularidad implica el mismo conjunto de autovalores  $\{\lambda_{nk}\}$ . Siguiendo ahora el esquema  $a_{n0} \rightarrow$

$a_{n0}(z)$  e imponiendo la condición de entrada nula, encontramos que

$$\begin{aligned}
 T_1^{(2)} = & \sum_{l,n} a_{l0} F_{nl}^{00} \frac{e^{-\lambda_{l0}^2 z} - e^{-\lambda_{n0}^2 z}}{\Delta_{mk}^{n0}} \frac{r^k \psi'_{n0}}{2r} + \sum_{n,m} a_{n0} \psi_{mk} e^{-\lambda_{mk}^2 z} \left\{ \frac{\tilde{J}_{nm}(e^{\Delta_{mk}^{n0} z} - 1)}{\Delta_{mk}^{n0}} \right. \\
 & + \sum_l \left( \tilde{F}_{nlm} \left[ \lambda_{l0}^2 \frac{e^{\Delta_{mk}^{l0} z} - 1}{\Delta_{mk}^{l0} \Delta_{n0}^{l0}} - \lambda_{n0}^2 \frac{e^{\Delta_{mk}^{n0} z} - 1}{\Delta_{mk}^{n0} \Delta_{n0}^{l0}} \right] \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{G}_{nlm} \left[ \lambda_{lk}^2 \frac{e^{\Delta_{mk}^{lk} z} - 1}{\Delta_{mk}^{lk} \Delta_{n0}^{lk}} - \lambda_{n0}^2 \frac{e^{\Delta_{mk}^{n0} z} - 1}{\Delta_{mk}^{n0} \Delta_{n0}^{lk}} \right] \right) \right\}, \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

donde hemos definido la combinación

$$\Delta_{ab}^{cd} \equiv \lambda_{ab}^2 - \lambda_{cd}^2, \quad (4.55)$$

y  $\tilde{J}_{nm}$ ,  $\tilde{F}_{nlm}$  y  $\tilde{G}_{nlm}$  son coeficientes numéricos que provienen de  $Q_1^{(2)}$ , y están dados por integrales que involucran expresiones complejas de las distintas autofunciones  $\psi$  y potencias de  $r$ , las cuales por simplicidad no escribiremos aquí en detalle. Notemos sin embargo que en las expresiones previas hemos aislado toda la dependencia funcional de  $T_1^{(2)}$  en las variables  $r$  y  $z$ , la cual esta vez es más compleja que en la solución previa a orden  $\mathcal{O}(Wi^0)$ . Este hecho se debe a los múltiples cantidades involucrados en el término tipo fuente Eq. (4.52), desde el cual los autovalores  $\lambda$  se mezclan en la solución en las combinaciones mostradas más arriba.

Al igual que se hizo previamente, es directo ahora poner esta solución en la forma (3.12) introduciendo el factor de forma según lo indicado.

## 4.5. Temperatura a orden $\mathcal{O}(Wi^3)$

La ecuación para el campo de temperaturas a tercer orden en el número de Weissenberg  $Wi$  es

$$\nabla^2 T^{(3)} = v^{(0)} \cdot \nabla T^{(3)} + v^{(1)} \cdot \nabla T^{(2)} + v^{(2)} \cdot \nabla T^{(1)} + v^{(3)} \cdot \nabla T^{(0)} \quad (4.56)$$

Las contribuciones al campo de velocidades hasta orden  $\mathcal{O}(Wi^2)$  tienen solo componentes longitudinales, esto es  $\vec{v}^{(0)} = (0, 0, w^{(0)})$ ,  $\vec{v}^{(1)} = 0$  y  $\vec{v}^{(2)} = (0, 0, w^{(2)})$ . Sin

embargo, a orden  $\mathcal{O}(Wi^3)$  existen contribuciones a los flujos secundarios, es decir se tiene  $\vec{v}^{(3)} = (u^{(3)}, v^{(3)}, w^{(3)})$ . Del análisis de la sección anterior se tiene que tales flujos secundarios están dados en términos de la función corriente dada por:

$$\Psi^{(3)}(r, \theta) = \epsilon A_2(\xi, k) w^{(0)2} r^k \cos k\theta, \quad (4.57)$$

donde

$$u^{(3)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(3)}}{\partial \theta}, \quad v^{(3)} = -\frac{\partial \Psi^{(3)}}{\partial r}, \quad (4.58)$$

mientras la componente longitudinal está dada por

$$w^{(3)} = \epsilon A_3(\xi, k) w^{(0)} r^k \sin k\theta \times \left[ 11 - 7r^2 + 2r^4 + (r^2 - 1)(k^2(r^2 - 1) + 3k(r^2 - 2)) \right], \quad (4.59)$$

con

$$A_2 \equiv \frac{\xi p^4 [\xi(2 - \xi)(k + 5) - 5(k + 4)(1 - \xi)\epsilon_0] k(k - 1)}{4(k + 1)(k + 2)}, \quad (4.60)$$

$$A_3 \equiv \frac{p^4 k^2 (k - 1) \xi [\xi(2 - \xi)(k + 5) - 5(k + 4)(1 - \xi)\epsilon_0]}{24(k + 1)^2 (k + 2)^2 (k + 3)}.$$

Entonces, utilizando los resultados de órdenes previos, vemos que la ecuación de calor (4.56) toma la forma,

$$\nabla^2 T^{(3)} = w^{(0)} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial z} + \left[ \bar{u}^{(3)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} + \frac{\bar{v}^{(3)}}{r} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} + w^{(3)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \right],$$

donde definimos  $\bar{u}^{(3)} = Pe u^{(3)}$  y  $\bar{v}^{(3)} = Pe v^{(3)}$ . Notemos que de acuerdo a las expresiones (4.57), (4.58) y (4.59), esta vez se está en presencia de una superposición de términos con seno y coseno provenientes del paréntesis de la ecuación previa; este último proviene del producto de  $v^{(3)}$  con  $\partial T^{(0)}/\partial \theta$ . Sin embargo, tales cantidades producen términos proporcionales a  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  al orden más bajo, y por lo tanto no aparecerá en nuestro presente análisis. Luego, al igual que hecho previamente, podemos buscar una solución como:

$$T^{(3)} = T_0^{(3)}(r, z) + \epsilon T_1^{(3)} \sin k\theta \quad (4.61)$$

De las ecuaciones (4.57), (4.58) y (4.59) notamos que  $u^{(3)}$ ,  $v^{(3)}$  y  $w^{(3)}$  son proporcionales a  $\epsilon$  al orden más bajo. Luego, juntando potencias de  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$  tenemos simplemente la ecuación

$$\nabla^2 T_0^{(3)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_0^{(3)}}{\partial z}, \quad (4.62)$$

por lo cual concluimos que no existe contribución al campo de temperaturas a este orden proporcional a  $\epsilon^0$ , esto es,

$$T_0^{(3)} = 0. \quad (4.63)$$

Por otra parte, a orden  $\mathcal{O}(\epsilon)$  tenemos la siguiente ecuación:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} \right] T_1^{(3)} = (1 - r^2) \frac{\partial T_1^{(3)}}{\partial z} + Q_1^{(3)}(r, z), \quad (4.64)$$

donde el término inhomogeneo está dado por

$$\begin{aligned} Q_1^{(3)} = & A_2(1 - r^2)^2 r^k \frac{\partial T_0^{(0)}}{\partial r} + A_3 [11 - 7r^2 + 2r^4 \\ & + (r^2 - 1)(k^2(r^2 - 1) + 3k(r^2 - 2))] (1 - r^2) r^k \frac{\partial T_0^{(0)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.65)$$

La ecuación (4.64) puede ser resuelta siguiendo el mismo procedimiento usado anteriormente. Primero buscamos una solución a la ecuación homogénea obtenida al hacer  $Q_1^{(3)} = 0$ , cuya solución puede ser expresada como una expansión sobre un conjunto de autofunciones  $\{\psi_{nk}\}$ :

$$T_1^{(3)} = \sum_n a_{nk} \psi_{nk}(r) e^{-\lambda_{nk}^2 z}, \quad (4.66)$$

Para obtener la solución general de la ecuación, el siguiente paso es hacer  $a_{nk} \rightarrow a_{nk}(z)$ . De esta forma, tenemos que:

$$T_1^{(3)} = \sum_{l,n} a_{n0} F_{ln}^{k0} \frac{e^{-(\lambda_{lk}^2 - \lambda_{n0}^2)z} - 1}{\lambda_{lk}^2 - \lambda_{n0}^2} \psi_{lk} e^{\lambda_{lk}^2 z}, \quad (4.67)$$

donde, nuevamente, los coeficientes numéricos generalizados  $F_{ln}^{k0}$  toman el término

tipo fuente correspondiente proveniente de la ecuación (4.65), y hemos impuesto la condición de entrada nula a este orden de acuerdo a la ecuación (4.12).

Finalmente, usando la relación (4.61) junto con (4.63), e incluyendo el factor de forma en la solución como se indicó anteriormente, tenemos finalmente que

$$T^{(3)} = \epsilon w^{(0)} \sum_{l,n} a_{n0} F_{ln}^{k0} \frac{e^{-\lambda_{n0}^2 z} - e^{-\lambda_{lk}^2 z}}{\lambda_{lk}^2 - \lambda_{n0}^2} \frac{\psi_{lk}}{1 - r^2} \sin k\theta. \quad (4.68)$$

Finalmente, utilizando la relación (4.61) junto con la ecuación (4.63), e incluyendo el factor de forma en la solución como se ha indicado anteriormente hemos obtenido el campo de temperaturas hasta el tercer orden en el número de Weissenberg para un fluido modelado por la relación constitutiva de Xue, Phan-Thier y Tanner dentro de un tubo con sección transversal arbitraria. Es posible evaluar esta solución para encontrar las isothermas para distintas geometrías escogiendo distintos valores para  $k$  y  $\epsilon$ , incluyendo el caso del triángulo ( $k = 3$ ) y cuadrado ( $k = 4$ ), entre otros.

Notemos que la contribución al campo de temperaturas proveniente de este orden es nula para  $\epsilon \rightarrow 0$ , por lo cual está ausente en el caso del tubo circular. Esto resalta la importancia de considerar ductos con geometrías más complejas a la hora de estudiar fenómenos de transporte de calor.

En lo siguiente se incluyen las isothermas para distintas geometrías construyendo la expansión de la forma

$$T(r, \theta, z) = T^{(0)} + \text{Wi}T^{(1)} + \text{Wi}^2T^{(2)} + \text{Wi}^3T^{(3)}. \quad (4.69)$$

Los coeficientes generalizados dados en términos de las integrales complejas son calculados numéricamente utilizando el programa Mathematica. En el anexo se puede encontrar el algoritmo utilizado para obtener sistemáticamente los resultados numéricos deseados en cada geometría.

