

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**



**COLAPSO DE SILOS:
EFECTO DE LA DISTRIBUCIÓN DE
FUERZAS SOBRE LAS PAREDES.**

JOSÉ MIGUEL MERCADO ÁLVAREZ

Profesor Tutor: Dr. Francisco Vivanco.

Profesor Co-Tutor: Dr. Francisco Melo.

Tesis para optar al título profesional de
Ingeniero Físico.

Santiago, Chile.

2014

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**



**COLAPSO DE SILOS:
EFECTO DE LA DISTRIBUCIÓN DE
FUERZAS SOBRE LAS PAREDES.**

JOSÉ MIGUEL MERCADO ÁLVAREZ

Profesor Tutor : Dr. Francisco Vivanco.
Profesor Co-Tutor : Dr. Francisco Melo.
Profesores Comisión : Dr. Francisco Santibañez.
: Dr. Eugenio Hamm.

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO FÍSICO

SANTIAGO DE CHILE

2014

"COLAPSO DE SILOS:
EFECTO DE LA DISTRIBUCIÓN DE
FUERZAS SOBRE LAS PAREDES."

JOSÉ MIGUEL MERCADO ÁLVAREZ

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor tutor Dr. Francisco Vivanco y el profesor co-tutor Dr. Francisco Melo, del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato, Dr. Eugenio Hamm y Dr. Francisco Santibañez.

.....
Dr. Eugenio Hamm

.....
Dr. Francisco Santibañez

.....
Dr. Francisco Vivanco A.
Profesor Tutor

.....
Yolanda Vargas
Directora

.....
Dr. Francisco Melo.
Profesor Co-Tutor

©**José Miguel Mercado Álvarez.**

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

*Dedicado a mi
familia.*

Agradecimientos

Quisiera expresar mi profundo agradecimiento a la gente que conforma el Laboratorio de Física no Lineal de la Universidad de Santiago de Chile. Al profesor Dr. Francisco Melo, por darme la oportunidad de ser parte del laboratorio y apoyarme con su experiencia y conocimiento. A mi profesor guía, Dr. Francisco Vivanco, quien siempre me apoyo durante el periodo de realización del presente trabajo. También a mis compañeros de laboratorio, de los cuales recibí su apoyo y colaboración, Ignacio Calderón, Javier Contreras, Franco Tapia, Hector Alarcón, María Oyarzún, Sebastian Morgado, Alejandro Ibarra, Antonella Rescaglio, Erika Inostroza y Nelson Sepúlveda.

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos de la Universidad que siempre me apoyaron durante mis estudios, entre ellos se encuentra Daniel Montofré, Nicolás Bravo, Patricio Espinoza, Salvador Tamayo, Nicolás Cabezas, Felipe Lagos, Claudio Ortiz, Christian Manríquez, Camilo Flores, Manuel Sepúlveda, Manuel Navarrete, Sergio Palma, Francisca Rojas, y Makarena Osorio.

Finalmente quiero agradecer a mi familia, que me inspiraron día a día con sus enseñanzas de vida y también me apoyaron incondicionalmente.

Resumen

Se realiza un estudio utilizando simulaciones numéricas de la movilización de la fricción en un silo bidimensional mediante el desplazamiento cíclico de sus paredes laterales. Se determina el empaquetamiento del sistema, la evolución de las fuerzas de contacto en las paredes y las curvas de presión del medio granular.

El sistema aumenta el empaquetamiento (grado de compactación), al ser desplazadas sus paredes laterales.

Se observa que cuando las paredes laterales se desplazan en dirección contraria una respecto a la otra, la fuerza neta en las paredes se reduce significativamente en comparación con el caso en donde ambas paredes se desplazan en igual dirección.

Se determina que el modelo de Janssen se ajusta mejor a los perfiles de presión en donde existe una mayor movilización de la fricción. El desplazamiento cíclico de las paredes genera un aumento en la cantidad de partículas en contacto con las paredes que cumplen el criterio de Coulomb, lo que es equivalente a decir que hay un aumento en la movilización de las fuerzas de fricción.

Existen dos tipos de perfiles de presión dependiendo de la dirección en la cual se desplazan las paredes laterales del silo. Esto se determinó para los casos en donde ambas paredes se desplazan juntas en la misma dirección. Cuando las paredes realizan un cambio de dirección existe cierto desplazamiento mínimo necesario para poder pasar de un tipo de perfil de presión a otro.

Tabla de Contenido

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
1 Introducción.	1
1.1 Motivación.	2
1.2 Estado del Arte.	2
1.3 Objetivo General.	3
1.4 Objetivos Específicos.	3
2 Presión dentro de un Silo.	4
2.1 Presión para un fluido.	4
2.2 Presión para un medio granular.	4
3 Simulaciones.	8
3.1 Método de Elementos Discretos.	8
3.1.1 Introducción.	8
3.1.2 Ciclo de cálculo.	9
3.1.3 Modelo de contacto.	10
3.1.4 Ecuaciones de movimiento.	11
3.2 Preparación de Estados Iniciales.	13

3.2.1	Propiedades del sistema.	13
3.2.2	Tipos de llenado.	13
3.3	Movilización de las paredes.	16
3.3.1	Extracción de datos	18
3.4	Resultados y análisis	18
3.4.1	Evolución del empaquetamiento del sistema.	18
3.4.2	Perfil de presión para los estados iniciales	21
3.4.3	Fuerzas netas al desplazar las paredes.	24
3.4.4	Movilización de la fricción.	30
3.4.5	Estados de Janssen activo y pasivo.	31
3.4.6	Transición entre Janssen activo y pasivo.	32
4	Conclusiones.	35
A	Formulación del Modelo de Janssen.	37
B	Coarse Graining.	41

Índice de Tablas

3.1	Propiedades mecánicas del sistema de partículas	13
3.2	Packing inicial promedio para estados iniciales	19

Índice de Ilustraciones

2.1	Comparación del perfil de presión para un granular y un líquido . . .	5
2.2	Definición de σ_{zz}	5
3.1	Diagrama del ciclo de cálculo realizado por DEM.	9
3.2	Diagrama del modelo de contacto utilizado en las simulaciones	11
3.3	Esquema del llenado tipo lluvia.	14
3.4	Esquema de la primera parte del llenado utilizando un cono móvil . .	14
3.5	Esquema de la segunda parte del llenado utilizando un cono móvil. .	15
3.6	Esquema de la primera simulación	16
3.7	Esquema de la segunda simulación	17
3.8	Esquema de la tercera simulación	17
3.9	Definición de Z_{max} para calcular A_t	19
3.10	Packing v/s. Tiempo	20
3.11	Mecanismo de aumento de packing para un ciclo.	21
3.12	Perfil de presión para los estados iniciales	22
3.13	Histograma de $F_t/\mu_w F_n$ para los dos tipos de llenado	23
3.14	Fuerza normal total para simulación 1	24
3.15	Fuerza normal total para simulación 2	25
3.16	Fuerza normal total para simulación 2	26
3.17	Fuerza tangencial total para simulación 1	27
3.18	Fuerza tangencial total para simulación 2	28

3.19	Fuerza tangencial total para simulación 3	29
3.20	Histogramas de $F_t/\mu F_n$ para las 3 simulaciones	30
3.21	Janssen para el estado final de la simulación 2	31
3.22	Janssen para el estado final de la simulación 1	32
3.23	Evolución del parámetro de ajuste λ para un ciclo representativo . . .	33
A.1	Diagrama utilizado para derivar el modelo de Janssen	38
B.1	Diagrama de los vectores utilizados en coarse graining	42

Capítulo 1

Introducción.

Un medio granular es un material compuesto por un conjunto de partículas macroscópicas sólidas cuyo tamaño es típicamente mayor a $100 [\mu m]$, en donde en general las interacciones entre ellas están limitadas únicamente a la fricción y las colisiones [1].

Nuestra relación con materiales granulares es cercana y muchas veces cotidiana. Desde jugar con arena hasta escalar grandes montañas, almacenar trigo o extraer y procesar minerales, incluso al observar distantes cinturones de asteroides. Todos estos conforman medios granulares con propiedades interesantes y en muchos casos poco exploradas.

Estos materiales están presentes en diversas áreas de la industria, ya que son parte de procesos dentro de ella ya sea como materia prima o producto final. Muchas veces tienen que ser almacenados en silos, estructuras diseñadas para este fin, ampliamente usados en distintas industrias como la agricultura, minería, procesamiento de mineral, química, entre otras [2]. Éstos son principalmente construidos de concreto, aluminio o acero y varían en sus formas dependiendo de su utilización, siendo la forma cilíndrica la más usual.

1.1 Motivación.

Los materiales granulares son los segundos materiales más utilizados en la industria (después del agua). Utilizando en sus procesos relacionados el 10 % de toda la energía producida en este planeta [3]. Por lo tanto cualquier esfuerzo por entender la física detrás de estos materiales impacta directamente en la industria.

Respecto a los silos, son las estructuras que fallan con mayor frecuencia respecto a otras [2], lo que conlleva muchas veces una pérdida económica importante y ponen en riesgo la seguridad de las personas. Las fallas y accidentes ocurridos son consecuencia del escaso conocimiento de la física detrás de los procesos o fenómenos relacionados con el almacenaje de material granular en silos.

1.2 Estado del Arte.

Las diferencias de comportamiento entre el almacenamiento de un líquido y un material granular son la razón principal de accidentes y fallos estructurales. Janssen [4] en el año 1895 publicó su trabajo en el que obtenía un modelo que predecía la presión dentro de un silo, derivado de sus experimentos con granos de maíz. Su motivación era que las formulas validas para la presión en los líquidos no eran aplicables al maíz, pues la fricción en los granos influía considerablemente la transmisión de la presión en el medio. El modelo descrito por Janssen es ampliamente conocido y utilizado como parte fundamental en el diseño de silos.

Estudios posteriores han mostrado evidencias de la necesidad de corregir el modelo clásico de Janssen y han propuesto ciertas modificaciones para el mismo [5]. Según Landry [6] la razón detrás de la necesidad de analizar y modificar el modelo de Janssen es que las fuerzas de interacción de las partículas con las paredes laterales no siempre cumplen con el criterio de Coulomb. Este criterio relaciona las fuerzas

tangenciales y normales en las paredes a través del coeficiente de roce ($F_t = \mu F_n$), suposición realizada por Janssen para derivar su modelo, argumento profundizado en un estudio posterior de Landry al año siguiente [7], en donde se mueven las paredes en las cuales está contenido un sistema de partículas a distintas velocidades, buscando así movilizar la fricción, para así alcanzar el criterio de Coulomb.

1.3 Objetivo General.

Caracterizar la respuesta mecánica de un sistema de partículas bidispersas contenido en un silo bidimensional bajo movimientos verticales cíclicos de sus paredes laterales.

1.4 Objetivos Específicos.

- Desarrollar un algoritmo basado en el método de elementos discretos para simular un silo bidimensional cuyas paredes laterales puedan desplazarse verticalmente.
- Determinar y analizar la evolución del empaquetamiento del sistema a través del tiempo.
- Determinar mediante *coarse graining* los perfiles de presión dentro del silo.
- Comparar los perfiles de presión encontrados con el modelo de Janssen.

Capítulo 2

Presión dentro de un Silo.

2.1 Presión para un fluido.

La presión hidrostática que ejerce un fluido dentro de un recipiente es igual a:

$$P = \rho gh + P_0 \quad (2.1)$$

En donde P es la presión que ejerce una columna de fluido con densidad ρ y altura h sobre el fondo de un contenedor bajo la influencia de la gravedad g y P_0 la presión atmosférica.

2.2 Presión para un medio granular.

En el caso de un medio granular la presión que éste ejerce sobre la base de un contenedor cilíndrico es distinta a la observada en un fluido. H. Janssen [4] fue uno de los primeros en inferir y mostrar a través de un simple experimento con granos de maíz que la presión dentro de un silo alcanza un valor de saturación a cierta profundidad (Fig. 2.1).

