



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Caracterización Local de Materiales Poroelásticos mediante Modelos
Reológicos en Ensayos de Fluencia con Imágenes Ultrasonóicas**

Rodrigo Hernán Acevedo López

Profesor Guía:

Dr. Belfor Galaz Donoso

Trabajo presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento para optar al título profesional de Ingeniero Físico.

Santiago · Chile

2015

**Caracterización Local de Materiales Poroelásticos
mediante Modelos Reológicos en Ensayos de
Fluencia con Imágenes Ultrasónicas**

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia,
en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar
al título profesional de Ingeniero Físico.

Universidad de Santiago de Chile.

Santiago - Chile.

” Caracterización Local de Materiales Poroelásticos mediante
Modelos Reológicos en Ensayos de Fluencia con Imágenes
Ultrasónicas ”

Rodrigo Hernán Acevedo López

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Belfor Galaz académico del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora del candidato, Dra. Yolanda Vargas , Dr. Luis Hamm y Dr. Francisco Vivanco.

Profesor Gu'ia

Director

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios, que desde pequeño coloco en mi un curiosidad por conocer las leyes que rigen la naturaleza, a mi Señor Jesucristo, porque sin su fortaleza y su paz en los momentos difíciles no habría podido seguir adelante con este proyecto, al Espíritu Santo por su dirección y por darme la sabiduría necesaria para entender cada una de las materias aprendidas durante estos años. A mis padres, Víctor y Elena, por su apoyo incondicional, por brindarme siempre su amor, su paciencia y los valores que me entregaron desde niño. A mi hermana, Elena, que ha sido un apoyo fundamental durante estos años en sobre manera, por cada uno de sus consejos, su preocupación y su ayuda, que siempre estuvo presente cada vez que fue necesario. A mi hermano, Israel, por su paciencia y alegría y sobre todo por su fe en mis capacidades, aún cuando yo dude de ellas. A mis pastores, Alex y Edith, quienes han sido un apoyo espiritual muy grande, por su amor, compañía y por cada una de esas oraciones que han realizado por mi. Y por último a mi profesor guía, Dr. Belfor Galaz, quien confió en mí, sin conocerme, sino que acepto de inmediato que comenzara a trabajar junto a él en mi tesis, por su paciencia, debido a que el inicio de mi tesis no fue para nada fácil para mí, por sus consejos y por compartir conmigo parte de sus conocimientos, que me han servido para desarrollarme en este proceso que fue mi trabajo de tesis y en la práctica profesional.

Resumen

La Poroelastografía Ultrasónica es una modalidad de imaginología emergente que pretende caracterizar el comportamiento mecánico temporal de los tejidos blandos que pueden ser modelados como medios poroelásticos. Esta técnica de diagnóstico por imágenes podría ser útil para caracterizar los estados iniciales de la enfermedad de linfedema, donde los tejidos se comportan como material poroelástico debido a una acumulación excesiva de líquido en el intersticio. En las imágenes poroelásticas, la propiedades de los tejidos se extraen a partir de curvas de deformación axial mediante el uso de modelos de tiempo constante donde la precisión del proceso de ajuste, el costo computacional y la versatilidad (capacidad de adaptación ante cambios en las propiedades mecánicas de los tejidos) de los modelos son aspectos cruciales para aplicaciones clínicas. En este trabajo se propuso utilizar modelos reológicos unidimensionales (1D) para caracterizar el comportamiento mecánico temporal de las muestras poroelásticas sintéticas bajo compresión en ensayos de fluencia (esfuerzo aplicado constante) no confinada. Esta configuración *in-vitro* permite lograr elastogramas de deformación axial (ASE) de alta calidad que mejoran la precisión del proceso de ajuste de curvas. En primer lugar, se evaluó el desempeño de los modelos propuestos en cuanto a la precisión de ajuste, la robustez del algoritmo de ajuste de curvas (sensibilidad ante variaciones de los parámetros del algoritmo) y el costo computacional. A continuación, se propuso un esquema para el proceso de ajuste de los modelos píxel por píxel seleccionando adecuadamente el conjunto inicial de parámetros del modelo y manipulando los parámetros del algoritmo de manera de

aumentar la eficiencia en el proceso de ajuste de los modelos.

Se aplicó este esquema, además, a una muestra poroelástica con una inclusión circular de alta densidad de poros con el fin de demostrar la versatilidad de los modelos propuestos ante cambios drásticos en las propiedades poroelásticas del material. Estos estudios mostraron que el modelo Kelvin-Voigt bimodal ajusta los datos de la imagen ASE con alta precisión en un tiempo de procesamiento reducido y es capaz de adaptarse a los cambios drásticos de las propiedades poroelásticas del material.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Objetivo General	4
1.2. Objetivos Específicos	5
2. Marco Teórico	6
2.1. Poroelasticidad	6
2.1.1. Introducción	6
2.1.2. Ecuaciones constitutivas	7
2.1.3. Ecuaciones Gobernantes	8
2.2. Teoría Bifásica de Poroelasticidad	10
2.2.1. Introducción	10
2.2.2. Ecuaciones Constitutivas	11
2.2.3. Aplicación en Biomecánica	13
2.3. Modelos Reológicos	18
2.3.1. Introducción	18

2.3.2.	Modelo de Kelvin-Voigt	19
2.3.3.	Modelos de 3 elementos	22
2.3.4.	Modelos Bimodales	25
2.3.5.	Modelos Continuos	27
3.	 Materiales y Métodos	31
3.1.	Materiales Poroelásticos	32
3.1.1.	Introducción	32
3.1.2.	Materiales Biomiméticos	32
3.1.3.	Tratamiento de Materiales Biomiméticos	33
3.2.	Experimentos Poroelásticos	37
3.2.1.	Imágenes Ultrasónicas	37
3.2.2.	Elastografía y Poroelastografía	42
3.2.3.	Ensayos de Fluencia	43
3.3.	Métodos Numéricos	45
3.3.1.	Introducción	45
3.3.2.	Algoritmo Multi-niveles Piramidal de Búsqueda Bidimensional de Desplazamiento.	45
3.3.3.	Estimación Escalonada de la Deformación	48
3.3.4.	Algoritmo Levenberg-Marquardt	51
4.	 Resultados y Análisis Experimental	58
4.1.	Introducción	58
4.2.	Estudio No Restrictivo de Ajuste de Modelos.	60
4.3.	Estudio Comparativo de Modelos Reológicos.	62
4.4.	Estudio Paramétrico	65
4.4.1.	Variación del factor de amortiguamiento κ	66
4.4.2.	Variación en la tolerancia de los mínimos locales g_{min}	69
4.4.3.	Variación del cambio del tamaño relativo del paso δp_{min}	71

ÍNDICE GENERAL

VIII

4.4.4. Variación del nivel de error de detención χ_{min}	73
4.5. Estudio de Versatilidad.	75
4.5.1. Estudio Preliminar: Esponja Homogénea	76
4.5.2. Estudio de versatilidad: Esponja Homogénea con Inclusión circular rígida	79
5. Conclusión	85
6. Perspectivas	87

Índice de figuras

2.1. Configuración Compresión No Confinada	17
2.2. Configuración Modelo Kelvin-Voigt	19
2.3. Evolución temporal del modelo Kelvin-Voigt ante un esfuerzo que es aplicado y luego retirado	21
2.4. Configuración de Modelos de Fluidos: a) Fluido tipo I, constituido por el modelo de Maxwell unido en paralelo a un amortiguador. b) Fluido tipo II, constituido por el modelo de Kelvin-Voigt unido en serie a un amortiguador.	23
2.5. Comportamiento de un fluido al ser sometido a un esfuerzo, el que luego es retirado.	24
2.6. Configuración Modelo Kelvin-Voigt Bimodal	25
2.7. Combinaciones de un material descrito por el modelo bimodal: a) Kelvin-Voigt - Fluido tipo I. b) Kelvin-Voigt - Fluido tipo II.	26
2.8. Modelo Kelvin-Voigt continuo	28
2.9. Modelo Kelvin-Voigt Bimodal continuo	28
2.10. Opciones de configuraciones a) Kelvin-Voigt - Fluido tipo I extendido al continuo. b) Kelvin-Voigt - Fluido tipo II extendido al continuo. . .	29
3.1. a) Vista frontal del saca bocado. b) Dispositivo de corte. c) Esponja homogénea cortada con el dispositivo de corte.	34

3.2. a) Dispositivo de corte de inclusiones. b) Vista frontal del saca bocado para inclusiones. c)Esponja homogénea con inclusión cilíndrica más rígida.	35
3.3. Cúpula de Vacío	36
3.4. Esquema de procesamiento y formación de imágenes ultrasónicas (B-mode)	40
3.5. a) Las señales RF de cada canal. b) La envolvente de una de las señales. c) B-Mode de la señales obtenidas con su patrón de speckles.	41
3.6. Configuración experimental: (a) Diagrama del montaje. b) Cúpula de vacío.	44
3.7. Diagrama esquemático algoritmo de seguimiento Multilevel piramidal de búsqueda bidimensional de desplazamiento	46
3.8. Diagrama del aumento de resolución y tamaño de la ventana de búsqueda	48
3.9. Estimación de la deformación por etapas.	50
3.10. Esquema de SSE. Etapa 1: Estimación de la deformación usando ventanas sin superposición. Etapa 2: Estimación de la deformación con ventanas desplazadas por ΔW . Etapa n : Estimación de la deformación con ventanas desplazadas por $n\Delta W$. Etapa $n+1$: Escalonamiento de las deformaciones estimadas de la etapa 1 a la n para producir el elastograma.	51
3.11. Estructura de programación de Algoritmo Levenberg-Marquardt . . .	54
4.1. Estudio no restrictivo : a) Ajuste de modelos. b) Coeficiente de determinación normalizado para valores de $r_n^2 \geq 0,9$. c) Costo computacional	61

4.2. Estudio comparativo de los modelos reológicos con respecto a la variación del factor de amortiguamiento κ , con un error inicial pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ (gráficos a,c y e) y con un error inicial grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (gráficos b,d y f) : a) y b) Coeficiente de determinación. c) y d) Costo computacional. e) y f) Eficiencia. 64

4.3. Eficiencia ante la variación del factor de amortiguamiento κ y el factor que limita la región de variación de los parámetros de los modelos α : a) y b) Eficiencia para modelo KV-KV con error inicial pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente, c) y d) Eficiencia para modelo KV-KVC con error inicial pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente. . . . 68

4.4. Estudio Paramétrico: Sensibilidad del algoritmo LM a la variación de g_{min} para el modelo KV-KV, a) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y b) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) y para el modelo KV-KVC, c) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y d) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) 70

4.5. Estudio Paramétrico: Sensibilidad del algoritmo LM a la variación de δp_{min} para el modelo KV-KV, a) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y b) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) y para el modelo KV-KVC, c) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y d) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$). 72

4.6. Estudio Paramétrico: Sensibilidad del algoritmo LM a la variación de χ_{min} para el modelo KV-KV, a) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y b) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) y para el modelo KV-KVC, c) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y d) Error inicial grande($\chi_0^{rel} \approx 500\%$). 74

4.7. Estudio Preliminar en esponja homogénea: a) Imagen B-mode. b) Imagen de ASE. c) Coeficiente de determinación para cada píxel de la imagen utilizando el modelo KV-KV. d) Coeficiente de determinación para cada píxel de la imagen utilizando el modelo KV-KVC. 77

4.8. Estudio Versatilidad de esponja homogénea con inclusión rígida: a) Imagen B-mode. b) Imagen de ASE. c) Coeficiente de Correlación para la imagen completa. d) Evolución temporal de la deformación axial para la región dentro de la inclusión, afuera de la inclusión y en la interfaz esponja homogénea-inclusión. e) y f) Coeficiente de determinación para cada píxel de la imagen utilizando el modelo Bimodal Kelvin-Voigt Simple y Bimodal Kelvin-Voigt Continuo, respectivamente. 81

4.9. Estudio Versatilidad de esponja homogénea con inclusión rígida: a) y b) Variación de los factores de amplitud G_1 y G_2 del modelo bimodal Kelvin-Voigt simple para cada píxel, respectivamente. c) y d) Variación de los tiempos característicos τ_1 y τ_2 del modelo bimodal Kelvin-Voigt simple para cada píxel, respectivamente. 83

Índice de tablas

3.1. Propiedades físicas del poliuretano	33
4.1. Parámetros algoritmo utilizados en el Estudio No Restrictivo de Ajuste de Modelos.	60
4.2. Parámetros algoritmo LM utilizados en el estudio	63
4.3. Parámetros algoritmo utilizados en cada estudio estudio	66
4.4. Valores del costo computacional (CPUTime) para el ajuste de la imagen completa, el porcentaje de píxeles con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ y el coeficiente de determinación promedio para los píxeles con $r^2 \geq 0,95$ para el ajuste de los modelos KV-KV y KV-KVC en el caso de una esponja homogénea en ensayos de fluencia.	78
4.5. Valores del costo computacional (CPUTime) para el ajuste de la imagen completa, porcentaje de píxeles con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ y el coeficiente de determinación promedio para los píxeles con $r^2 \geq 0,95$ para el ajuste de los modelos KV-KV y KV-KVC, respectivamente, en el caso de una esponja con una inclusión rígida en ensayos de fluencia.	82

Capítulo 1

Introducción

La elastografía ultrasonora [1] es una técnica imaginológica que permite detectar defectos patológicos en tejidos blandos a través de la visualización de algunas características mecánicas. En la práctica clínica, la elastografía estándar, se refiere usualmente a los elastogramas de la deformación axial (Axial Strain Elastogram, ASE), que son las imágenes de la componente del tensor de deformación a lo largo del eje de isonificación del transductor [2] (dirección axial, eje de propagación del haz ultrasónico). La ASE ha mostrado ser una herramienta muy útil en una gran variedad de aplicaciones clínicas tales como la detección de tumores en tejidos mamarios y próstata [3, 4, 5, 6], el monitoreo de la terapia de ultrasonido de alta intensidad focalizado (High Intensity Focused Ultrasound, HIFU) en la próstata [7], clasificación de tumores en la tiroides [8, 9], caracterización de nódulos linfáticos [10], monitoreo de ablación termal [11, 12, 13] y en la caracterización de la placa intravascular [14]. En todas estas aplicaciones, las imágenes ASE son calculadas desde señales ultrasónicas (señal de radio frecuencia (RF-data) o de los datos de la envolvente) a través del seguimiento del desplazamiento axial inducido en los tejidos cuando pequeñas compresiones cuasi-estáticas unidireccionales son generadas por la sonda de ultrasonido en sí misma, por la pulsación cardíaca u otro dispositivo. La aplicación de pequeñas compresiones y la suposición de que los tejidos se compor-

tan como sólidos elásticos lineales son cruciales para relacionar los cambios locales en la imagen ASE con la distribución de la dureza del tejido [15, 16]. Sin embargo, el comportamiento mecánico de los tejidos es más complejo, y de este modo, nuevas técnicas elastográficas han sido propuestas [17, 18, 19] , a fin de obtener imágenes con propiedades mecánicas adicionales de los tejidos relacionados con su comportamiento temporal.

Las técnicas de imagenología poroelastográfica y de viscoelasticidad, son nuevas modalidades elastográficas donde materiales poroelásticos pueden ser descritos a través de modelos poroelásticos y viscoelásticos, respectivamente [20, 17, 21, 22, 23, 24]. En ambos casos, la deformación inducida sobre el material puede ser producida por diferentes protocolos mecánicos, tales como, los ensayos de fluencia (deformación - relajación) y Tensión - relajación [20, 25, 26], o por la aplicación de una vibración sinusoidal de baja frecuencia [27]. Particularmente la poroelastografía puede ser usada en tejidos que contienen fluido en su interior y con algún mecanismo de movilidad (permeabilidad). Aquí, la evolución temporal de las imágenes de deformación permite generar nuevos tipos de elastogramas, los cuales incluyen el elastograma de relación efectiva de Poisson (EPR), el elastograma de la constante de tiempo de deformación axial (TC) y el elastograma de permeabilidad [17, 18, 19]. El uso de estos elastogramas tiene la virtud de que se obtiene nueva información, que puede tener relevancia clínica en el diagnóstico del estado de algunas enfermedades, como por ejemplo, del linfedema. En efecto, la factibilidad del uso de la evolución temporal de los elastogramas EPR para diferenciar entre tejidos normales y linfomatosos, ha sido demostrada en estudios *in-vivo*[28]. También se ha demostrado que la adición de propiedades viscoelásticas, mejora la caracterización de lesiones en los tejidos mamarios [29]. Por otro lado, se sabe que el crecimiento de tumores puede ser modelado como un mecanismo de difusión de fluido [30, 31], la incorporación de esta información podría ser útil para el diagnóstico de la fase de desarrollo en que se encuentra un cáncer en el organismo .

En poroelastografía la aplicación de modelos mecánicos a la secuencia temporal de las imágenes de EPR o ASE permite generar los respectivos elastogramas TC cuando los tejidos son sometidos a una aplicación de compresión constante (stress-relaxation) o esfuerzo constante (creep), respectivamente. Los elastogramas TC son estimados usando técnicas de ajuste de curvas sobre datos temporales píxel por píxel [18, 28, 26]. Se han propuesto diferentes modelos poroelásticos teóricos y aplicados a ambos protocolos [32, 33, 34, 35, 36], sin embargo, estos modelos son inadecuados para aplicaciones *in-vivo*. En particular, la teoría poroelástica bifásica lineal de Kuei, Lai y Mow (KLM) [34] predice muy bien la dependencia temporal de la deformación radial o axial de los materiales poroelásticos bajo compresión no confinada [35] (Riguetti et al. 2005b ; Berry et al. 2006). La teoría poroelástica lineal KLM ha demostrado ser muy útil para desarrollar simulaciones numéricas [22, 36] y también para describir algunos experimentos *in-vitro* [18, 35], sin embargo, su complejidad matemática hace difícil su uso para describir datos elastográficos *in-vivo*. Modelos exponenciales han sido propuestos para estimar los elastogramas TC en condiciones clínicas [18, 26]. Aunque estos modelos fenomenológicos no son completamente descriptivos de la física presente en estos fenómenos, su simplicidad ha hecho posible su aplicación eficiente y precisa en un amplio espectro de materiales bajo condiciones ruidosas, aspecto relevante para aplicaciones clínicas [28, 26]. Los análisis de desempeño en términos de exactitud, precisión, sensibilidad, proporción señal-ruido (Signal to Noise ratio, SNR) y velocidad de cálculo, han mostrado que estos modelos pueden producir una alta exactitud y sensibilidad en los elastogramas TC en tiempo real con altos niveles de SNR [26].