# Capítulo 5

## Gráfico de Curvas Isovelocidades e Isotermas

En este capítulo se muestran curvas de velocidades e isotermas para distintas geometrías de sección transversal del ducto según las soluciones obtenidas en los capítulos anteriores. En cada caso se utilizaron los siguientes valores de referencia:

- $\xi = 0,3$
- $\epsilon_0 = 0,3$
- $Wi = 0,3$
- $p = 2$
- $\epsilon_3 = 0,3849$  (para  $k = 3$ )
- $\epsilon_4 = 0,2$  (para  $k = 4$ )

### 5.1. Isovelocidades

En esta sección se presentan las curvas de isovelocidades tanto para el flujo axial  $w$  como también para el flujo secundario radial  $u$ , los cuales intervienen en la determinación del campo de temperaturas. También se grafican los perfiles de este último flujo a lo largo de distintos ejes de cada figura según se indica en cada caso.

### 5.1.1. Geometría de ducto circular ( $k = 0$ )

#### Gráficos de Flujo Axial

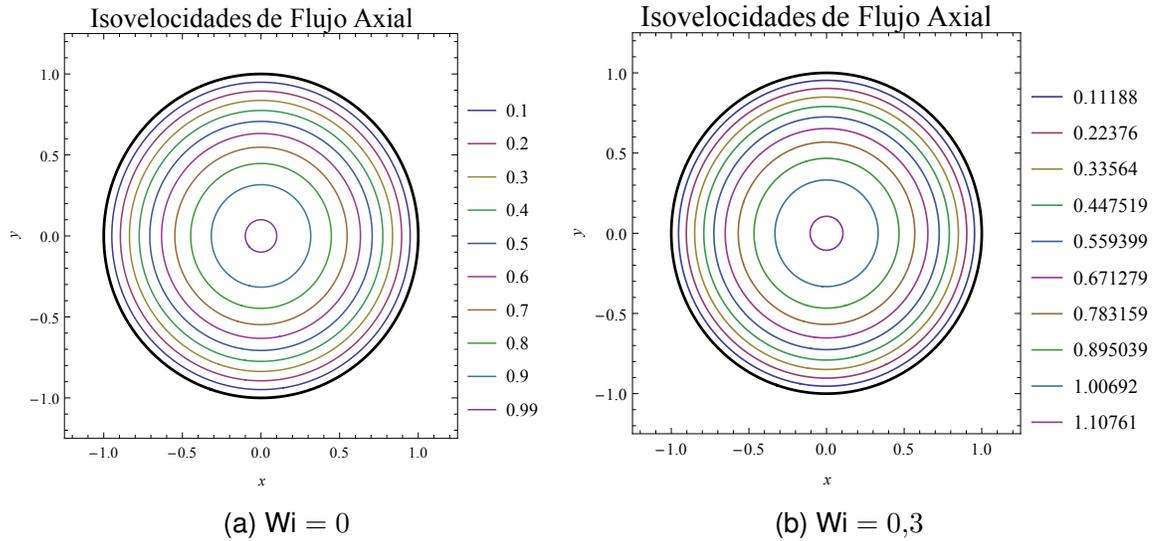


Figura 5.1: Isovelocidades para caso Newtoniano (a) y caso viscoelástico (b).

A continuación se muestra el perfil radial de velocidades para un eje de simetría que une vértices opuestos, comparando ambos casos de la figura superior:

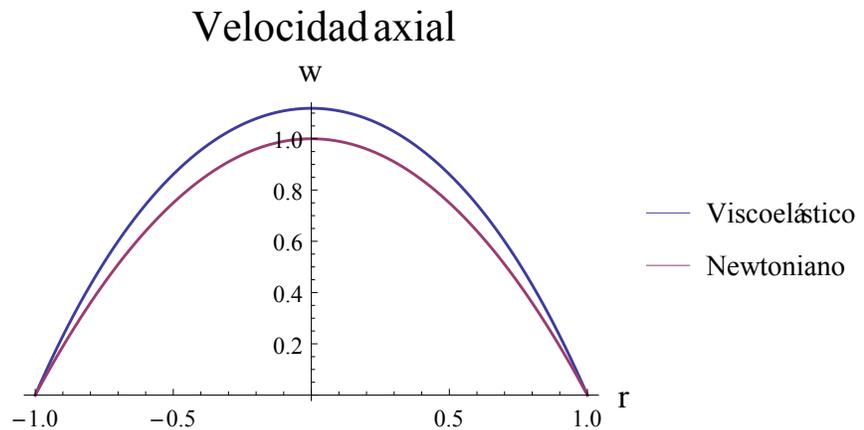


Figura 5.2: Perfil radial del flujo axial  $w$ .

Recordamos que según lo obtenido, para el caso circular  $\epsilon \rightarrow 0$  los flujos secundarios desaparecen, al contrario de las otras geometrías, como se muestra a continuación.

### 5.1.2. Geometría de ducto triangular ( $k = 3$ )

#### Gráficos de Flujo Axial

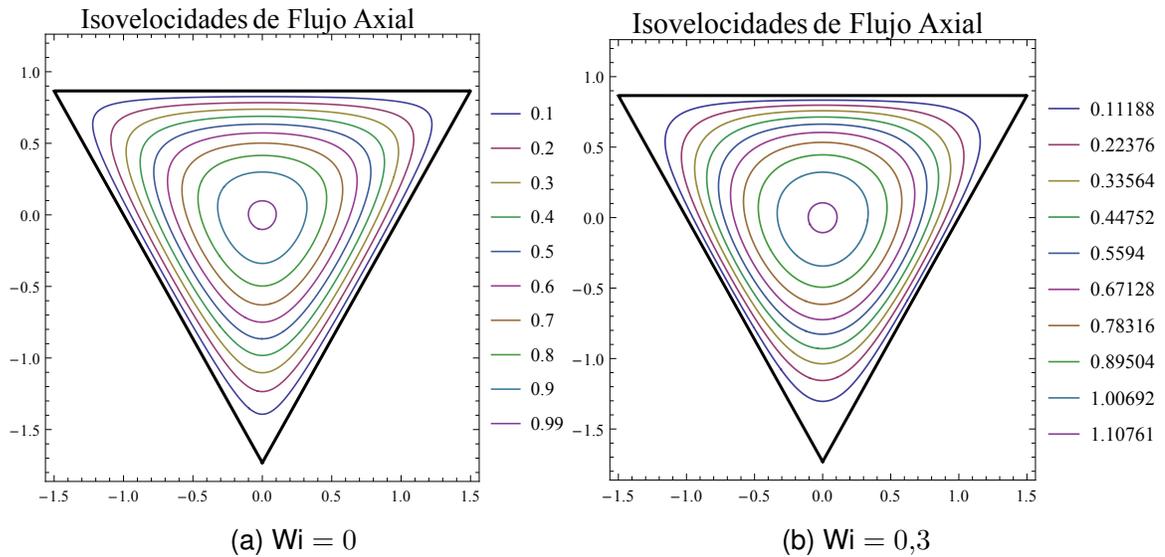


Figura 5.3: Isovelocidades para caso Newtoniano (a) y caso viscoelástico (b).

A continuación se muestra el perfil radial de velocidades para un eje de simetría que une vértices opuestos, comparando ambos casos de la figura superior:

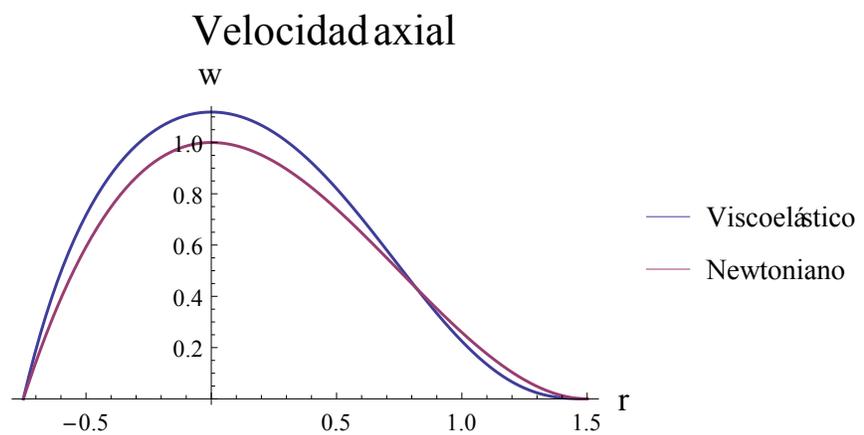


Figura 5.4: Perfil radial del flujo axial  $w$ .

**Gráficos de Flujos Secundarios**

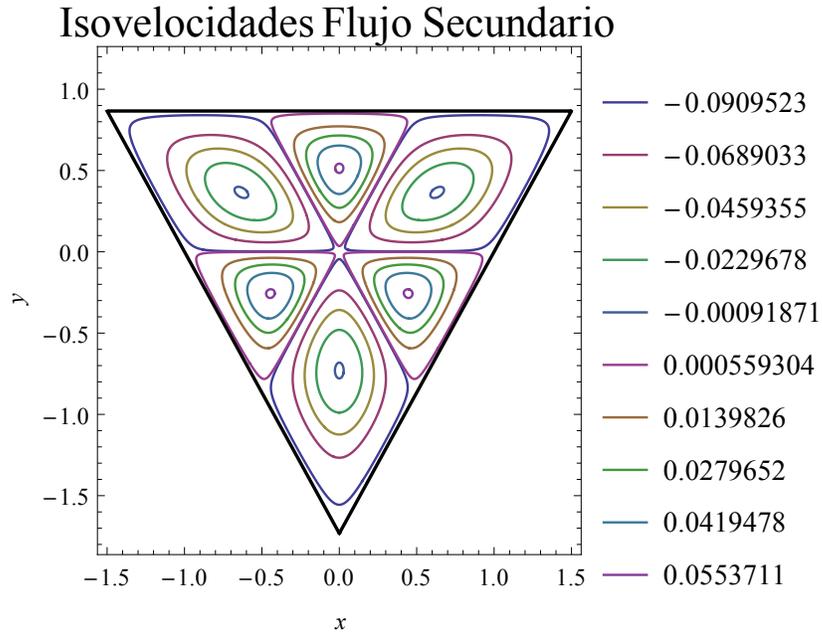


Figura 5.5: Flujo secundario radial  $u$ .

A continuación se muestra el perfil radial lo largo del eje de simetría que conecta un vértice con una arista, pasando por el centro (altura):

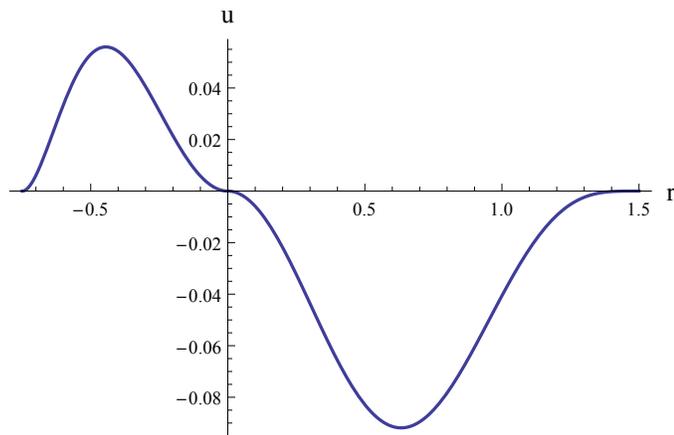


Figura 5.6: Perfil radial de  $u$  a lo largo del eje de simetría.