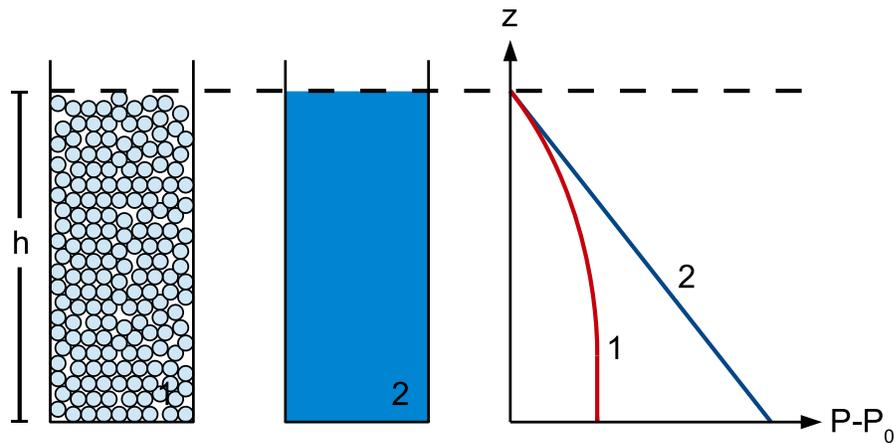


Figura 2.1: Esquema con los perfiles de presión esperados para una columna de un medio granular según Janssen y para una columna de líquido de igual altura. Para (1) se espera que la presión llegue a un valor de saturación, a diferencia de la columna de líquido (2) que aumenta linealmente hasta alcanzar el fondo del contenedor.

La presión vertical en un medio granular es equivalente a σ_{zz} que se define en la figura 2.2.

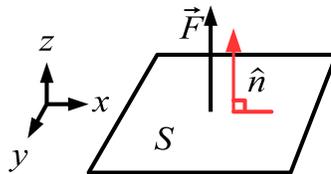


Figura 2.2: El esfuerzo vertical σ_{zz} es la fuerza por unidad de área, producto de una fuerza con dirección \hat{z} sobre una superficie S con normal \hat{z} .

Janssen propuso el siguiente modelo para el esfuerzo vertical:

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}) \quad (2.2)$$

Donde ρ es la densidad del *bulk* o del medio granular, g es la aceleración gravitatoria y λ es un parámetro que se relaciona con la fricción estática μ de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{D}{4\kappa\mu} \quad (2.3)$$

En donde D es el diámetro del silo o contenedor y κ es la razón entre el esfuerzo vertical y radial.

En la obtención de su modelo, Janssen consideró al medio granular como un continuo y supuso que una fracción del esfuerzo que se produce en el material se propaga a las paredes laterales:

$$\sigma_{rr} = \kappa \sigma_{zz} \quad (2.4)$$

donde σ_{rr} y σ_{zz} son el esfuerzo radial y vertical respectivamente y κ una constante que relaciona ambas cantidades.

Un segundo supuesto hecho por Janssen es que las fuerzas tangenciales se relacionan con las fuerzas normales de la siguiente manera:

$$F_t = \mu F_n \quad (2.5)$$

en donde μ es el coeficiente de fricción entre las partículas y la pared. La expresión anterior es conocida como Criterio de Falla de Coulomb.

Para el caso del contacto entre dos partículas el esfuerzo tangencial máximo coincide con la dirección tangencial en el contacto por lo que en ese punto se tiene que:

$$\tau = \sigma \tan(\phi) + c \quad (2.6)$$

donde τ es el esfuerzo de cizalle, σ es el esfuerzo de compresión, ϕ es el ángulo de rozamiento interno, y c es la cohesión ($c=0$ para las simulaciones realizadas). Esta expresión permite entonces derivar la ecuación 2.5.

Según lo mostrado por Landry en [6] y [7] el Criterio de Coulomb no siempre se cumple, pues en los sistemas granulares las fuerzas de fricción en la pared no necesariamente están completamente movilizadas. Se dice que la fuerza de fricción en

el contacto esta completamente movilizada cuando al aplicarse una fuerza contraria a la fricción, ésta es capaz de comenzar a desplazar el punto de contacto. A mayor movilización de las fuerzas de fricción en las paredes laterales el perfil de presión se aproxima más al perfil descrito por el modelo de Janssen.

Capítulo 3

Simulaciones.

3.1 Método de Elementos Discretos.

3.1.1 Introducción.

El método de los Elementos Discretos DEM (Discrete Elements Method) es un método computacional que fue propuesto y desarrollado por Cundall [8] utilizado para simular el comportamiento de mecánico de un sistema de rocas. Este método es utilizado para realizar simulaciones del comportamiento de diversos sistemas de partículas, como lo son polvos, rocas y otros medios granulares.

Su utilización ha ido en aumento a través de los años, por lo que actualmente existen diversos programas computacionales, ya sean de libre uso o comerciales, en los cuales está implementado este método. En el presente trabajo se utiliza el software libre llamado YADE [9], basado en el lenguaje C++, y donde las simulaciones se implementan mediante una rutina escrita en lenguaje PYTHON.

3.1.2 Ciclo de cálculo.

Suposiciones

Para poder llevar a cabo las simulaciones hay que considerar los siguientes supuestos:

- Las partículas se consideran cuerpos rígidos.
- El contacto entre dos partículas, en el caso de esferas o discos, es en un solo punto.
- Se trabaja en el campo de las pequeñas deformaciones.
- Las partículas en contacto pueden tolerar un *overlap* (solapamiento) menor a 5% el radio promedio.

Teniendo en cuenta las suposiciones anteriores y previamente habiendo generado el sistema de partículas, el ciclo de cálculo que utiliza el método es el mostrado en la Fig. 3.1:

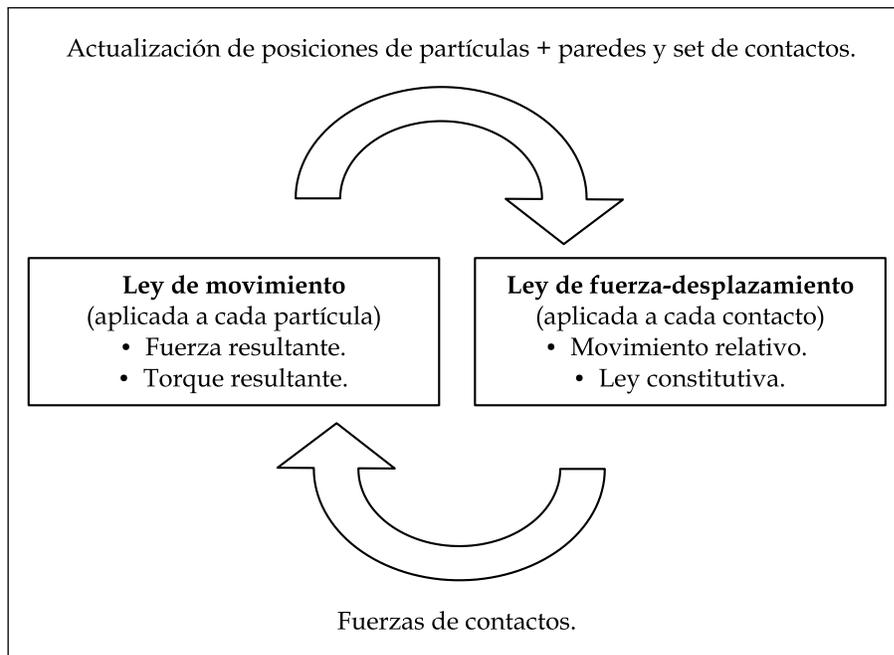


Figura 3.1: Diagrama del ciclo de cálculo realizado por DEM.

En primer lugar, es necesario conocer la posición de las partículas y paredes y luego los contactos que existen en el sistema, para lo que existen algoritmos de búsqueda de contactos y criterios distintos dependiendo del software, siendo el más básico el contacto según la posición de las partículas en el espacio. Teniendo esta información, el algoritmo aplica una ley de fuerza-desplazamiento (como hertz, lineal, etc.), la cual tiene que ser previamente definida. A partir de ella se determina el valor de fuerza del contacto generado y con el que posteriormente (según la ley de movimiento) se calcula el desplazamiento y rotación que sufrirá cada partícula en contacto. Para las partículas que no están en contacto se calcula directamente su desplazamiento según las ecuaciones de movimiento.

Este ciclo se repite N veces, por lo que el tiempo total real de simulación será $t_{total} = N\Delta t$, siendo éste distinto al tiempo total de cálculo.

3.1.3 Modelo de contacto.

Como se explicó en la sección anterior, DEM necesita un modelo de contacto que es equivalente a una ley de fuerza-desplazamiento, con el cual se determinan las fuerzas de contacto involucradas en un contacto entre partícula-partícula o partícula-pared.

En el caso de Yade existen distintos modelos de contactos implementados, pero el que se utilizó para realizar las simulaciones es el modelo lineal sin cohesión que admite sólo compresión. Por lo tanto se tiene lo siguiente:

- $F_n = \min(k_n u_n, 0)$.
- $F_s = k_s u_s$.
- $F_s^{max} = \mu F_n$.

donde F_n es la fuerza normal de contacto, k_n su constante elástica asociada y u_n el desplazamiento normal, F_s es la fuerza de *shear* de contacto, k_s su constante elástica

asociada y u_s el desplazamiento tangencial.

La última ecuación es conocida como criterio de falla de Coulomb (siendo μ el coeficiente de roce) y expresa el valor máximo de fuerza de cizalle en el contacto. Si este valor es superado la partícula desliza.

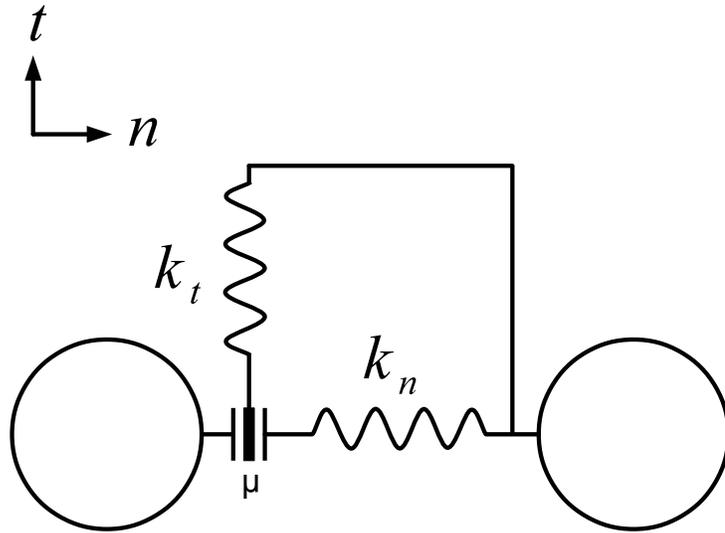


Figura 3.2: Diagrama del modelo de contacto utilizado, en donde los resortes representan el comportamiento elástico del sistema.

3.1.4 Ecuaciones de movimiento.

Traslación.

La posición de las partículas es determinada a partir de la siguiente ecuación:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n_j} (\vec{F}_{ij}^c + \vec{F}_{ij}^d) + m_i \vec{g} \quad (3.1)$$

donde m_i es la masa de la partícula i , \vec{F}_{ij}^c es la fuerza de contacto en la partícula i por la partícula j , \vec{F}_{ij}^d es la fuerza de *damping*. La sumatoria se realiza sobre todas las partículas j que están en contacto con la partícula i , en donde finalmente se le suma la fuerza peso correspondiente a $m_i \vec{g}$. Con esto se puede derivar la aceleración

$(\ddot{\vec{x}}_i)$, velocidad $(\dot{\vec{x}}_i)$ y posición (\vec{x}_i) de la partícula.