En este trabajo se diseñó un experimento *in-vitro* para realizar ensayos de fluencia bajo condiciones controladas y así obtener curvas temporales de ASE con alta precisión. Se utilizaron esponjas de poliuretano saturadas con agua, como muestras poroelástica que permiten la posibilidad de controlar la permeabilidad (densidad de poros y viscosidad del fluido con que es saturada). Se utilizó como método de

ajuste de los modelos utilizados (reológicos y bifásico KLM) el algoritmo Levenberg-Marquardt, ya que es un método híbrido que se adapta para garantizar la convergencia de los modelos (minimización cuadrática de la suma de residuos). Primero se realizó un estudio en donde los parámetros del algoritmo Levenberg-Marquardt no tienen restricciones dando plena libertad para realizar el ajuste de todos los modelos, con la finalidad de eliminar los modelos menos eficientes (bajo coeficiente de determinación y alto costo computacional). Se prosiguió con un estudio comparativo, en donde se compara la eficiencia de varios modelos reológicos para un conjunto de parámetros del algoritmo Levenberg-Marquardt, que restringen la convergencia de los modelos con la finalidad de determinar el modelo más eficiente. Luego se realizó un estudio paramétrico para determinar si una selección adecuada de los parámetros del algoritmo Levenberg-Marquardt puede aumentar aún más la eficiencia en el ajuste de los modelos. Usando este estudio se propuso un esquema de ajuste píxel por píxel, en donde se reduce el error relativo inicial utilizando la estimación precedente (actualización de parámetros) y se aumenta la eficiencia del ajuste manipulando adecuadamente los parámetros del algoritmo Levenberg-Marquardt. El método de ajuste es probado en un esponja uniforme como un estudio preliminar del método de ajuste y luego en una esponja con una inclusión de alta densidad de poros a fin de probar la versatilidad (capacidad de adaptación) de los modelos ante cambios drásticos en las propiedades mecánicas del material poroelástico.

1.1. Objetivo General

Encontrar un modelo reológico que describa con alta precisión la evolución temporal de las imágenes ASE (parámetro de ajuste) en un tiempo de cálculo mínimo, que sea robusto a los parámetros del método de ajuste (baja sensibilidad ante la variación de estos parámetros) y versátil ante las heterogeneidades presentes en el

material poroelástico (esponjas de poliuretano) en ensayos de fluencia.

1.2. Objetivos Específicos

_ Comparar los modelos reológicos con el modelo KLM (teoría bifásica de poroelasticidad) en su descripción del comportamiento mecánico temporal de muestras poroelásticas en ensayos de fluencia.

_ Evaluar la eficiencia (proporción entre el coeficiente de determinación y el costo computacional) de modelos reológicos al ser aplicados al comportamiento mecánico temporal de muestras poroelásticas en ensayos de fluencia.

_ Evaluar la factibilidad de aumentar la eficiencia de ajuste de los modelos reológicos mediante la manipulación de los parámetros relacionados con los criterios de detención (g_{min} y δp_{min}) del algoritmo Levenberg-Marquardt.

_ Generar un esquema de programación en Matlab que realice ajuste de curvas píxel por píxel en imágenes ASE .

_ Evaluar la versatilidad de modelos reológicos ante cambios drásticos de las propiedades mecánicas del material poroelástico en ensayos de fluencia.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Poroelasticidad

2.1.1. Introducción

La poroelasticidad estudia el comportamiento mecánico de materiales que contienen pequeñas cavidades (poros) ocupadas por algún tipo de fluido. A raíz de problemas de mecánica de suelos la poroelasticidad tuvo un desarrollo importante desde inicios del siglo XX, especialmente con los trabajos emprendidos en la Universidad de Viena por Terzaghi y Fillünger, descritos en detalle en un artículo de De Boer [37]. Una definición adecuada para un medio poroso puede ser encontrada en Bear [38, 39]. Ahí es definido como ” *Una porción de espacio ocupado por un número de fases cualquiera, de donde al menos una de ellas es sólida, y para la cual un elemento de volumen representativo (EVR) puede ser definido*”. En un sentido más general, es un sólido que contiene muchos espacios vacíos, de los cuales varios de ellos están interconectados, y si esta interconexión ocurre con relativa frecuencia dentro del mismo, se le puede definir como un medio poroso [40]. Un elemento de volumen representativo (EVR) consiste en una n -ésima fracción de volumen del material que contiene la cantidad suficiente de espacio vacío tal que su volumen promedio de

poros es aproximadamente similar para cada fracción de volumen (límite estable). Esta condición se requiere para superar la dificultad de la heterogeneidad del medio y ser consistentes con la aproximación clásica al continuo. Todas las variables básicas de la poroelasticidad están promediadas sobre un EVR y pueden ser divididas en 2 grupos: un grupo tensorial, el esfuerzo y la deformación (tensores simétricos de segundo orden) y un grupo escalar, la presión de poros y el cambio de contenido de fluido en los poros (con respecto al estado inicial). El cambio de contenido de fluido y la deformación son considerados como variables poroelásticas "cinemáticas", ya que están relacionadas con el proceso de movimiento, mientras que el esfuerzo y la presión de poros son considerados como variables poroelásticas "dinámicas" ya que están relacionadas con las fuerzas causales del movimiento producido.

2.1.2. Ecuaciones constitutivas

En el caso general, las ecuaciones constitutivas son un conjunto de 7 ecuaciones lineales, en la que hay un total de 4 parámetros elásticos independientes. En 3 de estas ecuaciones se relacionan las componentes normales del esfuerzo con las de la deformación. En otras 3 se relacionan las componentes de deformación de corte con las de esfuerzo de corte. Y en la séptima ecuación, el cambio de contenido de fluido está relacionado con el esfuerzo aplicado y la presión de poros. Una expresión lineal e isotrópica de la deformación ε_{ij} en función del esfuerzo aplicado total σ_{ij} y la presión de poros p fue dada por Biot [41] como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{2G} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} + \frac{2G}{3} \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{\kappa} \right) \right) p \delta_{ij} \quad (2.1)$$

donde G es el módulo de corte (shear), ν es el coeficiente de Poisson, κ es el módulo de Bulk y H el módulo de Biot. Tanto G , ν y κ están definidos en la condición de drenado (p es constante, por lo que el fluido es forzado a fluir dentro y/o fuera del elemento deformado de manera tal que p permanezca constante), mientras que la condición opuesta es la condición de "no drenado" (p cambia para compensar el

efecto del esfuerzo aplicado, por lo que el fluido se ve limitado de seguir fluyendo en el elemento deformado). Se puede modificar la ecuación 2.1, de manera de introducir un término que de cuenta de la variación del volumen de fluido dentro de un EVR, en la condición de drenado, como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} + \left(\frac{1}{9\kappa} - \frac{1}{6G}\right)\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{\alpha}{3\kappa}p\delta_{ij} \quad (2.2)$$

donde α es el coeficiente de volumen de fluido ganado (o perdido) en un elemento de material debido a un cambio en el volumen del elemento cuando se aplica un esfuerzo bajo la condición de drenado. La ecuación 2.2 representa un conjunto de 6 ecuaciones de las 7 ecuaciones poroelásticas constitutivas. En la séptima ecuación se utiliza la notación utilizada por Rice y Clearly [42], la que expresa el cambio de contenido de fluido como δm , donde δ indica pequeñas variaciones del contenido de fluido debido a la deformación elástica. La masa de fluido contenido está dado por:

$$m = \frac{M_f}{V} = \rho_f \frac{V_f}{V} = \rho_f \phi \quad (2.3)$$

donde M_f es la masa de fluido contenido en el material poroso, que en condiciones sin esfuerzo aplicado podría ocupar un volumen equivalente V , ρ_f es la densidad del fluido, V_f es el volumen de fluido y ϕ es la porosidad del material, por lo que el cambio de contenido de fluido, δm , puede ser expresado como:

$$\delta m = \rho_f \alpha \left(\text{Tr}(\varepsilon_{ij}) + \frac{\alpha}{\kappa_U - \kappa} p \right) \quad (2.4)$$

donde la traza de ε_{ij} (tensor deformación) representa el cambio fraccional de volumen y κ_U es el módulo de Bulk en la condición de no drenado.

2.1.3. Ecuaciones Gobernantes

Para un medio poroso lleno de un fluido y totalmente saturado el esfuerzo aplicado (6 de sus componentes), el desplazamiento (3 de sus componentes), la presión de poros y el cambio de contenido de fluido son las variables básicas de las ecuaciones gobernantes. De estas variables básicas se tienen 11 incógnitas que deben ser

determinadas por el conjunto de 7 ecuaciones constitutivas junto con un conjunto de 3 ecuaciones de equilibrio de fuerzas y la ecuación de difusión de presión no homogénea, obtenida mediante la combinación la Ley de Darcy con la ecuación de conservación de masa de fluido. En la sección anterior ya se presentaron el conjunto de 7 ecuaciones constitutivas (ecuación 2.2 y 2.4). Las ecuaciones de equilibrio pueden ser escritas como un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales parciales de las componentes de desplazamiento, u_1 , u_2 y u_3 y la presión de poros, p [43]:

$$(\kappa + G) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + G \nabla^2 u_j - \alpha \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 ; \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

donde las componentes del tensor de deformación son expresadas como una función de las componentes de desplazamiento. La ley de Darcy, que describe como un fluido se filtra a través de un medio poroso, se puede expresar como [44]:

$$q_i = -\frac{K}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.6)$$

donde q_i es la velocidad media de flujo del fluido, K es la conductividad hidráulica (que depende de la permeabilidad del medio) y μ_f es la viscosidad del fluido. Por otro lado, la conservación de masa requiere que:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\rho_f q_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\delta m)}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

donde δm representa el cambio de masa del contenido de fluido. Reemplazando 2.4 en 2.7 y combinando la ecuación 2.6 con 2.7, se obtiene que :

$$-\frac{K}{\mu_f} \nabla^2 p + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\alpha}{\kappa_U - \kappa} p \right) = 0 \quad (2.8)$$

Se puede apreciar que la ecuación 2.5 y 2.8 están acopladas ya que la presión de poros aparece en la ecuación de equilibrio y la deformación volumétrica (o el esfuerzo aplicado promedio) aparece en la ecuación de flujo neto del fluido. Estas ecuaciones acopladas representadas por la interacción entre la condición de equilibrio de fuerzas y la condición de conservación de flujo neto de fluido, son el fundamento de la teoría

de la poroelasticidad [44].

La resolución de problemas poroelásticos lineales requiere de que sean dadas las condiciones iniciales, las condiciones de borde, y además de que el equilibrio mecánico y la conservación de masa del fluido sean satisfechas simultáneamente. A estos problemas se les conoce como "elastoestáticos". La condición de elastoestática significa que si el esfuerzo (o la presión del fluido) es aplicado, el desplazamiento y la presión de poros instantáneamente se ajustan de tal manera que el equilibrio de la fuerza interna se mantiene (condición de drenado y no drenado). Bajo esta condición, la dependencia temporal de la difusión del fluido está determinada solamente por los efectos de retardo de la permeabilidad del medio (viscosidad efectiva y densidad de poros)[44].

Obtener soluciones de las ecuaciones gobernantes de la teoría de la poroelasticidad es muy dificultoso. Hasta ahora sólo se han encontrado soluciones para casos de geometrías específicas y con condiciones de borde restrictivas, como por ejemplo, la deformación uni-axial, plano de deformación o simetría radial . Sin embargo, se ha observado que las ecuaciones de campo poroelásticas tienen una forma similar a las ecuaciones de termoplaticidad [44]. Por lo tanto, bajo ciertas condiciones las soluciones de problemas termoplásticos podrían coincidir con problemas poroelásticos [45].

2.2. Teoría Bifásica de Poroelasticidad

2.2.1. Introducción

A partir de la formulación del capítulo anterior se pueden reescribir las ecuaciones constitutivas de una manera equivalente, pero ahora considerando el material compuesto por una fase sólida y varias fases de fluido, cada una independiente de la otra. Esta aproximación es la base de la teoría bifásica de poroelasticidad desarrollada por Truesdell y Toupin [46], Torzilli y Mow [47], Mow[48] y Bowen [49, 50]. En

la teoría de mezclas de medios continuos, las ecuaciones de la mecánica de medio continuos son aplicadas a cada fase por separado, como si estuviesen actuando por si solas, para luego introducir términos adicionales que describen la interacción entre las fases. La teoría bifásica es un caso particular de la teoría de mezclas, ya que consta sólo de una fase sólida y una fase de un fluido. En ésta teoría se supone que la "mezcla" (la que es considerada inmisible) está compuesta por una matriz sólida elástica lineal llena de un fluido incompresible (debido a la condición de equilibrio de fuerzas interna y la conservación de flujo de fluido), en condiciones isotérmicas; en donde además se suponen pequeños desplazamientos y una velocidad de flujo del fluido reducida durante el movimiento.

2.2.2. Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones de movimiento para cada fase y la de la mezcla son derivadas del Principio de Hamilton para procesos no conservativos y de la resistencia de roce-disipación. El movimiento relativo es considerado introduciendo un término lineal de difusión-disipación. Además se utiliza la Ley de Darcy (donde la deformación de la matriz de poros no tiene una mayor relevancia y el transporte de fluido ocurre como una consecuencia de un gradiente de presión directa y de las ecuaciones de consolidación de Biot), donde la causa principal del flujo de fluido es la dilatación de la matriz sólida [47]. Se define $\vec{v}(r, t)$ como la velocidad del fluido, $\vec{u}(r, t)$ como el vector de desplazamiento y $\tilde{\phi}$ como la fracción de volumen de fluido. Suponiendo que ambas fases (sólido y fluido) tienen el mismo volumen específico, se tiene que:

$$\frac{\tilde{\rho}_S}{1 - \tilde{\phi}} = \frac{\tilde{\rho}_F}{\tilde{\phi}} \quad (2.9)$$

donde $\tilde{\rho}_S$ y $\tilde{\rho}_F$ son la densidad de masa de sólido y de fluido respectivamente. De la conservación de masa, tenemos que:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\phi} \vec{v}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left((1 - \tilde{\phi}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \quad (2.11)$$

Restando ecuación 2.10 y 2.11 se obtiene la ecuación de continuidad dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\tilde{\phi} \vec{v} + (1 - \tilde{\phi}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] = 0 \quad (2.12)$$

El movimiento relativo entre las fases (sólida y fluido) es descrita por la generalización de la Ley de Darcy:

$$\tilde{\phi} \left(\vec{v} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\tilde{K} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} \quad (2.13)$$

donde \tilde{K} , \vec{v} y \vec{u} son la conductividad hidráulica, velocidad y desplazamiento promedio del material,. El balance de momentum para el material, bajo la hipótesis de que es despreciable la inercia (debido a que la deformación ocurre lentamente) está dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad (2.14)$$

donde $\vec{\tau}$ representa el tensor de esfuerzo efectivo aplicado. De la suposición de que la matriz sólida se comporta como un material elástico lineal en el límite de pequeñas deformaciones , el campo de velocidad promedio es irrotacional (debido a que el campo de velocidad de la matriz sólida está en la misma dirección que el campo de deformación en el límite de pequeñas deformaciones) y la ecuación constitutiva está dada por:

$$\vec{\tau} = -\vec{p}I + \tilde{\lambda} \vec{\epsilon}I + 2\vec{\epsilon} \tilde{\mu} \quad (2.15)$$

donde $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$ son los parámetros de Lamé de la matriz sólida. Además :

$$\vec{\epsilon} = Tr(\vec{\epsilon}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (2.16)$$

Y $\vec{\epsilon}$ es el tensor de deformación, definido como:

$$\vec{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T \right) \quad (2.17)$$

De las ecuaciones 2.12 y 2.13 tenemos :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\tilde{K} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.18)$$

Suponiendo que \tilde{K} es independiente de la deformación del material (depende de la permeabilidad del material) y reemplazando las ecuaciones 2.14 y 2.15 en la ecuación 2.18, tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t} - \tilde{K} (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \nabla^2 \vec{\varepsilon} = 0 \quad (2.19)$$

La ecuación 2.19 describe la variación temporal de la dilatación del material (velocidad de deformación) debido a la percolación ¹ del fluido a través de éste. Este fenómeno dependerá de la conductividad hidráulica promedio del material \tilde{K} , y de los parámetros elásticos promedio de la matriz sólida ($\tilde{\mu}$ y $\tilde{\lambda}$).

2.2.3. Aplicación en Biomecánica

2.2.3.1. Introducción

Se puede considerar que la teoría bifásica de poroelasticidad se incorporó a la biomecánica a raíz de un artículo de Torzilli y Mow [47] quienes tomaron elementos teóricos ampliamente utilizados en la mecánica de suelos para el análisis de pruebas de esfuerzo constante (ensayos de fluencia) y relajación en muestras de cartílago articular y denominaron el material poroelástico como material *bifásico*. Desde el trabajo de Torzilli y Mow [47] se han realizado muchas investigaciones para utilizar la teoría bifásica en la descripción del comportamiento mecánico de los tejidos biológicos como el cartílago articular [34, 51], tendones y huesos [52, 53, 54], el espacio intersticial [36] y tumores sólidos [30]. En la siguiente sección se presenta la descripción bifásica del comportamiento mecánico de tejidos biológicos.