**Gráficos de Flujos Secundarios**

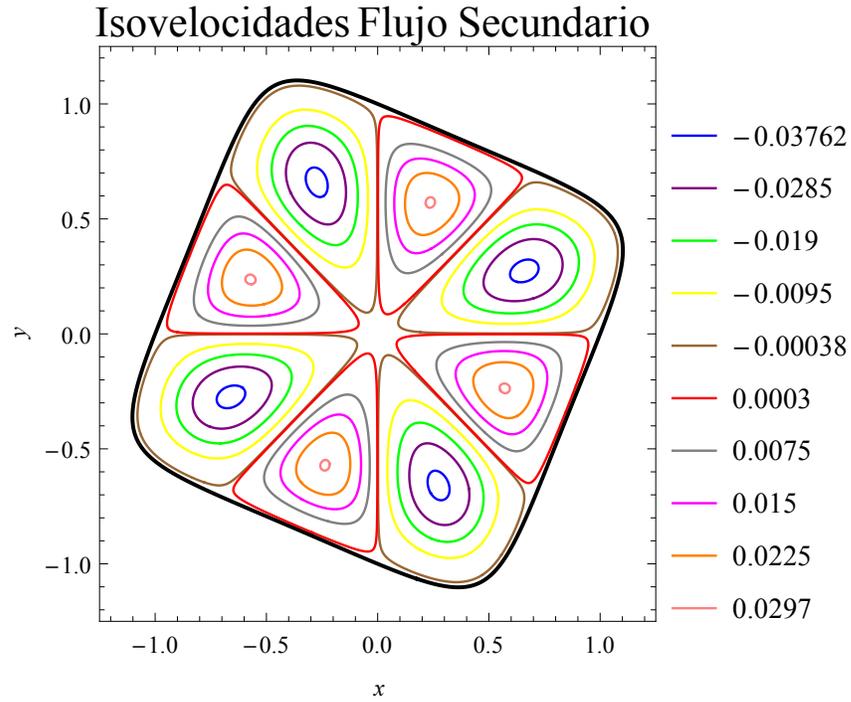


Figura 5.9: Flujo secundario radial.

A continuación se muestra el perfil radial lo largo de dos ejes de simetría, uno que une vértices opuestos y otro que une dos aristas opuestas, respectivamente:

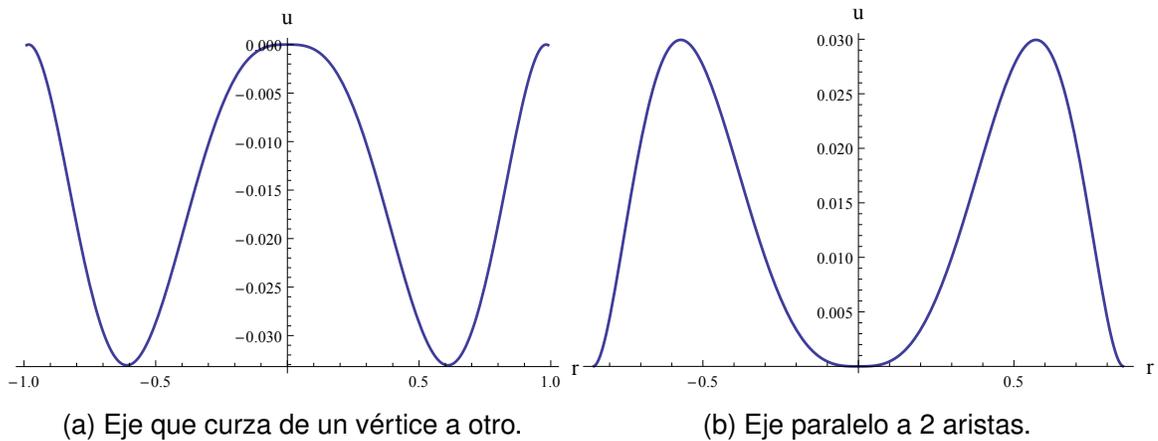


Figura 5.10: Perfiles radiales de  $u$  a lo largo de distintos ejes que pasan por el centro.

Habiendo presentado las distintas curvas de isovelocidad y perfiles radiales, en la siguiente sección se describen los gráficos correspondientes a las curvas de temperatura constante.

## **5.2. Isotermas**

A continuación se muestran los gráficos de isotermas en la sección transversal de tubos con geometrías circular, triangular y cuadrada. Además de los valores de referencia mencionados al comienzo del capítulo, en estos gráficos también se utilizó un valor  $Pe = 10000$  para el número de Péclet, y se utilizan dos cortes transversales en el tubo, uno a  $z = 0,05$  y otro en  $z = 0,2$  con el fin de observar la evolución de las curvas.

### 5.2.1. Geometría de ducto circular ( $k = 0$ )

Los gráficos de la columna izquierda (a) corresponden al caso Newtoniano, mientras que los de la columna derecha (b) al caso viscoelástico.

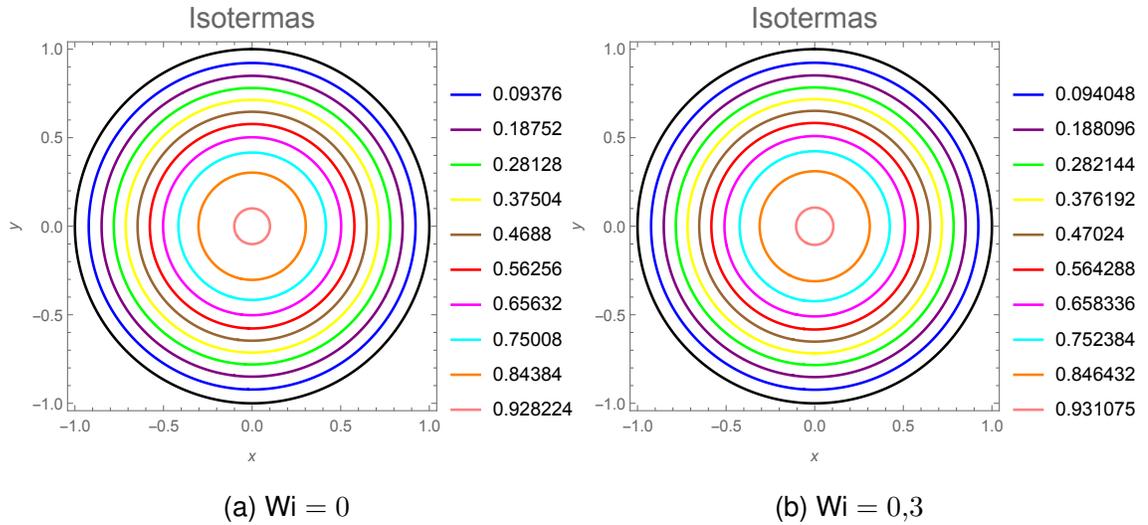


Figura 5.11: Isotermas para el corte  $z = 0,05$ .

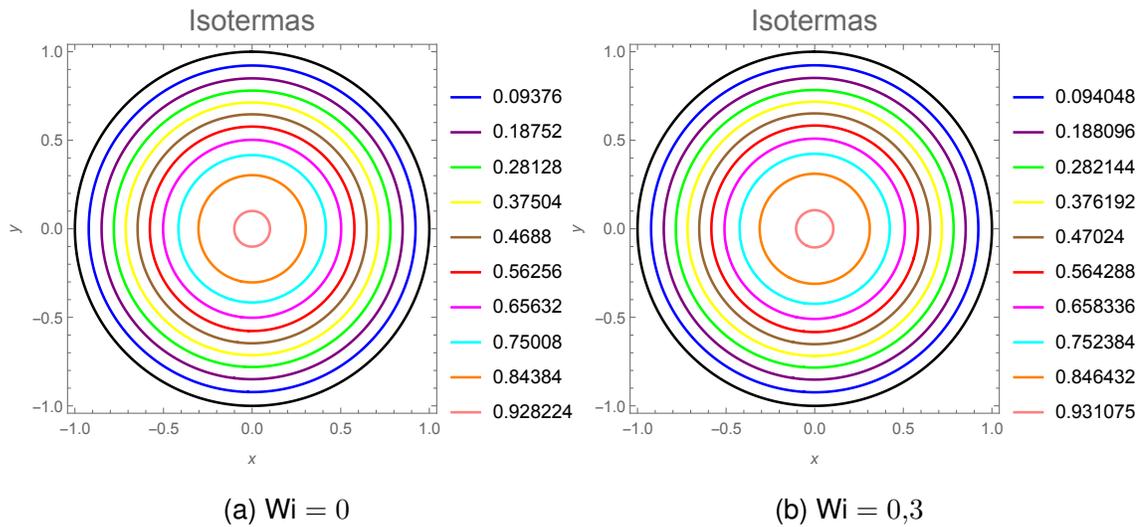


Figura 5.12: Isotermas para el corte  $z = 0,2$ .

A continuación se muestra el perfil radial de temperaturas para distintos valores de la coordenada axial. La línea punteada corresponde al caso Newtoniano, mientras que la línea continua representa la temperatura en el caso viscoelástico.

### Comparación Perfiles de Temperatura

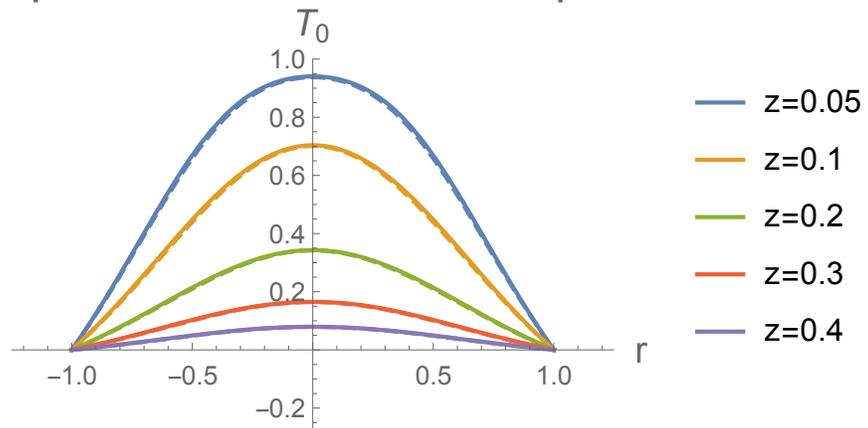


Figura 5.13: Temperaturas para distintos valores de la coordenada axial  $z$ .

