

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA**



**RESISTENCIA MECÁNICA A PARTIR DE LA
CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS EN UN
CASCARÓN SOMETIDO A COMPRESIÓN AXIAL
FUERTE.**

AUTOR:

NICOLÁS PATRICIO CABEZAS ZAVALA

Profesor Guía:

Dr. Luis Hamm H.

**TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO
PROFESIONAL DE INGENIERO FÍSICO**

SANTIAGO - CHILE

2014

RESISTENCIA MECÁNICA A PARTIR DE LA CONCENTRACIÓN DE
ESFUERZOS EN UN CASCARÓN SOMETIDO A COMPRESIÓN AXIAL
FUERTE

NICOLÁS PATRICIO CABEZAS ZAVALA

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Eugenio Hamm Hahn, del Departamento de Ingeniería Física y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora del candidato compuesta por:

Dr. Luis Hamm _____

Dr. Raúl Cordero _____

Dr. Enrique Cerda _____

Dr. Dinesh Sing _____

Dr. Yolanda Vargas _____

Directora del Departamento de Física

© **Nicolás Patricio Cabezas Zavala**

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

A mi Padre, Madre y Hermanas les agradezco todos esos consejos, reproches y espaldarazos en los momentos que la vida prepara. A Cinthya por su paciencia, amor y compañía en estos últimos cinco años de nuestras vidas. A todos mis amigos de casa y de universidad que me alientan y apoyan en cada paso que avanzo.

Al profesor Dr. Eugenio Hamm H. por su paciencia y adaptación a mi forma de aprender, dejándome los tiempos necesarios para madurar y analizar los nuevos conocimientos. A Guillaume por su gran colaboración en la realización de este trabajo desde el otro lado del mundo.

Hago una especial distinción a esta casa de estudios, que en sus pasillos encontré la diversidad necesaria para desarrollar una gran cantidad de habilidades para conectarme con el conocimiento, el espíritu, el deporte y la política.

Gracias a todos y cada una de las personas que alguna vez conocí, vi, escuché o que simplemente transitaron por los caminos de mi vida. Fueron parte de mi infinito crecimiento dirigido a transformar este mundo en algo cada vez mejor para todos.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Introducción	4
1.2. Superficies Delgadas.	5
1.3. Caracterización de un Material Elástico.	7
1.4. Historia de Experimentos con Cilindros.	11
1.5. Secuencia de eventos en compresión axial.	13
1.6. Ridge de Witten.	16
1.7. Energía Elástica por Compresión.	18
1.8. Objetivos.	20
2. Materiales y Montaje Experimental.	21
2.1. Materiales y Montaje.	22
2.2. Cilindros.	24
2.2.1. Preparación de Cilindros.	24
2.3. Sistema Óptico.	28
2.3.1. Características de implementos Ópticos.	29
2.4. Sistema Motriz.	31
2.5. Sistema Metrológico de Fuerza.	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
3. Método Experimental.	34
3.1. Movimiento del Motor.	35
3.2. Señales de Fuerza.	36
3.3. Adquisición de imágenes.	37
3.3.1. Técnica de proyección de franjas.	37
4. Resultados y Análisis.	45
4.1. Resultado de Aplicación del Método Óptico.	46
4.2. Resultados Generales.	53
5. Conclusiones.	55
Referencias	59

Índice de Tablas

2.1. Tamaños de cilindros.	26
2.2. Propiedades PVC.	27
2.3. Características de componentes del sistema motriz.	31
2.4. Características de componentes del sistema metrológico de fuerza.	33

Índice de figuras

1.1. Objetos Arrugados.	4
1.2. Tipos de Placas Delgadas.	6
1.3. Bloque de Material	8
1.4. Curvas Esfuerzo-Deformación	9
1.5. Secuencia de Eventos con Compresion Axial.	13
1.6. Buckling	15
1.7. Kite Shape	17
2.1. Esquema Montaje	22
2.2. Estructura Principal del Montaje	23
2.3. Borde de Pegado	25
2.4. Juntura de Sistemas Cilindro con Metrológico de Fuerza.	26
2.5. Esquema del Sistema Óptico	29
2.6. Cámara y Proyector utilizados.	30
2.7. Sistema Metrológico de Fuerza	32
3.1. Esquema de Fuerzas	36
3.2. Principio Óptico	38
3.3. Planos de Referencia.	40
3.4. Prisma Cuasitriangular	42

ÍNDICE DE FIGURAS

1

3.5. Cilindro con franjas proyectadas en su superficie.	43
4.1. Cilindro Reconstruido Antes de Comprimir	47
4.2. Cilindro Reconstruido después de Comprimir	48
4.3. Gráficas Cilindro $R = 6[cm]$	48
4.4. Graficas y Vista Superior Cilindro 1	50
4.5. Graficas y Vista Superior Cilindro 2	51
4.6. Secuencia de Compresión	54

Resumen

Este trabajo está centrado en la observación de cómo un cascarón cilíndrico se comporta al ser comprimido. Para esto, se utilizó un técnica óptico de profilometría que permitió reconstruir digitalmente la estructura de un cilindro que forma arrugas en su superficie mientras es comprimido. Los “ridges de Witten”, son un modelo que se utiliza para dar sentido físico a estas arrugas que se forman sobre la superficie del cilindro comprimido. Estos ridges almacenan energía elástica en su geometría, la que fué medida haciendo uso de la reconstrucción digital del cilindro.

Por otro lado, se realizó una medición de la fuerza que el cilindro recibe debido a la compresión, de la cual se extrajo una curva de energía referida al trabajo que hace esta fuerza, que es finalmente la que le entrega energía al cilindro durante la compresión. Esta medición de fuerza permitió elaborar una correlación entre lo que sucedía geométricamente en la superficie del cilindro y a su vez con la señal de fuerza. Además se hace una discusión de como la energía almacenada en los ridges puede explicar el comportamiento del trabajo efectuado por la fuerza compresora desde que aparece el primer pliegue en la superficie del cilindro. Finalmente se hacen algunas mediciones respecto a la resistencia y rigidez del material bajo esta geometría.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Para exponer acerca de la resistencia de un cascarón se debe hacer un pequeño recorrido por conceptos centrales de cómo estos cuerpos se comportan frente a estímulos mecánicos como la compresión. Los sólidos, en general, cuando son sometidos a compresión, estiramientos o torsiones responden a través de un comportamiento que puede ser observado y muchas veces medido. A este cambio se le llama deformación y puede estar atribuido a un cambio de volumen o de forma, los que son de mayor o menor grado según la magnitud del estímulo externo.



(a) Latas



(b) Botella



(c) Papel Metálico



(d) Automóvil

Figura 1.1: Arrugas presentes en diferentes estructuras después de comprimir.

Cuando se hace colapsar un objeto de un espesor muy pequeño en comparación a sus otras longitudes, aparecen como respuesta a la compresión estructuras de

pliegues distribuidas arbitrariamente por su superficie. Estas estructuras se observan en objetos reconocidos como arrugados o aquellos que en un principio están estirados y luego son comprimidos, como por ejemplo, el papel metálico para alimentos, carrocerías de automóvil después de un choque, latas de bebida o botellas plásticas aplastadas, entre otros.

Resulta muy interesante la observación de este comportamiento debido a que descubrimientos recientes han revelado que las estructuras con un espesor muy reducido poseen propiedades mecánicas muy particulares donde la geometría juega un rol fundamental. Por esta razón, realizar un estudio sobre estas estructuras puede ser útil para entender de que manera se podrían usar materiales con estas características físicas, por ejemplo, en beneficio de la seguridad de conductores y pasajeros pensando en una carrocería de automóvil que se arrugue de tal forma que la mayor cantidad de energía del impacto se absorba en arrugarla.

1.2. Superficies Delgadas.

Existen dos tipos de superficies delgadas: las placas y los cascarones. Ambas son superficies que poseen dos de sus longitudes principales de un orden de magnitud comparable mientras que la tercera es varios órdenes de magnitud menor en tamaño que las otras dos. Es por esto que aun cuando son cuerpos tridimensionales se les puede considerar como superficies.

Las placas delgadas son superficies que en su estado inicial son planas. En cambio, los cascarones tienen una o varias curvaturas en una u otra dirección.

Estas superficies se caracterizan por su comportamiento según su geometría, un cascarón cilíndrico no se comportará de la misma forma que un cascarón semiesférico o una placa al ser sometidas a compresión. Este aspecto hace que

estas estructuras y las formas que tiene de fallar sean campos de exploración muy abiertos aún. Es un campo donde los problemas combinan y requieren una interpretación física y geométrica para encaminar una solución. Gauss y Lagendre fueron unos de los primeros en observar este fenómeno (Marder, Deegan, y Sharon, 2007).

Las deformaciones en este tipo de superficies se dicen ser pequeñas cuando la longitud de separación de dos puntos vecinos del material, varía poco después de deformar. Los desplazamientos de material en estas estructuras pueden ser grandes y son la única forma que tiene de responder frente a estímulos mecánicos, un ejemplo de esto es la aparición de arrugas luego de hacer colapsar una hoja de papel en la mano o al aplastar una lata de bebida con el pie, donde los pliegues que se forman suelen ser de un largo mucho mayor que el espesor de la superficie.

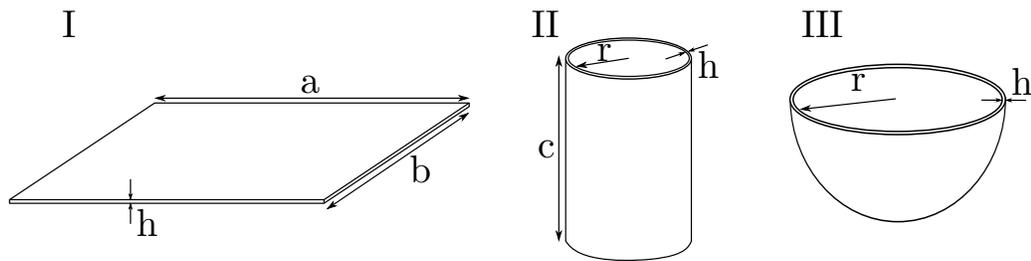


Figura 1.2: Estas son tres superficies que representan: I) una placa delgada, II) un cascarón cilíndrico y III) un cascarón semiesférico. En todas estas superficies el espesor h es mucho menor que cualquiera de las otras longitudes. En el caso de la placa $h \ll a$ y $h \ll b$ y para los cascarones $h \ll R$ y $h \ll c$.

Para cascarones esféricos y cilíndricos muchas veces se utiliza la relación radio/espesor o r/h para precisar el nivel de espesor con el cual se está trabajando,

ya que mientras más grande sea esta cantidad, más delgada y más cercano a la teoría de placas y cascarones delgados se encuentra el sistema sobre el cual se trabaja.

En el transcurso de este trabajo se establecerá una relación r/h para cascarones cilíndricos que serán axialmente comprimidos.

1.3. Caracterización de un Material Elástico.

Las relaciones que caracterizan las propiedades físicas de los materiales son las llamadas “ecuaciones constitutivas”. Muchas de estas leyes constitutivas han sido desarrolladas a través de relaciones empíricas basadas en evidencia experimental. El comportamiento mecánico de los sólidos está normalmente definido por la relación constitutiva de *esfuerzo-deformación* (*stress-strain*). Comunmente estas relaciones expresan el esfuerzo como una función de la deformación, tasa de deformación, historia de deformación, etc. Por simplicidad muchas veces se emplea el modelo del *sólido elástico* que no incluye efectos de historia y tasa de deformación. Aun mas, se restringe esta relación constitutiva de esfuerzo-deformación a una ley lineal, llegando a *sólido elástico lineal*. Aunque estas ideas simplifican ampliamente el modelo, las predicciones de la elasticidad lineal han mostrado gran acercamiento con la información experimental y ha entregado gran cantidad de métodos para conducir el análisis de esfuerzos. Muchos materiales de estructuras como metales, plásticos, cerámicos, madera, rocas, concreto y muchos más, exhiben comportamiento elástico lineal bajo pequeñas deformaciones. La relación constitutiva del esfuerzo como función de la deformación se expresa como:

$$\sigma = E\epsilon \quad (1.1)$$

donde σ representa el esfuerzo o fuerza por unidad de superficie y ϵ la deformación del material. Si un trozo de material (Figura 1.3) es sometido a fuerzas F iguales pero opuestas en sus extremos y se supone que éstas se distribuyen uniformemente en cada sección de área S , siendo constante a lo largo del cuerpo, se puede establecer que:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.2)$$

Además, si este material, producto de la acción de la fuerza sufre un cambio de longitud δL en una dirección longitudinal, donde L es el largo de la muestra:

$$\epsilon = \frac{\delta L}{L} \quad (1.3)$$

En un test para observar el comportamiento de un material en términos de esfuerzo-deformación (ver figura al costado), se ha establecido que:

- Si un material bajo estudio es tensionado, o sea, que los extremos donde la carga es aplicada obliga a estos a separarse, se dice que $\sigma > 0$ y $\epsilon > 0$.
- Por el contrario, si ese mismo material es comprimido, tal que sus extremos se aproximen entre sí, significa que $\sigma < 0$ y $\epsilon < 0$.

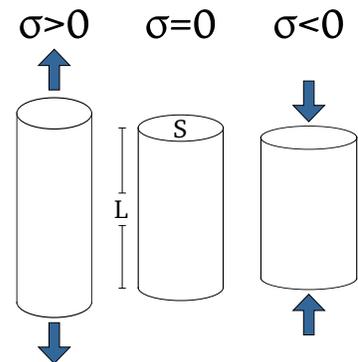


Figura 1.3: Material bajo distintos tipos de esfuerzo.