¹Percolación: Proceso mediante el cual un fluido se filtra en un medio poroso

2.2.3.2. Ecuaciones Constitutivas

Los tejidos biológicos como los órganos del cuerpo, pueden ser subdivididos en 3 compartimentos o partes: vascular, celular y espacio intersticial-linfático [33, 55]. La cantidad relativa de cada uno de estos compartimentos varía de órgano a órgano tanto como dentro de la misma clase de órgano. El espacio vascular es típicamente un pequeño porcentaje del volumen total. El diámetro de los capilares linfáticos y sanguíneos generalmente varía entre 5 y 20[μm] [55] y la distancia entre capilares es del orden de los 100[μm] [55]. El espacio entre los capilares sanguíneos es ocupado por la matriz intersticial (espacio intercelular), que conecta las paredes de los capilares con la membrana de las células y está predominantemente compuesta por colágeno y fibra de elastina. Dispersa dentro de esta red están los constituyentes macromoleculares como el hialuronato, proteoglicanos y agua en forma de un gel hidrofílico [33, 55, 48]. Se considera el espacio celular, vascular e intersticial como un continuo, con una fase sólida deformable saturada con una fase de fluido consistente en agua y los constituyentes macromoleculares. Además se supone que sólo el fluido intersticial puede fluir libremente (flujo intercapilar) y que el volumen celular se mantiene constante. Con todas estas consideraciones tenemos que la ecuación 2.10 cambia a la forma de:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\phi} \vec{v}) + \Omega(r, t) \quad (2.20)$$

donde $\Omega(r, t)$ da cuenta del flujo neto entre capilares y se supone que está relacionado con la presión transmural promedio. $\Omega(r, t)$ está definido por :

$$\Omega(r, t) = \tilde{\varphi}_V - \tilde{\varphi}_L = \frac{\tilde{L}_p S}{V} (\tilde{p}_v - \tilde{p}) - \frac{\tilde{L}_{pL} S_L}{V} (\tilde{p} - \tilde{p}_L) \quad (2.21)$$

donde $\tilde{\varphi}_V$ y $\tilde{\varphi}_L$ representan el flujo transcapilar y el drenaje linfático, respectivamente; \tilde{L}_p y \tilde{L}_{pL} son el coeficiente de conductividad hidráulica promedio del capilar sanguíneo y de las paredes linfáticas; $\frac{S}{V}$ y $\frac{S_L}{V}$ son la densidad de superficie del capilar sanguíneo y linfático del tejido biológico (área (S) por unidad de volumen(V)) ; $\tilde{p}_v = \tilde{p}_C - \sigma(\tilde{\pi}_C - \tilde{\pi}_i)$ es la presión de capilares sanguíneos efectiva; \tilde{p}_C y \tilde{p}_L son

la presión de capilares sanguíneos y linfática promedio; y \tilde{p} es la presión de fluido intersticial promedio. Los parámetros $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\pi}_C$ y $\tilde{\pi}_i$, son, respectivamente, el coeficiente de reflexión osmótica del plasma de proteínas, la presión osmótica coloidal del plasma de proteínas, la presión osmótica coloidal del fluido intersticial. También la ecuación 2.12 y 2.18 son transformadas a:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\tilde{\phi} \vec{v} + (1 - \tilde{\phi}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] = \Omega(r, t) \quad (2.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\tilde{K} \nabla \tilde{p} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = \Omega(r, t) \quad (2.23)$$

Por lo tanto, la ecuación 2.19 se transforma en:

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t} - \tilde{K}(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \nabla^2 \vec{\varepsilon} = \Omega(r, t) \quad (2.24)$$

El lado izquierdo, al igual que en la ecuación 2.19, describe la dilatación (evolución temporal de la deformación), en este caso, del tejido debido a la percolación del fluido a través del mismo. El lado derecho es un término introducido en la teoría bifásica aplicada a tejidos biológicos que da cuenta del intercambio de fluido transcapilar.

Esta última ecuación tiene una estructura similar a la ecuación de difusión en una reacción química: el producto $\tilde{K}(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})$ representa un coeficiente de *Pseudodifusión*. En analogía a un proceso de difusión - reacción, la redistribución transitoria de fluido intersticial en el tejido puede ocurrir por 2 mecanismos: a través de un mecanismo de percolación en el intersticio o el intercambio de fluido transcapilar.

2.2.3.3. Ensayo de Fluencia No Confinado

La configuración experimental fue diseñada para realizar ensayos de fluencia no confinados bajo condiciones ideales, esto es, la aplicación de un esfuerzo uniforme en la dirección lateral $\sigma(x, y) = \sigma(y)$, una difusión del líquido a través de la dirección

lateral (superficies superior e inferior, de la placa de compresión de la muestra, impermeables), y una baja fricción en la superficie superior e inferior de la muestra con la placa de compresión (ver figura 2.1). Estas condiciones permiten utilizar la solución particular de la Teoría Bifásica KLM (desarrollada por Kuei, Lai y Mow [48]) para el caso de un cartílago articular (se supone geometría cilíndrica) [34]. En ese caso se tiene que el esfuerzo total en el tejido se puede descomponer en la contribución de la matriz sólida y del fluido, de donde tenemos que la ecuación 2.15 se transforma en:

$$\vec{\sigma} = (1 + \alpha)PI + \lambda_s eI + 2\mu_s \vec{\varepsilon} \quad (2.25)$$

donde I es la matriz identidad, α la razón entre el volumen de la matriz sólida y el fluido intersticial, λ_s y μ_s son los parámetros de Lamé, e es la traza del tensor de esfuerzo, $\vec{\varepsilon}$ es el tensor deformación y P es la presión ejercida sobre el fluido. Considerando el sistema en estado cuasi-estático, suponiendo que tanto la matriz sólida como el líquido intersticial son incompresibles (ya que la compresión de la matriz sólida se debe principalmente a la exudación del líquido intersticial) y que la matriz sólida ya se encuentra saturada, por lo que no hay variación del flujo (el fluido que entra en la matriz sale en la misma cantidad). Además, en $r = 0$ no hay desplazamiento de la matriz sólida y en $r = a$ no hay esfuerzo, junto con la existencia de simetría azimutal, la exudación es la misma en todas las direcciones, podemos determinar la deformación de la muestra en el tiempo en coordenadas cilíndricas [34], la que está dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_s} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1 - \nu_s^2)(1 - 2\nu_s)e^{-\beta_n^2 \frac{H_A k_h t}{a^2}}}{9\beta_n^2(1 - \nu_s)^2 - 8(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \right) \quad (2.26)$$

donde $\sigma_0 = \sigma(L)$ es el esfuerzo constante aplicado (L es la longitud de la muestra), a es el radio de la muestra, $k_h = \frac{1}{K(1+\gamma)^2}$ es la permeabilidad (K es la conductividad hidráulica y γ es la fracción de volumen sólido-fluido), $H_A = \lambda_s + 2\nu_s = \frac{E_s(1+\nu_s)}{((1+\nu)(1-2\nu_s))}$ es el módulo de compresión confinada, E_s es el modulo de Young's y ν_s es el coeficiente de Poisson de la fase sólida. Los coeficientes β_n son las raíces de la

ecuación característica 2.27

$$J_0(x) - \frac{4(1 - 2\nu_s)J_1(x)}{3(1 - \nu_s)x} = 0 \quad (2.27)$$

Este modelo describe la evolución temporal de la deformación axial para un material poroelástico homogéneo en términos de su permeabilidad k_h , la que controla el mecanismo de difusión del líquido a través de la matriz sólida. Al aplicar el esfuerzo constante instantáneo, el líquido no alcanza a fluir (el fluido es incompresible, respuesta elástica instantánea), por lo tanto, estamos en la condición de no drenado. En la condición de no drenado el material se deforma como un sólido, en ese caso la presión de poros aumenta para compensar el esfuerzo aplicado, luego el fluido comienza a difundir (exudación) y la presión de poros se mantiene constante (condición de drenado), este proceso inicialmente es rápido debido al alto contenido de líquido que satura la matriz sólida, sin embargo, después de un tiempo comienza a disminuir su velocidad de flujo (ya que la presión interna debe ser constante) para tender a un comportamiento como un sólido (líquido completamente exudado), por lo que se cree que este proceso sería caracterizado de manera más adecuada como un comportamiento viscoelástico con dos tiempos característicos (bimodal).

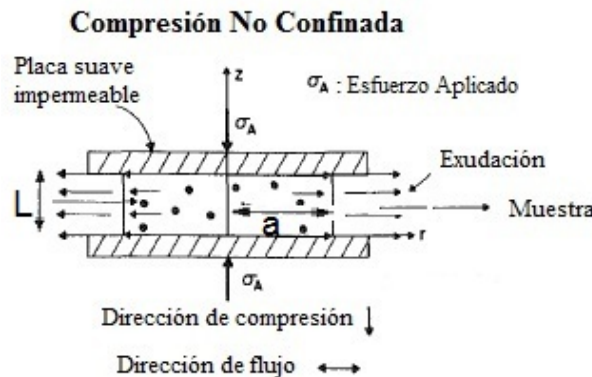


Figura 2.1: Configuración Compresión No Confinada

La mayor limitación de la teoría bifásica es su dominio restringido a casos particulares de sólidos homogéneos e isotrópicos y su aplicación en condiciones clínicas

(experimentos " *In vivo* ") es prácticamente nula debido a que las condiciones iniciales y de borde que ésta requiere no son satisfechas en este tipo de experimentos, por lo que para aplicar la Teoría Bifásica KLM se utilizan generalmente métodos numéricos de elementos finitos [56, 36, 22]. Para describir el comportamiento mecánico de tejidos biológicos es común utilizar modelos reológicos, ya que la generalidad de su formulación lo hacen ser más versátiles de manera que pueden ser aplicados a cualquier tipo de geometría y bajo cualquier tipo de condiciones tanto iniciales como de borde. A pesar que estos modelos no poseen una formulación a partir de principios básicos en donde se consideren las propiedades microestructurales de los tejidos biológicos, las ventajas antes mencionadas hacen posible que estos modelos puedan ser aplicados en condiciones clínicas.

2.3. Modelos Reológicos

2.3.1. Introducción

Los modelos reológicos han sido utilizados para describir la deformación viscoelástica de los tejidos biológicos [33, 55, 57, 58, 59] debido a su generalidad y carencia de condiciones de borde.

Se sabe que un sólido ideal se deforma elásticamente y la energía requerida para la deformación se recupera en su totalidad cuando se retira el esfuerzo aplicado. Por otro lado, los fluidos ideales se deforman irreversiblemente (fluyen) y la energía requerida para la deformación se disipa en el interior del fluido en forma de calor y no se puede recuperar al retirar el esfuerzo. Sin embargo, los materiales reales, tanto fluidos como sólidos, en general muestran un comportamiento que se clasifica en una región intermedia entre los fluidos y los sólidos ideales: son a la vez elásticos y viscosos, por lo que se les denomina *viscoelásticos* ". El tipo de modelos utilizados para describir la evolución temporal de este tipo de materiales se les denomina *modelos reológicos*", mediante la colocación de las células viscoelásticas orientadas

a lo largo de diferentes direcciones (modelos tridimensionales) [59]. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales viscoelásticas que definen estos modelos se pueden resolver sólo numéricamente limitando su aplicación práctica.

En la poroelastografía, la baja resolución lateral de estas imágenes hace que sea aún menos práctica la aplicación de modelos reológicos bidimensionales ($2D$). Debido a esta razón, en el presente trabajo se utilizaron modelos reológicos unidimensionales ($1D$) para describir el comportamiento temporal local de datos de muestras poroelásticas en ensayos de fluencia utilizando imágenes ultrasónicas de ASE. La solución analítica de la ecuación diferencial de modelos reológicos unidimensionales que describen la configuración en ensayos de fluencia es relativamente simple de obtener, por lo que son candidatos ideales para ser utilizados en aplicaciones clínicas.

2.3.2. Modelo de Kelvin-Voigt

Existen materiales que tienen un comportamiento mecánico temporal que puede ser descrito por un resorte y un amortiguador que están unidos en paralelo. A esta configuración se le conoce como *Modelo de Kelvin – Voigt*, el que describe la deformación de un material sólido [33, 55], la cual está representada en la Figura 2.2.

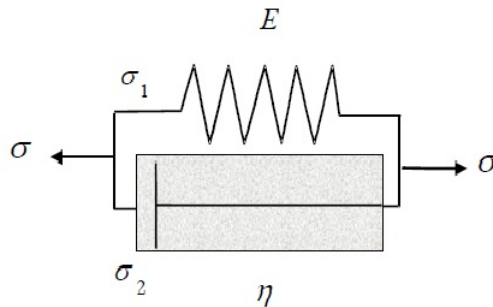


Figura 2.2: Configuración Modelo Kelvin-Voigt

En este caso la deformación experimentada tanto por el resorte como por el

amortiguador es la misma. Debido a ello, tenemos que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} \quad (2.28)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (2.29)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.30)$$

donde σ_1 y σ_2 son los esfuerzos a los que están sometidos el resorte y el amortiguador, respectivamente. Eliminando σ_1 y σ_2 de las ecuaciones 2.28 y 2.29, tenemos que:

$$\sigma = E\varepsilon + \dot{\varepsilon}\eta \quad (2.31)$$

Al aplicar un esfuerzo repentino a esta configuración, el resorte no se deformara de manera instantánea, debido a la acción del amortiguador. Como el resorte no cambia de longitud, el esfuerzo, inicialmente está presente sólo sobre el amortiguador. En ese caso la curva que describe la evolución temporal de un ensayo de fluencia comienza con una pendiente inicial $\frac{\sigma}{\eta}$. Al transcurrir el tiempo suficiente para que se desforme el amortiguador, y por ende también el resorte, parte del esfuerzo es transferido al resorte y la pendiente de la curva es $\frac{\sigma_2}{\eta}$; donde σ_2 es el esfuerzo aplicado sobre el resorte, el que es deformado encogiéndose. Cuando se llega al límite $\sigma_2 = 0$, el resorte es sometido al esfuerzo total y por lo tanto la deformación máxima está dada por $\frac{\sigma}{E}$. Resolviendo la ecuación diferencial no homogénea de primer orden 2.31, con la condición inicial $\varepsilon(t) = 0$, tenemos que:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{t_R}}\right); t_R = \frac{\eta}{E} \quad (2.32)$$

El parámetro t_R es llamado *tiempo de retardo* del sistema y es una medida del tiempo necesario para obtener la deformación la máxima; mientras más corto es el tiempo de retardo, más rápido ocurre la deformación. Cuando es retirado el esfuerzo, el resorte intenta volver inmediatamente a su estado inicial, pero nuevamente la acción del amortiguador impide esta reacción instantánea. Sin embargo, el resorte

”empuja” al amortiguador a volver al estado inicial, y luego de un tiempo dado ocurre una recuperación total del sistema. Si se retira el esfuerzo a un tiempo $t = \tau$, la ecuación constitutiva, con esfuerzo cero, se reduce a :

$$E\varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} = 0 \quad (2.33)$$

Resolviendo, se obtiene:

$$\varepsilon(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} ; \quad \tau = \frac{E}{\eta} \quad C = \text{constante} \quad (2.34)$$

Aquí t es una medida del tiempo desde que se removi6 el esfuerzo. Para tener una descripción completa desde que se aplico el esfuerzo, t debiera ser reemplazado por $t - \tau$, por lo que la deformación a $t = \tau$ es:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - e^{-(E/\eta)\tau}) \quad (2.35)$$

Usando la ecuación 2.17 como condición inicial para 2.16, tenemos que:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) ; \quad \tau = \frac{E}{\eta} \quad t > \tau \quad (2.36)$$

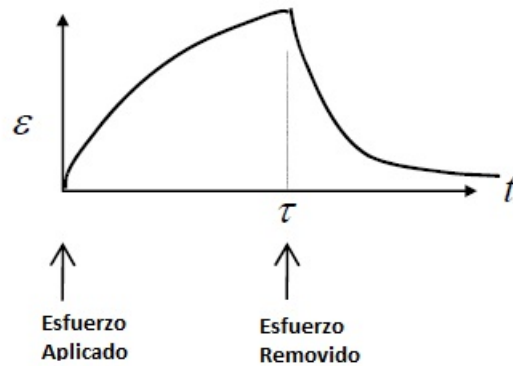


Figura 2.3: Evolución temporal del modelo Kelvin-Voigt ante un esfuerzo que es aplicado y luego retirado

En la Figura 2.3 se puede apreciar el comportamiento del sistema ante el esfuerzo aplicado y la recuperación del sistema cuando es retirado el esfuerzo, el que tiene un comportamiento viscoelástico.

2.3.3. Modelos de 3 elementos

El modelo Kelvin-Voigt está compuesto por 2 elementos, pero hay materiales con un comportamiento mecánico temporal que puede ser descrito más adecuadamente por modelos que posean una mayor cantidad de elementos. A continuación se describirán 2 modelos conformados por 3 elementos mecánicos.