Respecto a la fuerza de contacto, ésta se calcula utilizando el modelo de contacto definido en el sistema, mientras que la fuerza de damping o amortiguamiento se obtiene de la siguiente expresión:

$$\vec{F}_{ij}^d = -\alpha |\vec{F}_{ij}^c| \text{sgn}(\dot{\vec{x}}_i) \quad (3.2)$$

En donde α es la constante de *damping* o amortiguamiento. En el caso de las simulaciones, su valor fue igual a $\alpha = 0,4$.

Las ventajas de utilizar un *damping* como el expresado anteriormente son:

- Las partículas al desplazarse a velocidad uniforme no son afectadas por una fuerza de amortiguamiento.
- Afecta a todas las partículas de igual manera.
- Necesita sólo de un parámetro adimensional α .

Rotación.

Respecto a la rotación, ésta se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$\vec{\tau}_i = I\vec{\dot{\omega}}_i \quad (3.3)$$

En donde $\vec{\tau}_i$ es el torque al que se somete la partícula i, I es el tensor de inercia y $\vec{\dot{\omega}}$ es la aceleración angular.

Para el caso de una esfera sólida de masa m y radio r la matriz de inercia es:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 Preparación de Estados Iniciales.

3.2.1 Propiedades del sistema.

Los estados iniciales generados están compuestos por un sistema bidisperso de 700 partículas, en donde el 75 % de los granos es de 8 [mm] de diámetro y el 25 % restante de 9 [mm].

La tabla 3.1 resume las propiedades mecánicas del sistema de partículas.

	ρ [Kg/m^3]	μ	E [MPa]	ν
Partículas	1130	0.8	4	0.5
Paredes	8000	0.8	210.000	0.5

Tabla 3.1: Propiedades mecánicas para las partículas y paredes del sistema, en donde ρ , μ , E y ν son la densidad, coeficiente de roce, módulo de Young y módulo de Poisson respectivamente.

3.2.2 Tipos de llenado.

Se realizaron dos tipos de llenado para generar los estados iniciales:

Llenado utilizando una lluvia de partículas

Las partículas fueron dispuestas aleatoriamente dentro del silo, tal como se muestra en la Fig. 3.3, centradas en el plano $y=0$. Por efecto de la gravedad, las partículas posteriormente fueron depositadas en el fondo del silo formando una pila. El criterio para obtener el estado final es considerar una fuerza total desbalanceada inferior a $5 \cdot 10^{-5}$ [N], es decir, cuando esté en un estado cuasi-estático.

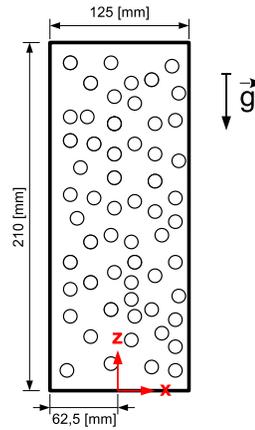


Figura 3.3: Esquema del llenado tipo lluvia.

Llenado utilizando un cono

El llenado del silo se realizó en dos etapas. En la primera se llenó la región superior de éste como se muestra en la Fig. 3.4 centradas en el plano $y=0$, para luego por gravedad llenar el cono ubicado en la parte inferior.

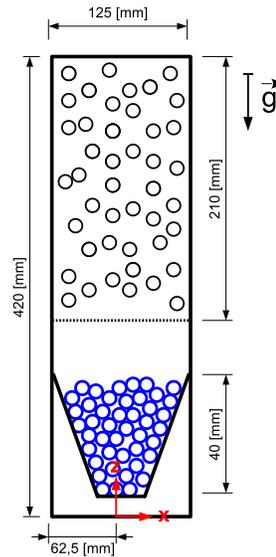


Figura 3.4: Esquema de la primera parte del llenado utilizando un cono móvil, en donde se llena primero una región en la parte superior del silo (partículas negras) y luego el cono (partículas azules).

La apertura inferior del cono tiene una longitud de 15 [mm] y está ubicada a 50 [mm] de la base del silo.

Luego de esperar que el sistema alcanzara un estado cuasi-estatico (fuerza total desbalanceada inferior a $5 \cdot 10^{-5}$ [N]), se realizó la segunda parte del llenado. Se abrió el cono, dejando caer las partículas, mientras que éste se movía en dirección contraria a la gravedad a una velocidad constante $\vec{V}_c = 0,1$ [m/s] (Fig. 3.5), formándose así una pila de partículas que tienen la particularidad de que al caer desde poca altura adquieren menos energía cinética que en el llenado por una lluvia de partículas.

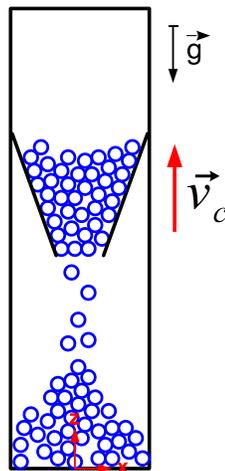


Figura 3.5: Esquema de la segunda parte del llenado utilizando un cono móvil.

Utilizando los métodos de llenado expuestos anteriormente, se generaron 20 estados iniciales para cada tipo de llenado.

La generación de los estados iniciales y posterior movilización de las paredes se hacen limitando la rotación de las partículas sólo al plano XZ y la traslación a \hat{x} y \hat{z} , ésto en conjunto con generar las partículas centradas en el plano $y=0$ se realizó para poder así simular un sistema equivalente a un sistema bidimensional.

3.3 Movilización de las paredes.

Se escogió al azar uno de los estados iniciales con llenado tipo lluvia y se hizo evolucionar el sistema de 3 modos distintos, moviendo paredes laterales.

Para las 3 simulaciones realizadas el desplazamiento máximo de las paredes fue de 9 [mm] a una velocidad de 9 [mm/s], esto es equivalente a mover las paredes 1 diámetro máximo durante un segundo.

Simulación 1.

Para la primera simulación se movieron las paredes hacia arriba y luego hasta su posición original, ésto se realizó 10 veces.

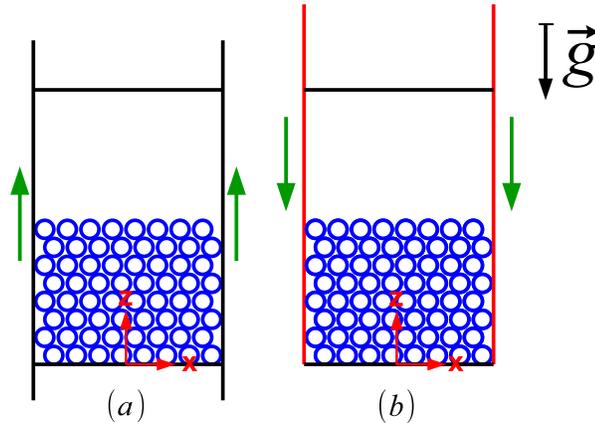


Figura 3.6: Esquema de la primera simulación, (a) posición inicial de las paredes al inicio del ciclo y (b) desplazamiento máximo de las paredes.

Simulación 2.

Para esta simulación, a diferencia del caso anterior, las paredes se mueven hacia abajo y luego hacia arriba para así volver a su estado inicial (10 ciclos).

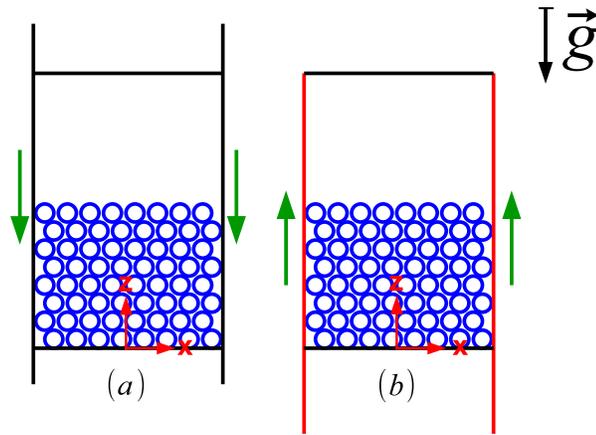


Figura 3.7: Esquema de la segunda simulación, (a) posición inicial de las paredes al inicio del ciclo y (b) desplazamiento máximo de las paredes.

Simulación 3.

Para la tercera simulación, la pared derecha se mueve hacia arriba mientras que la izquierda se mueve hacia abajo para luego volver a su estado inicial (10 ciclos).

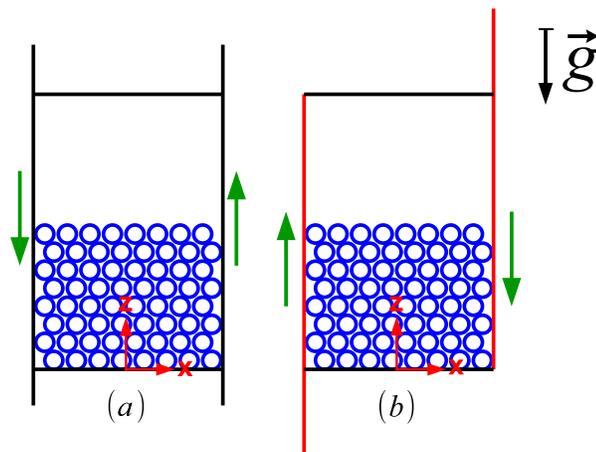


Figura 3.8: Esquema de la tercera simulación, (a) posición inicial de las paredes al inicio del ciclo y (b) desplazamiento máximo de las paredes.

3.3.1 Extracción de datos

La información de las simulaciones fue extraída en dos archivos de texto, cada 100 Δt utilizando el Sistema Internacional de medidas (SI).

Información de los contactos.

La matriz 3.5 muestra la estructura de los archivos de texto con la información de los contactos, en donde se obtuvo un número identificador de las entidades en contacto, la posición del contacto, la fuerza normal \vec{F}_n y la fuerza tangencial \vec{F}_s en el contacto.

$$\begin{pmatrix} id1 & id2 & r(x) & r(y) & r(z) & F_n(x) & F_n(y) & F_n(z) & F_s(x) & F_s(y) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Información de las partículas y paredes.

Para la información de las partículas y paredes se obtuvo la matriz 3.6, en donde se obtuvo su identificador, su radio, y su posición en x y z.

$$\begin{pmatrix} id & rad & r(x) & r(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.4 Resultados y análisis

3.4.1 Evolución del empaquetamiento del sistema.

Se determinó el valor del empaquetamiento del sistema a través del tiempo, utilizando la información obtenida cada 100 Δt . El valor del *packing* o empaquetamiento es:

$$\Phi = \frac{A_{par}}{A_t} \quad (3.7)$$

En donde A_{par} es el área ocupada por las partículas. El número de partículas es constante a través del tiempo por lo tanto este valor es igual a $A_{par} = n_1\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 + n_2\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^2$, en donde n_1 es el número de partículas con diámetro D_1 y n_2 es el número de partículas con diámetro D_2 .

El valor del área total ocupada por el sistema es el producto del ancho del silo por Z_{max} que corresponde a la altura máxima en la superficie libre (Fig. 3.9).

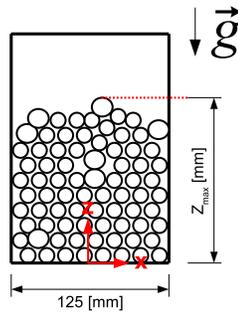


Figura 3.9: Definición de Z_{max} para calcular A_t .

Utilizando lo descrito anteriormente se determinó el packing inicial promedio del sistema con llenado tipo lluvia utilizando los 20 estados generados y también utilizando los 20 estados iniciales generados con llenado utilizando un cono, valores resumidos en la tabla 3.2.

	$\bar{\Phi}$
Lluvia	0.7431
Cono	0.7361

Tabla 3.2: Packing inicial promedio para 20 estados iniciales con distinto tipo de llenado.

Para las dos tipos de llenado no hay una variación significativa en el empaquetamiento del sistema.

La evolución del packing del sistema es la mostrada en la figura 3.10.