### 5.2.2. Geometría de ducto triangular ( $k = 3$ )

Los gráficos de la columna izquierda (a) corresponden al caso Newtoniano, mientras que los de la columna derecha (b) al caso viscoelástico.

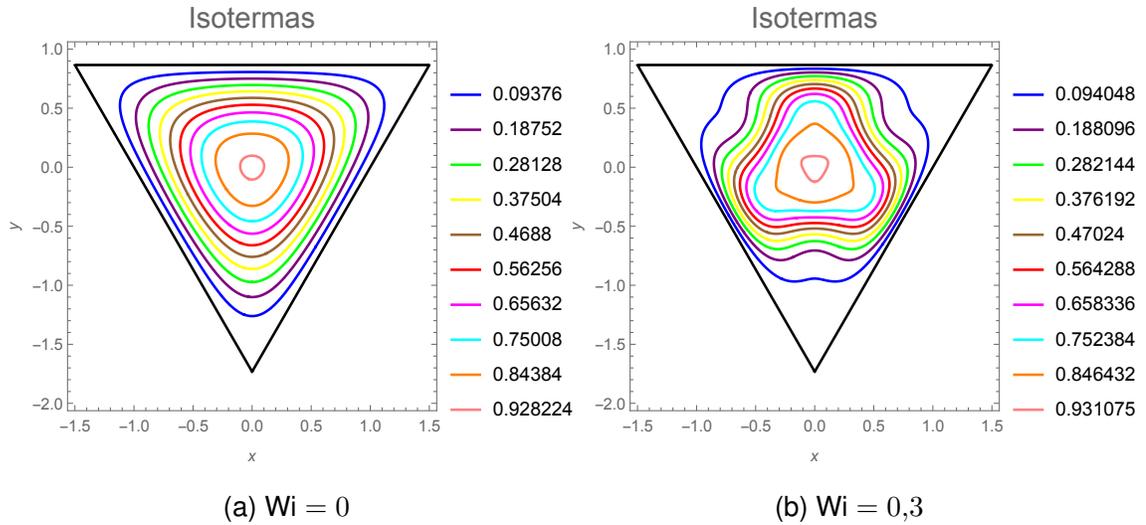


Figura 5.14: Isotermas para el corte  $z = 0,05$ .

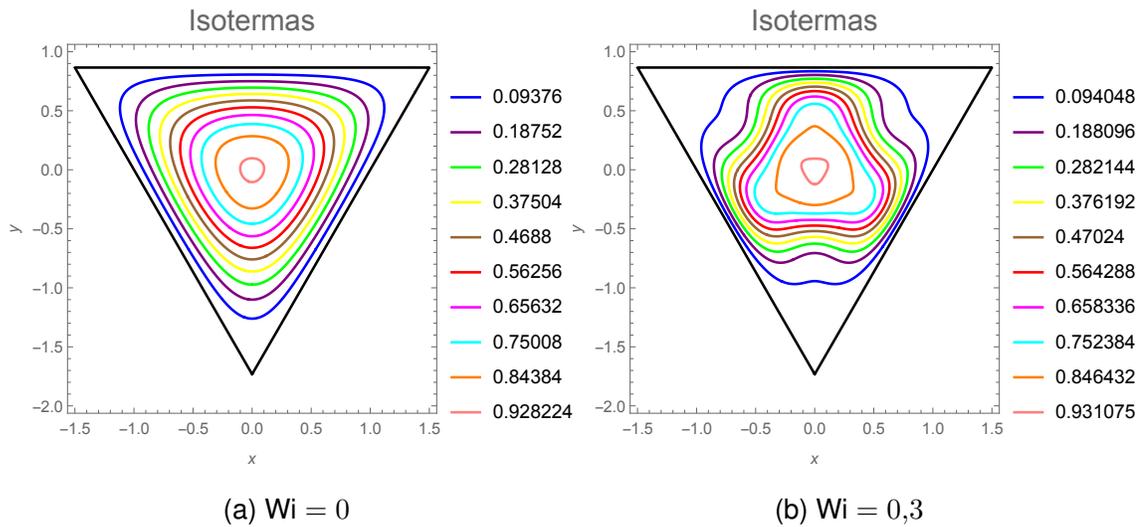


Figura 5.15: Isotermas para el corte  $z = 0,2$ .

Las figuras a continuación muestran el perfil radial de temperaturas para distintos valores de la coordenada axial. En ambas figuras la línea punteada corresponde al caso Newtoniano, mientras que la línea continua representa la temperatura en el caso viscoelástico.

### Comparación Perfiles de Temperatura

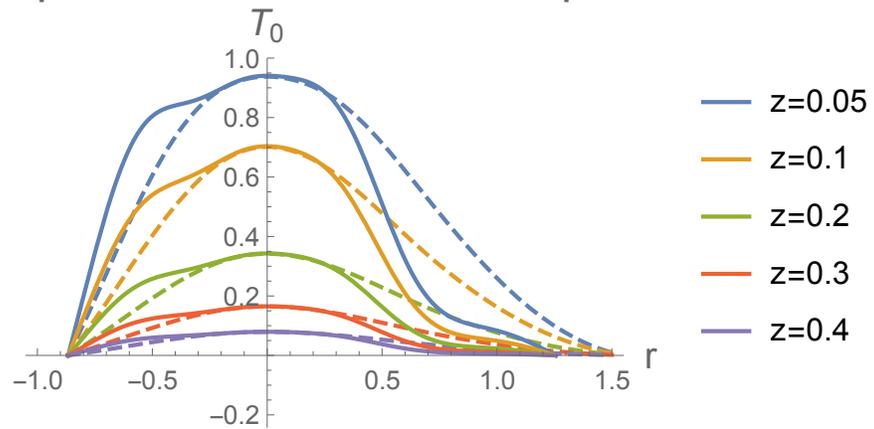


Figura 5.16: Temperaturas para distintos valores de la coordenada axial  $z$ .

### 5.2.3. Geometría de ducto cuadrado ( $k = 4$ )

Los gráficos de la columna izquierda (a) corresponden al caso Newtoniano, mientras que los de la columna derecha (b) al caso viscoelástico.

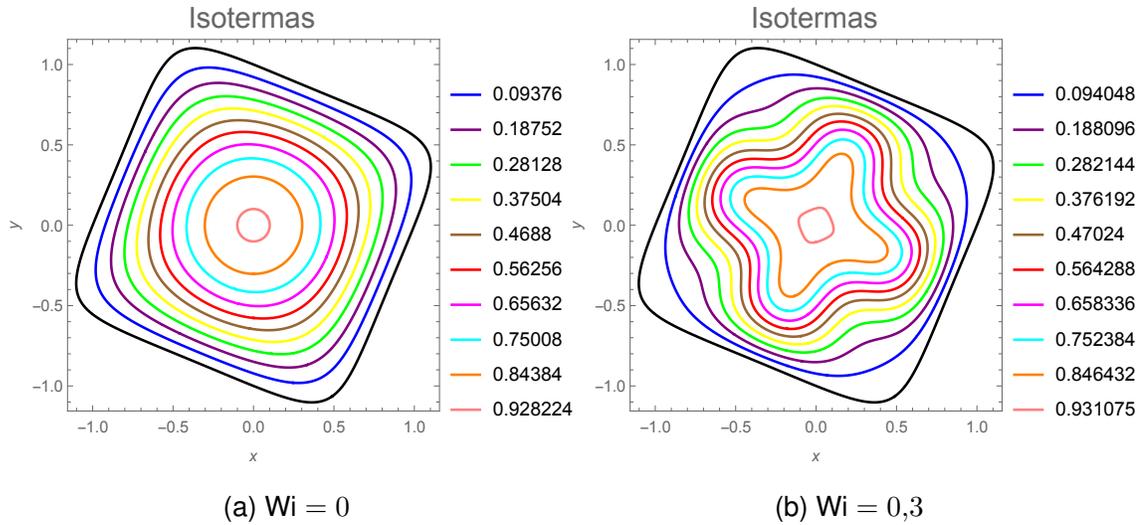


Figura 5.17: Isothermas para el corte  $z = 0,05$ .

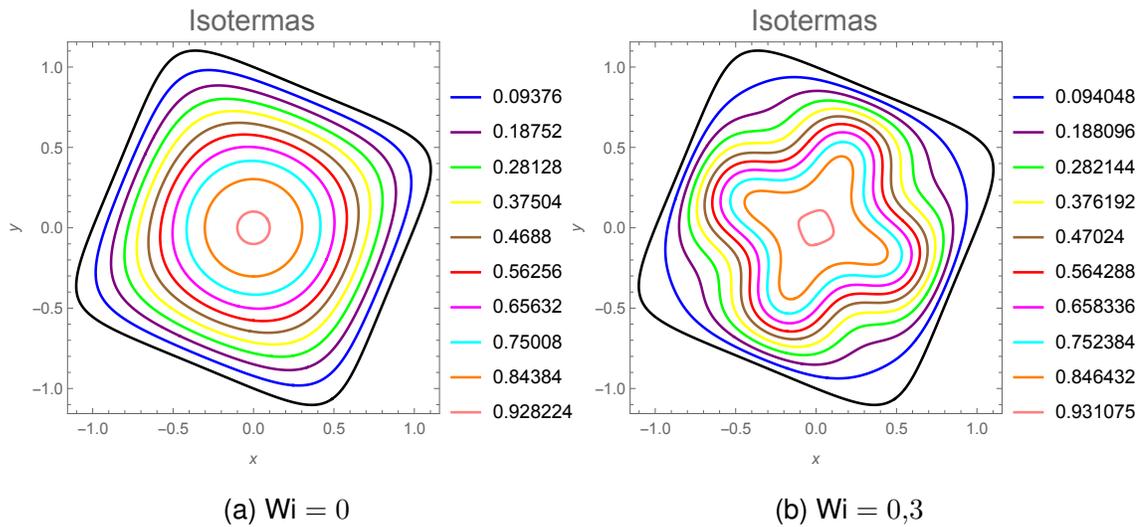


Figura 5.18: Isothermas para el corte  $z = 0,2$ .

A continuación se muestra el perfil radial de temperaturas para distintos valores de la coordenada axial, a lo largo de distintos ejes de simetría de la sección transversal (los mismos utilizados en la sección anterior). La línea punteada corresponde al caso Newtoniano, mientras que la línea continua representa el caso viscoelástico.

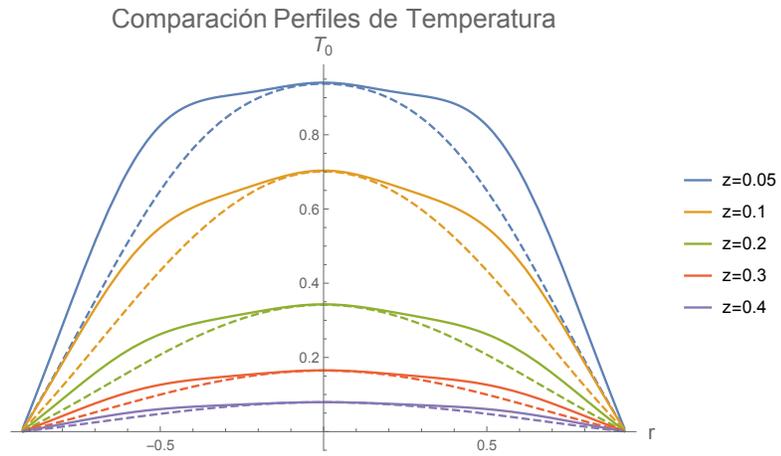


Figura 5.19: Temperaturas sobre una eje que conecta dos aristas opuestas.