2.3.3.1. Fluidos

Los fluidos tienen un comportamiento mecánico temporal que depende de su viscosidad. La ecuación constitutiva que describe el comportamiento de estos materiales cuando son sometidos a un esfuerzo o deformación tienen una estructura general dada por:

$$\sigma + A \cdot \dot{\sigma} = B \cdot \dot{\varepsilon} + C \cdot \ddot{\varepsilon} \quad (2.37)$$

donde A, B y C , son constantes que dependen de la configuración que describe al fluido. Aquí tenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea. Si a este modelo se le realizan ensayos de fluencia se tiene que 2.37 tiene la forma de:

$$\sigma = B \cdot \dot{\varepsilon} + C \cdot \ddot{\varepsilon} \quad (2.38a)$$

$$\frac{\sigma}{C} - \frac{B}{C} \cdot \dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} \quad (2.38b)$$

para resolver la ecuación 2.38b, primero se realiza un cambio de variable con el fin de reducir su orden (de segundo orden a primer orden), del que se obtiene:

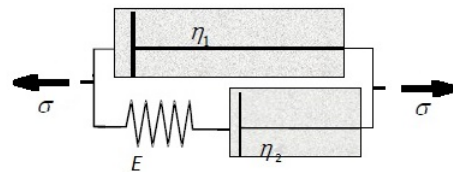
$$\frac{\sigma}{C} - \frac{B}{C} \cdot y = \dot{y} \quad ; \quad y = \dot{\varepsilon} \quad (2.39)$$

Resolviendo la ecuación 2.39, aplicando la condición de borde $y(0) = \dot{\varepsilon}(0) = 0$ se obtiene que :

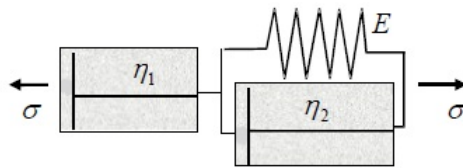
$$\varepsilon = \sigma \cdot G_1 \left(t - \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.40)$$

donde G_1 es una constante de Amplitud y τ es el " *tiempo de retardo* " y ambos dependen de la viscosidad del fluido y de la configuración que describe su comporta-

miento mecánico. Algunos modelos que describen el comportamiento de fluido son los mostrados en la figura 2.4a y 2.4b



(a) Configuración del Modelo Fluido tipo I



(b) Configuración modelo Fluido tipo II

Figura 2.4: Configuración de Modelos de Fluidos: a) Fluido tipo I, constituido por el modelo de Maxwell unido en paralelo a un amortiguador. b) Fluido tipo II, constituido por el modelo de Kelvin-Voigt unido en serie a un amortiguador.

Para el modelo de la figura 2.4a (que es el modelo al que se llamó Fluido tipo I''), la ecuación 2.38a tiene la forma de :

$$\sigma = (\eta_1 + \eta_2) \cdot \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{E} \right) \cdot \ddot{\varepsilon} \quad (2.41)$$

Y la ecuación 2.40 tiene la forma:

$$\frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \left(t + \tau e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right) = \varepsilon(t) \quad ; \quad \tau = \frac{\eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} \quad (2.42)$$

Y para el modelo de la figura 2.4b (que es el modelo al que se llamó Fluido tipo II'') la ecuación 2.38a tiene la forma de :

$$\sigma = \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{E} \right) \cdot \ddot{\varepsilon} \quad (2.43)$$

Y la ecuación 2.40 tiene la forma:

$$\frac{\sigma}{\eta_1} \cdot \left(t + \tau e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right) = \varepsilon(t) \quad ; \quad \tau = \frac{\eta_2}{E} \quad (2.44)$$

En ambos casos el comportamiento del fluido cuando es sometido a un esfuerzo y luego se le retira el esfuerzo aplicado es descrito por la figura 2.5. Se puede apreciar de la figura que la deformación toma lugar luego de transcurrido un tiempo, para luego llegar a una deformación máxima en el instante en que es retirado el esfuerzo, pero el fluido queda deformado de manera permanente, no teniendo la capacidad de volver a su estado inicial.

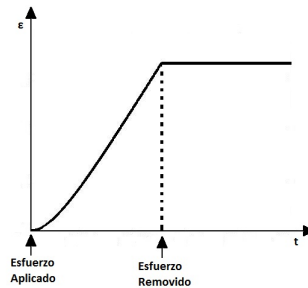


Figura 2.5: Comportamiento de un fluido al ser sometido a un esfuerzo, el que luego es retirado.

2.3.4. Modelos Bimodales

La apropiada selección del tipo de modelo a utilizar dependerá de la naturaleza del material bajo estudio, de manera que si la viscosidad predomina sobre la componente elástica se optaría por utilizar un modelo de Fluido. Sin embargo, si no se dispone de información previa sobre el posible comportamiento del material, es más adecuado utilizar una combinación lineal de los modelos descritos anteriormente. En este trabajo se utilizaron las siguientes combinaciones bimodales:

- Kelvin-Voigt - Kelvin-Voigt
- Kelvin-Voigt - Fluido

Debido a que ambos elementos están unidos en serie, la solución total del sistema es la suma de las soluciones de cada elemento por separado.

2.3.4.1. Celda Kelvin-Voigt Bimodal

Este modelo está compuesto por 2 celdas del modelo Kelvin-Voigt tal como se

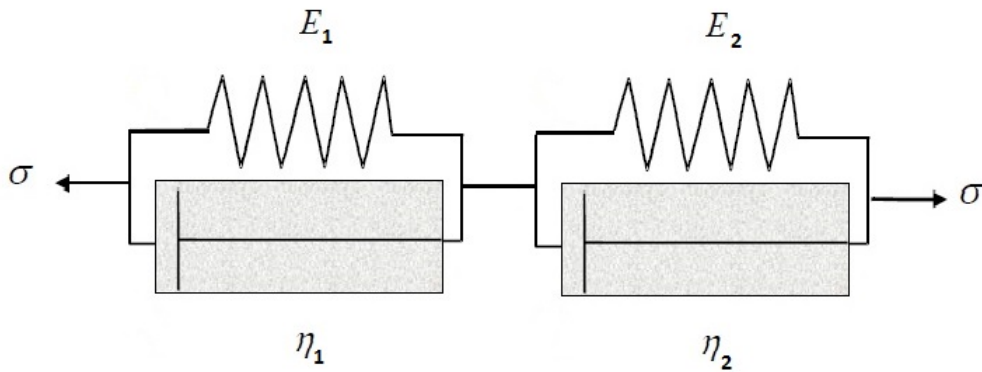


Figura 2.6: Configuración Modelo Kelvin-Voigt Bimodal

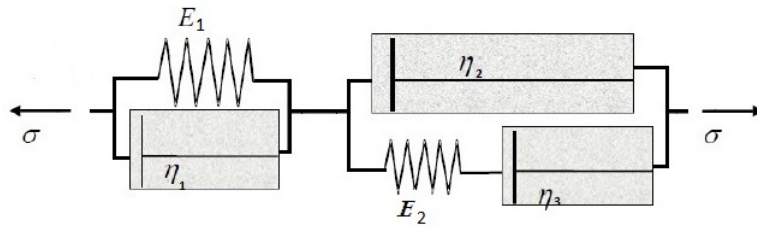
indica en la figura 2.6.

Para el caso de un ensayo de fluencia, tenemos que la deformación está dada por:

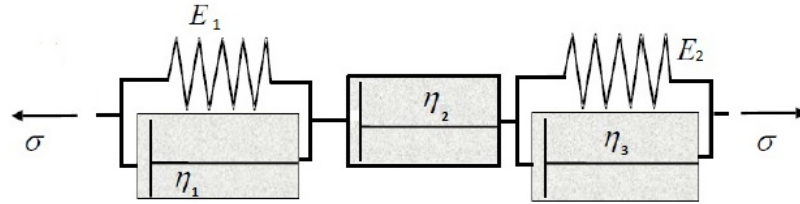
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{\sigma}{E_3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right); \quad \tau_1 = \frac{\eta_1}{E_2}; \quad \tau_2 = \frac{\eta_2}{E_2} \quad (2.45)$$

2.3.4.2. Kelvin-Voigt en serie con Fluido

Este modelo está compuesto por una celda del modelo Kelvin-Voigt unido en serie a una celda del modelo Fluido, ya sea tipo I o tipo II , esto último dependerá de la viscosidad del fluido. Las configuraciones en este caso están dadas por la figura 2.7a y 2.7b



(a) Configuración Modelo Kelvin-Voigt - Fluido tipo I



(b) Configuración Modelo Kelvin-Voigt - Fluido tipo II

Figura 2.7: Combinaciones de un material descrito por el modelo bimodal: a) Kelvin-Voigt - Fluido tipo I. b) Kelvin-Voigt - Fluido tipo II.

En ambos casos la ecuación que describe el comportamiento mecánico de estos materiales en un ensayo de fluencia está dada por :

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon + (E_1 + B) \cdot \dot{\varepsilon} + (\eta_1 + C) \cdot \ddot{\varepsilon} \quad (2.46)$$

donde $B = \eta_2 + \eta_3$, $C = \frac{\eta_2 \eta_3}{E_2}$ para el caso del Fluido tipo I y $B = \eta_2$, $C = \frac{\eta_2 \eta_3}{E_2}$ para el caso de Fluido tipo II. La deformación tiene un comportamiento temporal

descrito por la ecuación 2.47

$$\varepsilon = G_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + G_2 \cdot \left(t + \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) ; \quad \tau_1 = \frac{\eta_1}{E_2} ; \quad (2.47)$$

donde: $G_2 = \frac{\sigma}{\eta_2 + \eta_3}$; $\tau_2 = \frac{\eta_2 \cdot \eta_3}{E_2 \cdot (\eta_2 + \eta_3)}$, en el caso de que sea la configuración Sólido Zener - Fluido tipo I y $G_2 = \frac{1}{\eta_2}$; $\tau_2 = \frac{\eta_3}{E_2}$ en el caso de que sea una configuración Sólido Zener - Fluido tipo II. De la forma de G_2 se puede determinar que la diferencia entre ambas configuraciones de fluido radica en la viscosidad de éste. Pero en la práctica, sino se conoce los valores de la viscosidad, no se puede saber que tipo de configuración en particular se está utilizando, sólo se obtiene la forma de la solución general.

2.3.5. Modelos Continuos

Para el estudio del comportamiento mecánico de tejidos biológicos es necesario extender estos modelos hacia el continuo debido a que ciertos tejido biológicos , como el mesenterio ^{2 3} , en ensayos de relajación o de fluencia, no pueden ser descritos de manera acabada si no se supone una extensión de los modelos reológicos al continuo ⁴. Esto quiere decir que cada uno de los modelos se replica un gran número de veces donde se unen todos en serie. Para ello se consideró una distribución normal de celda viscoelásticas.

²mesenterio:Repliegue del peritoneo, formado principalmente por tejido conjuntivo que une el estómago y el intestino con las paredes abdominales.

³<http://dicciomed.eusal.es/palabra/mesenterio>

⁴Y.C. Fung. Biomechanics:Mechanical Properties of living Tissues.Second edition.pag.46

2.3.5.1. Kelvin-Voigt

La configuración de este modelo al llevarlo al continuo es descrito por la figura 2.8.

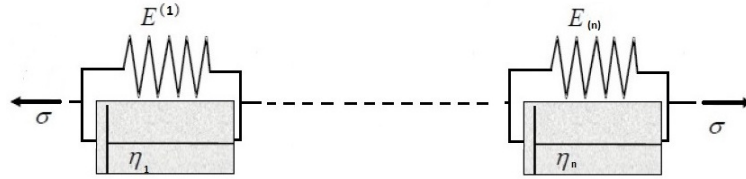


Figura 2.8: Modelo Kelvin-Voigt continuo

Por lo tanto, la deformación en un ensayo de fluencia, está dada por :

$$\varepsilon = G_1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\tau-\tau_1)^2}{2S_1^2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \quad (2.48)$$

donde G_1 es el coeficiente de amplitud y τ_1 es la constante de tiempo característico del modelo.

2.3.5.2. Kelvin-Voigt Bimodal

La configuración de este modelo al llevarlo al continuo es descrito por la figura 2.9.



Figura 2.9: Modelo Kelvin-Voigt Bimodal continuo

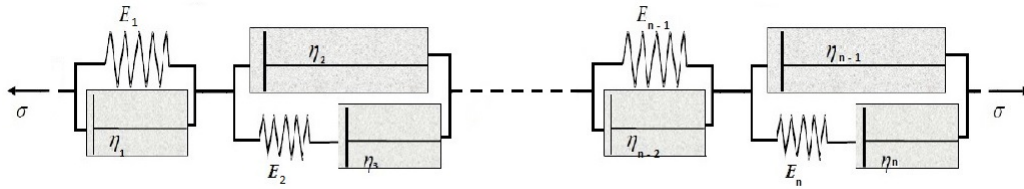
Por lo tanto, la deformación en un ensayo de fluencia esta dada por:

$$\varepsilon = G \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\tau-\tau_1)^2}{2S_1^2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau + \gamma \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\tau-\tau_2)^2}{2S_2^2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \right) \quad (2.49)$$

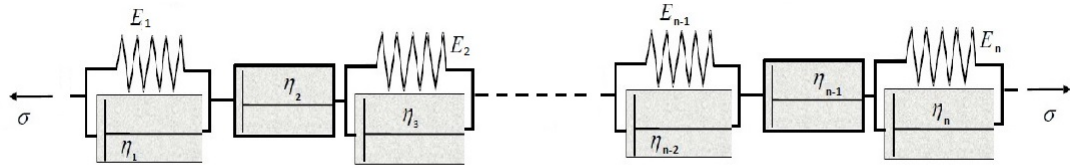
donde G y γ son los coeficientes de amplitud y tanto τ_1 como τ_2 son las constantes de tiempo característico del modelo.

2.3.5.3. Kelvin-Voigt con Fluido

Como se describió en el apartado anterior, la configuración de este modelo tiene dos opciones las que al llevarlas al continuo están descritas por la figura 2.10a y 2.10b.



(a) Modelo Kelvin-Voigt - Fluido tipo I continuo



(b) Modelo Kelvin-Voigt - Fluido tipo II continuo

Figura 2.10: Opciones de configuraciones a) Kelvin-Voigt - Fluido tipo I extendido al continuo. b) Kelvin-Voigt - Fluido tipo II extendido al continuo.

La deformación resultante en un ensayo de fluencia en la extensión del modelo al continuo, está dada por:

$$\varepsilon = \left(G_1 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(\tau-\tau_1)^2}{2S_1^2}} \cdot \left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right) d\tau + G_2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(\tau-\tau_2)^2}{2S_2^2}} \cdot \left(t + \tau e^{\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \right) \quad (2.50)$$

donde G_1 y G_2 son los coeficientes de amplitud y tanto τ_1 como τ_2 son las constantes de tiempo característico del modelo.

Hasta aquí se ha descrito la teoría de poroelasticidad, sus fundamentos, ecuaciones gobernantes y su reducido dominio de aplicaciones a geometrías puntuales. Se ha descrito de manera más profunda la teoría bifásica, que es un caso particular de la teoría poroelástica, de manera de formular las ecuaciones gobernantes cuando es aplicada a tejidos biológicos, junto con señalar las dificultades en su aplicación en experiencias clínicas. Y por último se han descrito una serie de modelos reológicos, los que por su naturaleza más genérica, son candidatos adecuados para aplicarlos en experiencias clínicas. Se han explicado el comportamiento de los modelos reológicos de Kelvin-Voigt, modelo de Fluido, junto con los modelos bimodales simples Kelvin-Voigt, y Kelvin-Voigt - Fluido y la correspondiente extensión al continuo de los modelos Kelvin-Voigt, Kelvin-Voigt Bimodal y Kelvin-Voigt - Fluido. Para los estudios realizados en este trabajo se utilizaron los siguientes modelos :

- Modelo Bifásico(KLM) : ecuación 2.24 .
- Modelo Unimodal Kelvin-Voigt simple(KV) : ecuación 2.36.
- Modelo Bimodal Kelvin-Voigt simple(KVKV): ecuación 2.45.
- Modelo Bimodal Kelvin-Voigt - Fluido simple(KVF): ecuación 2.47.
- Modelo Unimodal Kelvin-Voigt extensión al continuo(KVC): ecuación 2.48.
- Modelo Bimodal Kelvin-Voigt extensión al continuo(KVKVC): ecuación 2.49.
- Modelo Bimodal Kelvin-Voigt - Fluido extensión al continuo(KVFC): ecuación 2.50.

Capítulo 3

Materiales y Métodos

Al someter un material blando a un ensayo de fluencia se obtiene un comportamiento de tipo viscoelástico, el que es determinado a partir del monitoréo local de la evolución temporal de la deformación axial (imágenes elastográficas), la que es obtenida a través del procesamiento digital de imágenes ultrasónicas. Para realizar este tipo de estudios fue necesario desarrollar un montaje experimental que permitiese un control adecuado de las variables presentes en este tipo de ensayos, como también del proceso de adquisición de imágenes ultrasónicas. En este trabajo se utilizaron esponjas saturadas de líquidos como "phantoms" poroelásticos, a fin de simular el efecto de retención y exudación de líquidos que se da en los tejidos linfomatosos. El efecto en las propiedades poroelásticas de estos materiales es obtenido mediante la caracterización de las imágenes de deformación axial mediante el ajuste de los modelos reológicos descritos en el capítulo anterior. Para esto fue necesario utilizar un algoritmo de optimización (Levenberg-Marquadt) como herramienta de ajuste de datos. En este capítulo se describirá tanto las muestras poroelásticas, el sistema experimental desarrollado para ensayos de fluencia en materiales poroelásticos y los métodos numéricos utilizados tanto en el cálculo de las imágenes elastográficas como en el ajuste de los modelos.

3.1. Materiales Poroelásticos

3.1.1. Introducción

La biomécanica ha desarrollado materiales sintéticos, llamados *materiales biomiméticos*, los que permiten tanto a ingenieros como a científicos simular el comportamiento mecánico de ciertos tejidos biológicos sin la necesidad de realizar estudios *in vivo* y bajo condiciones experimentales controladas. En conjunto con el uso de herramientas de elementos finitos, FEM, este tipo de materiales ha permitido desarrollar nuevas técnicas de diagnóstico médico para ciertas patologías. El estudio de las propiedades mecánicas temporales en ensayos de fluencia de muestras poroelásticas se desarrolló en este trabajo con esponjas sintéticas de poliuretano, saturadas con agua, debido a que se puede controlar el parámetro de densidad de poros y la compresibilidad de la esponja.