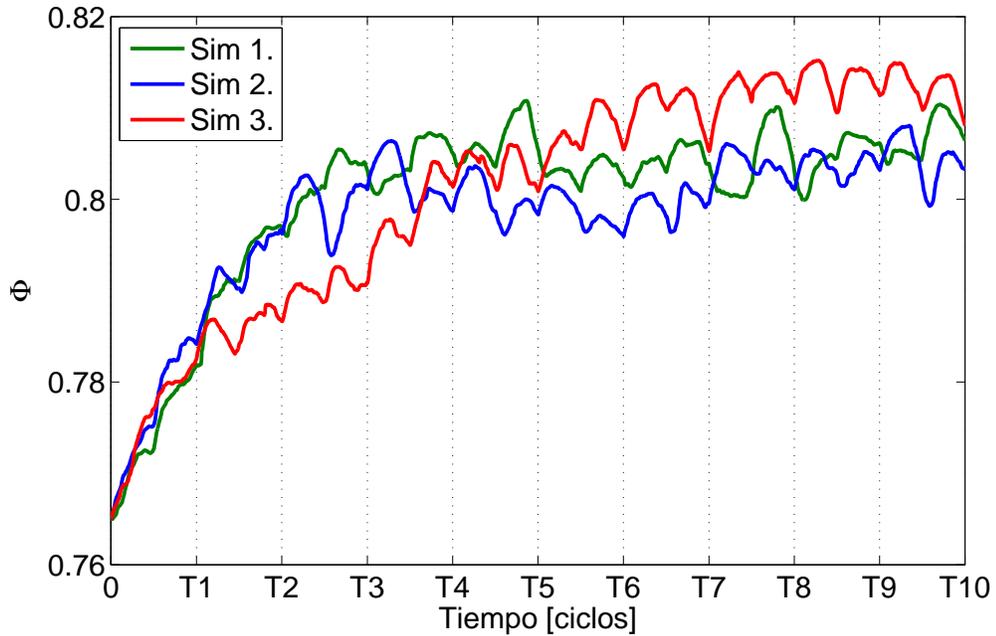


Figura 3.10: Evolución del empaquetamiento del sistema a través del tiempo expresado en ciclos.

El packing del sistema aumentó en las tres simulaciones, llegando a un valor estable pasado el cuarto ciclo. En la figura 3.10 se observa que para la simulación 1 y 2 el crecimiento inicial de packing es más rápido que para la simulación 3.

El aumento de packing se debe al reacomodo local de las partículas en espacios vacíos generados por el movimiento de las paredes laterales. La figura 3.11 es un ejemplo de este mecanismo.

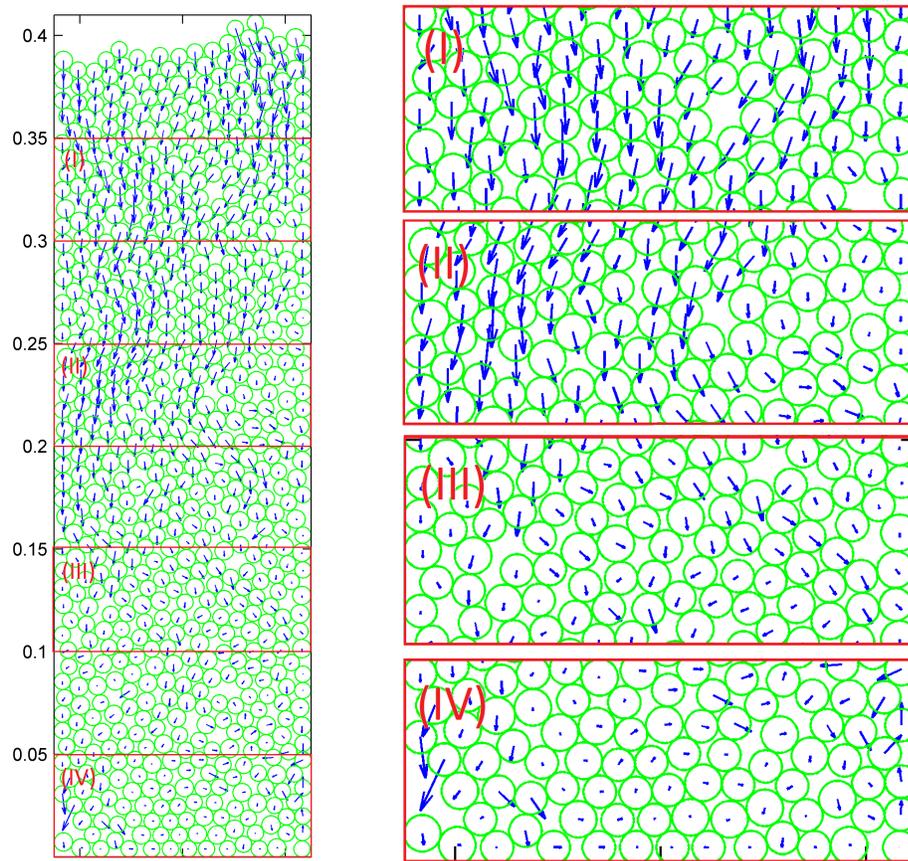


Figura 3.11: Mecanismo de aumento del empaquetamiento del sistema en donde los círculos representan la posición de las partículas en T_0 y las flechas el desplazamiento neto hasta llegar a T_1 , todo esto para la simulación 1.

3.4.2 Perfil de presión para los estados iniciales

Utilizando el método de Coarse Graining (Apéndice B) se determinó el perfil de presión promedio para los estados iniciales con llenado tipo lluvia y con llenado utilizando un cono móvil (Fig. 3.12).

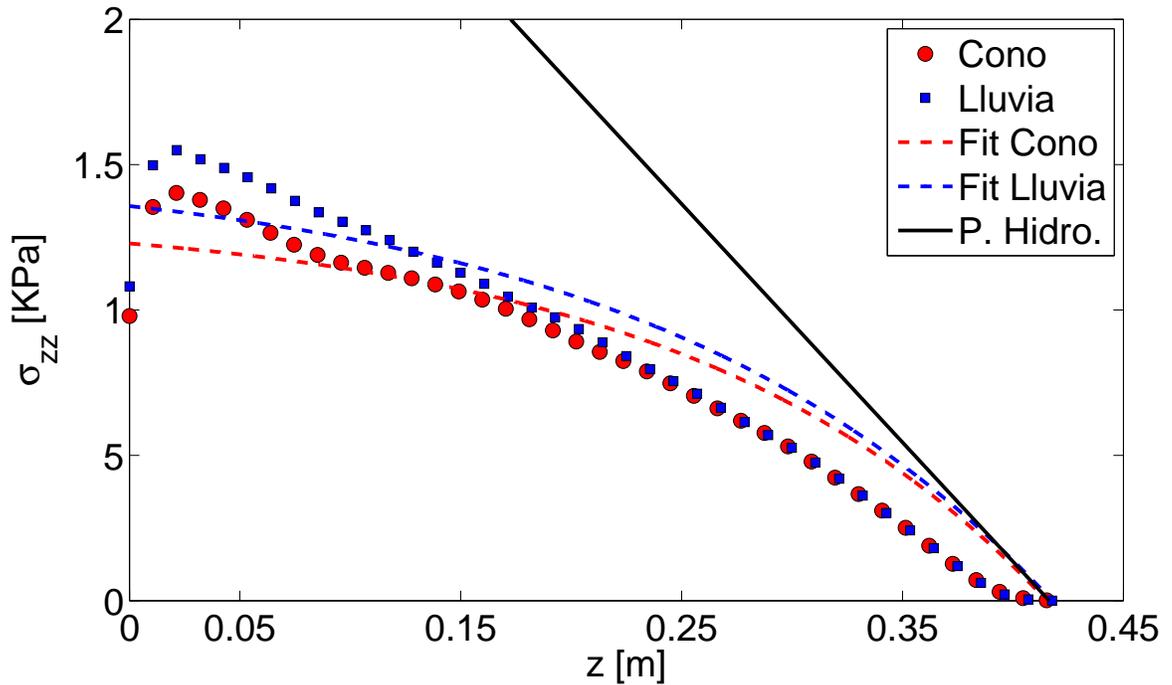


Figura 3.12: Perfil de presión promedio de los 20 estados iniciales con dos tipos de llenado, en donde la línea negra corresponde al perfil hidrostático de presión esperado si el material granular se comportase como líquido y las líneas punteadas corresponden al perfil de presión esperado según el modelo de Janssen.

La presión en el silo para ambos tipos de llenado es menor a la presión hidrostática, esto es consecuencia de trabajar con un material discreto que, al existir fricción, distribuye su peso en la base y en las paredes laterales. Se puede observar *screening* (apantallamiento) de la presión a cierta profundidad.

Los perfiles no se ajustan al modelo de Janssen, lo cual es coherente con el hecho de que un bajo porcentaje de las fuerzas de interacción entre las partículas y las paredes laterales cumplen el criterio de Coulomb (según Fig. 3.13).

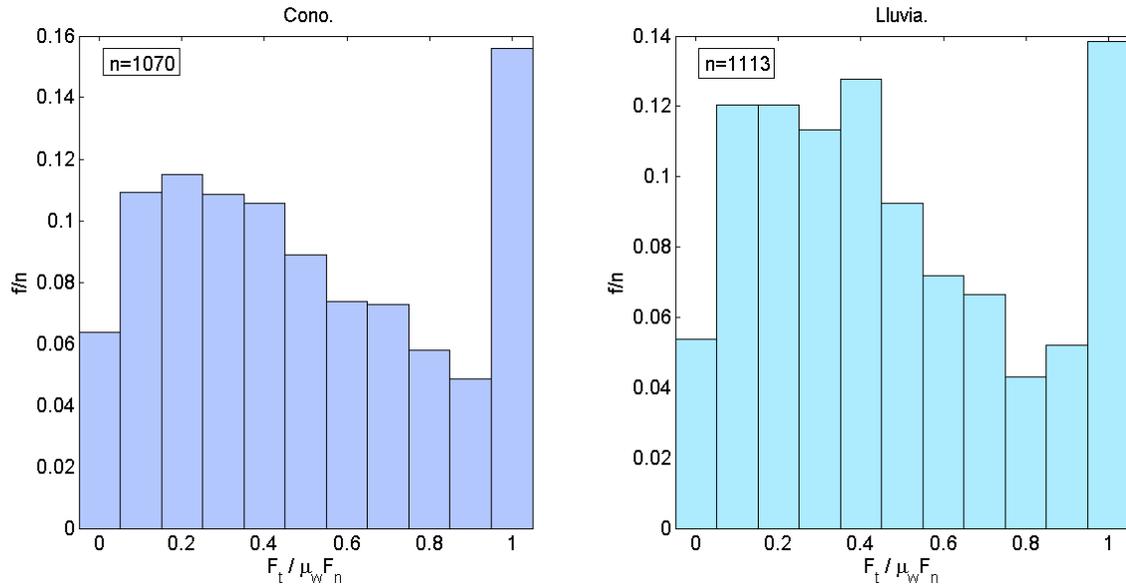


Figura 3.13: Frecuencia relativa de $F_t / \mu_w F_n$ para los dos tipos de llenado tomando las fuerzas de contacto entre partículas y paredes laterales de los 20 estados por llenado generados.

Según la figura 3.13 para el llenado con cono y lluvia sólo el 16% y el 14% de las partículas, respectivamente, cumplen el criterio de Coulomb (Ec. 2.5), que es equivalente a decir que la fuerza de fricción no está completamente movilizadada en las paredes laterales.

3.4.3 Fuerzas netas al desplazar las paredes.

Fuerzas normales a las paredes.