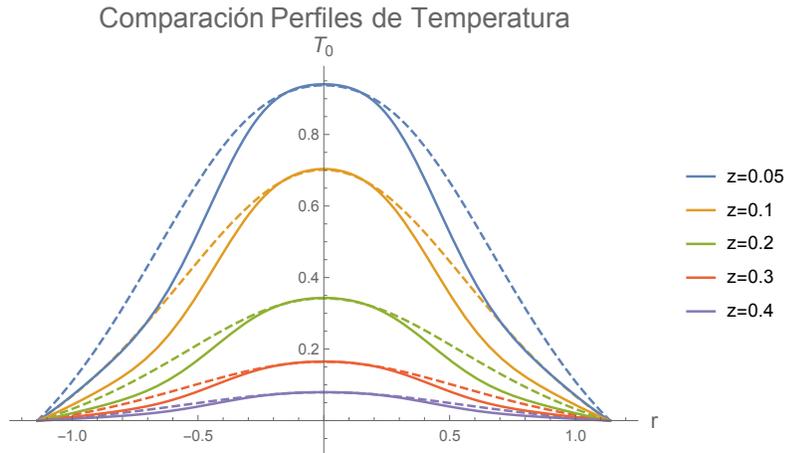


Figura 5.20: Temperaturas sobre un eje que conecta dos vértices opuestos.

De forma complementaria se incluye un gráfico con las temperaturas medias  $T_b$  como función de la coordenada axial para las distintas geometrías:

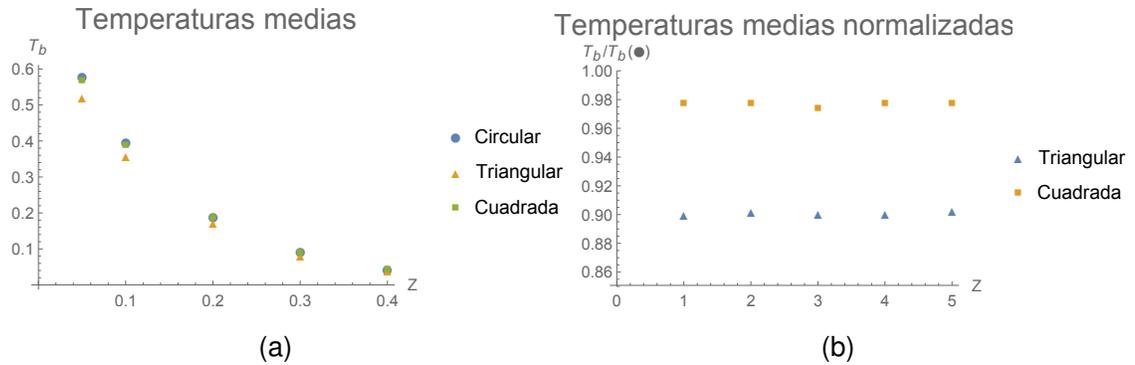


Figura 5.21: (a):  $T_b$  en distintas secciones. (b):  $T_b$  normalizadas respecto al valor de la geometría circular.

Finalmente, integrando numéricamente el gradiente de temperaturas sobre el contorno de la figura se obtuvieron los siguientes valores asintóticos para el Número de Nusselt en el caso de sección triangular:

	$Nu(z \rightarrow \infty)$
$Wi = 0$	2.43
$Wi = 0,3$	3.00

Cuadro 5.1: Valores asintóticos de  $Nu$  para el caso triangular.

Es posible observar que el valor para el caso Newtoniano discrepa sólo en un 1.6 % respecto al reportado en [3], el cual es 2.47. Por otra parte, el hecho de que el valor del número de Nusselt sea superior en el caso viscoelástico indica, por definición, que en tal régimen se tiene una convección más eficiente que en la contraparte Newtoniana. En el capítulo siguiente se procede a discutir y analizar los resultados obtenidos en el presente capítulo.

# Capítulo 6

## Discusión de Resultados

De los gráficos presentados en la sección 5.1 vemos que las curvas de isovelocidad de los flujos secundarios radiales en general toman valores negativos en los cuadrantes que tienen contacto con los vértices, y valores positivos en las zonas que tienen contacto con paredes rectas, lo que significa que el flujo tiende a dirigirse hacia el centro en las zonas del primer tipo, y hacia fuera del centro en las del segundo tipo. Vemos que esto juega un papel importante en las isotermas, ya que observamos que justamente en las zonas donde el flujo es hacia el interior la temperatura decrece rápidamente, mientras que en las zonas en las cuales el flujo se mueve radialmente hacia afuera la temperatura decrece más lentamente incluso que en el caso Newtoniano, como se ve de los perfiles radiales de temperatura para el caso del triángulo y cuadrado (recordando que según el esquema utilizado el fluido es enfriado por las paredes del tubo). Vemos que no existe tal comportamiento en el tubo circular, ya que, como se observó anteriormente, los flujos secundarios no están presente en tal caso.

De los perfiles radiales de temperatura mostrados también es posible observar que la temperatura central en cada caso es independiente de la geometría del ducto, y sólo varía de forma marginal al incluir viscoelasticidad. Lo primero se debe a que las autofunciones  $\psi_{nk}(r)$  para valores de  $k \neq 0$  cumplen la propiedad de anularse en el origen, esto es,  $\psi_{nk}(0) = 0$ . Luego, el resultado anterior se extiende para cualquier valor de  $k$  y  $z$ , y encontramos que en general la temperatura central del fluido no se ve afectada al modificar la geometría del ducto.

Vale la pena destacar la similitud entre las formas de las isothermas encontradas y las obtenidas por Zapata [12] para el caso de flujo de calor constante en la pared del tubo, aún cuando las expresiones para los campos de temperatura son esencialmente distintas. En efecto, el problema actual presenta una mayor complejidad matemática que otros tratados anteriormente con el método de factor de forma, justamente por tratarse de un problema en 3 dimensiones cuyo campo de temperaturas depende de la coordenada  $z$ . Producto de esto (e inherente al método de separación de variables) aparece una estructura de problema de Sturm-Liouville que no se presentaba anteriormente, y entonces es necesario manipular las soluciones como series infinitas sobre autofunciones. Más aún, es necesario calcular de forma numérica coeficientes generalizados con expresiones complicadas a cada orden, representados mediante matrices de  $n \times n$ , siendo  $n$  el número de términos de la truncación de la sumas infinitas, por lo cual el tiempo del cálculo aumenta proporcional a  $n^2$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

Se aplicó el método de factor de forma para resolver el problema de Graetz en tubos de sección transversal arbitraria. Se mostró que en la geometría no circular se da lugar a un sistema de Sturm-Liouville más general que en el caso original, encontrando nuevos conjuntos de autofunciones y autovalores que dependen en la geometría del ducto a través del parámetro  $k$ , donde el caso circular se incluye como la elección particular  $k = 0$ .

Adicionalmente, al incluir una componente viscoelástica al fluido, se observó la aparición de flujos secundarios, de acuerdo a previos estudios, los cuales entran como campos convectivos en la ecuación de energía, modificando el transporte de calor dentro de la cañería. Tales aportes desaparecen casi en su totalidad cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  ó  $Wi \rightarrow 0$ , lo que indica que ambos ingredientes, geometría y viscoelasticidad, juegan un papel complementario para tal fenómeno.

Se utilizaron las secciones transversales triangular y cuadrada para ilustrar como la solución encontrada reproduce las isotermas perfiles radiales de temperatura correspondientes, de donde es posible ver como la transferencia de calor es más rápida en las zonas cercanas a los vértices, debido al efecto del flujo radial hacia el centro, sumado al incrementado del área de contacto del flujo con la pared. En este sentido, la deformación del ducto tiene su máxima influencia en las zonas cercanas a cualquier punta formada y decrece a medida que uno se acerca al centro del tubo hasta que se

vuelve nula, ya que exáctamente en dicho punto el campo de temperaturas no se ve modificado.

Finalmente, se calculó el número de Nusselt asintótico para el caso del ducto con geometría triangular, encontrando un valor 19% superior a su contraparte Newtoniana, lo que destaca cómo los flujos secundarios efectivamente favorecen la convección del calor en el fluido.

# Apéndice A

## A.1. El número de Peclet

El número de Péclet se define como:

$$Pe \equiv \frac{Rv_0}{\alpha} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\alpha$  es la conductividad térmica del fluido. Para ver su significado físico, es útil compararlo con el número de Reynolds:

$$Re = \frac{Rv_0}{\nu} \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido. Así como el número de Reynolds caracteriza dos regímenes distintos para considerar el flujo, uno laminar ( $Re \ll 1$ ) y otro turbulento ( $Re \gg 1$ ), el número de Péclet define dos regímenes en el transporte del calor: el convectivo ( $Pe \gg 1$ ), y el conductivo ( $Pe \ll 1$ ). Explícitamente  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ , y agrupando convenientemente se tiene:

$$Pe = \frac{Rv_0}{\frac{k}{\rho C_p}} = \frac{\rho v_0 C_p \cdot \Delta T}{\frac{k}{R} \cdot \Delta T} = \frac{\rho v_0 C_p \Delta T}{\frac{k \Delta T}{R}} \quad (\text{A.3})$$

es decir:

$$Pe \equiv \frac{\text{Término de conducción axial}}{\text{Término de conducción radial}} = \frac{\text{Convección}}{\text{Conducción}} \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, Pe nos da una medida de qué tipo de transporte de calor es el dominan-

te en una situación; conducción o convección. En situaciones en las que domina el transporte por convección,  $Pe \ll 1$ , y en caso opuesto, si domina la conducción por sobre la convección,  $Pe \gg 1$ .

En la mayoría de las situaciones de ingeniería  $Pe \gg 1$ ; si consideramos que la mayoría de los materiales en estado líquido tienen una difusividad térmica del orden  $\alpha \sim 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ , una cañería con un radio característico  $R \sim 10^{-2} \text{m}$  y una velocidad del flujo de  $v \sim 10^{-2} \text{m}$ , entonces uno encuentra que  $Pe \sim 10^3$ , lo cual justifica la aproximación utilizada durante el desarrollo.