3.1.2. Materiales Biomiméticos

3.1.2.1. Características generales

Las esponjas sintéticas se caracterizan por una estructura bifásica sólida-fluido. Las esponjas comunes son de poliestireno o poliuretano, aunque cualquier material termoplástico puede ser espumado. El poliuretano (PU) es un polímero que se obtiene mediante condensación de bases hidroxílicas combinadas con isocianatos. Los poliuretanos se clasifican según su estructura química y diferenciados por su comportamiento frente a la temperatura. Así se tiene el Poliuretano Termoestable y el Poliuretano Termoplástico, según si se degradan antes de fluir o si fluyen antes de degradarse, respectivamente ¹. Los poliuretanos termoestables más habituales son espumas, muy utilizadas como aislantes térmicos y como espumas resilientes. Entre los poliuretanos termoplásticos más habituales destacan los empleados en elastóme-

¹Hepburn, C. (1992). Polyurethane Elastomers. Elsevier.

ros, adhesivos selladores de alto rendimiento, suelas de calzado, pinturas, fibras textiles, sellantes, embalajes, juntas, preservativos, componentes de automóvil, en la industria de la construcción. En la tabla 3.1 se indican alguna propiedades físicas.

<i>Propiedades Físicas</i>	
Densidad	32-48 [kg/m ³]
Resistencia a compresión	1.5 - 9[kg/cm ²]
Resistencia tracción	2.5-10[kg/cm ²]
Conductividad térmica	0.02-0.03 [W/m·K]
Absorción de agua	400-600 [gr/m ²]

Tabla 3.1: Propiedades físicas del poliuretano

3.1.3. Tratamiento de Materiales Biomiméticos

Para desarrollar el trabajo aquí presentado, fue necesario *a)* cortar esponjas sintéticas, *b)* realizar un proceso de saturación de éstas con agua, *c)* caracterizar el tamaño de poros de las esponjas utilizadas, de manera de tener condiciones similares a las de los tejidos biológicos en el material efectivo (esponja + fluido).

3.1.3.1. Proceso de corte

Las esponjas fueron cortadas de manera de obtener dos tipos de muestras poroelásticas que simulen a dos tipos de tejidos. Los tipos de muestras poroelásticas obtenidas fueron:

- Muestra cilíndrica: Ésta muestra fue utilizada para simular un tejido blando homogéneo y fue obtenida cortando una esponja de poliuretano, con un saca bocado (cortador de esponjas de bronce, ver figura 3.1.a y 3.1.b) de manera de obtener la muestra poroelástica mostrada en la figura 3.1.c

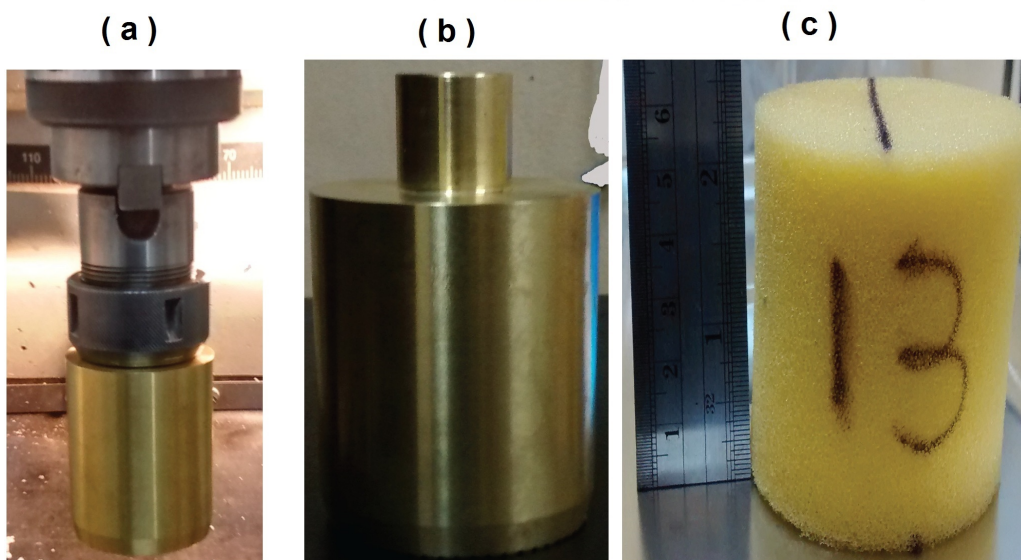


Figura 3.1: a) Vista frontal del saca bocado. b) Dispositivo de corte. c) Esponja homogénea cortada con el dispositivo de corte.

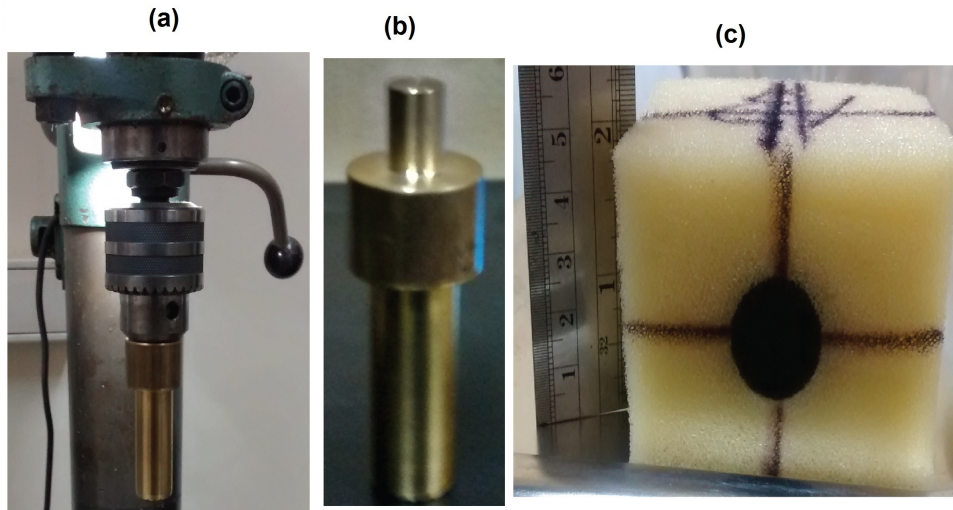


Figura 3.2: a) Dispositivo de corte de inclusiones. b) Vista frontal del saca bocado para inclusiones. c) Esponja homogénea con inclusión cilíndrica más rígida.

- Muestra rectangular con inclusión rígida: Ésta muestra fue utilizada para emular un tejido blando y homogéneo que en su centro tiene un tipo de tejido más rígido. La muestra poroelástica rectangular homogénea fue obtenida mediante la utilización de un bisturí para su corte, mientras que la inclusión cilíndrica más rígida (mayor densidad de poros) fue obtenida de la misma manera que la muestra poroelástica homogénea cilíndrica, utilizando el dispositivo de corte de esponjas cilíndricas. Para añadir la inclusión rígida a la muestra rectangular fue necesario sacar una porción de la muestra rectangular, con la misma forma que la inclusión cilíndrica rígida utilizando el dispositivo de corte de bronce (ver figura 3.2.a y 3.2.b) Esta muestra poroelástica es mostrada en la figura 3.2.c.

3.1.3.2. Proceso de saturación

Para obtener imágenes ultrasónicas de buena calidad fue necesario saturar las muestras poroelásticas con agua. Este proceso de saturación fue llevado a cabo utilizando una bomba de vacío marca *Hanning*, modelo *Trivac D2.5E*, con un volumen máximo de extracción por hora de $2,5[\frac{m^3}{h}]$ y una presión interna de $0,5[\mu bar]$. En este proceso primeramente se extrajo manualmente la mayor cantidad posible de aire de la muestra (apretándola contra la base de la cámara de acrílico) y luego se colocó al interior de la cúpula de vacío (figura 3.3) luego se presionó para asegurarse que la muestra no quedase flotando. Se debió verificar que la válvula de extracción de aire de la cúpula estuviese abierta. Luego se encendió la bomba de vacío y se debió cerrar suavemente la válvula de la cúpula de vacío para así evitar la subida abrupta de agua. Luego se dejó encendida la bomba aproximadamente $60[min]$ para que se saturase la muestra .

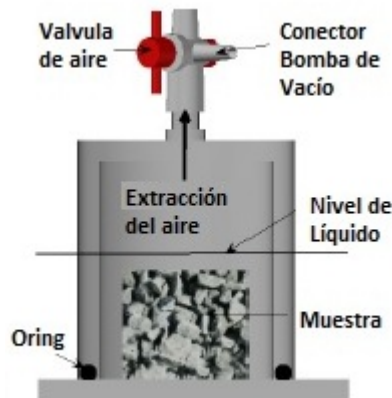


Figura 3.3: Cúpula de Vacío

3.2. Experimentos Poroelásticos

3.2.1. Imágenes Ultrasonicas

Cuando se utiliza un transductor ultrasónico con solo un elemento activo, se logra visualizar lo que le sucede a la onda durante su viaje por el medio. En dicha visualización de la señal se utiliza el modo escaneo de amplitud (modo A-Scan). En esta configuración los ecos de retorno se visualizan como una serie de picos en un gráfico de diferentes máximos en función del tiempo, donde mientras sea mayor la intensidad del sonido de retorno, mayor sera la amplitud del eco de retorno a esa profundidad. Los ecos de las zonas más profundas aparecen como deflexiones verticales cada vez más pequeñas a lo largo de la línea del osciloscopio, por lo que los ecos reflejados por las estructuras más profundas (interfaces, defectos, anomalías estructurales) son considerablemente más débiles que las estructuras más cercanas a la superficie de contacto con el transductor. La técnica ultrasónica de inspección de Pulso-Eco, es comúnmente utilizado como un método de imagineología médica, el que está basado en ondas reflejadas debido a inhomogeneidades existentes dentro de los tejidos biológicos, utilizando el modo A-Scan como método de visualización de dichas señales. De entre las técnicas que utilizan el método de inspección Pulso-Eco, la que tiene un uso extendido dentro de la imaginología médica, son las imágenes Modo escaneo de Brillo (Modo B-Scan). Aquí se utiliza un transductor que está formado por un arreglo de elementos piezoeléctricos. Las imágenes en este modo son realizadas por un haz ultrasónico pulsado con una corta duración temporal, donde los ecos resultantes son registrados en por elemento activo (piezoeléctrico) del transductor. Cada uno de estos ecos es visualizado como un punto brillante en una posición correspondiente con su tiempo de llegada. Este método está basado en que las interfaces entre distintos tejidos producen cambios abruptos de impedancia acústica, que generan reflexiones de las ondas transmitidas. Sin embargo, en el interior de los tejidos (órganos, huesos) existen variaciones locales de compresibilidad y

densidad, las que producen dispersión de las ondas acústicas, mientras las reflexiones especulares son de alta amplitud en relación con las ondas retrodispersadas, las que son muy sensibles a la orientación de la sonda. Por esta razón la imagen en modo B-Scan utiliza ambos tipos de información (reflexión y dispersión), en donde la escala logarítmica ayuda a realzar la amplitud de la componente dispersa [60]. El campo de dispersión y la señal recibida por el transductor puede ser descrita utilizando la respuesta de impulso espacial. La señal recibida por el transductor está dada por [61, 62]:

$$p_r(\vec{r}', t) = \nu_{pe}(t) \oplus f_m(\vec{r}') \oplus h_{pe}(\vec{r}', t) \quad (3.1)$$

donde \oplus denota la convolución espacial; ν_{pe} es el impulso del pulso-eco, el que incluye la excitación del transductor y la respuesta del impulso electromecánico durante la emisión y recepción del pulso; f_m representa las inhomogeneidades en el tejido debido a las variaciones en la densidad y de la velocidad de propagación de las perturbaciones, que dan lugar a la señal dispersada; h_{pe} modifica la respuesta espacial de impulso pulso-eco que se relaciona con la geometría del transductor a la extensión espacial del campo dispersado.

Para la formación de imágenes ultrasónicas es necesario incluir la mayor cantidad de fenómenos involucrados: el beamformer, la variación espacial de la función de dispersión de punto (PSF), el ángulo de inclinación del haz con respecto al objeto, la frecuencia de muestreo, interpolación de datos y por último, la presentación gráfica de todos los procesos anteriormente detallados. Las imágenes ultrasónicas son construidas desde una cantidad de líneas acústicas o vectores, usualmente organizados en un patrón secuencial. Aunque un vector acústico aparece como una línea delgada en la imagen después de la conversión a través de la detección de la envolvente en una línea de imagen, cada línea representa físicamente un registro de tiempo de las ondas dispersas tridimensionales de diferentes profundidades. Los pasos en el proceso de formación de la imagen son mostrados en la figura esquemática 3.4 [63], donde cada letra representa una etapa en el proceso de formación de la imagen.

- a) Un paquete de pulsos, que tiene una extensión tridimensional, viaja como un haz a través del eje z y cambia de forma de acuerdo a las características del campo de PSF.
- b) Después de la transmisión a lo largo del vector de la dirección del haz acústico, el pulso acústico es dispersado por una serie de objetos, donde cada uno está ubicado a una profundidad z_i y su tiempo de retardo correspondiente es z_i/c .
- c) Las porciones angulares de la serie de reflexiones son interceptadas por el receptor de pulso-eco del transductor. Cada eco tiene un tiempo de retardo aproximadamente igual a $2z_i/c$.
- d) Estas ondas interceptadas están integradas sobre la superficie del receptor del transductor con una apropiada ponderación y el tiempo de retardo es añadido para el enfoque y el formador de haz.
- e) La integración del paso anterior (d) reduce las señales de dispersión tridimensionales a un registro unidimensional del tiempo con longitud $2z_{max}/c$, donde z_{max} corresponde a la máxima profundidad de exploración seleccionada para la imagen.
- f) La envolvente es detectada desde el tiempo registrado.
- g) La amplitud de esta envolvente detectada desde el tiempo registrado es logarítmicamente comprimida y procesada no linealmente de manera que un gran rango dinámico de ecos débiles a fuertes puedan ser presentados en la misma imagen.
- h) Se repiten todos los pasos previos para las siguientes líneas hasta que la última línea de muestreo es completado.
- i) Las líneas de exploración son dispuestas geoméricamente.

- j) Una vez que se ha completado la secuencia de línea, todas las líneas son interpoladas para formar una imagen de pulso-eco de una serie de líneas.
- k) La imagen es convertida a un mapa de escala de grises para la presentación final.

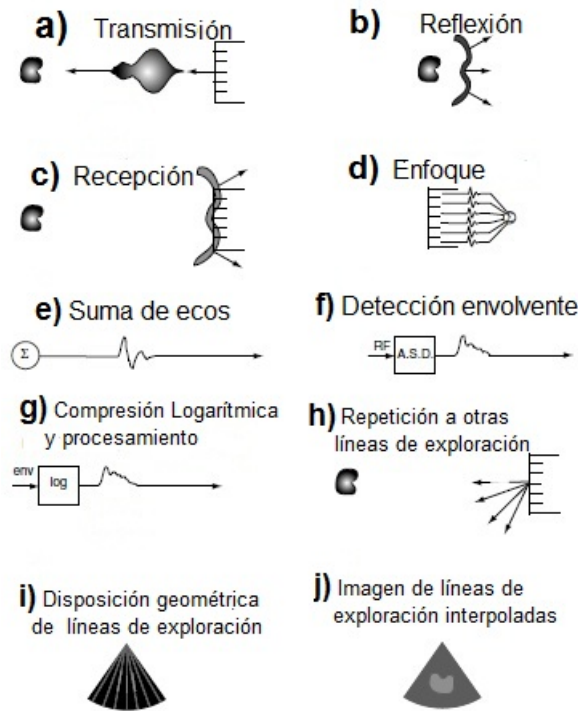


Figura 3.4: Esquema de procesamiento y formación de imágenes ultrasónicas (B-mode)

En las imágenes de B-mode se puede apreciar un patrón de textura, el que se asemeja mucho al fenómeno de speckle de un láser. Al igual que en óptica, a esta textura se le llama speckle, aunque su origen es por fenómenos distintos. El patrón de speckle ultrasónico es creado por el resultado de la interferencia de ondas de los ecos que llegan al transductor, dispersadas por estructuras en los tejidos y está relacionado con las propiedades propias del tejido como de las características del sistema que forma la imagen [64, 65, 66]. Además, varios esquemas se han implementado pa-

ra suavizar el patrón en el intento de mejorar la capacidad de la exploración para resolver pequeños objetos. En la figura 3.5, se presentan las señales RF de cada canal (figura 3.5.a), la envolvente de una de ellas (figura 3.5.b) y la imagen B-Mode de las señales (figura 3.5.c)

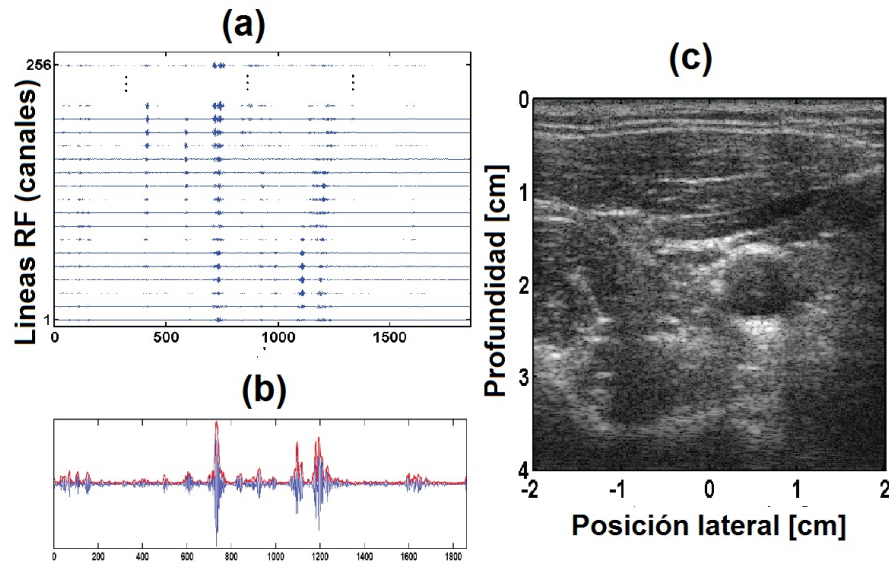


Figura 3.5: a) Las señales RF de cada canal. b) La envolvente de una de las señales. c) B-Mode de la señales obtenidas con su patrón de speckles.