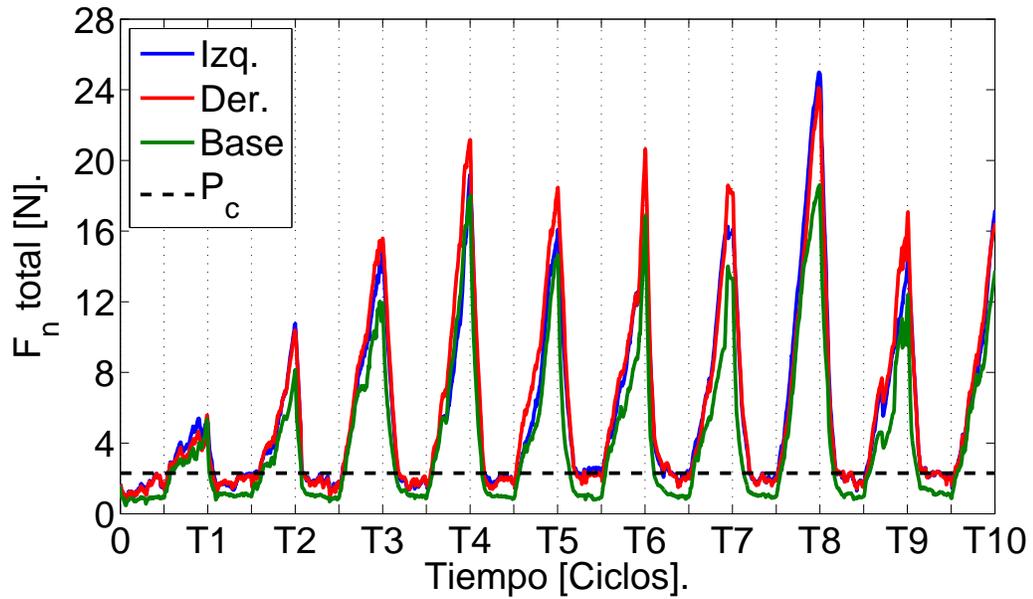


Figura 3.14: Evolución del módulo de la fuerza normal total en las paredes izquierda, derecha y base para la primera simulación, en donde la línea punteada es el valor del peso de la columna de granos ($P_c \approx 2,3$ [N]).

Las curvas de la figura 3.14 muestran que en los primeros 4 ciclos hay una acumulación de *stress* hasta posteriormente estabilizarse.

Al someter al sistema al desplazamiento de las paredes, éste presenta peaks de fuerza en cada ciclo que se realiza, produciéndose aproximadamente (después del ciclo 4) peaks de hasta 10 veces la presión que generaría el peso de la columna de material granular.

También se observa que el sistema, al desplazar las paredes en el sentido contrario a la gravedad, libera la fuerza neta normal acumulada, volviendo a valores inferiores al peso de la columna, mientras que mover las paredes en el sentido de la gravedad genera el efecto opuesto, aumentando las fuerzas en el sistema.

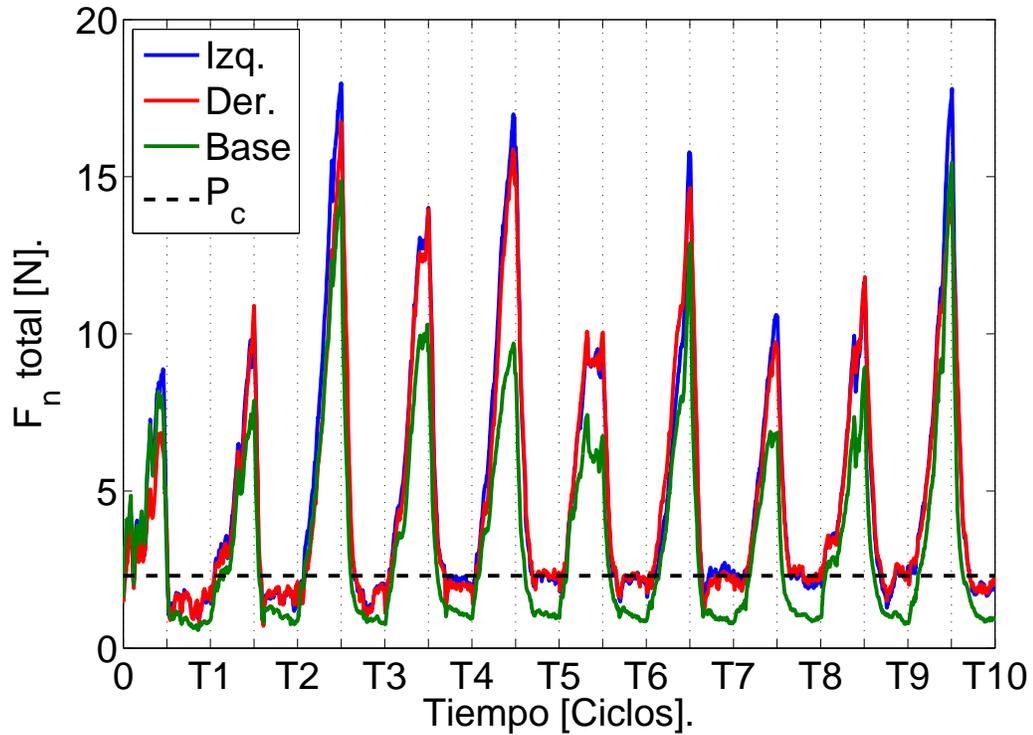


Figura 3.15: Evolución del módulo de la fuerza normal total en las paredes izquierda, derecha y base para la segunda simulación, en donde la línea punteada es el valor del peso de la columna de granos ($P_c \approx 2,3$ [N]).

Se observa un comportamiento similar tanto en la figura 3.15 como en la figura 3.14, la diferencia es que en la primera simulación primero se desplazan las paredes hacia arriba, mientras que en la segunda, las paredes se desplazan primero hacia abajo.

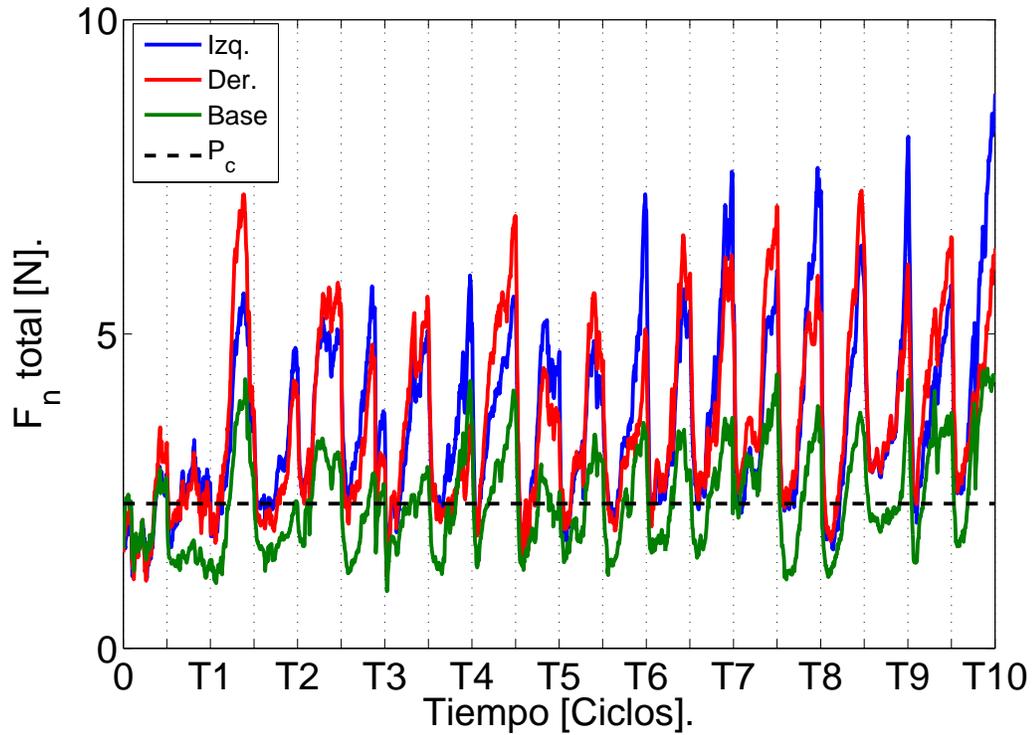


Figura 3.16: Evolución del módulo de la fuerza normal total en las paredes izquierda, derecha y base para la tercera simulación, en donde la línea punteada es el valor del peso de la columna de granos ($P_c \approx 2,3$ [N]).

En la figura 3.16 se observa una transición más suave que en los casos anteriores para llegar al estado final. Las fuerzas totales en los casos anteriores (3.14 y 3.15) son dos veces mayor en magnitud. La razón es que en este tipo de movimiento no existe una parte del ciclo en donde se comprima el material por las paredes laterales, pues mientras una sube, la otra baja. En la base existe una fluctuación de la fuerza que, al contrario de los casos anteriores, no necesariamente sigue el movimiento de las paredes laterales.

Fuerzas tangenciales a las paredes.

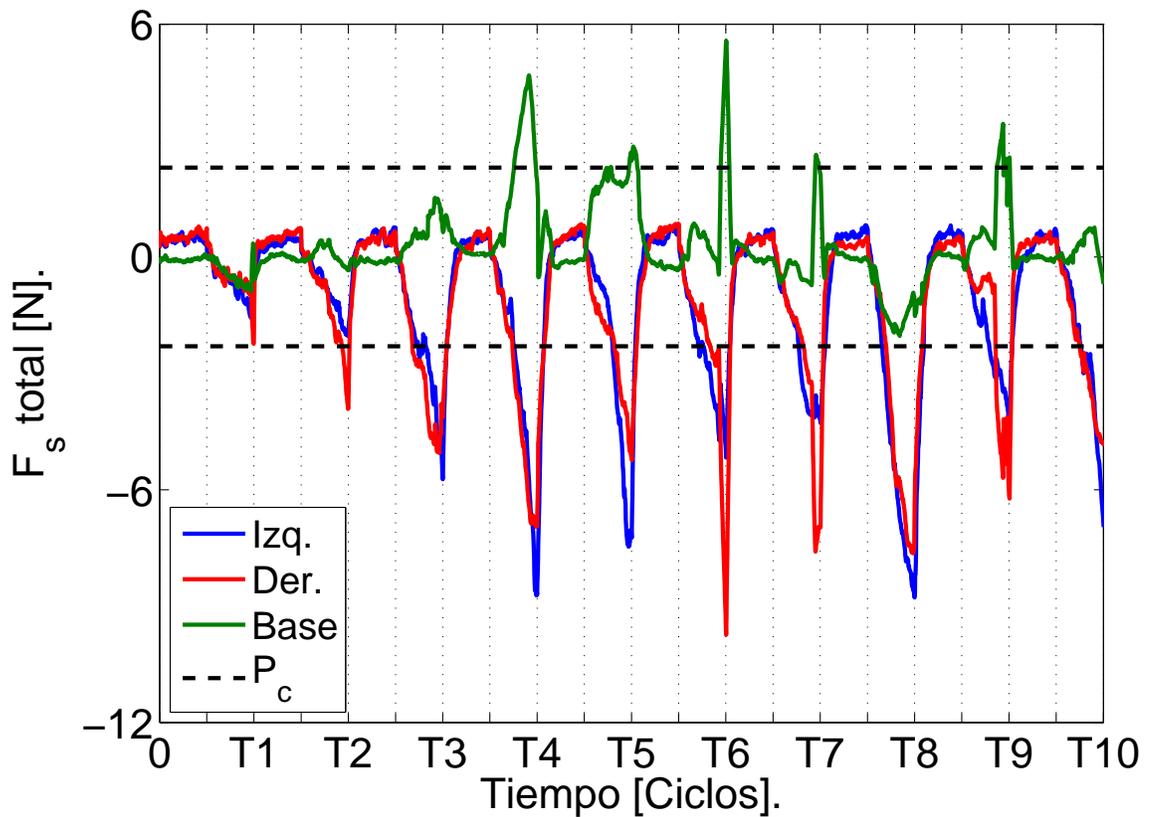


Figura 3.17: Evolución de la fuerza tangencial total en las paredes izquierda, derecha y base para la primera simulación, en donde una fuerza tangencial negativa indica para la pared derecha e izquierda una fuerza en dirección de la gravedad, y para la base una fuerza en dirección izquierda. La línea punteada es el valor del peso de la columna de granos ($P_c \approx 2,3$ [N]).