## A.2. El número de Nusselt

El número de Nusselt es una cantidad adimensional que cuantifica la transferencia de calor sobre una superficie en el generada por la convección versus una transferencia netamente conductiva, es decir con el fluido hipotéticamente en reposo o estancado (lo cual sería análogo a la transferencia de calor en una barra, por ejemplo), según la fórmula:

$$\text{Nu}(z) \equiv \frac{D_h}{\kappa} h(z) = \frac{\text{transferencia convectiva}}{\text{transferencia conductiva}} \quad (\text{A.5})$$

donde  $D_h = 4A/P$  es el diámetro hidráulico, y  $h(z)$  es el coeficiente de flujo de calor dado según:

$$h(z) = \kappa \frac{\int_{\partial M} \vec{\nabla} T \cdot d\vec{a}}{T_w - T_b}, \quad (\text{A.6})$$

en donde la integración se hace sobre todo el contorno de la sección transversal del tubo  $\partial M$ . Acá  $T_b$  es la temperatura promedio en una sección transversal, calculada en coordenadas cilíndricas como :

$$T_b(z) = \frac{\int d\theta dr r w(r, \theta) T(r, \theta, z)}{\int d\theta dr r w(r, \theta)}. \quad (\text{A.7})$$

De acuerdo a la ecuación (A.5), un número de Nusselt grande indica una convección muy efectiva, mientras que valores pequeños representan una conducción dominante.

# Apéndice B

## B.1. Ecuación Hipergeométrica confluyente

La ecuación hipergeométrica confluyente, también conocida como ecuación de Kummer, es<sup>1</sup>

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Esta ecuación deriva de la ecuación hipergeométrica ordinaria bajo el límite  $b \rightarrow \infty$ , y tiene el origen  $x = 0$  como singularidad regular, y el punto  $x = \infty$  como singularidad irregular, esto último debido a la convergencia de dos singularidades originales producto del proceso de límite. Una solución de dicha ecuación es la función hipergeométrica confluyente  $y \equiv {}_1F_1(a, c; x)$ , denotada equivalentemente como  $M(a, c; x)$  (también llamada función hipergeométrica confluyente del primer tipo, o función de Kummer), cuya expresión explícita es

$$M(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{B.2})$$

donde  $c \neq \mathbb{Z}^-$ . Es posible interpretar esta función como una generalización de la función exponencial; esto es, al poner  $a = c$ , vemos que  $M(a, a; x) = e^x$ . Una segunda solución linealmente independiente de esta ecuación es llamada función hipergeométrica confluyente del segundo tipo, la cual diverge para  $x = 0$ .

---

<sup>1</sup>Arfken 6ta edición [21].

## B.2. Problema de Sturm-Liouville

El problema de Sturm-Liouville está presente en muchas áreas de la física. A menudo surge como resultado del uso del método de separación de variables para resolver las ecuaciones diferenciales parciales clásicas de la física, como por ejemplo la ecuación de Laplace, la ecuación de calor, ecuación de ondas, ecuación de Schrödinger, etc. Dichas ecuaciones se caracterizan por ser de la forma

$$Ly = \lambda\rho(x)y \quad x \in (a, b) \quad (\text{B.3})$$

donde  $L$  es un cierto operador diferencial, por lo general de segundo orden,  $\lambda$  es un parámetro, típicamente heredado del método de separación de variables, y  $\rho(x)$  una función dada. Además, las soluciones buscadas  $y(x)$  satisfacen ciertas condiciones de borde que definen el problema de forma única (cuyo número es igual al orden del operador).

La ecuación (B.3) puede interpretarse como una relación de autovalores para tal operador, donde  $y(x)$  es una autofunción,  $\lambda$  su autovalor, y  $\rho$  corresponde a una función de peso (en el caso más simple igual a la unidad).

Sea  $L$  un operador diferencial autoadjunto ( $L^\dagger = L$ ) de la forma

$$L = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x) \quad (\text{B.4})$$

La ecuación (B.3), con condiciones del borde sobre  $y(x)$  particularmente en alguna de las siguientes formas

$$y(a) = y(b) = 0 \quad : \text{tipo Dirichlet} \quad (\text{B.5})$$

$$y'(a) = y'(b) = 0 \quad : \text{tipo Neuman} \quad (\text{B.6})$$

es llamado problema de Sturm-Liouville. Dado a que  $L$  es autoadjunto bajo las condiciones de borde indicadas, sus autovalores son reales y sus autofunciones forman una base ortogonal en el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre el inter-

valo  $(a, b)$ ,  $\mathcal{L}_\rho^2(a, b)$ , por lo cual es posible expandir cualquier función sobre ellas.

### B.3. Método de Expansión en Autofunciones

El método presentado en esta sección<sup>2</sup> corresponde a una adaptación de uno aplicado a ecuaciones en derivadas parciales con términos inhomogeneos que dependen de la coordenada temporal  $t$ . En el presente caso se desea resolver concretamente la ecuación:

$$\nabla^2 T = (1 - r^2) \frac{\partial T}{\partial z} + Q(r, z) \quad (\text{B.7})$$

donde  $T = T(r, z)$  y  $Q$  es el término inhomogeneo. Como se ha mostrado, es posible resolver el caso homogeneo mediante la expansión:

$$T = \sum_n a_{nk} \psi_{nk}(r) e^{-\lambda_{nk}^2 z} \quad (\text{B.8})$$

donde las (auto-)funciones  $\psi_{nk}(r)$  satisfacen la ecuación de autovalores:

$$\nabla^2 \psi_{nk} = -\lambda_{nk}^2 (1 - r^2) \psi_{nk}. \quad (\text{B.9})$$

Una vez obtenida la solución homogénea expresada mediante la expansión sobre el conjunto ortogonal indicado, es posible resolver el problema inhomogeneo (B.7) haciendo el cambio  $a_{nk} \rightarrow a_{nk}(z)$ . Insertando la expansión con esta modificación en la ecuación a resolver, uno tiene

$$\sum_n a_{nk}(z) \nabla^2 [\psi_{nk}(r)] e^{-\lambda_{nk}^2 z} = (1 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} \sum_n a_{nk}(z) \psi_{nk}(r) e^{-\lambda_{nk}^2 z} + Q \quad (\text{B.10})$$

diferenciando el lado derecho respecto a  $z$  se tiene:

$$\sum_n a_{nk}(z) \nabla^2 [\psi_{nk}(r)] e^{-\lambda_{nk}^2 z} = (1 - r^2) \sum_n \left[ \frac{da_{nk}}{dz} \psi_{nk}(r) - \lambda_{nk}^2 a_{nk} \psi_{nk}(r) \right] e^{-\lambda_{nk}^2 z} + Q$$

---

<sup>2</sup>Método encontrado en Haberman [15]

Reagrupando términos se tiene

$$\sum_n [a_{nk}(z)\nabla^2\psi_{nk}(r) + \lambda_{nk}^2(1-r^2)\psi_{nk}(r)] e^{-\lambda_{nk}^2 z} = (1-r^2) \sum_n \frac{da_{nk}}{dz}\psi_{nk}(r)e^{-\lambda_{nk}^2 z} + Q$$

y utilizando la ecuación de autovalores indicada previamente se tiene que el lado izquierdo es idénticamente cero, por lo cual lo anterior se reduce a:

$$(1-r^2) \sum_n \frac{da_{nk}}{dz}\psi_{nk}(r)e^{-\lambda_{nk}^2 z} = -Q \quad (\text{B.11})$$

Para utilizar ahora la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones integramos a ambos lados con  $\int_0^1 dr r \psi_{lk}$ , obteniendo

$$\|\psi_{lk}\|^2 \frac{da_{lk}}{dz} e^{-\lambda_{lk}^2 z} = - \int_0^1 dr r Q \psi_{lk} \quad (\text{B.12})$$

Despejando e integrando a ambos lados con  $\int_0^z dz'$  obtenemos finalmente la expresión para los coeficientes modificados  $a_{lk}(z)$ :

$$a_{lk}(z) = a_{lk}(0) - \frac{1}{\|\psi_{lk}\|^2} \int_0^z dz' q(z') e^{\lambda_{lk}^2 z'} \quad (\text{B.13})$$

donde hemos definido el coeficiente de Fourier generalizado:

$$q(z) \equiv \int_0^1 dr r Q(r, z) \psi_{lk}(r) \quad (\text{B.14})$$

De esta forma, la solución general al problema inhomogeneo es:

$$T = \sum_l \left[ a_{lk}(0) - \frac{1}{\|\psi_{lk}\|^2} \int_0^z dz' q(z') e^{\lambda_{lk}^2 z'} \right] \psi_{lk}(r) e^{-\lambda_{lk}^2 z} \quad (\text{B.15})$$

Es claro que esta solución se reduce a la solución homogénea cuando  $Q = 0$ . Para resolver unívocamente el problema, deben imponerse las condiciones de frontera sobre la función  $T(r, z)$ ; para esto, notemos que ya se está imponiendo la condición de frontera en la coordenada radial  $r$ , esto es  $T(1, z) = 0$ , debido a que las autofunciones satisfacen  $\psi_{nk}(1) = 0$ . Esto último es en virtud de que, para definir un conjunto

de autofunciones sobre un intervalo, es necesario precisar las condiciones de borde. Luego, resta sólo aplicar la condición de entrada en  $z = 0$ ; en tal caso, el segundo término de la expansión es nulo, y por lo tanto se tiene:

$$T(r, 0) = \sum_l a_{lk}(0) \psi_{lk}(r) \quad (\text{B.16})$$

nuevamente, invirtiendo esta relación mediante la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones se tiene la expresión explícita para los coeficientes  $a_{lk}(0)$ :

$$a_{nk}(0) = \frac{\int_0^1 dr r (1 - r^2) T(r, 0) \psi_{nk}(r)}{\|\psi_{nk}\|^2} \quad (\text{B.17})$$

Notar que las integrales resultantes involucran a las autofunciones  $\psi_{nk}(r)$ , por lo cual incluso para el caso más simple en que  $T(r, 0) = 1$  éstas son altamente no triviales, y su grado de complejidad aumenta con cada valor de  $n$ , por lo cual en general estas son evaluadas numéricamente, como sucede en el problema de Graetz original (donde además  $k = 0$ ). Para los casos de interés en este trabajo, la temperatura de entrada es o bien  $T(r, 0) = 1$ , correspondiente al caso que se mencionó anteriormente; o bien  $T(r, 0) = 0$ , correspondiente a las ecuaciones asociadas a las contribuciones no circulares provenientes de ordenes  $\mathcal{O}(\epsilon)$  o viscoelásticas, proporcionales a  $\mathcal{O}(Wi)$ . En estos últimos casos, la ecuación anterior nos indica que  $a_{nk}(0) = 0$ , mientras que en el primer caso las integrales correspondientes han sido evaluadas mediante rutinas utilizando el software *Mathematica*.