Los conocimientos actuales indican que el patrón de speckle de los tejidos está determinado por la micro-estructura del tejido, las características del dispositivo de imagen, tal como la frecuencia, el ancho de banda del pulso ultrasónico, la frecuencia de respuesta del transductor, el sistema electrónico del dispositivo de imagen y de las propiedades acústicas del tejido. Tanto en simulaciones computacionales como en experimentos se ha demostrado que los ecos parecen asemejarse al speckle óptico resultante de la interferencia aleatoria, pero hay embebido en la señal aleatoria una componente coherente [64, 65]. Sin embargo, aún hay una diferencia más fundamental entre el speckle óptico y ultrasónico, es que las señales ultrasónicas utilizadas en los sistemas de formación de imágenes sólo son parcialmente coherentes a diferencia

del caso óptico, de modo que el patrón de speckle ultrasónico contiene información relacionada con la estructura del tejido [65, 67].

3.2.2. Elastografía y Poroelastografía

Las imágenes ultrasónicas B-mode, si bien son una excelente herramienta para examinar tejidos, tiene una pobre calidad a la hora de distinguir características mecánicas, como la dureza del tejido. Tejidos como los tumores, hígado cirrótico o el crecimiento anormal de tejidos, pueden ser invisibles en una imagen ultrasónica B-mode típica.

Sarvazyan [68] sugirió que un alto contraste podría ser obtenido utilizando ondas de corte (shear waves), sin embargo, tanto la transducción de la ondas de corte como las pérdidas debido a la absorción de las ondas, demostraron ser unas barreras difíciles de superar [68]. A raíz de esto, se comenzó a estudiar y utilizar las características elásticas del tejido con lo que se inició el uso de la elastografía como método de imágenes ultrasónicas para exploración de tejidos.

La elastografía permite mapear los parámetros elásticos locales por métodos ultrasónicos de ecografía [2, 69, 70, 71]. Esta técnica, consiste en estimar la deformación local instantánea del material, a través de la medición del desplazamiento causado ya sea por una deformación cuasi estática o dinámica, deducida del desfase de la señal rf, durante la compresión instantánea del material, con la que forma una imagen de amplitud de deformación. Matemáticamente, este fenómeno es descrito por la Ley de Hooke, que relaciona el vector de esfuerzo con el vector de deformación y la matriz de modulo elástico. Las componentes del vector de deformación son combinaciones de las derivadas espaciales de los desplazamiento en las diferentes direcciones, y además tanto el vector de deformación como el de esfuerzo están relacionados con una matriz de 6×6 del modulo elástico del tejido.

La poroelastografía es una técnica, que al igual que la elastografía, estima las deformaciones locales instantáneas, a través del desplazamiento causado por una

deformación cuasi-estática, de un material poroelástico.

3.2.3. Ensayos de Fluencia

Para realizar los ensayos de fluencia asistidos por elastografía ultrasónica se desarrolló el montaje mostrado en la figura 3.6. Este consiste de una cámara de acrílico, en la que se vierte un líquido (agua destilada o una mezcla agua-glicerina) a temperatura ambiente. Dentro de esta cámara se coloca una muestra poroelástica biomimética (una esponja de poliuretano saturada con el líquido), situada verticalmente entre la sonda ultrasónica (Terason 12L5-V) y el dispositivo de carga. La sonda ultrasónica es un arreglo lineal de cristales piezoeléctricos de 4[cm] de longitud, con un rango de frecuencia de 5 a 12[MHz] y que es usado comúnmente para visualización en modo brillo (B-mode) en aplicaciones médicas, como por ejemplo, ecografías. Por otro lado, el dispositivo de carga, que es el encargado de realizar el esfuerzo sobre la muestra, consiste de una placa de compresión (área 75 [cm²]) unida a la plataforma de carga (las cargas aplicadas varían entre: 200[gr] y 600[gr]) por un eje lineal, el que es guiado verticalmente por un dispositivo de rodamiento lineal y que permite el alineamiento con el haz ultrasónico (eje axial). Un cilindro de posición ajustable es situado entre la plataforma de carga y la placa de compresión para poder fijar la posición inicial de la placa de compresión (pre-compresión) con el fin de evitar cualquier desplazamiento lateral de la muestra. El dispositivo de carga dispone de 2 solenoides (Shenzhen Zonhen Electric Appliances Co.,Ltd) colocados horizontal y simétricamente respecto a la barra, que mantienen bloqueado el dispositivo de carga. El proceso de liberación de la carga es realizado por un sistema de 2 relés MCI-MA-0064 (MCI Electronics) controlados simultáneamente por una plataforma Olimexino-3285 (Olimex Ltd). Esta plataforma electrónica es conectada vía USB a la máquina de adquisición de imágenes ultrasónicas (Terason T3000 Advanced), en donde un programa implementado en Matlab es usado tanto para controlar el software de adquisición de imágenes ultrasónicas así como para liberar la carga. Para

esto último se utilizaron las librerías del paquete de desarrollo de software (SDK) adquirida en conjunto con la máquina ultrasónica, el cual permite tanto desarrollar nuevas aplicaciones como controlar el software de adquisición ya disponible. Las imágenes ultrasónicas son adquiridas por alrededor de 60 minutos a una frecuencia de muestreo decreciente, para permitir el monitoreo de los cambios rápidos iniciales que tienen lugar durante la aplicación de la carga (deformación elástica) y evitando a la vez la saturación de la memoria del computador. El tipo de imágenes adquiridas son un arreglo de señales de radio frecuencia (señal RF), disponibles a la salida de haz y encriptadas en formato $\ddot{U}LT$, el que es importado en Matlab utilizando el software $ULT2Matlab$ (software incluido con el equipo de la sonda ultrasónica).

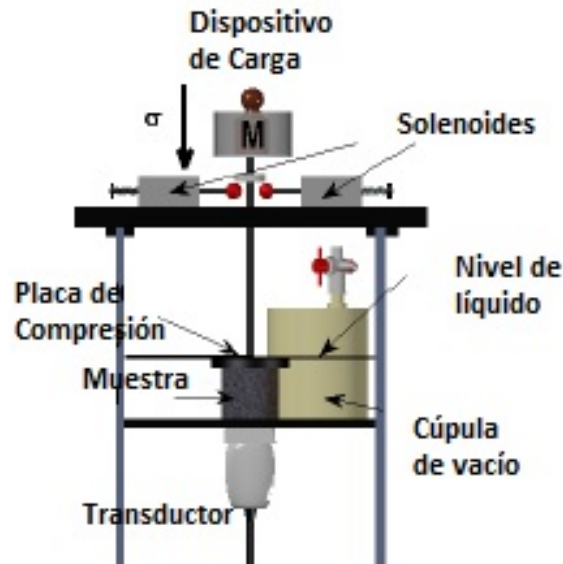


Figura 3.6: Configuración experimental: (a) Diagrama del montaje. b) Cúpula de vacío.

3.3. Métodos Numéricos

3.3.1. Introducción

Para el procesamiento de las imágenes ultrasónicas obtenidas se utilizaron 2 métodos, el algoritmo Multilevel Piramidal de Búsqueda Bidimensional de Desplazamiento (Multilevel, coarse-to-fine, 2D block-matching) y el algoritmo de Estimación Escalonada de la Deformación (Staggered Strain Estimation, SSE). El primer método se utilizó ya que permite determinar el desplazamiento bidimensional de imágenes obtenidas bajo condiciones ruidosas (reales) con alta precisión y con un costo computacional mínimo. El segundo método se utilizó para evitar la amplificación del ruido inducido por la derivada numérica al momento de calcular la deformación. Una vez obtenidas las imágenes elastográficas (deformación axial) en función del tiempo del ensayo de fluencia, se aplicó a cada pixel el método de Levenberg-Marquadt para el ajuste de los modelos reológicos descritos en el capítulo anterior.

3.3.2. Algoritmo Multi-niveles Piramidal de Búsqueda Bidimensional de Desplazamiento.

Los campos de desplazamiento axial y lateral, así como el coeficiente de correlación (parámetro de calidad de la estimación) son estimados mediante la aplicación del algoritmo Multi-niveles piramidal de búsqueda bidimensional de desplazamiento, descrito previamente por Thittai en [72], y donde el esquema del programa es mostrado en la figura 3.7. Éste es similar al presentado en la literatura [73, 74, 75]. La principal diferencia radica en el uso de la suma de la diferencia cuadrática (SSD) como una medida de similitud, seguido del uso de la correlación cruzada (CC) alrededor de la posición estimada por el SSD. La razón de esto es obtener resultados precisos (CC) con un costo computacional reducido (SSD). En la figura 3.7 [72], se muestra un diagrama esquemático del algoritmo.

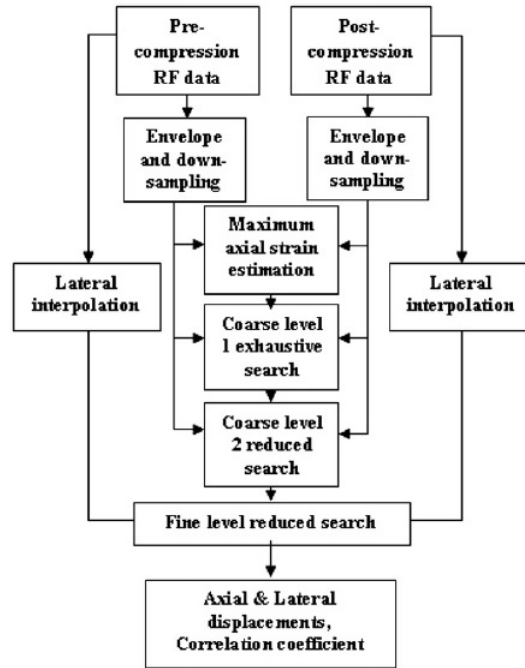


Figura 3.7: Diagrama esquemático algoritmo de seguimiento Multilevel piramidal de búsqueda bidimensional de desplazamiento .

Este algoritmo de construcción piramidal está compuesto de diversas etapas o niveles (figura 3.8), en donde en cada una se obtiene una estimación más precisa con respecto a la etapa anterior. L_{max} representa el número total de etapas, siendo en este caso $L_{max} = 3$. En el primer nivel ($L = 0$), se determina la deformación máxima y la dirección de la deformación aplicada, es decir, si es relajación (desplazamiento positivo) o si es una compresión (desplazamiento negativo). Para ello se divide la imagen de B-Mode (envolvente de las señales RF) en 9 ventanas, sin superposición entre ellas y solo se utiliza la SSD como medida de similitud ya que no se requiere una alta precisión. Las etapas de $L = 1$ y L_2 , corresponden a niveles gruesos de búsqueda (Coarse level), en donde se utiliza la imagen B-Mode, debido a que es menos sensible al aliasing. En la segmentación de la imagen no se utiliza traslape entre ventanas y el tamaño de éstas se reduce gradualmente de un nivel a otro a fin de aumentar

la resolución. El nivel $L = 1$ (exhaustive search), utiliza una búsqueda exhaustiva alrededor de la posición inicial de cada ventana (x_0, y_0) , en donde el tamaño de la región de búsqueda es definido por la deformación máxima determinada en el nivel $L = 0$. La etapa $L = 2$, corresponde a un nivel de búsqueda reducida (reduced search), en donde la región de búsqueda es centrada alrededor de la posición de cada ventana estimada mediante la interpolación de los campos de desplazamientos del nivel precedente $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. El tamaño de la zona de búsqueda es pequeño en comparación con el usado en la búsqueda exhaustiva. En la última etapa, L_3 , el nivel fino de búsqueda (fine level), se utilizan ventanas pequeñas con traslape tanto axial como lateral para tener una imagen de alta resolución y se utiliza el arreglo de señales RF. La estimación de los desplazamientos es realizada aplicando directamente la CC en una zona de búsqueda reducida (6X6 pixeles) centrada en la posición estimada en el nivel precedente (similar a los nivel $L = 1$ a L_2). En todos los procesos, se utiliza el coeficiente de correlación como un filtro para evitar el uso de estimaciones de calidad inferior. El algoritmo fue implementado en Matlab, pero para mejorar la velocidad de cálculo, las sub-rutinas de SSD y CC, éstas fueron implementadas en lenguaje C y compiladas en Matlab como una función ejecutable (MEX). Para esto se utilizó un conjunto de librerías definidas en la función MEX para desarrollar la API (interfaz) adecuada para la comunicación entre C y Matlab. Las imágenes de desplazamiento fueron calculadas de forma relativa para evitar cualquier decorrelación debido a la deformación inicial. Después del procedimiento de cálculo del desplazamiento, las imágenes ASE (elastogramas de la deformación axial) del desplazamiento axial acumulativo son generadas por la estimación escalonada de la deformación (Staggered Strain) originalmente propuesto por Srinivasan [76].

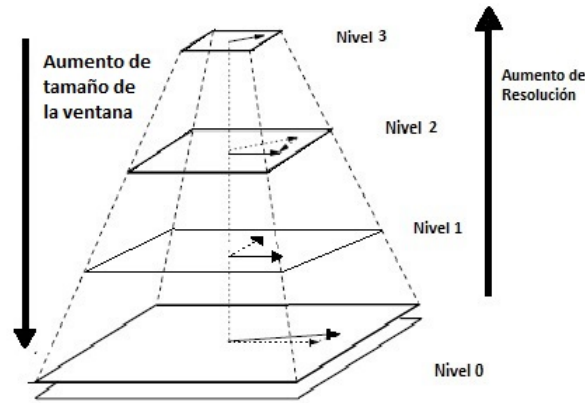


Figura 3.8: Diagrama del aumento de resolución y tamaño de la ventana de búsqueda

3.3.3. Estimación Escalonada de la Deformación

Las técnicas convencionales en elastografía estiman la deformación como el gradiente de los desplazamiento estimados obtenidos a través de correlación cruzada de ventanas bidimensionales en pre y post compresión [76]. En estas técnicas, los desplazamientos son estimados sobre ventanas superpuestas y las deformaciones como el gradiente de los desplazamientos sobre las ventanas adyacentes.

La gran cantidad de ruido en las ventanas con alta superposición podría resultar en una pobre calidad del elastograma, por lo que restringe la aplicabilidad de estas técnicas de estimación de deformación a ventanas con baja superposición, las que a veces, resultan en imágenes con pocos píxeles. En este tipo de técnicas convencionales, el tamaño de la ventanas (W) y la separación espacial de las ventanas adyacentes (ΔW) son parámetros algorítmicos que influyen en la calidad de las estimación de la deformación. Para superar estas limitaciones, se propone una técnica de estimación de la deformación en multi-etapas [76].

3.3.3.1. Técnica

Las ventanas son secuencialmente desplazadas por una distancia ΔW (que es igual al tamaño deseado del píxel del elastograma) sin superposición entre ellas y son utilizadas para estimar la deformación a través de una serie de pasos. El proceso de desplazamiento de ventanas es realizado hasta que el desplazamiento acumulado es igual o superior al tamaño de la ventana. Para estimar la deformación, primero las ventanas sin superposición y de longitud W , son utilizadas para obtener un conjunto de deformaciones estimadas, representadas por $S_1^1, S_2^1, S_3^1 \dots$, en la etapa 1 de la figura 3.9 [76]. Estas deformaciones son obtenidas como los gradientes de los desplazamientos estimados, representados por $d_{w1}^1, d_{w2}^1, d_{w3}^1, \dots$, en la etapa 1 de la figura 3.9. Luego las ventanas son desplazadas una distancia ΔW (que es igual al tamaño deseado del píxel del elastograma) y se obtiene un conjunto de deformaciones estimadas, representadas por $S_1^2, S_2^2, S_3^2, \dots$, en la etapa 2 de la figura 3.9. Este proceso es repetido hasta que la distancia desplazada de cada ventana es igual o superior W . Las deformaciones estimadas para todos los desplazamientos son escalonadas, es decir, ordenadas como $S_1^1, S_1^2, S_1^3, \dots, S_1^n$, seguido por $S_2^1, S_2^2, S_2^3, \dots, S_2^n$ y así sucesivamente hasta $S_n^1, S_n^2, S_n^3, \dots, S_n^n$ (donde $n =$ número de etapas), lo que produce el elastograma final, tal como se muestra en la figura 3.10 [76].

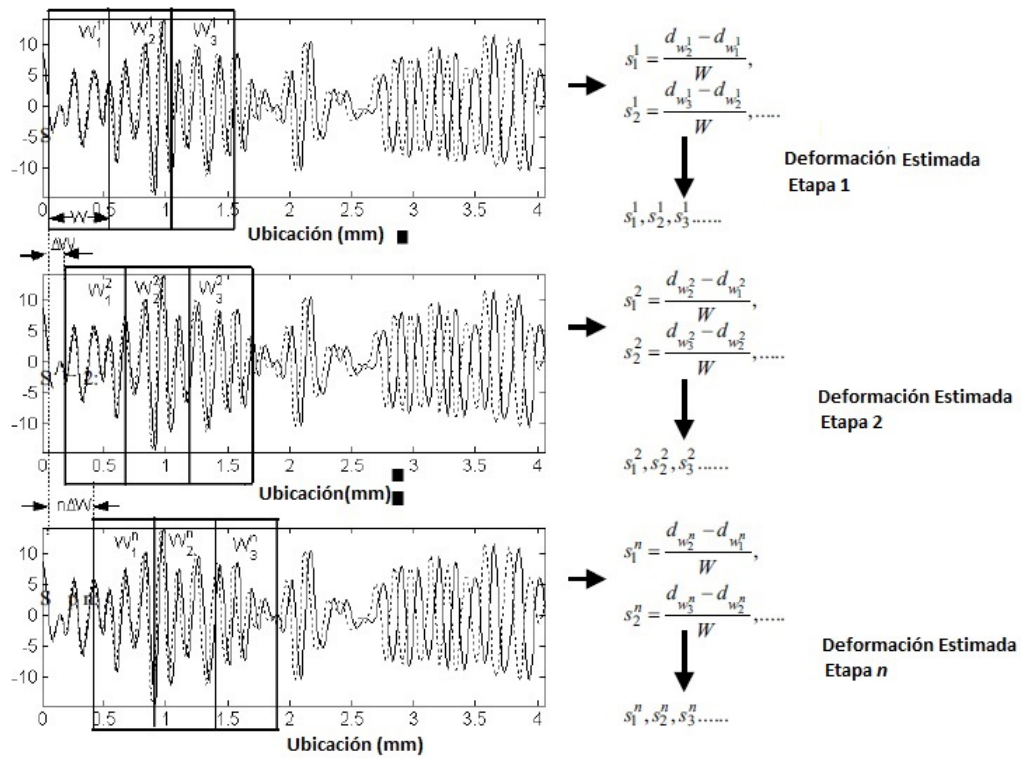


Figura 3.9: Estimación de la deformación por etapas.