Para la figura 3.17, se observa el mismo la misma acumulación de fuerzas que para las fuerzas normales (fig. 3.14) y también el hecho de que al desplazar las paredes en el sentido contrario de la gravedad se libere fuerza.

Para la fuerza tangencial en la base, se observa que para ciertos ciclos se generan

fuerzas con dirección $+\hat{x}$ o $-\hat{x}$ cercanas o superiores al peso de la columna, esto se debe a que al mover las paredes hacia abajo, el sistema empezó a aumentar el *stress* y las partículas en la zona central del material comenzaron a ejercer mayor presión sobre las que se encuentran en la base, pero estas, sin poder desplazarse empezaron a sufrir un aumento en la fuerza tangencial. En cuanto a la dirección que toma la fuerza es aleatoria debido a la naturaleza discreta del sistema, no tiene una dirección preferencial y depende del ordenamiento local del medio.

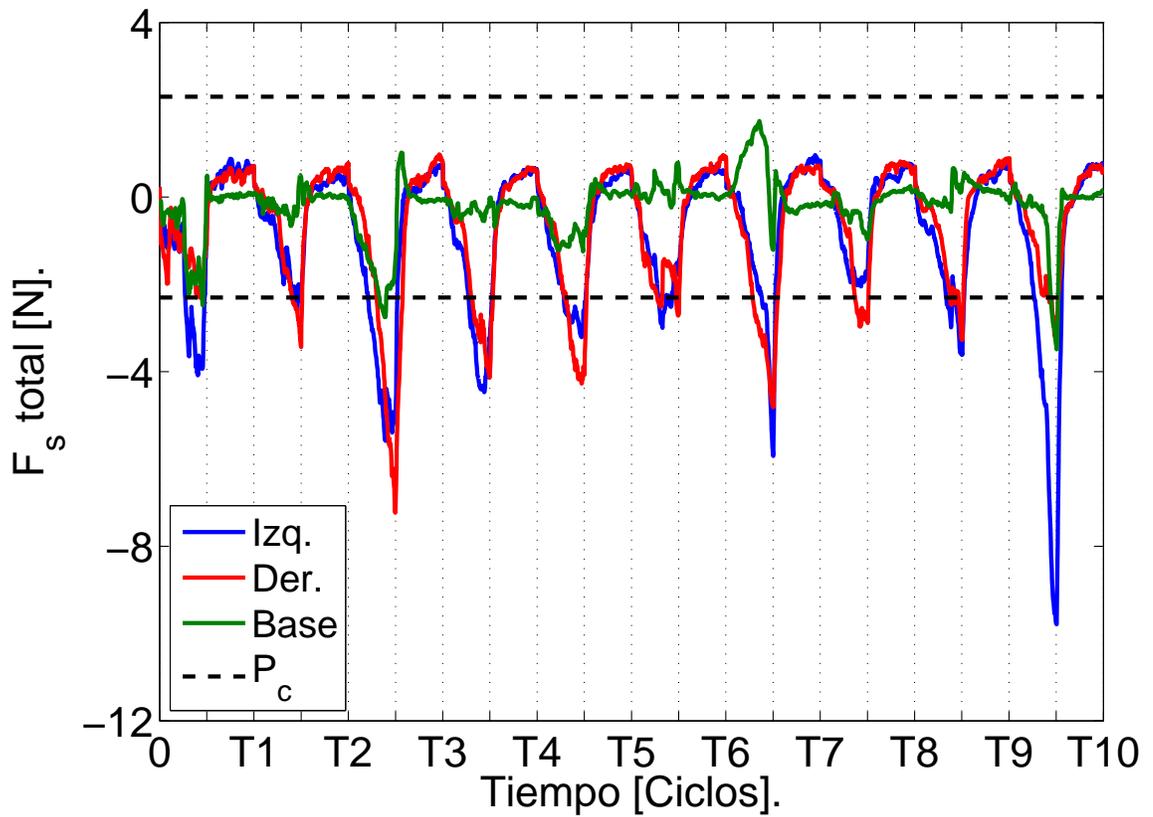


Figura 3.18: Evolución de la fuerza tangencial total en las paredes izquierda, derecha y base para la segunda simulación, en donde una fuerza tangencial negativa indica para la pared derecha e izquierda una fuerza en dirección de la gravedad, y para la base una fuerza en dirección izquierda. La línea punteada es el valor del peso de la columna de granos ($P_c \approx 2,3$ [N]).

Para la figura 3.18 el análisis es similar al anterior. También se pueden observar valores de fuerza tangencial similares al peso de la columna en la base.

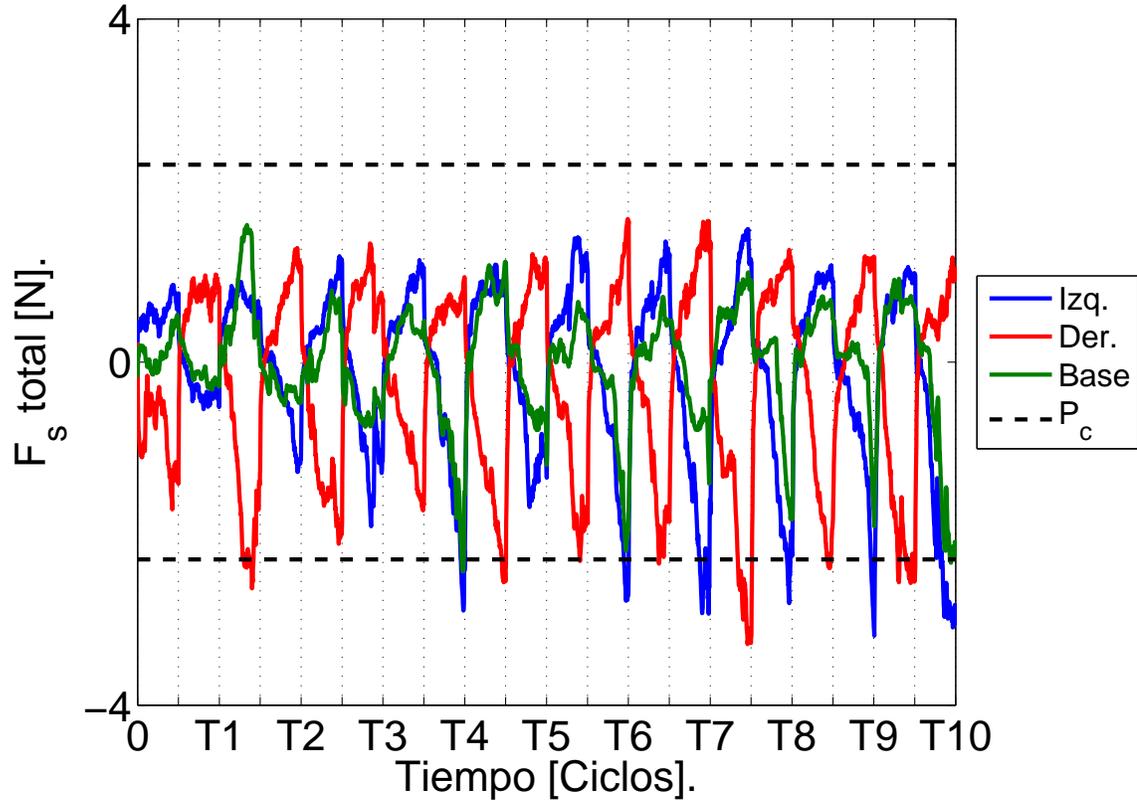


Figura 3.19: Evolución de la fuerza tangencial total en las paredes izquierda, derecha y base para la tercera simulación, en donde una fuerza tangencial negativa indica para la pared derecha e izquierda una fuerza en dirección de la gravedad, y para la base una fuerza en dirección izquierda. La línea punteada es el valor del peso de la columna de granos ($P_c \approx 2,3$ [N]).

Al igual que para la fuerza normal para la simulación 3, las fuerzas a través del tiempo que se observan en la figura 3.19 son mucho menores que para los casos en donde ambas paredes se desplazaban en la misma dirección (3 a 4 veces menor aproximadamente).

3.4.4 Movilización de la fricción.

Para analizar si el desplazamiento de las paredes logró movilizar las fuerzas de roce en éstas se realizó el histograma presentado en la figura 3.20.

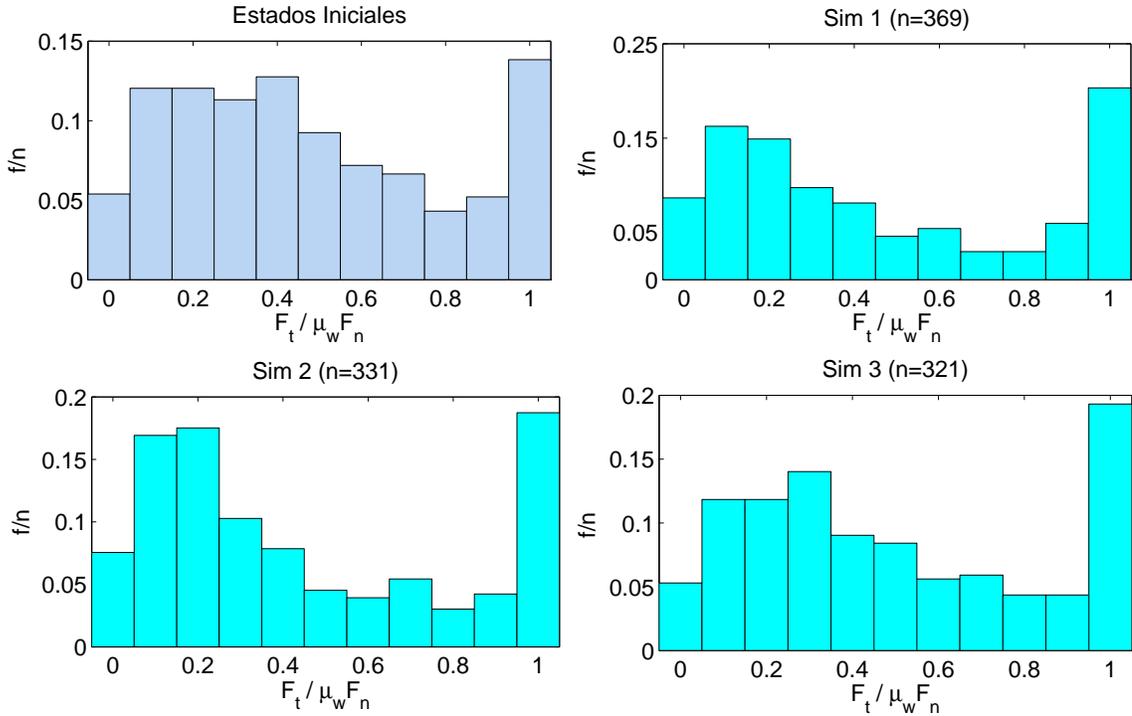


Figura 3.20: Histograma de $F_t / \mu F_n$ para los estados iniciales con llenado tipo lluvia comparado con los histogramas de las 3 simulaciones, en donde se utilizó la información desde el ciclo 4 hasta el 10, tomando para cada ciclo el estado con mayor *stress*.

Se puede entonces observar en 3.20 un aumento en la cantidad de partículas cuyas fuerzas fueron movilizadas.

3.4.5 Estados de Janssen activo y pasivo.

Como consecuencia de la movilización de las fuerzas de fricción en las paredes laterales el modelo de Janssen se ajustó mejor a los perfiles de presión (figura 3.21).