# Apéndice C

## Programa Utilizado

Lo siguiente corresponde a la rutina de Mathematica utilizada para calcular los coeficientes generalizados y demás cantidades necesarias para posteriormente graficar los campos de temperatura.

```
Clear["Global`*"];
```

```
ztotal = 0.2;
```

```
(*PARÁMETROS DE ENTRADA PARA FACTOR DE FORMA*)
```

```
k = 3;
```

```
\[Epsilon] = 0.3849;
```

```
w = 1 - r^2 + \[Epsilon]*r^k*Sin[k*\[Theta]];
```

```
(*LISTADO DE AUTOVALORES ORIGINALES DE GRAETZ CIRCULAR*)
```

```
n = {2.7043644198825323', 6.6790314493466285'};
```

```
num = Length[n];
```

```
(*CALCULO DE AUTOVALORES DE LAS FUNCIONES CON UN PARAMETRO K \  
INGRESADO*)
```

```

c = k + 1;
a = 0.5 (k + 1) - 0.25*z;
f = Hypergeometric1F1 [a, c, z];
l = List[];
For[i = 2, i < 2 + 4*num, i = i + 4,
  l = Append[l, roots = z /. FindRoot[f, {z, i}, MaxIterations -> 1000]]
]

(*l={8.4221,12.5208,16.5655,20.5905,24.6064,28.6172,32.6251,36.6310,\
40.6355,44.6392};*)
l = Abs[l];
numl = Length[l];

(*****Terminos de orden Wi0*****)

(*CONSTRUCCIÓN DE AUTOFUNCIONES DE ORDEN CERO Y k *)

Y = -r^2/2*n;
f = -r^2/2*l;
f = r^k*Map[Exp, f];
Y = Map[Exp, Y];
K = List[];
S = List[];

For[i = 1, i < num + 1, i++,
  K = Append[K, Hypergeometric1F1[0.5 - 0.25*n[[i]], 1, n[[i]]*r^2]];
  S = Append[S,
    Hypergeometric1F1[0.5*(k + 1) - 0.25*l[[i]], k + 1, l[[i]]*r^2]]
]

Y = K*Y;
f = f*S;

(*CALCULOS DE NORMAS Y DE COEFICIENTES*)

```

APÉNDICE C. PROGRAMA UTILIZADO

---

```

NORMAY2 = NIntegrate[r (1 - r^2) Y^2, {r, 0, 1}];
NORMAf2 = \[Pi]*NIntegrate[r (1 - r^2) f^2, {r, 0, 1}];
YB = Y/Sqrt[NORMAY2];
fbar = f/Sqrt[NORMAf2];

an0 = NIntegrate[r (1 - r^2)*Y, {r, 0, 1}]/NORMAY2;
Z = -n^2*z;
Z = Map[Exp, Z];

T00 = \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \{i =
      1\}, \{num\}]\(an0[\(\[Sum]\)\{i\}] Y[\(\[Sum]\)\{i\}] \
Z[\(\[Sum]\)\{i\}]\)\);

(*CALCULO DE INTEGRALES PARA COEFICIENTES GENERALIZADOS F*)

F0 = n^2*r^k (Y - (1 - r^2) \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \{r\}]Y\)/(2 r)) - 0.5*\(\(1/r\)*\!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \{r\}]\(\(r*
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \{r\}]\(\(r^\((k - 1)\)*
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \{r\}]\(\(Y\)\)\)\)\)\) -
      k^2*r^(k - 3) \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \{r\}]Y\));

F = Table[
  NIntegrate[F0[[i]]*r*f[[j]]/NORMAf2[[j]], {r, 0, 1}
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}
  ];

(*CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIÓN COMPLETA NEWTONIANA*)

Zn = -n^2*z;
Zl = -l^2*z;

```

```

Delta0k = Table[
  1/(n[[i]]^2 - 1[[j]]^2)
  , {i, 1, Length[n]}, {j, 1, Length[n]}
  ];

(*ez=Table[
  (Exp[Zn[[i]]]-Exp[Z1[[j]])]/(1[[j]]^2-n[[i]]^2)
  ,{i,1,Length[n]},{j,1,Length[n]}
  ];
bb=Transpose[F]*ez;*)
(*T1=g+an0.bb.fbar;*)

g = -r^k*!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\(r\)\)\(\(T00\)\)]/(2 r);
T01 = g - \!(
\*SuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(j = 1\)\), \(\(num\)\)]\(\
\*SuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\(i =
  1\)\), \(\(num\)\)]an0[\(\[i]\)\(\[j]\)] F[\(\[i]\)\(\(i,
  j\)\)\(\[j]\)] \(\(Exp[Zn[\(\[i]\)\(\[j]\)] -
  Exp[Z1[\(\[i]\)\(\(j\)\)\(\[j]\)]])\)\ \(\(Delta0k[\(\[i]\)\(\(i,
  j\)\)\(\[j]\)]\)\) f[\(\[i]\)\(\(j\)\)\(\[j]\)]\)\);

(*SOLUCION EN FORMA FINAL CON FACTOR DE FORMA*)

f00 = T00/(1 - r^2);
f01 = (-r^k*f00 + T01)/(1 - r^2);

T0 = w*(f00 + \[Epsilon]*f01*Sin[k*\[Theta]]);

TRADO = T0 /. \[Theta] -> ArcTan[x0, y0];
Tfull = T0;

T0 = T0 /. {r -> Sqrt[x^2 + y^2], \[Theta] -> ArcTan[x, y]};

```

APÉNDICE C. PROGRAMA UTILIZADO

---

```
xc = 1.44;
yc = 0.82;

TRADO = TRADO /. y0 -> yc /. x0 -> xc ;
Max0 = FindMaxValue[{TRADO /. z -> ztotal, -0.9 < r < 1.4}, r]

(*IS00=ContourPlot[T0/.z-> \
0.05,{x,-1.5,1.5},{y,-1.8,1.2},Contours->10,PlotRange->{0,1.1*Max0},\
MaxRecursion->3,PlotPoints->50, \
PerformanceGoal->"Quality",Exclusions->None,AxesLabel->{"x", "y"}]*)

(*****Terminos de orden Wi2*****)

Clear[p, A0, T20, T21];
(*PARAMETROS DEL MATERIAL*)
xi = 0.3;
E0 = 0.3;
p = 2;

(*****
Ahora vienen los terminos para la ecuacion a orden CERO
*****)

(*Calculo de diferencias Delta*)
Delta00 = Table[
  1/(n[[i]]^2 - n[[j]]^2)
  , {i, 1, Length[n]}, {j, 1, Length[n]}
] // Quiet;
Delta00 = Delta00 /. ComplexInfinity -> 0;

Deltakk = Table[
  1/(1[[i]]^2 - 1[[j]]^2)
  , {i, 1, Length[n]}, {j, 1, Length[n]}
```

```

] // Quiet;
Deltakk = Deltakk /. ComplexInfinity -> 0;

(*Calculo de coeficiente generalizado*)

A0 = 16 p^3 (xi (2 - xi) - 4 (1 - xi) E0);

F20 = (A0/16)*(1 - r^4) n^2*
  Y; (*acá el menos del n^2 cancela el menos original*)
F20T = Table[
  NIntegrate[F20[[i]]*r*Y[[j]]/NORMAY2[[j]], {r, 0, 1}
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}
  ];

(*Solucion en su forma final*)

T20 = Simplify[!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \{j = 1\}, \{num\}]\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \{i =
  1\}, \{num\}]an0[\(\[Sum]\{i\}\{j\}] F20T[\(\[Sum]\{i,
  j\}\{j\}] \((Exp[Zn[\(\[Sum]\{i\}\{j\}]\) -
  Exp[Zn[\(\[Sum]\{j\}\{j\}]\))\) Delta00[\(\[Sum]\{i,
  j\}\{j\}] Y[\(\[Sum]\{j\}\{j\}]\)\)\);
f20 = T20/(1 - r^2);

(*****
Ahora vienen los terminos para la ecuacion a orden EPSILON
*****)

g2 = -r^k*(!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \{r\}]T20\)/(2 r);

(*Calculo de coeficientes generalizados*)

```

A1 = 16 p<sup>3</sup> k (-xi (2 - xi) + (k + 3) (1 - xi) E0);

C20 = r<sup>k</sup>\*Y;

C20T = Table[

  NIntegrate[r\*C20[[j]]\*f[[i]]/NORMAf2[[i]], {r, 0, 1}]  
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}  
];

C21 = (A0/16)\*(1 - r<sup>4</sup>) r<sup>k</sup>\*(!\(  
\\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\r\)]Y\))/ (2 r);

C21T = Table[

  NIntegrate[r\*C21[[j]]\*f[[i]]/NORMAf2[[i]], {r, 0, 1}]  
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}  
];

C22 = (A0/16)\*(1 - r<sup>4</sup>) f;

C22T = Table[

  NIntegrate[r\*C22[[j]]\*f[[i]]/NORMAf2[[i]], {r, 0, 1}]  
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}  
];

C23 = (2\*A1\*k (1 - r<sup>2</sup>) - A0 (k + 1))/(8 (k + 1)) r<sup>k</sup>\*Y;

C23T = Table[

  NIntegrate[r\*C23[[j]]\*f[[i]]/NORMAf2[[i]], {r, 0, 1}]  
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}  
];

Lg = r<sup>k</sup>\*(!\(  
\\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\r\)]Y\))/ (2 r);

C24 = -((1/r)\*(!\(  
\\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\r\)]\((r\*

\\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\r\)]\((Lg)\)\)\)\) - k<sup>2</sup> \(!\(  
\\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\r\)]\((Lg)\)\)\)/r<sup>2</sup>);

C24T = Table[

  NIntegrate[r\*C24[[j]]\*f[[i]]/NORMAf2[[i]], {r, 0, 1}]  
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}  
];

```
T210 = Simplify[!(\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\s = 1\), \(\num\)]\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 1\), \(\num\)]\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i =
    1\), \(\num\)]an0[\(\[\(\s)\]\)] F[\(\[\(\s,
    i)\]\)] C20T[\(\[\(\i,
    j)\]\)] \((n[\(\[\(\i)\]\)]^2*\((Exp[
        Zn[\(\[\(\i)\]\)] -
        Exp[Z1[\(\[\(\j)\]\)]])\ Delta0k[\(\[\(\i,
        j)\]\)] Delta0k[\(\[\(\i, s)\]\)] -
    n[\(\[\(\s)\]\)]^2*\((Exp[Zn[\(\[\(\s)\]\)] -
        Exp[Z1[\(\[\(\j)\]\)]])\ Delta0k[\(\[\(\s,
        j)\]\)] Delta00[\(\[\(\i,
        s)\]\)])\ f[\(\[\(\j)\]\)]\)\)\);
```

```
T211 = Simplify[!(\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 1\), \(\num\)]\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i =
    1\), \(\num\)]an0[\(\[\(\i)\]\)] C21T[\(\[\(\i,
    j)\]\)] \((Exp[Zn[\(\[\(\j)\]\)] -
        Exp[Z1[\(\[\(\i)\]\)]])\ Delta0k[\(\[\(\j,
        i)\]\)] f[\(\[\(\j)\]\)]\)\)\);
```

```
T212 = Simplify[!(\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\s = 1\), \(\num\)]\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 1\), \(\num\)]\(\
\*SubsuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i =
    1\), \(\num\)]an0[\(\[\(\i)\]\)] F[\(\[\(\j,
    i)\]\)] C22T[\(\[\(\s,
    j)\]\)] \((\((Exp[Zn[\(\[\(\s)\]\)] -
        Exp[Z1[\(\[\(\i)\]\)]])\ Delta0k[\(\[\(\s,
        i)\]\)] Delta0k[\(\[\(\i,
        j)\]\)] - \((Exp[Zn[\(\[\(\s)\]\)] -
```

```

Exp[Z1[(\)\(i)\(j)\)]\ Delta0k[(\)\(s,
i)\(j)\] Delta00[(\)\(i,
j)\(j)\)]\ f[(\)\(s)\(j)\)\)\);