Estas ideas, traducidas en una representación gráfica, pueden ser expresadas como si se observara el mismo cuadrante, ya que entendiendo la composición de signos, solo se debe especificar en el comentario de la gráfica si lo que se está observando corresponde a un material bajo tensión o compresión. Esta gráfica, que

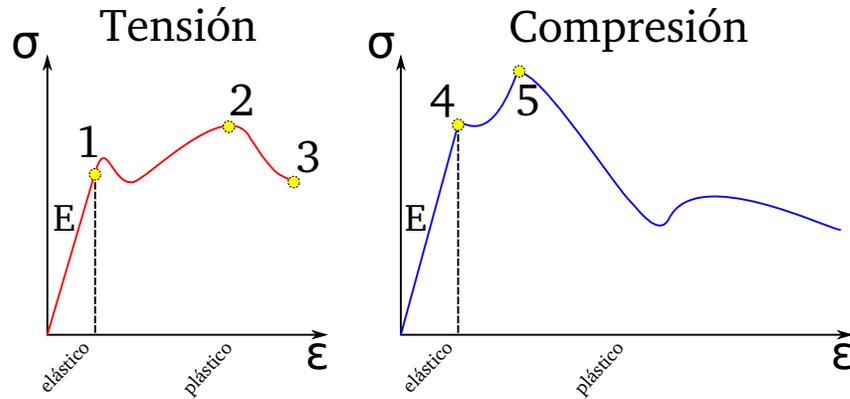


Figura 1.4: Curvas esfuerzo-deformación para tensión y compresión.

permite observar como se comportan los materiales a diferentes valores de deformación, típicamente presenta varias regiones y puntos de interés que responden a regímenes y límites de comportamiento respectivamente (Sadd, 2009).

Un material que posee, luego de su límite elástico, una fase plástica inducida por la acción de una fuerza se dice dúctil y puede mostrar un comportamiento bajo tensión y compresión, como el de la Figura 1.4. En ella se observa una curva roja y otra azul que representan el comportamiento del material bajo tensión y compresión respectivamente. La región lineal, que comprende desde el origen hasta el punto 1 y 4 se presenta el comportamiento elástico lineal del material y es aquí donde su pendiente equivale al módulo elástico o módulo de Young E . Si se suprime la carga que mantiene deformado el material dentro de este régimen, el material recupera su forma original. Luego de este punto el material entra a su fase plástica donde la deformación comienza a ser permanente impidiendo al cuerpo volver a su forma original. En tensión se dice que mas allá de este punto el material comienza a estirarse de tal forma que puede verse fluir su estructura. Bajo compresión la estructura comienza a inestabilizarse de tal forma que comienza a pandearse a medida que la deformación va incrementando. Una de las diferen-

cias mas generales ocurrentes entre tensión y compresión es que en este último, las deformaciones que se pueden alcanzar pueden ser mucho mayores que en tensión, tanto que la compresión impuesta puede llegar a su fin sin que el material se separe.

En los puntos 2 y 5 el material alcanza su máximo valor de esfuerzo $\sigma = \sigma_{max}$, esto es la tensión máxima y la resistencia máxima del material para estados de tensión y compresión respectivamente. En algunos casos de compresión la resistencia máxima se presenta como el límite elástico del material permitiendo a la estructura fallar de tal forma que comienza a formar nuevas estructura en su superficie. En materiales bajo tensión, luego de pasar por la tensión máxima, se comienza a formar una región mas delgada que el resto de la muestra y es altamente probable que en esa región el material se divida o fracture (punto 3) al aumentar la deformación (Hosford, 2005).

Las superficies delgadas presentan una forma de falla diferente a las estructuras macizas, ya que su geometría les permite responder con un estado de buckling o falla por colapso a pequeños valores de deformación, generando pliegues en su superficie.

Los cilindros en la ingeniería se utilizan en innumerables ambitos de la vida cotidiana. Bajo la geometría de un cascarón resulta interesante su estudio debido a lo económico y liviano que puede ser si se lograra dar con algún atributo que permita reemplazar a otras estructuras menos eficientes en rubros como la mecánica automotriz, la construcción, la medicina, entre otros.

1.4. Historia de Experimentos con Cilindros.

Existe una gran cantidad de experimentos relacionados con cascarones cilíndricos, los que se pueden clasificar según el origen físico de su compresión. Por un lado se encuentran aquellos que son comprimidos hidroestáticamente y por otro lado aquellos que son comprimidos axialmente por su eje central, haciendo que uno de sus extremos se mueva hacia el extremo opuesto. Estos últimos son la clase a la que se dedicará el desarrollo de este trabajo.

Los primeros acercamientos a esta clase de experimentos se dan a mediados del siglo *XIX*, específicamente en 1846, cuando Fairbarn and Hudgkinson trabajaban con tubos circulares, y fué a inicios del siglo pasado cuando se reconocieron como experimentos de “buckling” en columnas, o dicho de otra forma, como estas colapsaban.

Luego en 1905-1908 Lilly, motivado por la idea de economizar en el diseño de columnas, acompañado por su propio desarrollo teórico elaboró los primeros experimentos ligados al buckling elasto-plástico. Llegando a 1910 Lilly, Lorenz, Timoshenko, Southwell y Dean desarrollaron teóricamente problemas de buckling, “wrinkling” (como se arrugan) e inestabilidad de cascarones cilíndricos, de los cuales muchos resultados y fundamentos se sostienen hasta hoy.

Los primeros experimentos correlacionados con predicciones teóricas fueron realizados por Robertson en 1915, cuyos resultados fueron publicados diez años después; él enfatizó la diferencia entre el comportamiento de colapso de tubos gruesos, el cual está determinado por el comportamiento del material (“yield stress” o límite elástico), y el comportamiento de tubos delgados, que está determinado por la inestabilidad elástica de la estructura (buckling), incluso agregó que si en tubos muy largos y delgados el buckling se efectúa dentro del límite elástico de la estructura, ésta volvía a su forma original una vez removida la carga.

El crecimiento acelerado del transporte aéreo durante la década de 1930 motivó la realización de estudios experimentales más cuidadosos en la materia. A su vez se incrementó el uso de las columnas cilíndricas delgadas en el rubro de la construcción civil, por lo cual comenzaron a ser estudiadas también. Todos estos experimentos se realizaron variando la geometría y materiales, lo que permitió a un gran número de diseñadores utilizarlos como una base de datos para nuevos desarrollos.

Hasta ese momento muchos experimentos se realizaban comparando un valor experimental con un valor teórico de la resistencia máxima o “esfuerzo de buckling” de la estructura, proveniente de la elasticidad lineal, para un material con un coeficiente de Poisson de $\nu = 0,3$, que se escribe como:

$$\sigma_{cl} = 0,605E \frac{h}{R} \quad (1.4)$$

donde E es el módulo de Young del material, h su espesor y R el radio del cilindro. La mayoría de los resultados estaban alejados del valor teórico al ser menores, aunque el mecanismo de falla se produjera en la mayoría de los casos por una inestabilidad elástica. El largo del cilindro tiene un efecto muy pequeño sobre el esfuerzo de buckling, a no ser que este sea muy corto. La razón entre el valor experimental y teórico del esfuerzo de buckling ($\rho = \sigma_{max}/\sigma_{cl}$) variaba entre 0,10 – 0,65, dependiendo del método utilizado para la fabricación de las muestras, permitiendo establecer que su disminución se debía al incremento de la razón r/h .

Desde mediados de los 30 a finales de 1950 el objetivo de la mayoría de los experimentos realizados se enfocaba en la generación de datos experimentales que tuvo gran dispersión de resultados y baja repetibilidad. En las últimas tres décadas cuidadosos experimentos acompañados de un detallado análisis han influido en el diseño de estructuras en muchos rubros de la ingeniería, ya que se ha logrado una mejor comprensión del buckling y post-buckling de éstas (Singer,

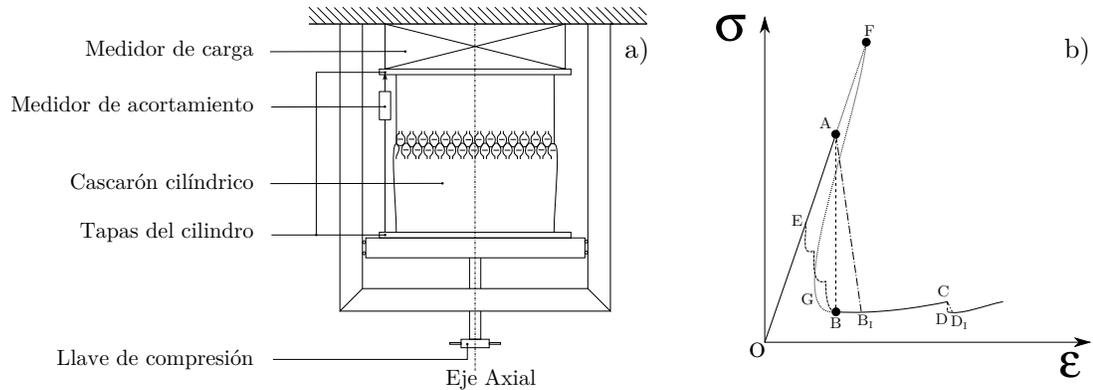


Figura 1.5: a) Vista esquemática de una prensa de deformación controlada para compresión axial. b) Gráfica típica del buckling de un cascarón cilíndrico sometido a compresión axial

Arbocz, y Weller, 1998).

1.5. Secuencia de eventos en compresión axial.

Al aplicar una carga axial uniformemente distribuida sobre un cascarón cilíndrico (ver Figura 1.5a), se observa una secuencia de estructuras en su superficie, estas siempre ligadas al acortamiento de la altura del cilindro. Si se grafica el acortamiento axial del cilindro (o deformación) versus la carga (o esfuerzo) que este recibe desde su base, se observaría una gráfica similar a la mostrada en la Figura 1.5b.

El comportamiento de pre-buckling es aproximadamente lineal y el cascarón mantiene su forma original hasta que el buckling aparece en el punto **A** de la gráfica. Ahí la estructura no solamente evita el incremento de la carga mediante el buckling sino que también la carga cae abruptamente a una fracción del valor de la carga de buckling en el punto **B** (indicada por la línea punteada **AB**) mientras la superficie

repentinamente produce un sonido que termina con la formación de un patrón típico de post-buckling a veces llamado “patrón de diamante” (Figura 1.6-izquierda). Si la máquina de compresión es muy rígida, la caída de la carga será paralela al eje coordenado del esfuerzo. Por otro lado si no es lo suficientemente rígida la carga caerá al punto \mathbf{B}_1 a un valor de deformación mayor que en \mathbf{A} , como lo muestra la línea semipunteada \mathbf{AB}_1 , cuya pendiente dependerá de la elasticidad del sistema de compresión. En \mathbf{B} o \mathbf{B}_1 la estructura ha asumido su primer estado de equilibrio de post-buckling.

Si la deformación es disminuida o se quita la carga externa sobre el cascarón, la estabilidad del equilibrio de post-buckling se torna inestable y la estructura comienza a recuperar su forma pero viajando por la curva punteada \mathbf{BE} hacia el punto \mathbf{E} ubicado por debajo del valor del esfuerzo inicial de buckling. Luego retorna a \mathbf{O} por medio de la línea original \mathbf{EO} .

Si se sigue incrementando la deformación desde el punto \mathbf{B} (o \mathbf{B}_1) hasta un segundo valor crítico, el primer patrón de post-buckling se tornará inestable y caerá por la línea \mathbf{CD} (o \mathbf{CD}_1) hacia un otro patrón de post-buckling. Este proceso secundario de buckling se repetirá hasta dejar de aumentar la deformación del cascarón.

La curva punteada \mathbf{OFGB} corresponde a la que se obtendría de un cascarón cilíndrico perfecto, la cual se junta a la curva experimental de post-buckling \mathbf{BC} . La mayor causa de esta diferencia, entre el valor teórico de buckling \mathbf{F} y su valor experimental observado \mathbf{A} , es la inestabilidad inicial del comportamiento del post-buckling y de la sensibilidad a las imperfecciones que se observan. Aun mas, la estructura de buckling que debería formarse según la teoría de la elasticidad es el patrón “chessboard” que se puede observar en la Figura 1.6-derecha, y que difiere considerablemente del patrón de post-buckling observado en experimentos. Este patrón, el cual se presentaría para un cascarón largo, ha sido observado di-

rectamente en al menos un experimento¹ y representa la alta inestabilidad inicial del patrón de buckling.

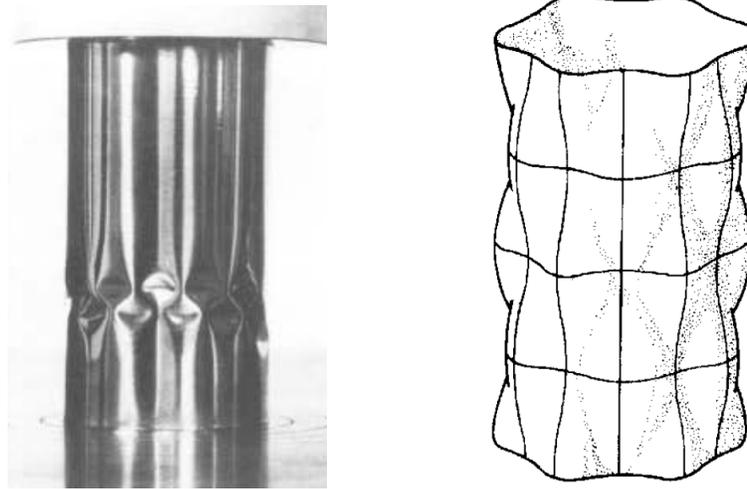


Figura 1.6: *Izquierda*: Patrón de post-buckling sobre un cascarón cilíndrico bajo compresión axial. *Derecha*: patrón teórico de buckling sobre el cascarón cilíndrico.