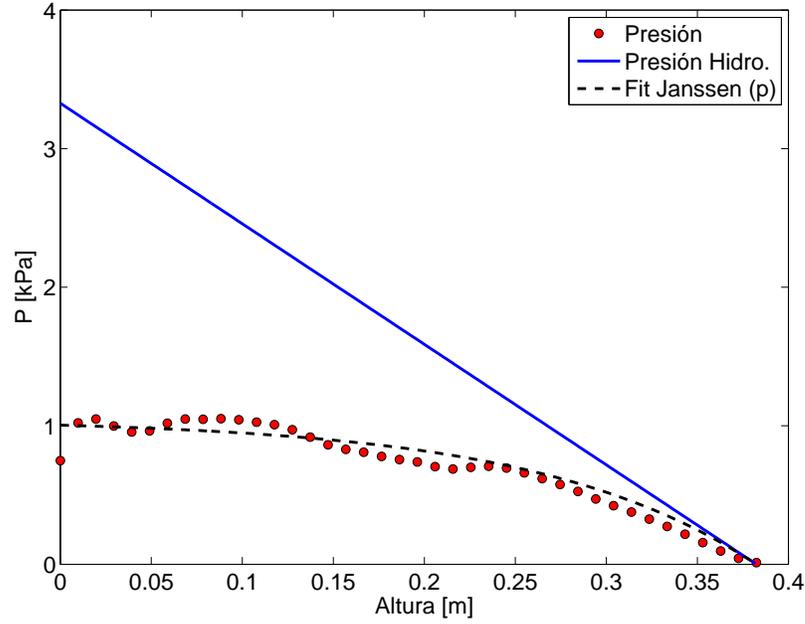


Figura 3.21: Para el estado final (T_{10}) en la segunda simulación se determinó el perfil de presión de la figura. Al ajuste de datos utilizado se denominará Janssen pasivo con el cual se obtuvo un coeficiente de correlación $R^2 = 0,9568$.

Para el caso de la figura 3.21 se utilizó el siguiente ajuste (con $\lambda = 0,12$) detallado en el anexo:

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda \left(1 - \exp \left(-\frac{z_{max} - z}{\lambda} \right) \right) \quad (3.8)$$

En el caso de que las paredes sean desplazadas en la misma dirección que la gravedad, se pudo extender el modelo de Janssen aplicando una fuerza de fricción en las paredes laterales a favor de la gravedad, con lo que se pudo determinar que para estos casos, a los que se les denominará Janssen activo el valor de la presión v/s. la altura será lo siguiente:

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda \left(\exp \left(\frac{z_{max} - z}{\lambda} \right) - 1 \right) \quad (3.9)$$

Para el caso de la figura 3.22 se utilizó el anterior ajuste.

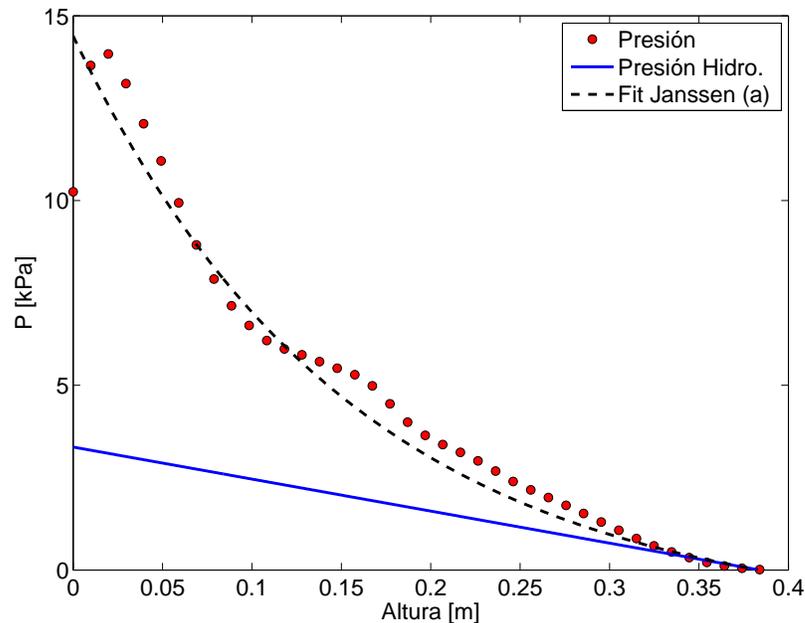


Figura 3.22: Para el estado final (T_{10}) en la primera simulación se determinó el perfil de presión de la figura. Al ajuste de datos utilizado se denominará Janssen activo con el cuál se obtuvo un coeficiente de correlación $R^2 = 0,9538$.

3.4.6 Transición entre Janssen activo y pasivo.

Se tomó un ciclo representativo de las simulaciones 1 y 2 (T_9 a T_{10} de la primera simulación), ya que como se mostró anteriormente la única diferencia existente es en si se parte desplazando hacia arriba o hacia abajo las paredes laterales, no existiendo

un efecto considerable dentro del sistema granular. Para este ciclo representativo se aplicó los ajustes mostrados anteriormente (Janssen activo y pasivo), y se tomó el ajuste con menor error, lo que finalmente mostró zonas en las cuales actuaba Janssen activo y en otras Janssen pasivo, apreciándose también zonas de transición en las cuales no se puede utilizar ninguno de estos ajustes.

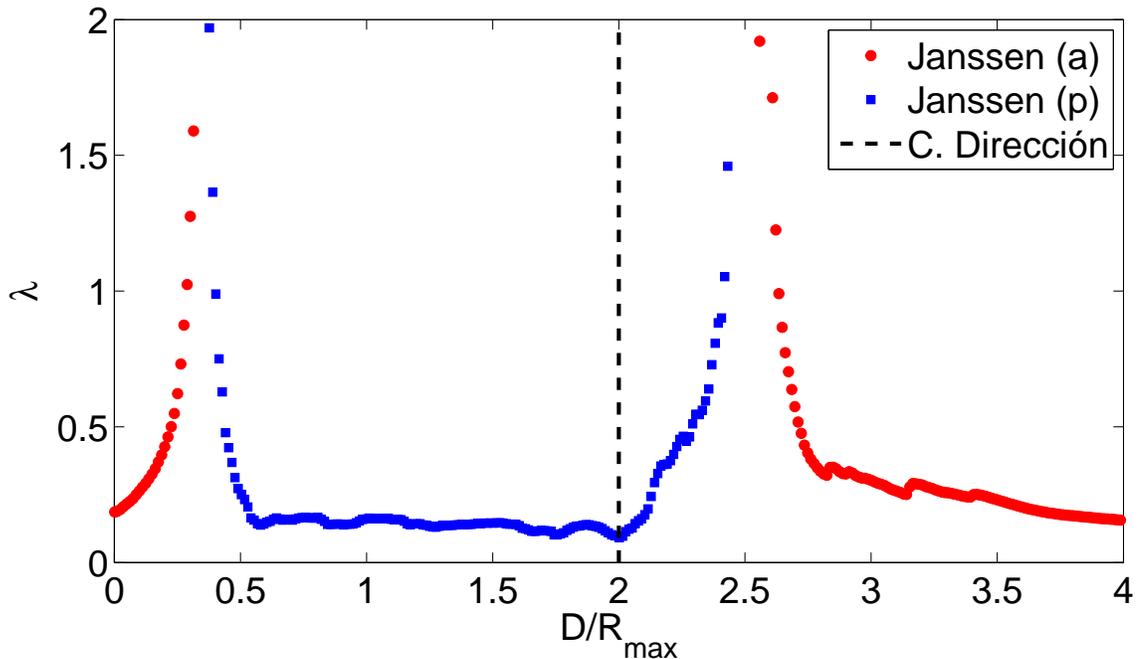


Figura 3.23: Evolución del parámetro de ajuste λ dentro de un ciclo representativo con respecto a D/R_{max} (desplazamiento de las paredes sobre el radio mayor de las partículas). Para cada Δt se utilizó el ajuste con menor error. La línea punteada indica el cambio de dirección de las paredes laterales, las que en el primer medio ciclo se movían hacia arriba.

Según la figura 3.23, aunque el sistema granular empezó a modificar su comportamiento instantáneamente al desplazar las paredes laterales en el sentido contrario a la gravedad, éste no fue capaz de realizar la transición desde Janssen pasivo a activo de forma instantánea, fue necesario un desplazamiento mayor a 0.5 veces el diámetro

mayor de las partículas para poder realizar la transición completa a Janssen pasivo.

Luego, al cambiar la dirección de desplazamiento de las paredes ocurrió lo mismo, fue necesario cierto desplazamiento para cambiar de estado, pero el desplazamiento necesario para realizar la transición fue el doble.

También se puede derivar de la figura 3.23 que luego de realizar la transición no es necesario continuar desplazando las paredes.

Capítulo 4

Conclusiones.

Se implementó un algoritmo basado en el método de elementos discretos que permitió simular el comportamiento de un silo bidimensional con material granular bidisperso ante el desplazamiento vertical de sus paredes laterales. Con la información obtenida del sistema se pudo derivar distintas cantidades que permitieron describir el sistema y su respuesta al desplazamiento de sus paredes.

Se implementó la herramienta conocida como coarse graining con la que se fue capaz de determinar los perfiles de presión de las simulaciones. Herramienta que también puede ser utilizada para determinar el tensor de tensiones en cualquier parte del espacio para cualquier sistema granular.

Se pudo describir la evolución del empaquetamiento del sistema, pudiéndose determinar el hecho de que el sistema al desplazar sus paredes de cualquiera de las tres formas aumenta su empaquetamiento, alcanzando un valor máximo. También se pudo establecer el mecanismo bajo el cuál el sistema se empaqueta, se utilizó la información de las posiciones de las partículas para así determinar que el movimiento de las paredes generaba la perturbación necesaria para que en muchos casos los granos ocupasen espacios vacíos disponibles.

Utilizando la información de las fuerzas de contactos involucradas en los contactos de las partículas con las paredes se pudo determinar la evolución de estas fuerzas a través del tiempo. El desplazamiento de las paredes genera *peaks* de fuerza en ciertos instantes de los ciclos, encontrándose que para la simulación 3 la transición entre estados generaba *peaks* menores que en las otras dos.

Se pudo comprobar que el modelo de Janssen es aplicable a los perfiles de presión encontrados al realizar las simulaciones, en donde como la teoría lo indicaba, era necesario movilizar las fuerzas de fricción para que el modelo de Janssen se ajustara con mayor exactitud a los perfiles de presión. Para el caso en donde las fuerzas de fricción se movilizaban en favor de la gravedad se logró extender el modelo de Janssen para posteriormente aplicarlo a los datos. Dentro de esta misma línea se pudo determinar que el sistema granular necesita un desplazamiento mínimo para realizar la transición entre el modelo de Janssen activo al pasivo y viceversa.

Apéndice A

Formulación del Modelo de Janssen.

Para poder formular el modelo de Janssen hay que realizar dos supuestos. El primero es que una fracción del esfuerzo vertical generado por el material granular se irá a las paredes laterales, por lo que:

$$\sigma_{rr} = k\sigma_{zz} \quad (\text{A.1})$$

Y el segundo es que las fuerzas tangenciales y normales en las paredes cumplen el criterio de falla de Coulomb (en donde μ_w es el coeficiente de fricción de la pared):

$$F_t = \mu_w F_n \quad (\text{A.2})$$

Teniendo en cuenta lo anterior se puede realizar el siguiente análisis utilizando lo mostrado en (Fig. A.1), en donde un cilindro de ancho infinitesimal δz y diámetro D es sometido a una fuerza de fricción τ_w bajo la influencia de la gravedad \vec{g} produciendo un esfuerzo sobre sus caras superior e inferior.

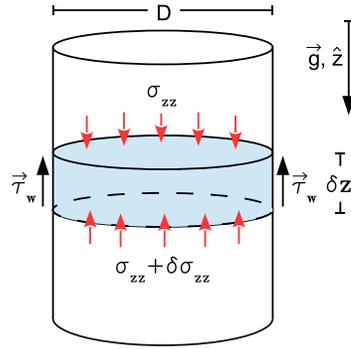


Figura A.1: Diagrama utilizado para derivar el modelo de Janssen.