Se puede incrementar el número de píxeles en el elastograma mediante una simple interpolación de la deformación estimada obtenida, utilizando correlación cruzada pero con ventanas sin superposición, aunque esto no agrega más información en el elastograma.

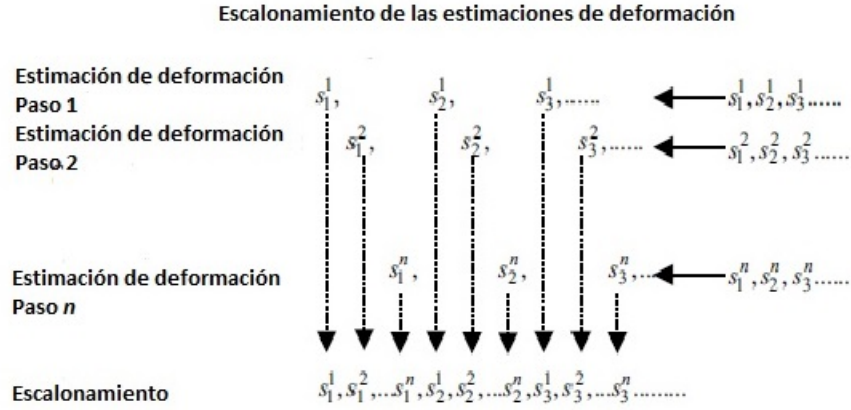


Figura 3.10: Esquema de SSE. Etapa 1: Estimación de la deformación usando ventanas sin superposición. Etapa 2: Estimación de la deformación con ventanas desplazadas por ΔW . Etapa n : Estimación de la deformación con ventanas desplazadas por $n\Delta W$. Etapa $n+1$: Escalonamiento de las deformaciones estimadas de la etapa 1 a la n para producir el elastograma.

3.3.4. Algoritmo Levenberg-Marquardt

El algoritmo de optimización Levenberg-Marquardt (LM)[77], disponible como un código abierto C ejecutable en Matlab (MEX code), fue utilizado para la realización del ajuste de los modelos reológicos. Como cualquier método no lineal de minimización de cuadrática (NLS) [77], implica la minimización de la suma cuadrática de los residuos, tal como lo indica la ecuación 3.4, donde $y(t_i)$ es la parte temporal del dato medido y $\mathbf{F}(t_i; \mathbf{p})$ es del modelo multi-paramétrico propuesto:

$$\chi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y(t_i) - \mathbf{F}(t_i; \mathbf{p}))^2 \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [\mathbf{F}_i(\mathbf{p})]^2 \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{p})^T \mathbf{F}(\mathbf{p}) \quad (3.4)$$

El proceso de minimización es obtenido mediante una combinación de los métodos de Paso Descendente (steepest descent) y Gauss-Newton, con los que se van actualizando los parámetros del modelo en cada iteración del algoritmo $\mathbf{p}_{j-1} + \delta\mathbf{p}_j$ (ecuación 3.5). Cuando los parámetros del modelo están lejos de los datos medidos (χ es grande), el algoritmo utiliza el método de Paso Descendente, por lo cual el algoritmo aunque es más lento, se garantiza la convergencia. En cambio, si los parámetros del modelo están cerca de los datos medidos (χ es pequeño), el algoritmo utiliza el método de Gauss-Newton y se obtiene una convergencia cuadrática rápida [77].

$$\delta\mathbf{p}_j = (\mathbf{H}(\mathbf{p}_{j-1}) + \mu[\text{diag}(\mathbf{H}(\mathbf{p}_{j-1}))])^{-1} \nabla\chi(\mathbf{p}_{j-1}) \quad (3.5)$$

Donde \mathbf{H} es el Hessiano de la matriz evaluada en \mathbf{p}_{j-1} , que es calculado de la matriz del Jacobiano $J_{i,j}(\mathbf{p}) = \frac{\partial F_i}{\partial p_j}(\mathbf{p})$

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \nabla^2 F(\mathbf{p}) \approx \mathbf{J}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}(\mathbf{p}) \quad (3.6)$$

Levenberg y Marquardt sugirieron que se podía utilizar el método de Gauss-Newton amortiguado, incluyendo un coeficiente de amortiguamiento de manera de controlar la dirección (el signo de $\delta\mathbf{p}_j$) y el tamaño de cada paso ($|\delta\mathbf{p}_j|$), por medio de la ecuación 3.7:

$$(\mathbf{J}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}(\mathbf{p}) + \mu\mathbf{I})\delta\mathbf{p} = -g \quad (3.7)$$

de donde se tiene que:

$$g = \mathbf{J}(\mathbf{p})^T \chi(\mathbf{p}) \quad (3.8)$$

El coeficiente de amortiguamiento μ produce varios efectos: Si $\mu > 0$, entonces $\delta\mathbf{p}$ está en la dirección descendente. Si μ tiene valores grandes, produce que:

$$\delta\mathbf{p} \simeq -\frac{1}{\mu}g = -\frac{1}{\mu}\chi'(\mathbf{p}) \quad (3.9)$$

es decir, un paso (etapa dentro de cada iteración, donde el algoritmo realiza la minimización de χ , en función de sus parámetros) pequeño que está en la dirección

descendente, lo que es bueno si la iteración actual está lejos de la solución. Además si μ es muy pequeño, entonces el algoritmo utiliza el método de Gauss-Newton, lo que es bueno cuando estamos en los pasos finales de la iteración, es decir, se está cerca de la solución.

La actualización de este coeficiente de amortiguamiento μ puede ser influenciado por el usuario a través del parámetro κ (factor de amortiguamiento) durante la determinación del valor inicial [77] :

$$\mu_0 = \kappa \cdot \max \{ \text{diag} (\mathbf{J}(\mathbf{p}_0)^T \mathbf{J}(\mathbf{p}_0)) \} \quad (3.10)$$

Durante las iteraciones el valor de μ puede ser actualizado mediante el valor de la proporción de ganancia definida por:

$$\rho = \frac{F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})}{L(0) - L(\delta\mathbf{p})} \quad (3.11)$$

donde $L(\delta\mathbf{p})$ es el valor de la función $F(\mathbf{p})$, que es el modelo que describe el fenómeno, evaluada en $\delta\mathbf{p}$. Por lo que ρ representa la relación entre la disminución real (numerador) y la predicha por el modelo (denominador) del valor de la función $\chi(\mathbf{p})$.

Altos valores de ρ , indican que $L(\delta\mathbf{p})$ es una buena aproximación de $F(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})$, por lo que se puede disminuir el valor de μ en la siguiente iteración del algoritmo, mientras que si ρ es pequeño o incluso negativo, entonces $L(\delta\mathbf{p})$ es una pobre aproximación por lo que se puede incrementar el valor de μ , con el doble objetivo de acercarse a la dirección descendente del paso y de reducir el tamaño del paso.

El algoritmo tiene 2 criterios relevantes de detención: la tolerancia de los mínimos locales g_{min} y el cambio del tamaño relativo del paso δp_{min} . El primer criterio refleja que se tienen un minimizador global para $\chi' = g(\mathbf{p}^* = 0)$ (\mathbf{p}^* es el valor mínimo de \mathbf{p} que minimiza la función χ) por lo que se define:

$$\|g\|_{\infty} \leq g_{min} \quad (3.12)$$

donde g_{min} debe ser muy pequeño, positivo y elegido por el usuario. El otro criterio de detención relevante es el criterio debido a cambios muy pequeños de \mathbf{p} , el que está dado por:

$$\delta\mathbf{p} \leq \delta p_{min}(\|\mathbf{p}\| + \delta p_{min}) \quad (3.13)$$

donde :

$$\delta\mathbf{p} = \|\mathbf{p}_{new} - \mathbf{p}\| \quad (3.14)$$

Esta expresión da cuenta de un cambio gradual del tamaño relativo del paso δp_{min} cuando $\|\mathbf{p}\|$ es grande para el tamaño absoluto del paso, δp , si \mathbf{p} está cerca de cero. Y por último, el proceso no debe tener un loop infinito por lo que:

$$iteraciones = i \leq I_{max} \quad (3.15)$$

Tomando en consideración todo lo anteriormente detallado, en la figura 3.11 se muestra la estructura de la programación del algoritmo:

```

Begin
i=0;          v=2;          p=p0;
H=J(p)TJ(p);      g=J(p)Tλ(p); ec. 3.8
found=(||g||<gmin);      μ0=κmax{Hjj};      μ=μ0;
while (found=false) and (i=lmax)
  i=i+1; Solve{(H+μI)δp=-g}; ec. 3.7 {main equation}
  if (||δp||<δpmin(||p||+δpmin))
    found=true;
  else
    pnew=p+δp;
    ρ=(F(p)-F(pnew))/(L(0)-L(δp)); ec. 3.11
    if ρ>0 {acceptable step}
      p=pnew;
      H=J(p)TJ(p);      g=J(p)Tλ(p);
      found=(||g||<gmin);
      μ=μ0max{1/3, 1-(2ρ-1)3};      v=2;
    else
      μ=μ0v;          v=2v;
    end
  end
end
end

```

Figura 3.11: Estructura de programación de Algoritmo Levenberg-Marquardt

En las primeras tres líneas, se definen el contador de iteraciones i , un factor numérico con el que se variará μ (este valor se actualiza en función de que tan lejos están los parámetros del modelo con respecto a los datos), los parámetros iniciales del modelo, p_0 , el hessiano, el mínimo global, g , a través de la primera derivada espacial de la función objetivo (χ). En la cuarta línea se define la primera condición de búsqueda, que es el primer criterio de detención (ecuación 3.12) y se define el coeficiente de amortiguamiento μ . En la quinta línea se indica que mientras no se cumpla la primera condición de búsqueda y que el número de iteraciones sea menor al máximo de iteraciones, se continúe la búsqueda, en la sexta línea se agrega la ecuación de actualización (ecuación de update, ecuación 3.7), y en la séptima línea además se agrega el segundo criterio de detención como condición de búsqueda (ecuación 3.13, en la décima línea se indica que mientras no se cumpla la segunda condición de búsqueda, se actualice el valor de \mathbf{p} , y luego se incluye la proporción de ganancia (ecuación 3.11) que es utilizada como criterio de calidad del paso. En la línea 13 y 14 se vuelve a definir la actualización de \mathbf{p} , el hessiano y g , para luego agregar nuevamente como una condición de búsqueda, el primer criterio de detención (dentro del ciclo donde se está buscando que se cumpla la segunda condición de búsqueda) pero ahora aplicando una estrategia de manera de ir cambiando el valor del coeficiente de amortiguamiento (líneas 16, 17 y 18) en función del valor de la proporción de ganancia obtenida en el paso(si $\rho < 0$ hay una pobre aproximación, ir a la línea 17, si $\rho < 0$ calidad de aproximación aceptable, ir a la línea 16) hasta cuando se cumpla el primer criterio dentro de la segunda condición de búsqueda. Una vez cumplida la segunda condición de búsqueda se actualiza el valor de \mathbf{p} y se pasa a la primera condición de búsqueda y una vez cumplida se guarda como el ajuste definitivo de ese píxel.

La versión disponible de el algoritmo Levenber-Marquardt (Levmar) considera sólo datos medidos regularmente espaciados, esto quiere decir que, $\delta t_i = cte$. Sin embargo, debido a que las imágenes ultrasónicas fueron adquiridas a una velocidad

decreciente (se van tomando imágenes cada vez más espaciadas en el tiempo), se debió modificar los datos experimentales (ecuación 3.16) utilizando la descomposición de Cholezky (ecuación 3.17) y un factor de peso proporcional a la velocidad de cuadros (ecuación 3.18).

$$\mathbf{F}'(\mathbf{p}) = \mathbf{W}\mathbf{F}(\mathbf{p}) \quad (3.16)$$

con:

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}^T\mathbf{W} \quad (3.17)$$

$$diag(\mathbf{C}) = \omega_i = \frac{\Delta t_i}{\sum \Delta t_i} \quad (3.18)$$

El coeficiente de determinación, que es una medida de la calidad del proceso de ajuste de la curva, es calculado como:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i (y(t_i) - \mathbf{F}(t_i; \mathbf{p}))^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i (y(t_i) - \bar{\mathbf{F}}(t_i; \mathbf{p}))^2} \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \omega_i \mathbf{F}(t_i; \mathbf{p}) \quad (3.20)$$

En el siguiente capítulo se describirán 4 estudios realizados donde se utilizó el algoritmo Levenberg-Marquardt para ajustar cada uno de los modelos utilizados en dichos estudios. En ellos se variaron los parámetros del algoritmo κ , g_{min} , Dp_{min} y χ_{min} , además del número de iteraciones de manera de estudiar la robustez (esto quiere decir, que tan sensible es el modelo a la variación de algún parámetro del algoritmo de manera que exista algún cambio notorio en la calidad del ajuste de éste), la eficiencia y versatilidad de los modelos. Se utilizó el coeficiente de determinación (r^2) como parámetro para la determinación de la robustez del modelo. Además se define r_{norm}^2 como el coeficiente de determinación normalizado a partir de un valor umbral asignado dependiendo de la calidad de los datos (la dispersión de estos). Por lo tanto, cualquier valor menor o igual a r_{norm}^2 se le asigna el valor cero y de esa manera re-escalar el eje del coeficiente de determinación entre 0 y 1. La eficiencia está definida como la razón entre r_{norm}^2 y el costo computacional (CPUTime) como :

$$Eficiencia = r_{norm}^2 / CPUTime \quad (3.21)$$

De 3.21 se evita que un mal ajuste ($r^2 \leq r_{norm}^2$), que tenga un bajo costo computacional ($CPUtime \leq 1[seg]$) se transforme en un caso de eficiencia alta. Las características del equipo utilizado fueron: un computador con un procesador Intel Core I7 3770 de 3,4[GHz] con una memoria RAM utilizable de 11,7[Gb] con un sistema operativo Windows 7 Ultimate de 64-bit. El proceso de análisis de datos se realizó sin paralelización de procesos ni uso de GPU.

Capítulo 4

Resultados y Análisis

Experimental

4.1. Introducción

Los estudios realizados tienen como fin determinar cuál es el modelo físico (Poroelástico bifásico KLM y reológicos 1D) que describe de una manera más acabada el comportamiento mecánico temporal de los materiales poroelásticos sintéticos sometidos a un ensayo de fluencia (figura 3.6). Para ello se consideraron los modelos desarrollados en el capítulo 2, modelo bifásico (KLM, ecuación 2.24), modelo unimodal Kelvin-Voigt simple (KV, ecuación 2.36), modelo bimodal Kelvin-Voigt simple (KV-KV, ecuación 2.45), modelo bimodal Kelvin-Voigt - Fluido (KV-F, ecuación 2.47), modelo unimodal Kelvin-Voigt continuo (KVC, ecuación 2.48), modelo bimodal Kelvin-Voigt continuo (KV-KVC, ecuación 2.49) y modelo bimodal Kelvin-Voigt - Fluido continuo (KV-FC, ecuación 2.50). Los modelos serán comparados en términos de la precisión del ajuste (r^2), y el tiempo de procesamiento (CPU time), utilizando el parámetro de eficiencia (ecuación 3.21). Para los tres primeros estudios (no restrictivo, comparativo y paramétrico) los datos utilizados corresponden a la evolución temporal de un promedio de píxeles de la zona central de los elastogramas

de deformación axial (imagen ASE) de una esponja uniforme. Mientras que en el estudio de versatilidad se utilizaron todos los píxeles de la imagen.

En el estudio no restrictivo se comparó la calidad de ajuste y el costo computacional del modelo KLM versus los modelos reológico, del estudio comparativo se estableció que modelo reológico es el más adecuado a utilizar en la configuración experimental desarrollada, y en base al estudio paramétrico del algoritmo LM se propuso un método de ajuste para toda la imagen ASE que manipule de manera eficiente los criterios de detención del algoritmo (ecuaciones δp_{min} y g_{min}) en función del error inicial, que es reducido mediante una actualización de los parámetros de los modelos. En ambos estudios (comparativo y paramétrico) se utilizaron 2 niveles de error inicial, cuando el modelo inicia desde un punto muy cercano a la solución, $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y cuando el modelo inicia desde un punto muy lejano de la solución, $\chi_0^{rel} \approx 500\%$. La versatilidad del modelo (la capacidad de adaptación ante variaciones tanto en la calidad de la imagen ASE como en las propiedades mecánicas de la muestra) se estudió en el caso en que se estuviese en distintas zonas de la muestra variando el píxel donde se realiza el ajuste (a cada píxel de la imagen ultrasónica) y en el caso en que hubiesen cambios drásticos del material fue probado utilizando una esponja homogénea con una inclusión de alta densidad de poros (una razón de 4 veces mayor densidad de la inclusión que la esponja homogénea).

Cabe destacar que para todos los estudios, a los datos se les aplicó un off-set de manera de eliminar la respuesta elástica instantánea.