¹Ver trabajo de Horton, W.H., and Durham, S.C. llamado "The Effect of Restricting Buckle Depth in Circular Cylindrical Shells Repeatedly Compressed to the Buckling Limit", realizado en Stanford University, Stanford, California; Septiembre 1963.

1.6. Ridge de Witten.

Cuando se desea arrugar una hoja de papel (tamaño carta) en la palma de la mano, se debe aplicar una fuerza sobre ésta que va modificando su geometría. A medida que esta fuerza se incrementa, se va perdiendo la forma estirada y lisa de un principio para llegar a transformarse en una superficie que contiene en su interior aire y papel distribuido arbitrariamente en un montón de pliegues que dependen estrechamente de la fuerza que se aplicó para dejar la hoja de papel convertida en una esfera.

Si se hace un ejercicio rápido y se compara el volumen real de la hoja con su volumen final (forma de esfera) se podrá observar que su volumen corresponde aproximadamente a un 73% de aire. La hoja deformada se compone básicamente de una red de estructuras compuestas por dos elementos: regiones puntiagudas (o vértices) y líneas rectas (o pliegues) que unen pares de vértices. Si se quisiera volver a la forma original de la hoja, estirándola, se podrían apreciar la gran cantidad de pliegues que se formaron en el desarrollo de este trivial experimento. Ahora si se mira con mayor detenimiento un pliegue, se puede apreciar que contiene una línea delimitada por dos vértices (las regiones puntiagudas), uno en cada extremo y que a cada lado de ésta hay planos formando un ángulo entre ellos. Esta estructura formada por estos elementos es conocida como “stretching ridge” sobre la cual T.Witten hace una descripción argumentando sobre su origen y aspectos geométricos (Witten, 2007). Aun mas específico es el trabajo que se realizó sobre los vértices, también denominados “d-cones” o developable cones, los que se analizaron bajo la perspectiva de la geometría y elasticidad (Cerde, Chaieb, Melo, y Mahadevan, 1999).

La teoría (Witten, 2007) establece que la energía almacenada a lo largo del ridge es mayor que la energía almacenda en la región mas próxima a los d-cones. Por

lo cual mientras mas grande sea un pliegue mayor será la energía almacenada en él.

Ahora, cuando un cascarón cilíndrico entra en una fase de post-buckling los pliegues que se forman requieren una porción de energía elástica, proveniente del trabajo de compresión, para desarrollarse mientras la compresión continúa. La forma que estos pliegues adoptan es conocida como “Kite Shape” y son los que almacenan la mayor parte de la energía elástica.

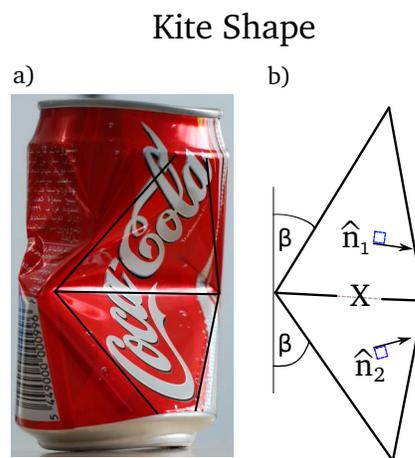


Figura 1.7: a): Kite shape sobre una estructura cilíndrica aplastada. b): indicación de parámetros para el análisis y medición de energía del pliegue.

Una vez que el cilindro es comprimido y deformado se presenta como se ilustra en la Figura 1.7a donde la estructura del kite shape se logra identificar geoméricamente. Para calcular la energía E que estos pliegues almacenan se puede utilizar la siguiente ecuación (Tallien, Ojajärvi, Åström, y Timonen, 2010):

$$E_i = c_r \kappa \left(\frac{X_i}{h} \right)^{\frac{1}{3}} \beta_i^{\frac{7}{3}} \quad (1.5)$$

donde E_i es la energía que almacena el i ésimo pliegue, c_r es un coeficiente de proporcionalidad que debe ser determinado, κ el módulo de bending del mate-

rial definido como $\kappa = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, X_i el largo del stretching ridge, h el espesor del material y β_i el ángulo diédrico de las caras del pliegue.

1.7. Energía Elástica por Compresión.

Cuando un cascarón cilíndrico es comprimido por la acción de una fuerza externa constante F aplicada en uno de sus extremos, su energía interna U_{int} será alterada. En principio y de forma general, el trabajo total W realizado por esta fuerza se puede descomponer en:

$$W = W_c + W_{nc} \quad (1.6)$$

una parte que corresponde a fuerzas conservativas W_c y otra a fuerzas no conservativas W_{nc} . Por otro lado, el teorema del trabajo-energía establece que $W = \Delta K$, el trabajo realizado por F sobre la estructura es equivalente al cambio en su energía cinética ΔK que resulta del acercamiento de los extremos del cilindro. Entonces (1.6) se puede expresar como:

$$W_c + W_{nc} = \Delta K \quad (1.7)$$

Por otro lado el cambio negativo de la energía potencial $-\Delta U$ de un sistema es equivalente a W_c , por lo tanto (1.7) se puede escribir como:

$$\Delta U = W_{nc} - \Delta K \quad (1.8)$$

Ahora el cambio de la energía potencial se puede descomponer en:

$$\Delta U = \Delta U_{int} + \Delta U_{ext} \quad (1.9)$$

donde ΔU_{int} es el cambio de energía potencial interna y ΔU_{ext} el cambio de la energía potencial externa U_{ext} . De esto se puede entender que la fuerza F realiza

un trabajo externo W_{ext} , tal que:

$$\Delta U_{ext} = -W_{ext} = - \int_{z_1}^{z_2} \vec{F}_{ext} \cdot \hat{z} dz \quad (1.10)$$

donde \hat{z} indica que la compresión se realiza sobre el eje z y z_1 es la posición inicial de la base del cilindro y z_2 su posición final. Ahora utilizando (1.9) y reemplazando en (1.8) queda:

$$\Delta U_{int} = W_{nc} - \Delta K + \int_{z_1}^{z_2} F_{ext} dz \quad (1.11)$$

Esta energía interna es equivalente a la Energía Elástica por Compresión que el cascarón cilíndrico dispone y está determinada por la posición del extremo desde la cual F esta actuando. Si el extremo del cilindro se mueve lentamente la variación ΔK entre la posición z_1 y z_2 es muy pequeña. Por otro lado, si se mueve rápidamente las fuerzas no conservativas que generan W_{nc} tendrían un efecto muy pequeño. Si se está en un régimen intermedio, tal que permita despreciar los efectos no conservativos y de altas variaciones de la energía cinética se puede establecer que:

$$\Delta U_{int} \approx \int_{z_1}^{z_2} F_{ext} dz \quad (1.12)$$

Finalmente la energía total E_T que los pliegues de un cascarón cilíndrico almacenan, utilizando la ec 1.5, corresponde a:

$$E_T = \sum_{i=1}^n E_i = \frac{c_r \kappa}{h^{1/3}} \sum_{i=1}^n (X_i \beta_i^7)^{\frac{1}{3}} \quad (1.13)$$

Esta última ecuación se utiliza para medir la longitud y los ángulos de cada pliegue que se forman sobre la superficie de un cascarón cilíndrico en su régimen de postbuckling, para observar cuanta energía almacenan en cada estado de compresión.

1.8. Objetivos.

Los objetivos de esta tesis son:

- Estudiar el comportamiento de un cascarón cilíndrico sometido a compresión fuerte que corresponde al régimen conocido como post-buckling.
- Usar una técnica de profilometría FTP modificada de modo tal que permita reconstruir el cascarón deformado mientras es comprimido.
- Establecer correlaciones entre la respuesta mecánica del cilindro ante la compresión y la geometría de la red de defectos tipo ridges.

Capítulo 2

Materiales y Montaje Experimental.

2.1. Materiales y Montaje.

Los materiales utilizados se mencionarán mientras se describen los cuatro sistemas que componen el montaje experimental para la realización de los experimentos. Estos sistemas como: el sistema cilindro, el sistema óptico, el sistema motriz y el sistema metrológico de fuerza. En la Figura 2.1 se especifican gráficamente los sistemas utilizados y su ubicación dentro del montaje experimental. Hay

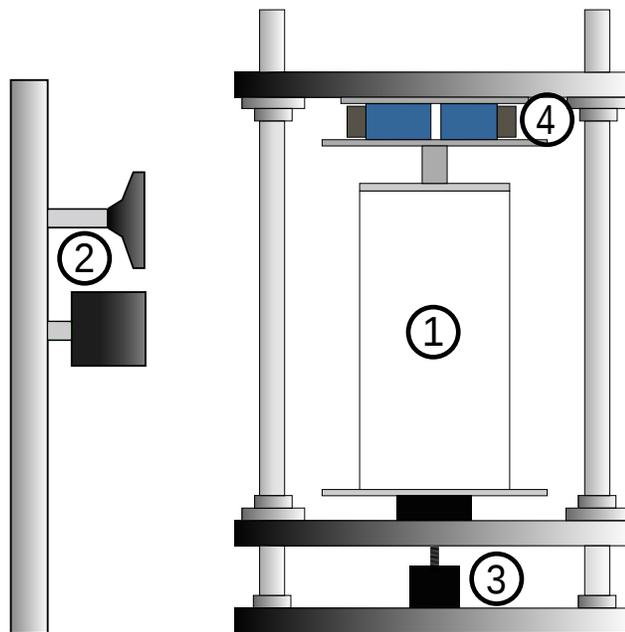


Figura 2.1: Esquemmatización del montaje utilizado enumerando sus componentes. 1 Sistema Cilindro; 2 Sistema Óptico; 3 Sistema Motriz; y 4 Sistema Metrológico de Fuerza.

un componente mas que liga tres de los cuatro sistemas (s. cilindro, s. motriz y s. metrológico de fuerza) y es la estructura principal. Esta estructura está montada sobre una mesa óptica y se compone de 2 pilares, unidos por 3 barras horizontales (barra inferior, central y superior); todas estas piezas son de duraluminio. Los 2 pilares separados entre si por una distancia de $43,5[cm]$ (distancia entre sus

centros) tienen un diámetro de $\varnothing = 3[cm]$ y un largo de $98,5[cm]$. Las barras que los unen tienen un ancho de $10[cm]$, un largo de $50,5[cm]$, un grosor de $2,25[cm]$ para la barra inferior y un grosor de $1,65[cm]$ para la barras central y superior. La plataforma móvil (o también barra central) puede trasladarse por la estructura principal de forma vertical gracias al sistema motriz del montaje. El eje central de la estructura principal se ubica en el centro de las 3 barras y coincide con la ubicación del eje del cilindro y el eje de giro del sistema motriz. Es en este eje donde se ubica el sistema metrológico de fuerza, adherido debajo de la barra superior. Las partes y dimensiones del montaje se muestran en la Figura 2.2.

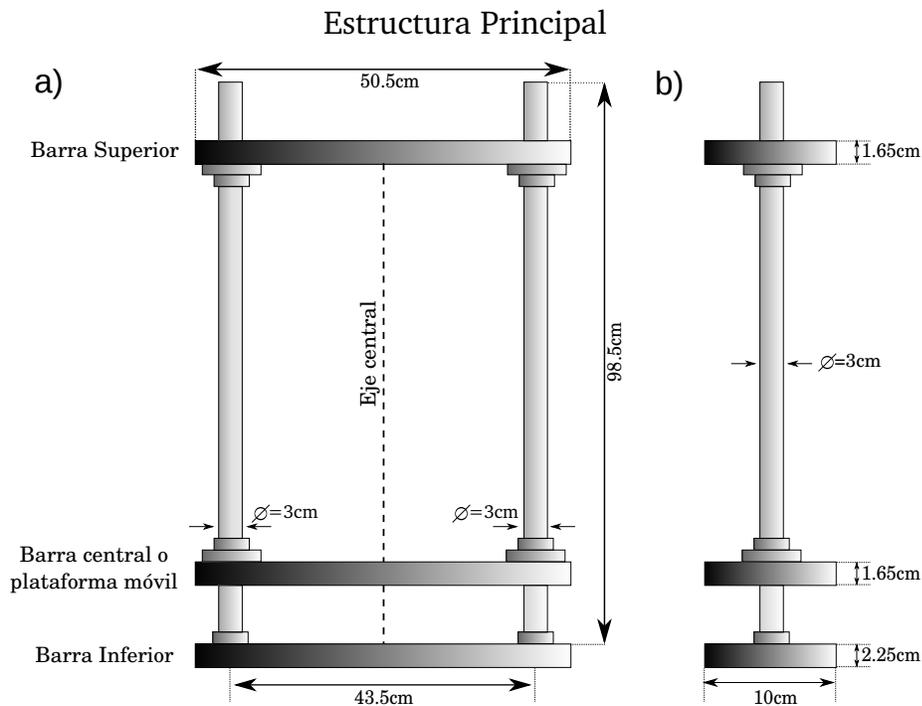


Figura 2.2: Estructura principal del montaje experimental. a) Perfil frontal y b) Perfil lateral. Entre la barra central y la barra inferior, esta ubicado un motor que forma parte del sistema motriz del montaje.