Según (Fig. A.1) se pueden determinar las siguientes cantidades:

$$\text{Área} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$\text{Volumen} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \delta z$$

$$\text{Area del Manto del Cilindro} = \pi D \delta z$$

Entonces equilibrando las fuerzas derivadas del diagrama anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\pi D^2}{4} \sigma_{zz} + \frac{\pi D^2}{4} \rho g \delta z &= \frac{\pi D^2}{4} (\sigma_{zz} + \delta \sigma_{zz}) + \pi D \delta z \tau_w \quad / \cdot \frac{4}{\pi D^2} \\ \rho g \delta z &= \delta \sigma_{zz} + 4 \delta z \tau_w / D \end{aligned}$$

Para un material no cohesivo el valor de la fuerza de fricción es $\tau_w = \mu_w \sigma_{rr}$ y utilizando (Eq. A.1) entonces:

$$\rho g \delta z = \delta \sigma_{zz} + \frac{4 \kappa \mu_w}{D} \delta z \sigma_{zz}$$

Se define la longitud característica $\lambda = \frac{D}{4\kappa\mu_w}$, con lo que finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho g \delta z &= \delta \sigma_{zz} + \frac{\delta z}{\lambda} \sigma_{zz} \\ \delta z \left(\rho g - \frac{\sigma_{zz}}{\lambda} \right) &= \delta \sigma_{zz} \\ \int \delta z &= \int \frac{\delta \sigma_{zz}}{\left(\rho g - \frac{\sigma_{zz}}{\lambda} \right)}\end{aligned}$$

Integral que puede ser resuelta realizando un cambio de variable:

$$\gamma = \rho g - \frac{\sigma_{zz}}{\lambda} \Rightarrow \delta \sigma = -\lambda \delta \gamma$$

Por lo tanto utilizando lo anterior:

$$\begin{aligned}\ln \left(\rho g - \frac{\sigma_{zz}}{\lambda} \right) &= -\frac{z}{\lambda} + c \quad / \text{exp} \\ \rho g - \frac{\sigma_{zz}}{\lambda} &= A \exp \left(-\frac{z}{\lambda} \right) \\ \Rightarrow \sigma_{zz} &= \lambda \left(\rho g - A \exp \left(-\frac{z}{\lambda} \right) \right)\end{aligned}$$

Pero en la superficie libre del material, es decir en $z = 0$, el esfuerzo σ_{zz} es cero. Por lo que el valor de la constante de integración A es:

$$\begin{aligned}0 &= \lambda (\rho g - A) \\ \Rightarrow A &= \rho g\end{aligned}$$

Por lo que el valor del esfuerzo vertical es igual a:

$$\boxed{\sigma_{zz} = \rho g \lambda \left(1 - \exp \left(-\frac{z}{\lambda} \right) \right)} \quad (\text{A.3})$$

Esta solución es válida cuando la dirección de las fuerzas de fricción sobre las paredes laterales es contraria a la gravedad, es decir, en el caso estático y al mover las paredes en la dirección contraria de \vec{g} .

La forma de encontrar el esfuerzo vertical en el caso en donde las paredes laterales son desplazadas en la dirección de \vec{g} es similar a lo mostrado anteriormente. Basta con definir la fuerza de fricción $\vec{\tau}_w$ en la misma dirección que \vec{g} , quedando entonces lo siguiente:

$$\frac{\pi D^2}{4} \sigma_{zz} + \frac{\pi D^2}{4} \rho g \delta z = \frac{\pi D^2}{4} (\sigma_{zz} + \delta \sigma_{zz}) - \pi D \delta z \tau_w \quad / \cdot \frac{4}{\pi D^2}$$

$$\rho g \delta z = \delta \sigma_{zz} - 4 \delta z \tau_w / D$$

Definiendo de igual manera λ :

$$\rho g \delta z = \delta \sigma_{zz} - \frac{\delta z}{\lambda} \sigma_{zz}$$

Basta con resolver la integral:

$$\int \delta z = \int \frac{\delta \sigma_{zz}}{\left(\rho g + \frac{\sigma_{zz}}{\lambda}\right)}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(A \exp\left(\frac{z}{\lambda}\right) - \rho g \right)$$

Por lo que finalmente (utilizando $\sigma_{zz} = 0$ para $z = 0$) el valor del esfuerzo vertical viene dado por:

$$\boxed{\sigma_{zz} = \rho g \lambda \left(\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right) - 1 \right)} \quad (\text{A.4})$$

Apéndice B

Coarse Graining.

Para poder determinar los perfiles de presión dentro del medio granular fue necesario implementar una herramienta llamada Coarse Graining descrita por Goldhirsch & Goldenberg en [10]. En donde un sistema de partículas es tratado como un continuo. Esto se hace definiendo una función de densidad del medio de la siguiente manera:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i m_i \Phi[\vec{r} - \vec{r}_i(t)] \quad (\text{B.1})$$

En donde el valor de la densidad en un punto \vec{r} del espacio está determinado por la contribución que realiza la masa m_i de cada partícula i con posición \vec{r}_i a través de la función Φ .

Utilizando (Eq. B.1) se puede derivar una expresión que nos permite calcular el tensor de esfuerzos del medio granular en cualquier punto del espacio (\mathbb{R}^3). Este esfuerzo es producto de la contribución que realiza cada interacción de partículas en el sistema en un determinado punto del espacio (\vec{r}).

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j} f_{ij\alpha}(t) r_{ij\beta}(t) \int_0^1 \Phi(\vec{r} - \vec{r}_i(t) + s\vec{r}_{ij}(t)) ds \quad (\text{B.2})$$

En donde $f_{ij\alpha}(t)$ es la componente α de la fuerza ejercida sobre la partícula i por la partícula j ($j \neq i$) a un tiempo t , y $r_{ij\alpha} \equiv r_{i\alpha} - r_{j\alpha}$.

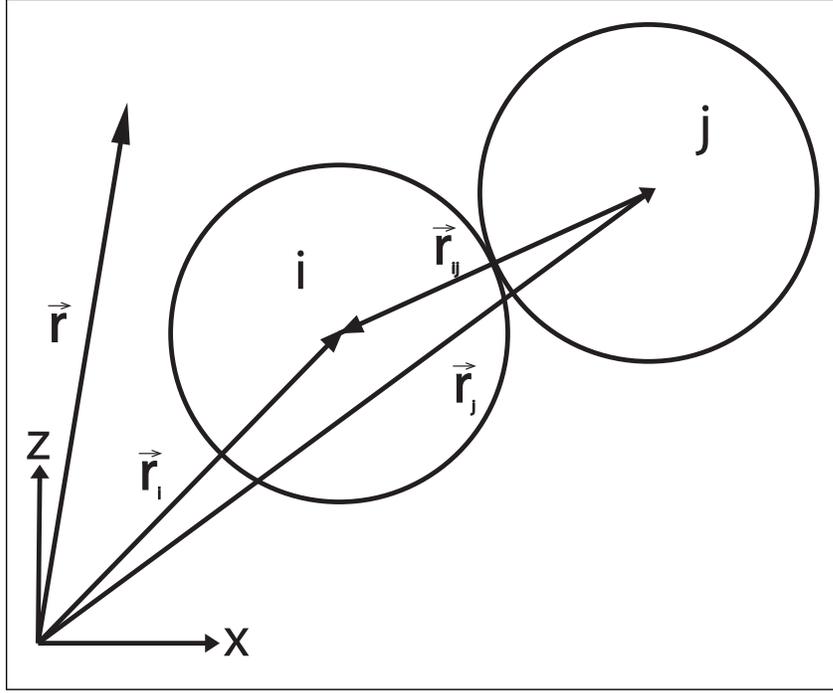


Figura B.1: Diagrama de los vectores que se hacen referencia en B.2

Es entonces necesario definir una función con un ancho característico ω como la siguiente:

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\omega^2}} e^{-(|\vec{R}|/\omega)^2} \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\omega^2}} e^{-(R^2/\omega^2)} \quad (\text{B.4})$$

En donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_i(t) + s\vec{r}_{ij}(t)$

Siendo $\vec{r} = \alpha$, $\vec{r}_i(t) = \beta$, $\vec{r}_{ij}(t) = \gamma$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
R^2 &= (\alpha - \beta + s\gamma) \bullet (\alpha - \beta + s\gamma) \\
&= \alpha^2 - \alpha\beta + s\alpha\gamma - \alpha\beta + \beta^2 - s\beta\gamma + s\alpha\gamma - s\beta\gamma + s^2\gamma^2 \\
&= s^2\gamma^2 + 2s\gamma(\alpha - \beta) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \\
&= s^2 \underbrace{\gamma^2}_A + s \underbrace{2\gamma(\alpha - \beta)}_B + \underbrace{(\alpha - \beta)^2}_C \\
&= As^2 + Bs + C
\end{aligned}$$

Lo que es necesario para poder resolver la integral de la Eq. B.2:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi (\vec{r} - \vec{r}_i(t) + s\vec{r}_{ij}(t)) ds &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\pi\omega^2}} e^{-(R^2/\omega^2)} ds \\
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\pi\omega^2}} e^{-((As^2+Bs+C)/\omega^2)} ds &= -\frac{\sqrt{\pi\omega} e^{\frac{B^2-4AC}{4A\omega^2}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{B}{2\sqrt{A}\omega}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2A+B}{2\sqrt{A}\omega}\right) \right)}{2\sqrt{A}\sqrt{\pi\omega^2}}
\end{aligned}$$

Esta herramienta se utilizó para determinar la presión dentro del silo a distintas alturas, en donde si $\alpha = z$ y $\beta = z$ se puede determinar los esfuerzos σ_{zz} para un espesor unitario. Luego, bastó con tomar distintos puntos para un $z = cte.$ a lo largo del ancho del silo y luego promediarlos encontrándose así el valor de la presión pero para un espesor unitario.

Para poder determinar el esfuerzo para el espesor real del silo es necesario dividir el esfuerzo obtenido con Eq. B.2 por un valor de espesor efectivo. Para el caso del silo el valor utilizado fue el siguiente:

$$2\pi r_{max} e_e = \frac{4}{3} \pi r_{max}^3 \quad (\text{B.5})$$

$$e_e = \frac{4}{3} r_{max} \quad (\text{B.6})$$

Bibliografía

- [1] Andreotti B. Forterre Y. and Pouliquen O. *Granular Media - Between Fluid and Solid*. 2013.
- [2] Jacek Tejchman. *Confined Granular Flow In Silos: Experimental and Numerical Investigations*. 2013.
- [3] Jacques Duran. *Sands, Powders, and Grains: An introduction to the Physics of Granular Materials*. 2000.
- [4] Matthias Sperl. Experiments on corn pressure in silo cells - translation and comment of janssen's paper from 1895. *arXiv:cond-mat/0511618*, 2005.
- [5] L. Vanel and E. Clément. Pressure screening and fluctuations at the bottom of a granular column. *Eur. Phys. J. B* 11,525-533, 1999.
- [6] James W. Landry and Gary S. Grest. Confined granular packings: Structure, stress, and forces. *Phys. Rev. E* 67, 041303, 2003.
- [7] James W. Landry and Gary S. Grest. Granular packings with moving side walls. *Phys. Rev. E* 69, 031303, 2004.
- [8] P.A. Cundall. A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Rock Systems. In *Proc. Int. Symp. Rock Fracture, ISRM*, pages 2–8, Nancy (F), 1971.

- [9] V. Šmilauer, E. Catalano, B. Chareyre, S. Dorofenko, J. Duriez, A. Gladky, J. Kozicki, C. Modenese, L. Scholtès, L. Sibille, J. Stránský, and K. Thoeni. Yade Reference Documentation. In *Yade Documentation*. 2010. <http://yadedem.org/doc/>.
- [10] I. Goldhirsch and C. Goldenberg. Granular and nano-elasticity. *arXiv:cond-mat/0201081*, 2002.