```

```

T213 = Simplify[!\(
\*SubsuperscriptBox[(\[Sum]), (j = 1), (num)]\
\*SubsuperscriptBox[(\[Sum]), (i =
1), (num)]an0[(\)\(i)\(j)] C23T[(\)\(j,
i)\(j)] \((n[(\)\(i)\(j)]^2*(Exp[
Zn[(\)\(i)\(j)] -
Exp[Z1[(\)\(j)\(j)\)]\ Delta0k[(\)\(i,
j)\(j)\)]\ f[(\)\(j)\(j)\)\)\);

```

```

T214 = Simplify[!\(
\*SubsuperscriptBox[(\[Sum]), (s = 1), (num)]\
\*SubsuperscriptBox[(\[Sum]), (j = 1), (num)]\
\*SubsuperscriptBox[(\[Sum]), (i =
1), (num)]an0[(\)\(i)\(j)] F20T[(\)\(i,
j)\(j)] \((\((Exp[Zn[(\)\(i)\(j)] -
Exp[Z1[(\)\(s)\(j)\)]\ Delta0k[(\)\(s,
i)\(j)] Delta00[(\)\(i,
j)\(j)] - \((Exp[Zn[(\)\(j)\(j)] -
Exp[Z1[(\)\(s)\(j)\)]\ Delta0k[(\)\(s,
j)\(j)] Delta00[(\)\(i,
j)\(j)\)]\ f[(\)\(s)\(j)\)\)\)\);

```

```

T21 = Simplify[g2 + (T210 + T211 + T212 + T213 + T214)];
f21 = (-r^k*f20 + T21)/(1 - r^2);

```

(\*SOLUCION EN FORMA FINAL CON FACTOR DE FORMA\*)

```

T2 = w*(f20 + \[Epsilon]*f21*Sin[k*\[Theta]]);

```

```

TRAD2 = T2 /. \[Theta] -> ArcTan[x0, y0];
TRAD2 = TRAD2 /. y0 -> yc /. x0 -> xc ;

T2 = T2 /. {r -> Sqrt[x^2 + y^2], \[Theta] -> ArcTan[x, y]};

(*****Terminos de orden Wi3*****)

Clear[T31, C31];
Pe = 10000;

(*Calculo de coeficientes generalizados*)
A2 = xi*p^4 (xi (2 - xi) (k + 5) -
      5 (k + 4) (1 - xi) E0) k (k - 1)/(4 (k + 1) (k + 2));
A3 = xi*p^4 k^2 (k -
      1) (xi (2 - xi) (k + 5) -
      5 (k + 4) (1 - xi) E0)/(24 (k + 1)^2 (k + 2)^2 (k + 3));

C31 = (Pe*A2*\!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\{r\}\)]Y) +
      A3*(11 - 7 r^2 +
          2 r^4 + (r^2 - 1) (k^2 (r^2 - 1) +
              3 k (r^2 - 2)) (-n^2) Y)) (1 - r^2) r^k;
C31T = Table[
  NIntegrate[r*C31[[i]]*f[[j]]/NORMAf2[[j]], {r, 0, 1}]
  , {i, 1, num1}, {j, 1, num}
];

T31 = -\!\(
\*SuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\{j = 1\}\), \(\{num\}\)]\(\
\*SuperscriptBox[\(\[Sum]\), \(\{i =
  1\}\), \(\{num\}\)]an0[\(\[Sum]\)\(\{i\}\)] C31T[\(\[Sum]\)\(\{i,
  j\}\)] \(\Exp[Zn[\(\[Sum]\)\(\{i\}\)] -
  Exp[Z1[\(\[Sum]\)\(\{j\}\)]])\)\) Delta0k[\(\[Sum]\)\(\{i,

```

APÉNDICE C. PROGRAMA UTILIZADO

---

```

j)\([)] f\([\(\j)\([)]\)\);

f31 = T31/(1 - r^2);
T3 = \[Epsilon]*w*f31*Sin[k*\[Theta]];

TRAD3 = T3 /. \[Theta] -> ArcTan[x0, y0];
TRAD3 = TRAD3 /. y0 -> yc /. x0 -> xc ;

T3 = T3 /. {r -> Sqrt[x^2 + y^2], \[Theta] -> ArcTan[x, y]};

(*****SOLUCION COMPLETA*****

Wi = 0.3;
T = T0 + Wi^2*T2 + Wi^3*T3;
TRADT = TRAD0 + Wi^2*TRAD2 + Wi^3*TRAD3;
(*T=T0+Wi^2*T2;
TRADT=TRAD0+Wi^2*TRAD2;*)
(*ztotal=0.2;*)

MaxTotal =
  FindMaxValue[{TRADT /. z -> ztotal, -0.9 < r < 1.4}, {r, 0.7}]
valorISOTotal = {0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0}*
  MaxTotal;
Teval = T /. z -> ztotal;

ISOTotal =
  ContourPlot[Teval, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.8, 1.2}, Contours -> 10,
  PlotRange -> {0, 1.2*MaxTotal}, MaxRecursion -> 3,
  PlotPoints -> 100, PerformanceGoal -> "Quality",
  Exclusions -> None, AxesLabel -> {"x", "y"}];

Max0 = FindMaxValue[{TRAD0 /. z -> ztotal, -0.9 < r < 1.4}, r]
valorIS00 = {0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0}*Max0;
```

```
Teval0 = T0 /. z -> ztotal;

IS00 = ContourPlot[Teval0, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.8, 1.2},
  Contours -> 10, PlotRange -> {0, 1.2*Max0}, MaxRecursion -> 3,
  PlotPoints -> 100, PerformanceGoal -> "Quality",
  Exclusions -> None, AxesLabel -> {"x", "y"}];

RadialPlotTotal =
  Plot[{TRADT /. z -> ztotal, TRADT /. z -> 0.5, TRADT /. z -> 0.3,
    TRADT /. z -> 0.4, TRADT /. z -> 0.5}, {r, -1, 1.5},
  RegionFunction -> Function[{r, TRAD3}, TRAD3 > 0],
  PlotLegends -> {"0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5"},
  AxesLabel -> {"z", "Temp Rad Orden 3"}];

GraphicsGrid[{{RadialPlotTotal, IS0Total, IS00}}, ImageSize -> Large]
```

# Bibliografía

- [1] Sommer G.J.; Chang D. S.; Jain A.; Langelier S. M.; Park S.; Rhee M.; Wang F.; Zeitun R. I. and Burns M. A. (2008). Introduction to microfluidics, pp.1- 33. In microfluidics for biological applications. W-C, Tian and E. Fine hout, editor, Springer.
- [2] Graetz, L. (1883), Ueber die Warmeleitungsfahigkeit von Flussigkeiten, Annalen der Physik und Chemie 18, 79.
- [3] Shah, R.K., London, A.L., (1978), Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Academic Press, New York.
- [4] Hartnett, J.P., and Kostic, M., (1985), Heat Transfer to a Viscoelastic Fluids in Laminar Flow Through a Rectangular Channel, Int. J. Heat Mass Transfer 28, pp. 1147-1155.
- [5] Filali, A., Khezzar, L., Siginer, D., Nemouchi, Z., (2012), Graetz problem with non-linear viscoelastic fluids in non-circular tubes, International Journal of Thermal Sciences 61.
- [6] J.L. Ericksen (1956), Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-Newtonian fluids, Quart. Appl. Math. 14, 318–321.
- [7] A.E. Green, R.S. Rivlin (1956), Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes, Quart. Appl. Math. 14, 299–308.
- [8] W.E. Langlois, R.S. Rivlin (1963), Slow steady-state flow of viscoelastic fluids through non-circular tubes, Rend. Math. 22, 169–185.

- [9] A.C. Pipkin (1963), Proceedings 4th international congress on rheology, Interscience 1, 213.
- [10] Olguín M. (2000), Análisis de flujos secundarios en ductos no circulares para fluidos no newtonianos. Trabajo válido en conformidad a los requisitos necesarios para obtener el título de ingeniero civil mecánico, USACH.
- [11] Medel C. (2001), Determinación de los números de Nusselt y Reynolds para fluidos viscoelásticos en ductos no circulares. Trabajo válido en conformidad a los requisitos necesarios para obtener el título de ingeniero civil mecánico, USACH.
- [12] Zapata F. (2011), Variación del número de Nusselt y de campos de temperatura al incluir la disipación de energía para fluidos viscoelásticos en ductos no circulares. Trabajo válido en conformidad a los requisitos necesarios para obtener el título de ingeniero matemático, USACH.
- [13] Coelho, P.M., Pinho, F.T., and Oliveira, P.J., (2003), Thermal entry flow for a Viscoelastic fluid: the Graetz Problem for the PTT Model, International Journal of Heat and Mass Transfer 46, p. 3865-3880.
- [14] R. Bird, Robert C. Armstrong, Ole Hassager (1987), Dynamics of Polymeric Liquids, p. 12, Wiley-Interscience publication.
- [15] Haberman, R., (2005), Applied Partial Differential Equations; with Fourier Series and Boundary Value Problems, Fourth Edition, Pearson Education.
- [16] Lauwerier, H.A., (1951), The use of confluent hypergeometric functions in mathematical physics and the solution of an eigenvalue problem, Appl. Sci. Res. Volume 2, Issue 1, pp. 184
- [17] Letelier M.; Leutheusser H.J.; Marquez G. (1995), Laminar flow transients in conduits of arbitrary cross section, Journal of Engineering mechanics. Vol 121, pp 1069-1074.
- [18] Siginer, D., Letelier, M., (2011), "Laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary contour". International Journal of Heat and Mass Transfer, 54, 2188-2202.

*BIBLIOGRAFÍA*

---

- [19] D.A. Siginer, M.F. Letelier (2010), Heat transfer asymptote in laminar flow of nonlinear viscoelastic fluids in straight non-circular tubes, *Int. J. Eng. Sci.* 48, p 1544–1562.
- [20] Xue, S.C.; Phan-Thien N. and Tanner, R.I. (1995), Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method, pp. 191-213. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59.
- [21] Arfken G., Weber, H., (2005), *Mathematical Methods for Physicists*, Sixth Edition, Elsevier Academic Press.