2.2. Cilindros.

Los cilindros contruídos con PVC se posicionan sobre la plataforma móvil de la estructura principal utilizada para realizar la compresión. El cilindro es el componente central de los experimentos. La compresión se hacce desde la base del cilindro gracias al sistema motriz. Simultaneamente se extraen imágenes de su estructura física por medio del sistema óptico y se mide la fuerza aplicada al cilindro a través del sistema metrológico de fuerzas ubicado en su parte superior, sujeto a la barra superior de la estructura principal.

2.2.1. Preparación de Cilindros.

A partir de un pliego transparent de PVC de $110[cm]$ por $57[cm]$ y espesor de $100[\mu m]$ desplegado sobre una superficie plana (vidrio), se dibujan láminas con márgenes de $28[cm]$ por $42[cm]$ y de $36[cm]$ por $54[cm]$, para luego cortarlas. Una vez generadas estas láminas y desprendidas de su pliego inicial, se utiliza la técnica serigráfica para pintarlas de blanco usando bastidores con una región permeable de $26[cm]$ por $40[cm]$ y $34[cm]$ por $52[cm]$ para cada uno de los tamaños de láminas respectivamente. Cada lámina de PVC se ubica por debajo de la región permeable del bastidor y se pinta utilizando un squid que se desliza sobre esta región dispersando una tinta especial para adherirse al PVC, que atravesando la malla del bastidor se fija a la superficie de las láminas de PVC.

Las láminas, antes de ser lijadas en sus bordes, debían tener un tamaño de $26[cm]$ por $37,731[cm]$ y de $34[cm]$ por $50,297[cm]$ ¹. El espesor de las láminas antes de pintarlas es de $h_1 = 100[\mu m]$ y luego de pintarlas quedan con un espesor adicional

¹Se debe lograr la precisión indicada en estas últimas cifras para obtener una lámina cilíndrica que se ajuste a los discos que se mencionarán mas adelante

de $20[\mu m]$ a $30[\mu m]$, tal que, $h_2 = 120 - 130[\mu m]$.

Para formar el cascarón cilíndrico es necesario unir los lados opuestos de las láminas. Para ello se hace una región de un ancho de $1,5[mm]$ con forma de escalón (como se muestra en la Figura 2.3), la cual se alcanza desgastando la superficie del borde de la lámina de PVC, una cantidad $h_2/2$, con una lija de grano $P220$. Ambos extremos juntos deben alcanzar el espesor de la lámina pintada, pero como se agrega una pequeña capa de adhesivo, el espesor h que se alcanza fluctuaba entre los $150[\mu m]$ y $180[\mu m]$.

Bordes lámina de PVC

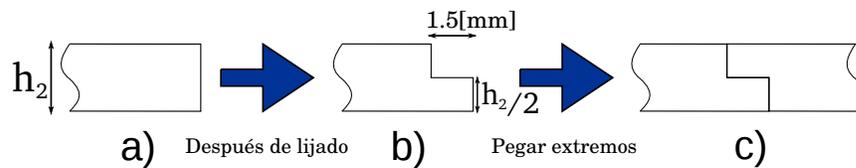


Figura 2.3: Borde de láminas de PVC visto frontalmente desde uno de sus extremos. Borde a) sin lijar, b) lijado con dimensiones indicadas y c) pegado con el borde complementario de la misma lámina, para conseguir la forma cilíndrica.

Para obtener un cilindro rígido se le introducen 2 discos de acrílico (tapas del cilindro), uno por el extremo superior y otro por el extremo inferior, y se fijan a las paredes internas del cilindro. Los radios exteriores de estos discos coincide finamente con el radio interno del cilindro construido a partir de la lámina. Para fijar estas tapas, se deja en cada extremo del cilindro un excedente de material de $1[cm]$, el cual es utilizado solamente para pegar los bordes superior e inferior a las tapas con una delgada capa de silicona. Los discos tienen un espesor de $1,4[cm]$ y una vez pegadas estas tapas a la superficie interna del cilindro queda un cilindro con una altura de $24[cm]$ y otro con una de $32[cm]$. Obviamente se observa una altura descubierta de superficie de los discos, con una longitud de $0,4[cm]$.

Para acercarse lo mas posible a una condición de empotramiento, sobre los extremos del cilindro, se colocan bandas de goma con un ancho de $1[cm]$, un espesor de $t = 0,5[cm]$ y un largo de $2\pi(R + t/2)$, donde R es el radio del cilindro.

La tapa superior del cilindro, se sujeta al sistema metrológico de fuerza utilizando una barra de sujeción acrílica que tiene como largo el diámetro del disco y un ancho de $4[cm]$. Para la unión de esta barra y el disco superior (o tapa superior) del cilindro se utilizan 2 pernos de diámetro $\varnothing = 8[mm]$, uno en cada extremo de la barra, como se muestra mas abajo, en la Figura 2.4.

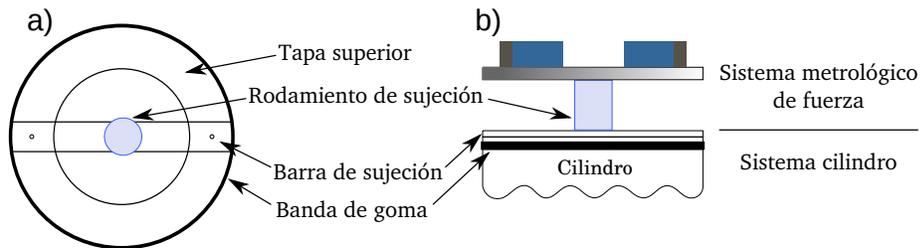


Figura 2.4: a) Vista superior de la estructura superior del cilindro y b) vista frontal de la unión entre los sistemas cilindro y metrológico de fuerza.

La barra acrílica posee en su centro un orificio para atornillar un rodamiento de sujeción perteneciente al sistema metrológico de fuerza.

Como se fabrican 2 tamaños de láminas, se construyen dos tamaños de cilindros para la ejecución de los experimentos, cuyas dimensiones se especifican en la tabla siguiente:

Cilindro	Radio $[cm]$	Altura $[cm]$
Pequeño	6	24
Grande	8	32

Cuadro 2.1: Tamaños de cilindros.

Como se puede observar, la altura de los cilindros es cuatro veces su radio, lo cual es solo para fijar una relación de aspecto que permita comparar resultados e información en las etapas de análisis de este trabajo.

La tapa inferior del cilindro se fija a la plataforma móvil sobre un adaptador de acrílico que le impide cualquier otro movimiento que no sea de traslación axial.

Las características y propiedades del PVC son las siguientes (Mudigoudra, Masti, y Chougale, 2012):

Magnitud	Símbolo	Valor
Espesor	h	100,0[μm]
Módulo de Young	E	676,1[MPa]
Coefficiente de Poisson	ν	0,3

Cuadro 2.2: Propiedades PVC.

2.3. Sistema Óptico.

Para el estudio de la superficie del cilindro deformado se utiliza la técnica de proyección de franjas (Cobelli, Maurel, Pagneux, y Petitjeans, 2009) y (Lagubeau y cols., 2010); a partir de ella se registra el comportamiento del cilindro en estado de compresión, utilizando 3 cámaras web y 3 mini-proyectores de imágenes. Es un requisito que al menos un tercio del cilindro sea cubierto por la proyección de un patrón de franjas y que los cambios de éste sean registrados por una cámara web. Por lo tanto a cada cámara se le adjunta un proyector para que trabajen en conjunto sobre un mínimo de superficie del cilindro equivalente a un tercio de éste.

Para poder hacer un análisis de imágenes expedito en cada tercio de cilindro, es necesario configurar cada proyector para que emita franjas de un color que no interfiera en el análisis del tercio adyacente. Para lograr esto se utilizan los colores rojo, verde y azul; que con la ayuda de filtros de cada color en conjunto con polarizadores, se asegura que solamente el proyector y la cámara que están frente a alguno de estos colores no reciba ruido de los otros proyectores. Los polarizadores se usan específicamente para eliminar brillos molestos.

Para realizar un análisis de las franjas proyectadas sobre los cilindros, cada conjunto cámara-proyector tienen que cumplir una configuración espacial específica, que debe satisfacer lo siguiente:

- Los ejes ópticos de las cámaras y proyectores deben estar paralelos y sobre la misma vertical.
- El punto de proyección de la imagen (en el proyector) y el punto de su recepción (en la cámara) deben estar a una misma distancia de una referencia plana y vertical.

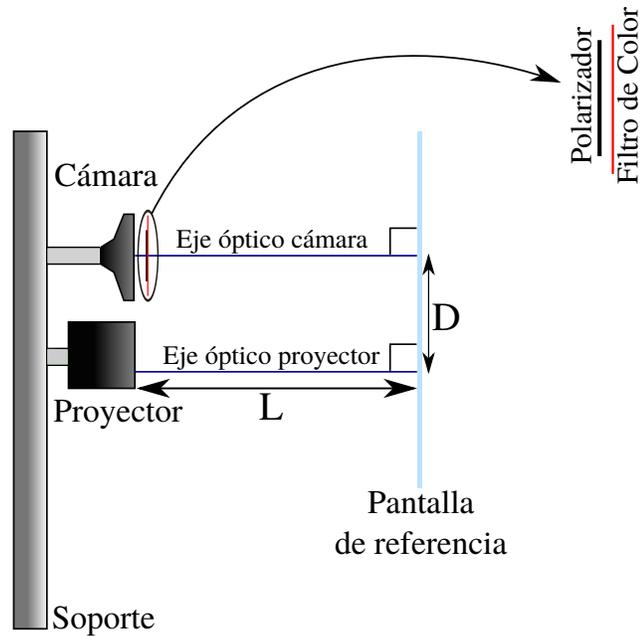


Figura 2.5: Esquema de la configuración óptica utilizada, esto se aplica sobre todos los conjuntos cámara-proyector.

Estas exigencias se practican sobre una referencia que consiste de una pantalla blanca posicionada verticalmente frente a ambos aparatos (tal como lo muestra la Figura 2.5). Esta pantalla es el plano de referencia utilizado para el patrón de franjas, es decir, este es el nivel cero de deformación de franjas.

2.3.1. Características de implementos Ópticos.

Cámaras.

- Marca: Logitech
- Modelo: HD Pro Webcam C920
- Resolución: 2048x1536 pixeles

- Lentes: Carl Zeiss.

Proyectores.

- Marca: Samsung.
- Modelo: SP-H03
- Relación de Aspecto: 16:9
- Resolución: 854x480 pixeles



Figura 2.6: Cámara y Proyector utilizados.

Filtros y Polarizadores.

Todos los filtros son de marca Kodak con un tamaño de 75mm x 75mm y sus modelos van variando según el número wratten; de esta forma el azul corresponde al No. 47B, el verde al No. 58 y el rojo al No. 29. Todos estos filtros se ubican frente a las cámaras y se usan exclusivamente para separar las componentes azul, verde y roja según el color que le corresponde a cada cámara del

montaje.

Los polarizadores usados son de la marca Edmund Optics y se ubican frente a cada proyector y cámara que correspondían a cada color. En total se utilizaron 3 filtros y 6 polarizadores.

2.4. Sistema Motriz.

Esta parte del montaje está compuesta básicamente por un motor de paso para el cual 2000 pasos corresponden a 1 giro completo en torno a su eje de rotación. A este eje se fijó un hilo de diámetro exterior de $\varnothing = 10[mm]$ (M10) con un largo de $15[cm]$. Este hilo sirve para que la barra central (de la estructura principal) con un hilo complementario atravesándole por su centro pueda subir y bajar gracias a la acción rotatoria del motor. Este sistema imprime, a través de la barra central, la fuerza F de compresión sobre el cilindro, el cual va disminuyendo su altura a medida que la barra se eleva por sobre la mesa óptica.

Implemento	Marca	Modelo
Controlador	AMS	mSTEP-407
Motor	AMS	BM-23140
FP Motor	ISO-TECH	IPS-2303
FP Controlador	HQ-Power	PS-12015

Cuadro 2.3: Características de componentes del sistema motriz.

El motor se comanda mediante un controlador que funciona como una interfaz entre un computador (ordenador) y el motor. Las órdenes que se envían al motor llegan primero al controlador y luego, una vez que interpreta la orden, envía una

señal para generar el movimiento del motor. Las características de cada elemento se explicitan en el Cuadro 2.3.

2.5. Sistema Metrológico de Fuerza.

Por debajo de la barra superior de la estructura principal se ubican tres sensores de carga posicionados uno de otro en un ángulo de $2\pi/3$. Estos sensores están empotrados por debajo de un disco metálico que les proporciona un soporte adecuado para su distribución, el cual está fijo a la barra superior. Cada uno de estos sensores está conectado a un amplificador de señales que envía los cambios de voltaje, o cambios en la carga recibida por el cilindro, a la tarjeta de adquisición de datos del computador, el mismo que controla el motor.

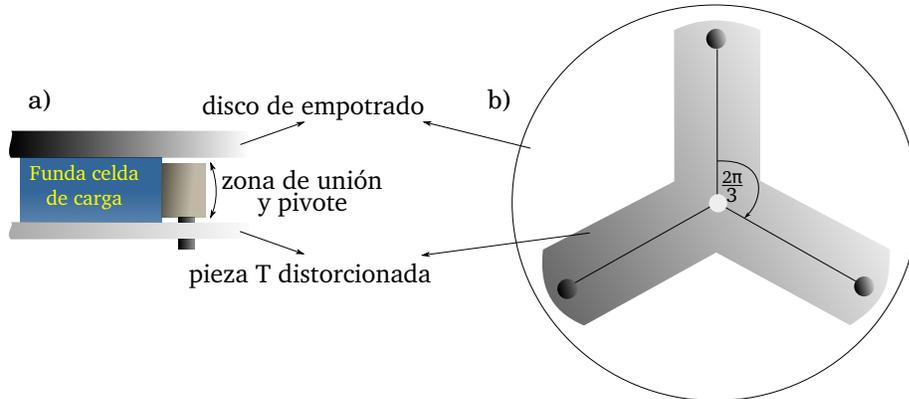


Figura 2.7: Esquema de la composición del sistema metrológico de fuerza. a) Vista lateral de una celda de carga. b) Vista inferior de la pieza T.

El rango de voltajes que disponen estos amplificadores es de $-10[V]$ a $10[V]$. Cada celda de carga está conectada, por el interior de la funda del dispositivo, con una barra que tiene una región externa que permite transportar las fuerzas desde el exterior hacia la celda. La región externa de la barra, que puede pivotar

verticalmente, dispone de una “zona de unión” que le permite ser conectada a un brazo de una pieza en forma de T distorsionada (ver Figura 2.7a). Como se utilizan 3 celdas de carga, cada una se coloca sobre un brazo de esta T, que permite pasar de 3 zonas de contacto (o zonas de unión) a solo una zona de interacción con el cilindro, por medio de un orificio, ubicado al centro de la T (ver Figura 2.7b). A este orificio se atornilla el rodamiento de sujeción mencionado e ilustrado en la Figura 2.4 para conectar el sistema cilindro al sistema metrológico de fuerza. Las características de los componentes electrónicos del sistema están en el cuadro siguiente:

Implemento	Marca	Modelo
2 Amplificadores	Omega	DMD-465WD
1 Amplificador	Futek	CSG-110
3 Celdas	Omega	LCEB-5

Cuadro 2.4: Características de componentes del sistema metrológico de fuerza.

Capítulo 3

Método Experimental.

Tres sistemas actúan sobre el cilindro para la ejecución de cada experimento, por un lado, la forma de adquisición de imágenes y señales de fuerza; y por otro, el envío de órdenes hacia el motor. Se configuraron de tal manera que todos estuvieran sincronizado con el movimiento del motor, que es el componente del monteje responsable de llevar la plataforma móvil desde una posición inicial z_1 hasta su posición final z_2 , dicho de otro modo, del control de la variable básica del experimento, la deformación ϵ .

Todo el control de estos sistemas fue construido en un script Labview que permite iniciar y terminar la medición de carga, la adquisición de imágenes y el movimiento del motor. Para cada uno de estos componentes de control se debe definir:

- Para el motor: ángulo de giro y velocidad de giro.
- Para medición de señal digital de fuerza: cantidad de muestras y frecuencia de muestreo.
- Para adquisición de imágenes: exposición, brillo, equilibrio de blancos y ganancia.

3.1. Movimiento del Motor.

Los parámetros controlables para el movimiento giratorio del motor de paso son el ángulo de giro y su velocidad de giro. Una cantidad de 2000 pasos es lo necesario para dar una vuelta sobre el eje del motor, lo cual hace que la plataforma se mueva una distancia vertical de $1[mm]$. La velocidad del motor se puede controlar indicando sólo el número de pasos por segundo que se desea.

3.2. Señales de Fuerza.

La medición de la señal digital de fuerza esta compuesta por la recepción instantanea de muestras desde tres celdas diferentes. Estas celdas deben ser calibradas de tal forma que la dirección de las fuerzas que ejerzan las masas de calibración, sea la misma que aquella ejercida por el cilindro bajo compresión. La

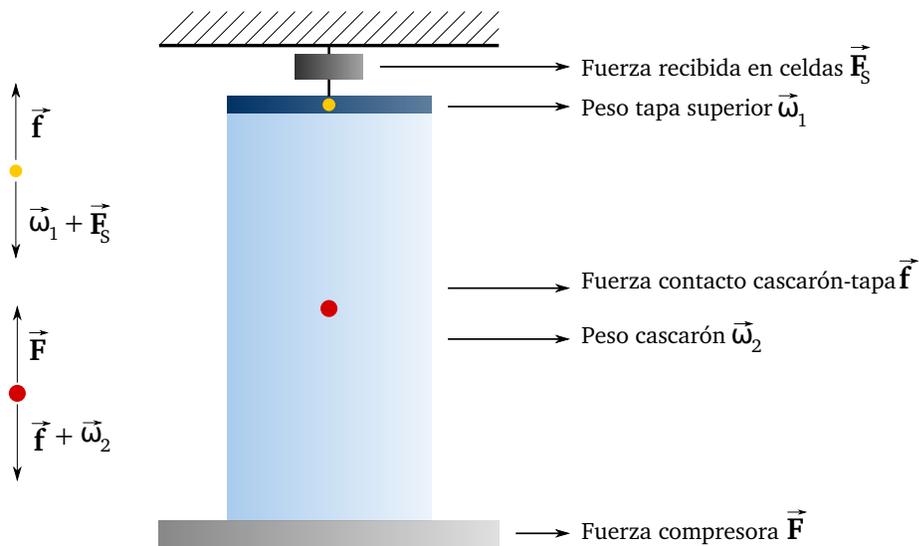


Figura 3.1: En este esquema se indican las fuerzas que actúan sobre la celda de carga, la tapa superior del cascarón y el cascarón cilíndrico. Punto amarillo (fuerzas sobre tapa) y punto rojo (fuerzas sobre cascarón.)

distribución de las celdas de carga bajo el disco de empotrado esta fijado para que la *Celda 1* estuviera justo frente al conjunto cámara-proyector encargados de captar el color rojo, la *Celda 2* frente al conjunto cámara-proyector del color verde y *Celda 3* al conjunto cámara-proyector del azul. Haciendo un diagrama de cuerpo libre (ver Figura 3.1), para un modelo que representa el montaje, se puede observar como se comportan las fuerzas interactuantes. Este es un ordenamiento arbitrario que depende del operador por su comodidad.

- La ecuación que resulta del punto amarillo: $\vec{f} = \vec{F}_S + \vec{\omega}_1$.
- La ecuación que resulta del punto rojo: $\vec{f} = \vec{F} - \vec{\omega}_2$.

De estas ecuaciones, realizando algunos reemplazos se llega a:

$$\vec{F} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{F}_S \quad (3.1)$$

Tal que la fuerza sobre la celda \vec{F}_S sin que se aplique una fuerza de compresión \vec{F} posee un *offset* equivalente a la suma de los pesos del cascarón $\vec{\omega}_2$ y su tapa superior $\vec{\omega}_1$. Este offset se debe determinar previa realización de cada experimento y una vez determinado es posible conocer el valor efectivo de la fuerza aplicada sobre el cilindro.

La fuerza F_S es la suma de las fuerzas de cada celda de carga una vez calibradas, tal que, $F_S = F_{cel1} + F_{cel2} + F_{cel3}$. Esta fuerza F_S será imprimida al cilindro sobre una superficie $A = 2\pi Rh$ donde R es el radio del cilindro y h su espesor. Así se constituye lo que será la carga sobre el cilindro tal que $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{2\pi Rh}$.

3.3. Adquisición de imágenes.

3.3.1. Técnica de proyección de franjas.

Esta técnica perfilométrica consta de la cuantificación del corrimiento o deformación de franjas según como se deforma la superficie en la cual las franjas son proyectadas, siendo esta la superficie del cilindro. Haciendo uso de los proyectores y cámaras mencionados en la sección 3 se logró reconstruir digitalmente la estructura del cilindro a medida que éste se iba comprimiendo axialmente.

Básicamente esta técnica requiere de un patrón de franjas de características conocidas que es emitido desde un proyector hacia un objeto de prueba cuya

imagen captada varía según sea el lugar desde donde se observa. Una limitante importante es que el punto de observación (cámara) de las franjas debe ser diferente al punto de emisión, por lo tanto la perspectiva es un elemento a considerar. Lo que se debe captar desde la cámara es la profundidad del objeto almacenada en las franjas deformadas ligadas siempre a la comparación con una referencia: un patrón de franjas sin deformar. Es por lo tanto el corrimiento de fase entre la referencia y la imagen deformada lo que permitirá obtener toda la información del objeto deformado.

Principio Óptico.

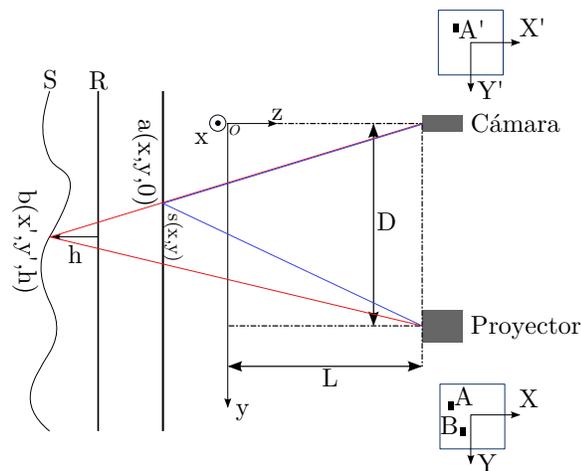


Figura 3.2: Principio óptico de la técnica, en el cual se muestra que los rayos salen desde el proyector para llegar a la cámara, estos dos separados por una distancia D . A una distancia L de la cámara (y el proyector) se fija un sistema coordenado donde la dirección z coincide con su eje óptico y las direcciones x e y forman el plano sobre el cual la referencia esta localizada. Rayo azul nace de un punto diferente del rayo rojo dentro del proyector y llegan al mismo punto en la cámara.

La Figura 3.2 muestra que los ejes óptico de la cámara y el proyector son con-

figurados para ser paralelos y estar separados el uno del otro por una distancia D . Estos ejes son perpendiculares al plano de referencia, ubicado sobre la línea Oy , sobre la cual también se ubica la superficie sin deformar. Adicionalmente la salida y entrada de luz, del proyector y cámara respectivamente, están ubicados a la misma distancia L de este plano. La superficie de referencia debe ser una superficie dispersora de luz. En el plano de proyección de luz XY ubicado en el proyector se emite un patrón de franjas con período espacial p_p sobre la dirección Y , este proyector forma un patrón de franjas sobre Oy con un periodo p cuya magnificación es α ($\forall p = \alpha p_p, \alpha > 1$). Luego, por reflexión en Oy este patrón entra a la cámara sobre el plano $X'Y'$ que lo restituye con un periodo p_c en la dirección Y' , tal que su magnificación es β ($\forall p_c = \beta p, \beta < 1$).

Desde la perspectiva de rayos ópticos se puede partir mencionando que el rayo proveniente del proyector cuyo origen dentro de él es A (en XY) -con un nivel de intensidad, o "fase" $\varphi(A)$ - va hacia a sobre Oy y entra a la cámara alcanzando el punto A' (ubicado en $X'Y'$). La intensidad de este rayo se conserva en todo su camino, la fase en A sobre el proyector, la fase sobre la superficie sin deformar en a y la fase en A' sobre la cámara son iguales, esto es, $\varphi_o(A) = \varphi_o(a) = \varphi_o(A')$. La fase en la cámara es denotada como φ_o cuando la superficie dispersora está sin deformar y φ cuando la superficies esté deformada S . En este último caso, aunque la superficie no coincida con Oy , el mismo análisis se sostiene pero $\varphi(A') \neq \varphi_o(A')$. En efecto, A' es la imagen que entra a la cámara formada por los rayos provenientes de b : $\varphi(A') = \varphi(b)$. La fase en b es la misma que la fase en B sobre XY que difiere de A , por lo tanto $\varphi(A') = \varphi(b) = \varphi(B)$.

Medir la deformación no sólo significa obtener el valor de $h(b)$ sino que también se debe obtener la posición donde se está midiendo, esto es, $x' = x + \delta x$ y $y' = y + \delta y$.

Haciendo uso de la geometría óptica se puede obtener (Maurel, Cobelli, Pagneux,

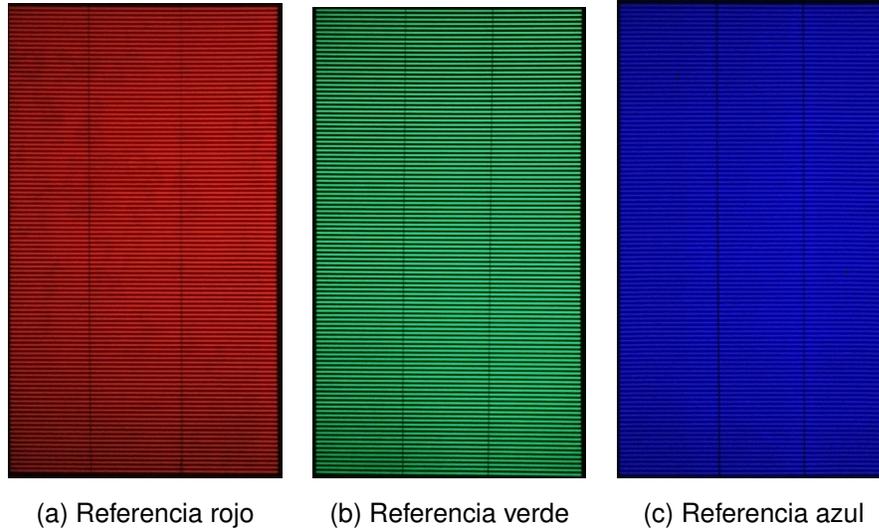


Figura 3.3: Planos de referencencia obtenidos fotográficamente con la cámara web.

y Petijeans, 2009):

$$h = \frac{\Delta\varphi L}{\Delta\varphi - \frac{2\pi}{p}D} \quad (3.2)$$

$$\delta y = \frac{D - y}{L} h \quad (3.3)$$

$$\delta x = \frac{x}{L} h \quad (3.4)$$

donde $\Delta\varphi(Y) \equiv \varphi(Y) - \varphi_o(Y)$. Luego la medición de la distribución de alturas h y la posición $(x', y') = (x + \delta x, y + \delta y)$ de la superficie deformada quedan determinadas por la magnitud de la diferencia de fase. El valor de esta fase está determinada en el trabajo de Takeda and Mutoh de 1983, que expresa ser una función de la distancia que separa el rayo azul del rojo sobre la referencia, esto es, $s(x, y)$.

Proyección de Franjas.

El resultado de esta técnica traducido en imágenes resulta muy ilustrativo para entender mejor su utilización. En la Figura 3.3 se muestran 3 imágenes que ilus-

tran el patrón de franjas proveniente del proyector reflejado en el plano de referencia y capturado por la cámara. Todas poseen el mismo periodo espacial de $P_p = 8,06[px]$ dentro del proyector lo que se traduce en un periodo dentro de la cámara de P_{cr} para el rojo, P_{cv} para el verde y P_{ca} para el azul que dependen sustancialmente de la distancia L . Las líneas verticales oscuras dibujadas sobre cada una de las referencias es donde el cilindro montado corta geométricamente cada uno de los planos. Ahora, retomando lo visto en la Figura 2.5 en el capítulo 2, estos planos están contruidos a partir de un trozo de vidrio al cual se le pega un trozo de PVC laminado y pintado de igual tamaño, que se dispone frente a cada conjunto cámara-proyector (CP). Antes de iniciar cada experimento se deben extraer imágenes del patrón de franjas proyectados sobre esta referencia y luego medir las distancias L , D y P_c para cada referencia. Los planos de referencia se disponen frente a las cámaras y proyectores (CP) simultáneamente como lo muestra la Figura 3.4.

La Figura 3.4 especifica de mejor manera la posición de los planos de referencia respecto a la del cilindro, además muestra que en cada referencia hay dos puntos negros que corresponden a la ubicación de las líneas negras de los patrones de referencia mostrados antes en la Figura 3.3. CP_r , CP_v y CP_a representan al conjunto cámara-proyector del color rojo, verde y azul respectivamente, mientras que las longitudes que separan a cada CP de sus referencias se muestran como L_r , L_v y L_a que corresponden al color rojo, verde y azul respectivamente.

Para mantener a los tres planos de referencia verticales frente a cada CP se elaboraron 2 piezas con forma cuasitriangular (contorno violeta en la Figura 3.4) que adheridas a la parte interna de los extremos inferior y superior de los planos, hacían las veces de tapas de esta nueva figura. Así el conjunto de los tres planos de referencia adheridos a las piezas cuasitriangulares en sus extremos daban la forma de un prisma cuasitriangular.

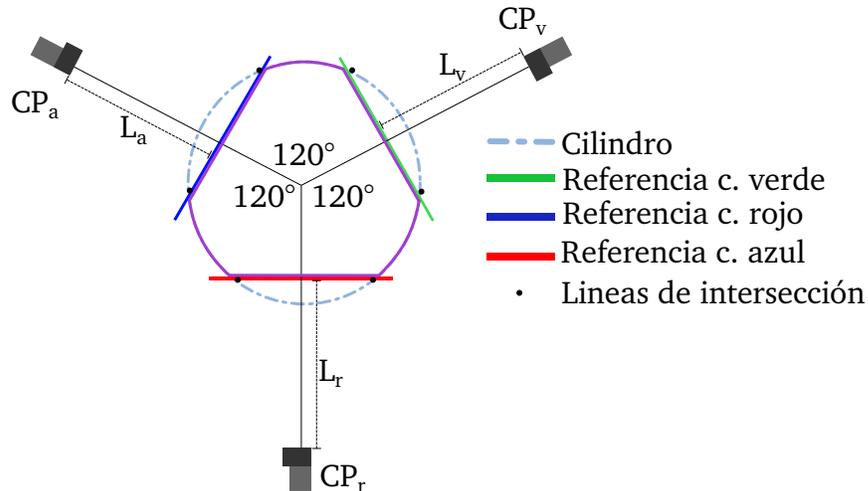


Figura 3.4: Vista superior de planos de referencia separados una distancia L frente a cada conjunto cámara-proyector (CP) del respectivo color. Cada CP está a un ángulo de 120° con su vecino, tomando como eje de giro el eje axial del cilindro.

Luego de extraer las imágenes referentes a estos planos se coloca un cilindro de radio $R = 6[cm]$ sobre el cual cada conjunto CP debe cubrir al menos un tercio de su superficie, para poder capturar la totalidad del cilindro. Así la nueva configuración de las franjas proyectadas sobre el cilindro marcan una gran diferencia respecto del patrón proyectado sobre los planos. Esta diferencia se traduce en un corrimiento o deformación de franjas. Así lo muestra la Figura 3.5 (a, b y c) para cada color. Cabe mencionar que la línea vertical que se observa sobre el color rojo corresponde a la región de pegado del cilindro.

Cuando el cilindro está comprimido o en proceso de compresión sufre notorios cambios en su superficie, tal que es posible apreciar a simple vista los pliegues que se forman sobre él, como muestra la Figuras 3.5 (d,e y f). Las imágenes de esta última figura están orientadas de tal forma que su parte superior coincide con la parte superior del cilindro, por lo tanto, la compresión que se realizó provenía

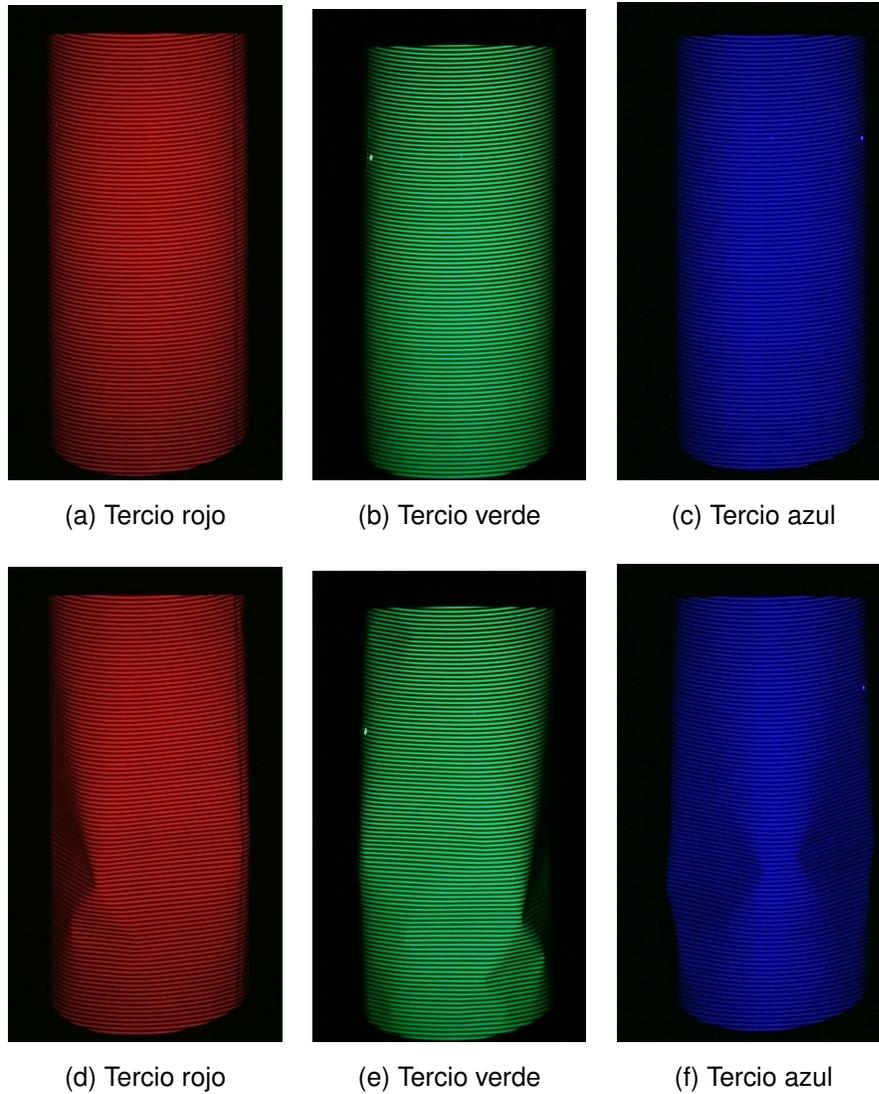


Figura 3.5: Cilindro con franjas proyectadas en su superficie.

desde la parte inferior de las imágenes (o también desde la base del cilindro). Como se dijo con anterioridad la deformación de franjas revela los cambios de profundidad respecto al plano de referencia. Después de tomar estas imágenes se hizo la reconstrucción del cilindro utilizando la técnica descrita al inicio de esta

sección, la cual permite medir la ubicación y distancia entre puntos que establecen ridge en conjunto con el ángulo diédrico que forman entre sí los lados del pliegue.

Capítulo 4

Resultados y Análisis.

Se aplicó el método de proyección de franjas al cilindro de $R = 6[cm]$ que fué comprimido $1[mm]$, para el cual se harán algunas observaciones respecto a la evolución de la geometría de las arrugas mientras es comprimido, y las posibles correlaciones con la fuerza de compresión.

La razón radio-espesor que se utilizó para los experimentos es de $R_1/h = 600$ y $R_2/h = 800$; los valores teóricos de la carga de buckling (ec. 1.4) para los cilindros de radios $R_1 = 6[cm]$ y $R_2 = 8[cm]$ son $\sigma_1 = 6,817 \cdot 10^5[Pa]$ y $\sigma_2 = 5,113 \cdot 10^5[Pa]$ respectivamente.

4.1. Resultado de Aplicación del Método Óptico.

Una vez obtenidas las imágenes del experimento se llevó a cabo el análisis utilizando el método FTP¹. Como cada cámara cubría un tercio de la superficie del cilindro esta reconstrucción se realizó juntando cada una de esas partes, resultando en lo que mas abajo se ilustra en la Figura 4.1 para el cilindro antes de ser comprimido. Cada tercio del cilindro fué tratado independientemente para alinearlo según el eje que corresponde al cilindro.

El cilindro reconstruído tiene una altura de $24[cm]$ (Figura 4.1a) y un radio de $6[cm]$ (Figura 4.1b). El color de la superficie varía según el valor de R que posee cada punto de esta superficie. Si $R < 6,0[cm]$ mas oscura se torna la superficie, en cambio, si $R > 6,0[cm]$ la superficie se torna mas clara. El origen de coordenadas está ubicado en el eje, representado por el punto ubicado al centro de la Figura 4.1b. Para esta reconstrucción el valor de R fluctúa entre $6,0[cm]$ y $5,9[cm]$.

Una vez comprimido este cilindro en $1[mm]$ equivalente a un deformación de

¹La aplicación del algoritmo que traduce el corrimiento de fase en cambios de geometría del cascarón cilíndrico, o variación de R de cada punto de la superficie del cilindro, y luego la reconstrucción digital del cilindro fueron llevadas a cabo por Guillaume Lagubeau.

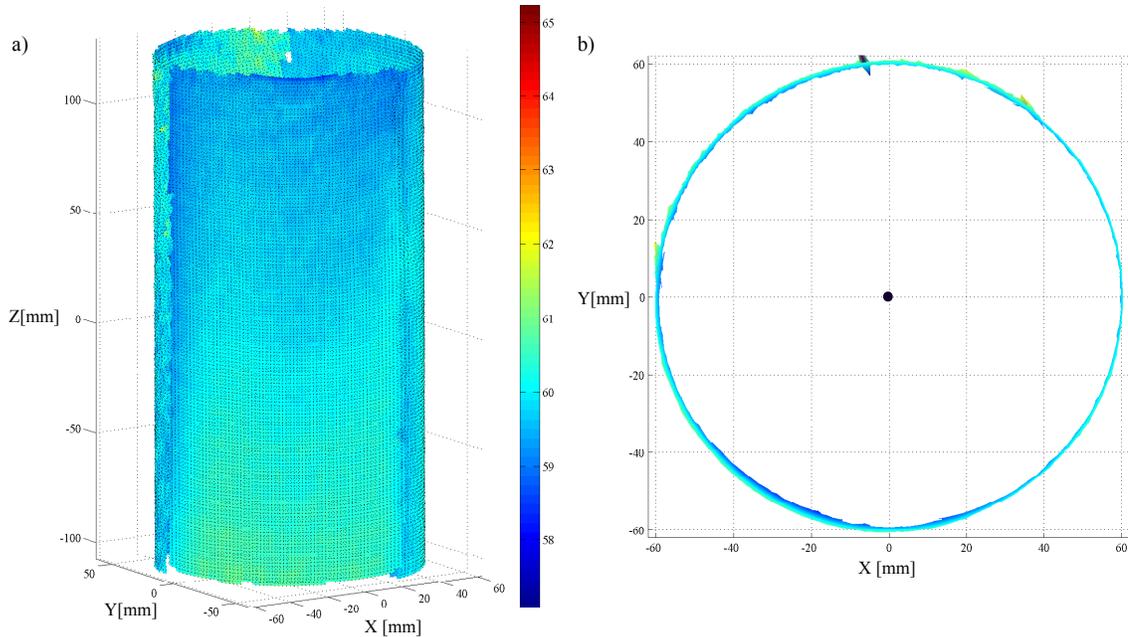


Figura 4.1: Reconstrucción digital del cilindro antes de compresión. a) vista en perspectiva lateral del cilindro y b) vista superior del cilindro mostrando el origen de coordenadas al centro de éste.

$\epsilon = 0,017\%$ se aprecian los pliegues que resultan de la compresión. Estos pliegues, como se puede observar en la Figura 4.2, constituyen la nueva geometría que adquiere el cilindro, que de acuerdo a la hipótesis planteada en el capítulo 1, guardan la mayor parte de la energía elástica.

Este colapso del cilindro se puede observar en términos de Stress-Strain y Energía gracias a las gráficas en la Figura 4.3. Los dos puntos rojos indicados sobre estas curvas delimitan la región en la cual se llevó a cabo la compresión y corresponde al intervalo de tiempo mientras el cilindro fué comprimido. Los estados de geometrías intermedias del cilindro, entre aquel que presenta el primer pliegue hasta el último que contiene a todos los pliegues (Figura 4.2), están contenidos

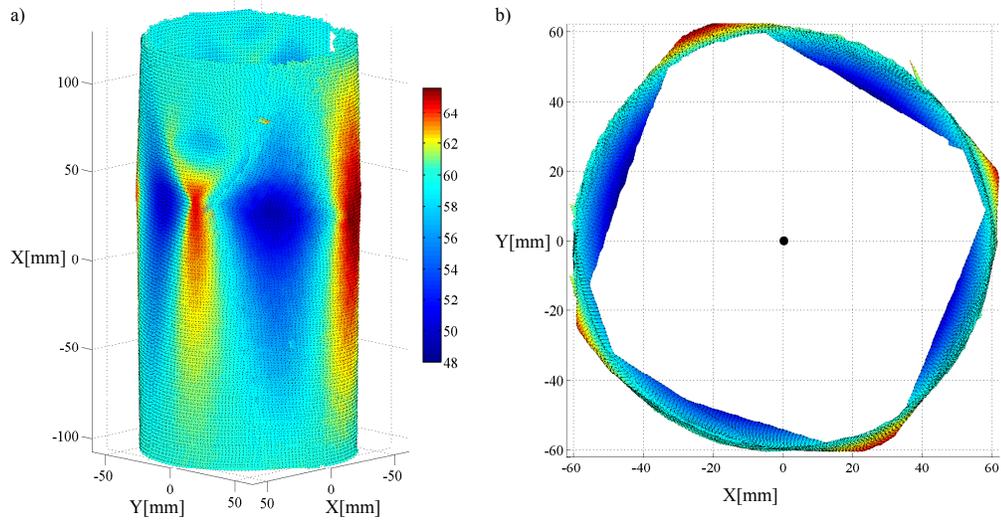


Figura 4.2: Reconstrucción digital del cilindro al finalizar la compresión.

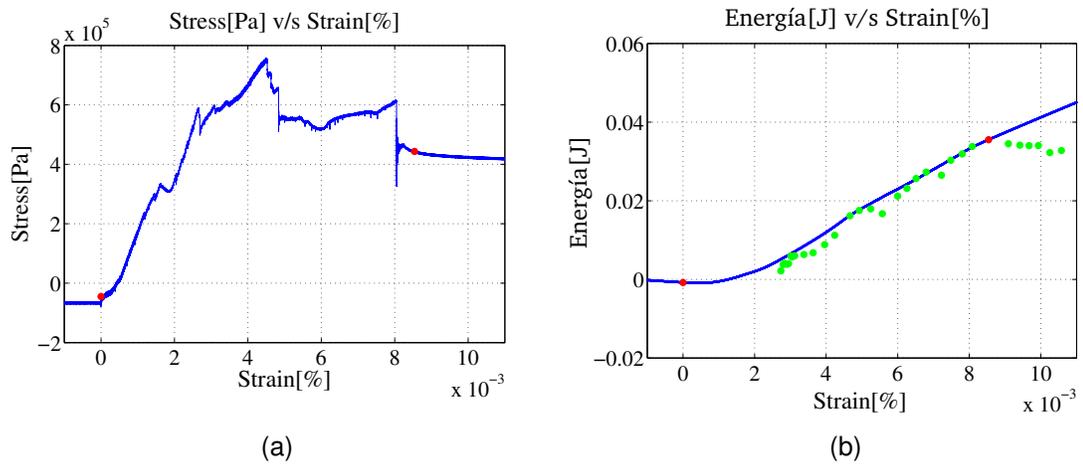


Figura 4.3: Gráficas de comportamiento de un cilindro con radio $R_1 = 6[cm]$ comprimido en $1[mm]$: (a) stress-strain y (b) energía-strain.

en este intervalo.

En contraste con la Figura 1.5b se observa que la curva de la Figura 4.3a, al-

canza su valor maximal de esfuerzo o resistencia máxima de compresión a un valor de strain $\epsilon_u = 4,49 \cdot 10^{-3} \%$ y $\sigma_u = 7,56 \cdot 10^5 [Pa]$ en una región que no está al fin del límite lineal de elasticidad, sino que se presenta como uno de los esfuerzos secundarios de buckling, esto es, un valor peak de post-buckling. El fin de la región lineal se presenta como una caída que indicaría la creación de un primer pliegue a un $\epsilon = 1,88 \cdot 10^{-3} \%$, lo cual, no ocurre recién hasta un valor de strain de $\epsilon_1 = 2,73 \cdot 10^{-3} \%$. Esta anomalía puede ser el resultado del efecto de la región de pegado del cilindro sumado a la existencia de pequeñas imperfecciones sobre la superficie del cilindro que provienen de la fabricación de las láminas de PVC y su manipulación antes de llegar al laboratorio. Estas dos características serían también las causantes de que la rigidez de la estructura (y del material) sea menor que la esperada resultando un módulo de Young de $E = 260,9 [MPa]$, muy inferior del valor teórico expuesto en el Cuadro 2.2 ($E = 676,1 [MPa]$).

Otro elemento relevante es el punto de partida de la compresión, ya que al ser un valor negativo revela que el cilindro partió en un estado de tracción que culmina con una distancia efectiva de compresión levemente menor de $1 [mm]$ que no altera la respuesta del cilindro a la compresión.

La curva verde punteada dispuesta en la Figura 4.3b es la energía que está almacenada en los pliegues de la superficie del cilindro (ec. 1.13), el primer punto (de izquierda a derecha) corresponde a la energía almacenada por el primer pliegue formado sobre el cascarón, esta energía va creciendo debido a la expansión sobre la superficie de un mismo pliegues y también por la generación de nuevos pliegues que responden a la ec 1.13 gatillados por el efecto de la compresión.

Si se mira detenidamente lo que sucede en el tramo de strain correspondiente a $\epsilon = [0,0020 - 0,0045] \%$, el stress después de ir en aumento sufre su primera caída a un valor de $\sigma_1 = 4,98 \cdot 10^5 [Pa]$ (valor correspondiente a ϵ_1) generando el primer pliegue sobre la superficie (Figura 4.4b).

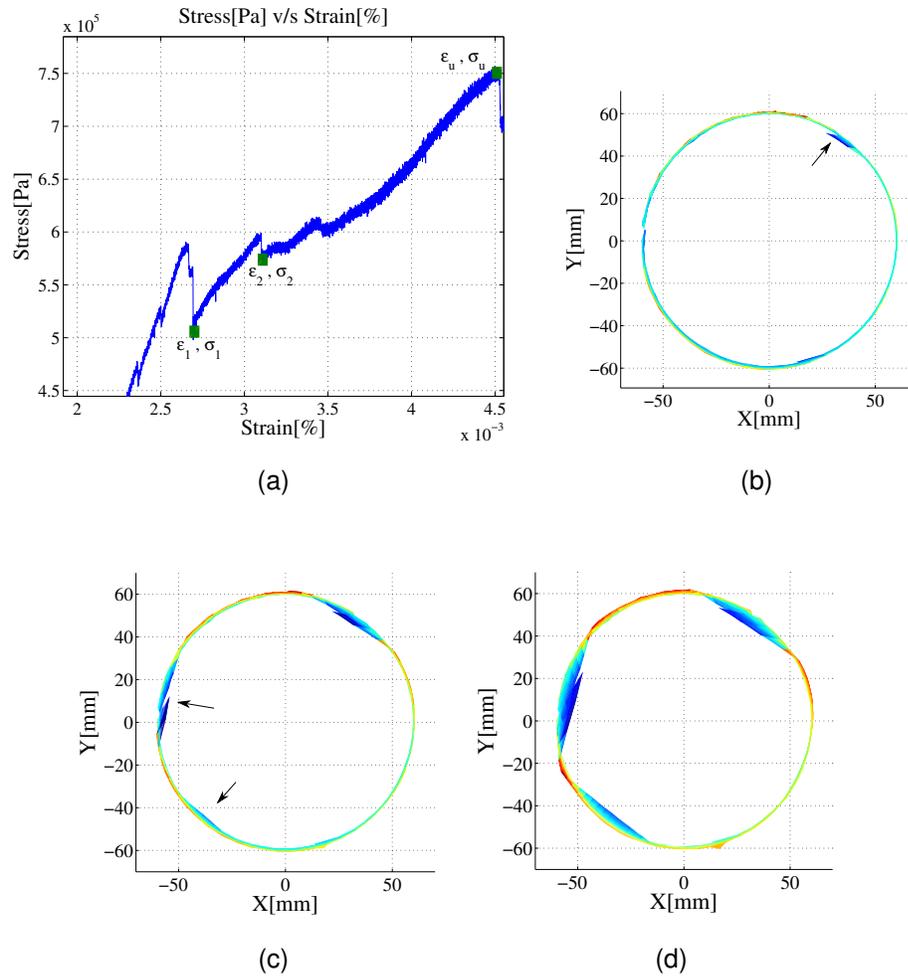


Figura 4.4: (a) Gráficas del tramo $\epsilon = [0,0020 - 0,0045] \%$, vistas superiores del cilindro para observar sus pliegues: (b) para un valor de ϵ_1 con un pliegue localizado en la región mas azul, (c) para un valor de ϵ_2 con la presencia de dos nuevos pliegues sobre el cilindro los cuales crecen hasta (c) a un valor de deformación σ_u .

Luego para un valor de $\epsilon_2 = 3,11 \cdot 10^{-3} \%$ se generan en la superficie del cilindro dos pliegues a un valor de stress $\sigma_2 = 5,70 \cdot 10^5 [Pa]$ (Figura 4.4c), los cuales evolucionan en su crecimiento alcanzando la resistencia máxima del cascarón en σ_u (Figura 4.4d).

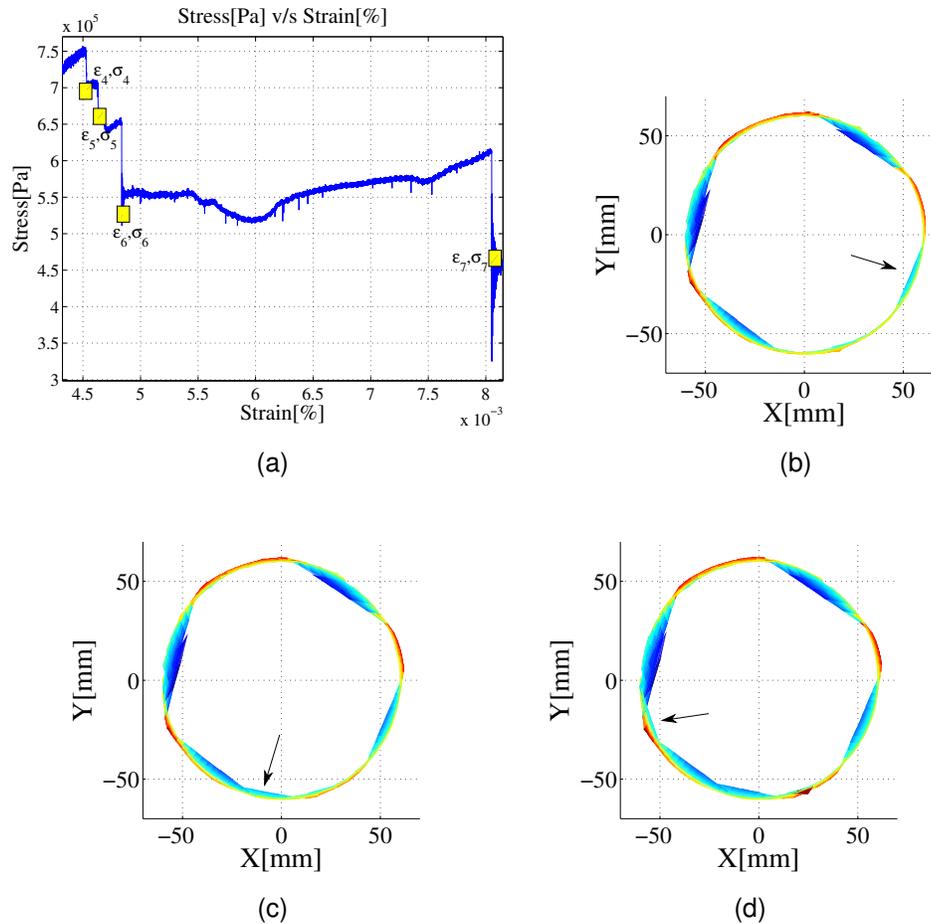


Figura 4.5: (a) Gráficas del tramo $\epsilon = [0,0045 - 0,0080] \%$, vistas superiores del cilindro para observar sus pliegues: (b) para un valor de ϵ_4 , (c) para un valor de ϵ_5 y (c) a un valor de strain σ_6 .

La energía medida a través de los pliegues (Figura 4.3b curva verde) desde ϵ_1 hasta ϵ_u cambia desde $E_{T1} = 2,19 \cdot 10^{-3} [J]$ a $E_{Tu} = 1,13 \cdot 10^{-2} [J]$.

Cada vez que la estructura pasa a formar un pliegue se dice que cae a un nuevo estado de equilibrio sobre el cual permanecerá hasta formar un nuevo pliegue en alguna otra región del cilindro. Ahora una vez alcanzado el valor máximo de resistencia y el strain sigue en aumento la estructura presenta nuevos

pliegues a un valor de $\epsilon_4 = 4,54 \cdot 10^{-3} \%$, luego en $\epsilon_5 = 4,64 \cdot 10^{-3} \%$ y por último en $\epsilon_6 = 4,84 \cdot 10^{-3} \%$. La formación de pliegues siempre se llevó a cabo con caídas súbitas del stress.

Para la última caída de fuerza a un valor de strain de $\epsilon_7 = 8,08 \cdot 10^{-3} \%$ se desestabiliza nuevamente la estructura y crea su último pliegue formando la estructura que evolucionará hasta el fin de la compresión (Figura 4.2). La energía medida desde los pliegues en este último tramo pasa de $E_{T4} = 1,62 \cdot 10^{-2} [J]$ a $E_{T7} = 3,38 \cdot 10^{-2} [J]$ manteniéndose en este valor debido a que la compresión finalizó a un valor de strain de $\epsilon_f = 8,53 \cdot 10^{-3} \%$ y la estructura del cilindro dejó de sufrir cambios.

La gráfica de energía vista en la Figura 4.3b muestra la energía que el cuerpo recibe debido al efecto de la fuerza compresora (curva azul) y la energía que el cilindro almacena en sus pliegues (curva verde punteada). Según la ec. 1.13, que expresa como se calcula la energía a partir de los pliegues, aparece un coeficiente c_r que encontrándolo permite aproximar la curva experimental de la energía medida desde los pliegues y aquella recibida por la fuerza compresora, esto es, equivalente a igualar las ecuaciones 1.12 y 1.13:

$$\int_{z_1}^{z_2} F_{ext} dz = \frac{c_r \kappa}{h^{1/3}} \sum_{i=1}^n (X_i \beta_i^7)^{\frac{1}{3}} \quad (4.1)$$

El lado izquierdo de esta ecuación corresponde al trabajo de la fuerza compresora sobre la estructura y el lado derecho a la energía que se mide desde los pliegues, lo que está antes de la sumatoria es un factor que tiene como valor:

$$\frac{c_k \kappa}{h^{1/3}} = 0,0005 [Pa \cdot m^{8/3}] \quad (4.2)$$

El módulo de bending tiene un valor experimental de $\kappa = 3,11 \cdot 10^{-5} [Pa \cdot m^3]$ y el espesor $h = 100 [\mu m]$ dejando un coeficiente $c_k = 0,746$, que es el valor necesario para lograr la igualdad entre ambas curvas de energía según la ec. 4.1.

Ahora se muestra una secuencia de como el cilindro fué cambiando su geometría a medida que era comprimido. En cada estado se ve una diferencia respecto al estado anterior. Se utiliza el mismo color para el mismo valor de R en todas las imágenes. Mientras mas rojizas estén algunas zonas del cilindro indica que los valores de R son mayores a $60[mm]$ y mientras mas oscuras significa que son menores a $60[mm]$. El color para un radio de $60[mm]$ corresponde al calipso.

4.2. Resultados Generales.

Para el ajuste de la curva de energía realizado, tomando la energía proveniente de la medición de pliegues E_T y la energía recibida por el cascarón debido al trabajo de la fuerza compresora, se debe hacer una precisión. La curva del trabajo de esta fuerza vista en la Figura 4.3b posee tres pendientes diferentes en distintos tramos de sus valores. En cada tramo también debe haber una tendencia de la energía E_T que tienda a calzar sobre ese tramo con la curva del trabajo utilizando el mismo valor de c_r para todos los tramos, que la teoría establece.

Haciendo un pequeño comentario de pequeños experimentos llevados a cabo con los cilindros de los dos tamaños, se observa que el valor promedio de la resistencia máxima para los cilindros de radio $R_1 = 6[cm]$ fué de $\bar{\sigma}_1 = 1,04 \cdot 10^6 [Pa]$ y para los cilindros de radio $R_2 = 8[cm]$ alcanzó un valor de $\bar{\sigma}_2 = 6,02 \cdot 10^5 [Pa]$. La resistencia máxima teórica (ec. 1.4) para el cilindro de radio R_1 tiene un valor de $\sigma_1 = 6,817 \cdot 10^5 [Pa]$ y para el de radio R_2 de $\sigma_2 = 5,113 \cdot 10^5 [Pa]$.

Por otro lado el módulo de Young promedio obtenido a partir de todos los valores obtenido en todos los experimentos realizados es de $\bar{E} = 359,0 [MPa]$.

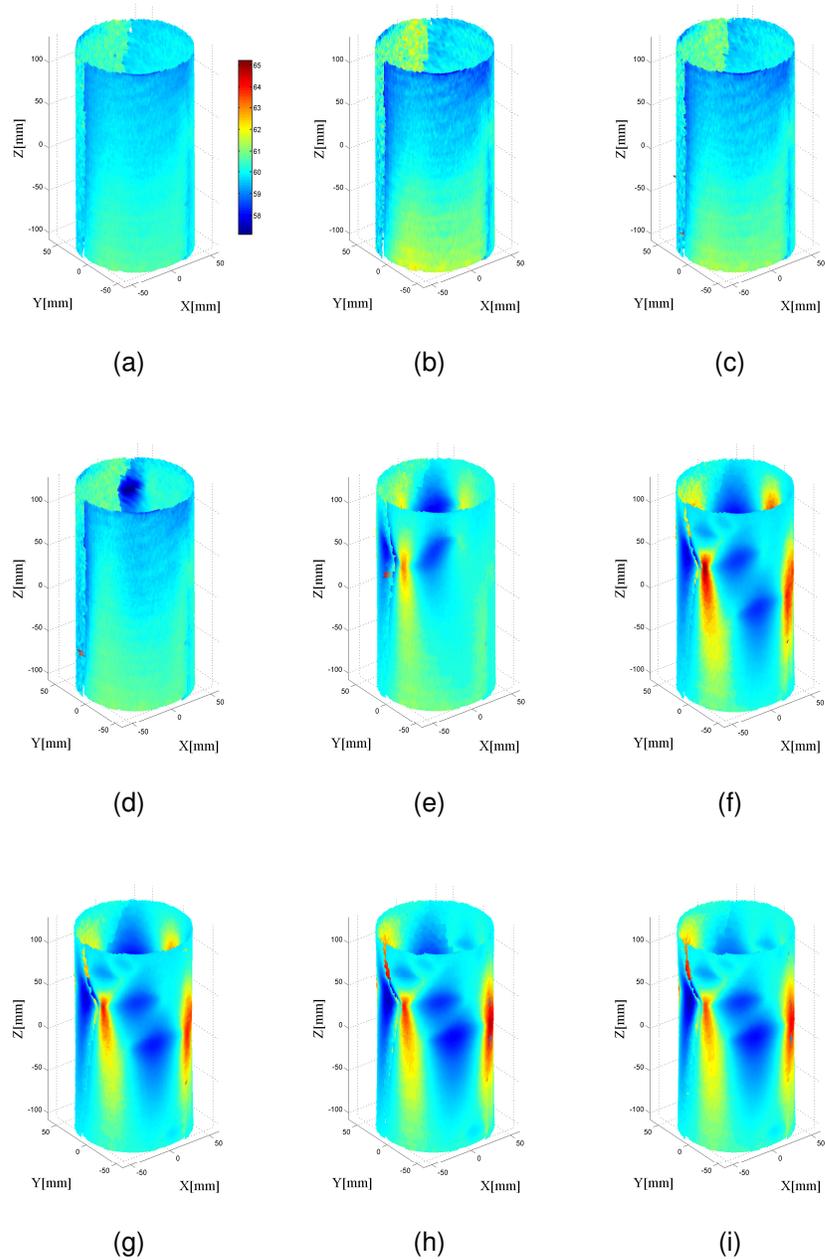


Figura 4.6: Secuencia del cilindro mientras es comprimido, la escala de colores es la misma para todos y esta especificada en (a).

Capítulo 5

Conclusiones.

La aplicación del método óptico para reconstruir en una superficie tridimensional digital el cascarón cilíndrico en estado de compresión y, por otro lado, el comportamiento mecánico del cilindro sometido a compresión axial, a partir de lo expuesto en el cuerpo de este documento se puede concluir que:

- El método de proyección de franjas permitió adquirir correctamente la geometría del cascarón estudiado conservando sus dimensiones y sus magnitudes en perfecto correlato con las dimensiones físicamente observables. Así se logró medir la energía almacenada en los pliegues que formaba la estructura comprimida del cilindro.
- Una caída abrupta en la señal de fuerza corresponde a la creación de nuevos pliegues en la superficie del cilindro, pero también a un cambio en la pendiente de la curva del trabajo que esta fuerza ejerce sobre el cilindro.
- El valor del módulo de Young promedio adquirido ($E = 359,0[MPa]$) que considera todos los valores calculados en el experimento con la técnica FTP y los pequeños experimentos, difiere en un 50 % del valor teórico ($E = 676,1[MPa]$).
- La resistencia máxima de compresión experimentalmente adquirida para el caso de los cilindros de radio $R_1 = 6[cm]$ esta sobrestimada en un 50 % aproximadamente y para $R_2 = 8[cm]$ está sobrestimada en un 20 %.
- La varianza de la resistencia máxima para los cilindros pequeños (de radio $R = 6[cm]$) es de $10,32 \cdot 10^5 [Pa]$ y es casi diez veces mayor que la varianza para los cilindros grandes $1,13 \cdot 10^5 [Pa]$, lo cual permite expresar que en la confección de los cilindros pequeños se tomaron menos precauciones que en la confección de los de $R = 8[cm]$, debido al continuo perfeccionamiento

del método de fabricación de cilindros y el posicionamiento para la compresión en la prensa.

- El punto de colapso o resistencia máxima de una estructura cilíndrica sólo se alcanza una vez según los resultados de los experimentos realizados, el límite elástico lineal del material no finaliza cuando este alcanza su resistencia máxima, sino que puede haber una falla previa no visible en la estructura (pero si en la señal de fuerza) que modifique la ubicación de este punto de máxima resistencia a un valor de stress de post-buckling.

Es necesario precisar que un error sistemático presente en todo momento son las fallas de fábrica que las lámina de PVC presentan. Este aspecto hace muy probable que la resistencia máxima de los cilindros sea alterada y por ende el bajo valor del módulo de Young sea una consecuencia. Estas fallas son regiones muy pequeñas de material que revelan la existencia de la creación de un vértice debido a un descuidado manejo del PVC.

Bibliografía.

Referencias

- Cerda, E., Chaieb, S., Melo, F., y Mahadevan, L. (1999). Conical Dislocations in Crumpling. *Nature*, 401, 46-49.
- Cobelli, P. J., Maurel, A., Pagneux, V., y Petitjeans, P. (2009). Global Measurement of Water Waves by Fourier Transform Profilometry. *Experiments in Fluids*, 46(6), 1037–1047.
- Hosford, W. (2005). *Mechanical Behavior of Materials*. New York, USA: Cambridge University Press.
- Lagubeau, G., Fontelos, M., Josserand, C., Maurel, A., Pagneux, V., y Petitjeans, P. (2010). Flower Patterns in Drop Impact on Thin Liquid Films. *Physical Review Letters*, 105, 18.
- Marder, M., Deegan, R. D., y Sharon, E. (2007). Crumpling, Buckling and Cracking: Elasticity of Thin Sheets. *Physics Today*, 6, 33-38.
- Maurel, A., Cobelli, P., Pagneux, V., y Petitjeans, P. (2009). Global measurement of water waves by fourier transform profilometry. *Exp Fluids*, 46, 1037–1047.
- Mudigoudra, B. S., Masti, S. P., y Chougale, R. B. (2012). Investigation of Mechanical Properties of Ternary Polymer PVC/PVAc/PEG Blended Films. *Research Journal of Engineering Sciences*, 1-2, 63-65.
- Sadd, M. (2009). *Elasticity Theory Applications & Numerics*. Oxford, UK: Academic Press.
- Singer, J., Arbocz, J., y Weller, T. (1998). *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Tallien, T., Ojajärvi, J., Åström, J., y Timonen, J. (2010). Scaling Behavior in Non-Hookean Compression of Thin-Walled Structures. *Phy. Rev. Let.*, 105, 066102.