4.2. Estudio No Restrictivo de Ajuste de Modelos.

En el estudio no restrictivo se analizan los modelos simples (2.24, 2.36, 2.45, 2.47) para determinar la factibilidad técnica de la implementación de estos modelos en situaciones en donde los parámetros del algoritmo se restringen de manera de disminuir el tiempo de cálculo. En este estudio el número de iteraciones del algoritmo fue muy grande ($I_{max} = 5000$) y los parámetros del algoritmo utilizados son los asignados por defecto, los que son mostrados en la tabla 4.1.

<i>Parámetros Algoritmo Levenberg-Marquardt</i>				
κ	δp_{min}	g_{min}	χ_{min}	α
10^{-6}	10^{-20}	10^{-20}	10^{-20}	10^5

Tabla 4.1: Parámetros algoritmo utilizados en el Estudio No Restrictivo de Ajuste de Modelos.

En la figura 4.1 se observan las curvas de ajuste de los modelos, los coeficientes de determinación normalizados, que en este caso es $r_n^2 \geq 0,9$ (debido a la buena calidad de los datos), y el costo computacional de cada modelo.

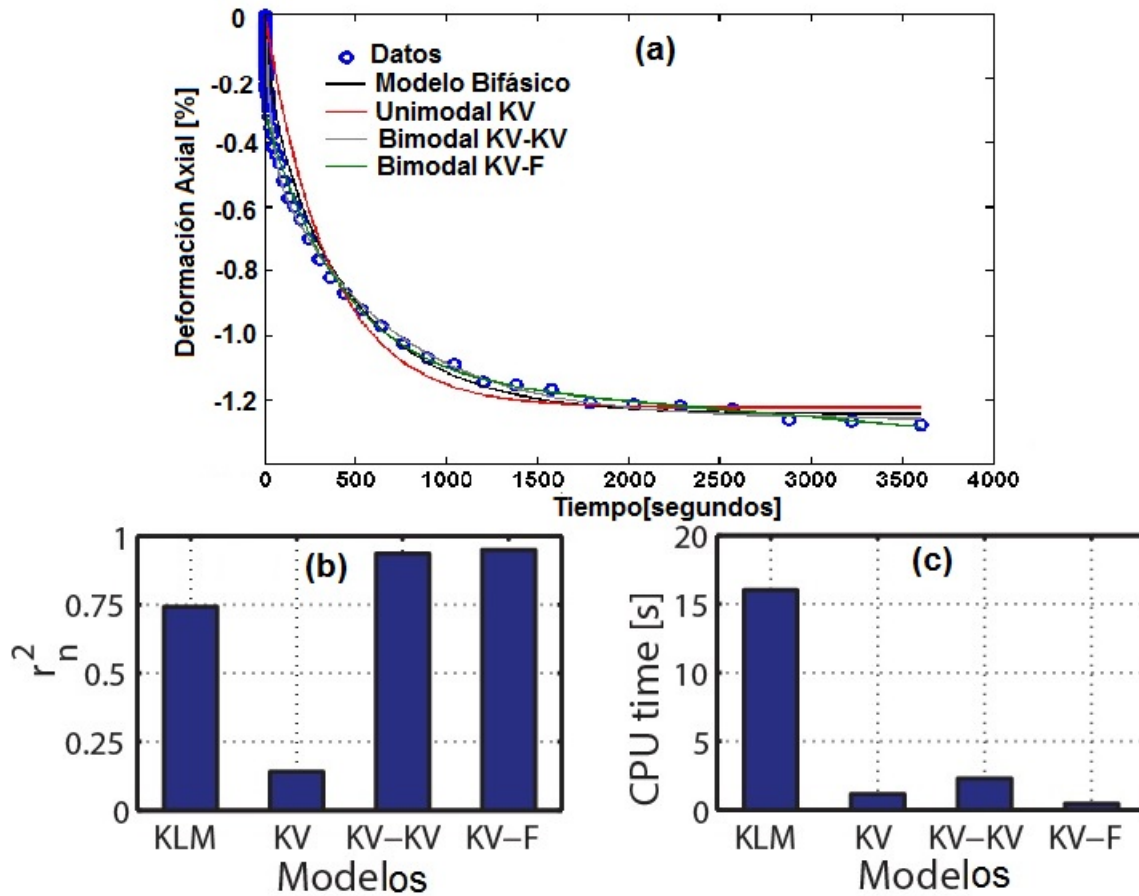


Figura 4.1: Estudio no restrictivo : a) Ajuste de modelos. b) Coeficiente de determinación normalizado para valores de $r_n^2 \geq 0,9$. c) Costo computacional

De la figura 4.1.a se observa que los 4 modelos realizan un ajuste adecuado, pero no se pueden apreciar diferencias significativas entre los ajustes. De la figura 4.1.b, se aprecia que tanto el modelo Bimodal Kelvin-Voigt Simple (KV-KV) como el modelo Bimodal Kelvin-Voigt - Fluido (KV-F) son los que obtienen los mejores ajustes ($r_n^2 > 0,98$) y con un costo computacional menor a 2[s], mientras que el modelo Unimodal Kelvin-Voigt (KV) es el que obtiene el ajuste de menor calidad ($r_n^2 \approx 0,2$). De la figura 4.1.c se observa que el costo computacional del modelo de la teoría bifásica (KLM) es por lo menos 10 veces mayor que el mayor costo computacional de los mo-

delos reológicos (modelo KV), por lo tanto, aunque el modelo KLM tiene un ajuste de mayor calidad ($r_n^2 \approx 0,75$) que el modelo KV, posee un alto costo computacional, lo que limita su aplicación práctica. Además de esta limitante, debemos considerar las restricciones propias del modelo bifásico KLM, es decir, las condiciones de bordes impuestas para obtener la solución analítica particular para el ensayo de fluencia (sección Ensayo de Fluencia No Confinado), que restringen su aplicación solamente a experimentos in-vitro. Sin embargo, este modelo podría ser utilizado para realizar estudios enfocados en establecer la conexión entre los parámetros reológicos y las propiedades poroelásticas del material. En conclusión, el modelo KLM, si bien realiza un buen ajuste, el costo computacional de éste, hace poco factible su aplicación en situaciones prácticas y por ende es el único modelo de este estudio que no sera utilizado en los estudios posteriores.

4.3. Estudio Comparativo de Modelos Reológicos.

El estudio comparativo de modelos reológicos fue realizado para determinar qué modelo reológico es más eficiente y robusto ante la variación del factor de amortiguamiento κ (ecuación 3.10) para ensayos de fluencia. Se utilizaron los modelos reológicos tanto en su configuración simple como continua. El parámetro del algoritmo que se varió fue el coeficiente de amortiguamiento, μ , a través del factor de amortiguamiento κ (ecuación 3.10) en 4 niveles (los parámetros del algoritmo LM, g_{min} , δp_{min} , χ_{min} , se eligieron a priori de manera de conservar la precisión del ajuste con respecto a los valores de la tabla 4.1). El estudio se realizó para dos niveles de error relativo mínimo ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y $\chi_0^{rel} \approx 500\%$), y se eligieron dos valores de α (factor que regula la región de variación de los parámetros de los modelos) uno para cada error relativo inicial.

Los valores de los parámetros del algoritmo son presentados en la tabla 4.2:

<i>Parámetros del algoritmo Estudio Comparativo de Modelos Reológicos</i>						
κ	g_{min}	δp_{min}	χ_{min}	$\alpha(\chi_{min}^0 \approx 0,2\%)$	$\alpha(\chi_{min}^0 \approx 500\%)$	<i>Iteraciones</i>
$\kappa(i)$	10^{-13}	10^{-10}	10^{-8}	100 %	10^8	500

Tabla 4.2: Parámetros algoritmo LM utilizados en el estudio

En la figura 4.2.a), c) y e) se graficó el coeficiente de determinación normalizado, el costo computacional y la eficiencia, respectivamente, para los modelos con error inicial pequeño, $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, mientras que en la figura 4.2.b,d y f se presentan los valores del coeficiente de determinación normalizados, el costo computacional (CPUTime) y la eficiencia, respectivamente, de los modelos cuando el error inicial es grande, $\chi_0^{rel} \approx 500\%$.

De la figura 4.2.a se observa que los modelos KV-KV y KV-F son los que obtienen ajustes de mejor calidad además de ser los más robustos ante la variación de κ cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, mientras que en la figura 4.2.b se aprecia que al aumentar el error inicial, $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, el modelo KV-KVC es el que logra el mejor ajuste y es más robusto, seguido del modelo KV-KV donde la calidad de su ajuste se ve afectada cuando $\kappa = 1$. En ambas figuras se aprecia que el modelo KV realiza los ajustes de peor calidad para todos los valores de κ , aunque en su configuración continua aumenta su calidad.

En la figura 4.2.c y la figura 4.2.d se observa que tanto para $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ como $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ los modelos simples tienen bajo costo computacional ($CPUTime < 1[seg]$), salvo para los valores de $\kappa = 1$ (modelos KV y KV-KV) y $\kappa = 10^{-3}$ (modelos KV, KV-KV, KV-F) y mientras que en los modelos continuos se observa que su costo computacional es $\approx 1[s]$ e incluso llegan a tener un costo computacional de hasta $4[s]$.

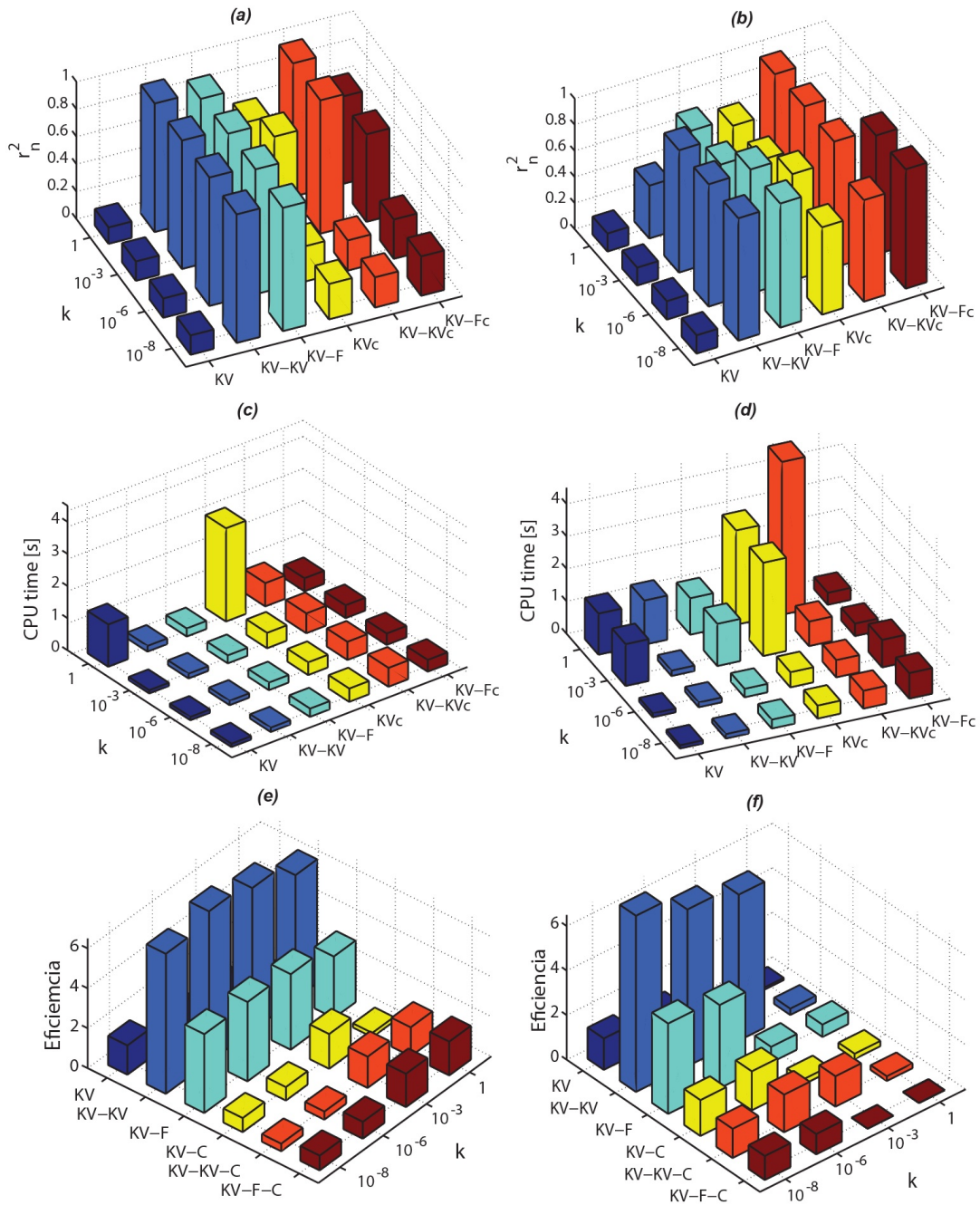


Figura 4.2: Estudio comparativo de los modelos reológicos con respecto a la variación del factor de amortiguamiento κ , con un error inicial pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ (gráficos a,c y e) y con un error inicial grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (gráficos b,d y f) : a) y b) Coeficiente de determinación. c) y d) Costo computacional. e) y f) Eficiencia.

Los resultados precedentes son resumidos con la eficiencia de los modelos, determinada por la ecuación 3.21. En la figura 4.2.e y la figura 4.2.f, se puede apreciar que para ambos niveles de error inicial ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y $\chi_0^{rel} \approx 500\%$) todos los modelos disminuyen su eficiencia cuando $\kappa = 1$. Además el modelo KV-KV es el que alcanza los mayores valores de eficiencia, siendo el máximo valor de eficiencia igual a 6.

En conclusión, el modelo KV-KV fue el que obtuvo la mejor calidad de ajuste, salvo cuando $\kappa = 1$ (ver figura 4.2.b) donde la calidad de su ajuste disminuyó, y donde aumentó su costo computacional de manera considerable (ver figura 4.2.d), por lo que su eficiencia disminuyó fuertemente (ver figura 4.2.f), mientras que de los modelos continuos, el modelo KV-KVC es el que logra ser más robusto y eficiente en una mayor cantidad de casos, aunque en menor medida que el modelo KV-KV.

4.4. Estudio Paramétrico .

Del estudio anterior, se concluyó que el modelo KV-KV fue el más robusto y eficiente junto con el modelo KV-KVC. Estos modelos fueron utilizados para realizar el estudio paramétrico del algoritmo Levenber-Marquardt (LM). En este estudio se busca limitar la región de variación de los parámetros LM y el factor α (factor que limita la región de variación de los parámetros de los modelos utilizados, la que debe siempre ser positiva) de manera de conocer la sensibilidad de los modelos ante la variación de los parámetros del algoritmo LM: el factor de amortiguamiento κ , la tolerancia para los mínimos locales g_{min} , el cambio del tamaño relativo del paso δp_{min} y el nivel de error de detención χ_{min} , cada uno por separado, variando el factor α en 6 niveles diferentes (desde $\alpha = 1$ hasta $\alpha = 10^9$). Además se busca la posibilidad de incrementar la eficiencia del ajuste mediante una apropiada selección de los parámetros LM, para cual se sabe a priori que los parámetros más importantes son los criterios de detención del algoritmo LM (g_{min} , ecuación 3.12 y δp_{min} ,

ecuación 3.13).

Debido a que del estudio comparativo se pudo apreciar que la calidad del ajuste del modelo KV-KV y KV-KVC es buena, el umbral para el coeficiente de determinación será $r^2 = 0,95$, por lo tanto, $0,95 \leq r_n^2 \leq 1$ y el número de iteraciones máxima en éste estudio fue de 500. Los valores de los parámetros utilizados para cada uno de los estudios son presentados en la tabla 4.3

<i>Variación de los Parámetros del Algoritmo LM</i>				
κ	g_{min}	δp_{min}	χ_{min}	α
1	10^{-3}	1	10^{-3}	5 %
10^{-3}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-8}	50 %
10^{-6}	10^{-13}	10^{-10}	10^{-13}	100 %
10^{-8}	10^{-20}	10^{-15}	10^{-20}	10^3 %
				10^5 %
				10^9 %

Tabla 4.3: Parámetros algoritmo utilizados en cada estudio estudio

4.4.1. Variación del factor de amortiguamiento κ .

Para conocer cómo el factor de amortiguamiento, κ , es afectado cuando el factor de dominio de la región de variación de los parámetros de los modelos (α) es cambiado y determinar que tan sensible es el algoritmo LM a esta variación y cómo afecta a la eficiencia, se realizó este estudio con 2 niveles de error inicial, pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ y los valores de los parámetros del algoritmo fueron: $g_{min} = 10^{-13}$, $\delta p_{min} = 10^{-10}$, $\chi_{min} = 10^{-8}$.

En la figura 4.3.a) y b) se muestra la eficiencia del modelo KV-KV tanto para $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, como $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente, mientras que en la figura 4.3.c) y d) se muestra la eficiencia del modelo KV-KVC con $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente.

De la figura 4.3.a) se observa que para el modelo KV-KV y $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ la eficiencia tiene sus valores más bajos cuando $\alpha = 5\%$ y para todos los valores de κ , y cuando $\alpha > 100\%$, los valores de la eficiencia tienden a ser más estable, mientras que para $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (figura 4.3.b) se restringen los valores a la región comprendida por $\kappa \leq 10^{-3}$ y $\alpha \geq 100\%$ donde la eficiencia varía entre los valores 5 – 7, en el resto de los casos, la eficiencia es nula. Por otro lado, el modelo KV-KVC prácticamente no varía su eficiencia (valores ≈ 1) dentro de la región en que $\kappa \geq 10^{-3}$ y para todo valor de α , cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ (ver figura 4.3.c) y para $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ se restringe a la región en que $\kappa \leq 10^{-3}$ y $\alpha \geq 10^5$ (ver figura 4.3.d) .

En conclusión , los valores que permiten maximizar la eficiencia del modelo KV-KV son para $\kappa \leq 10^{-3}$ y $\alpha \geq 100\%$, mientras que para el modelo KV-KVC, $\kappa = 10^{-3}$ y $\alpha \geq 10^3\%$

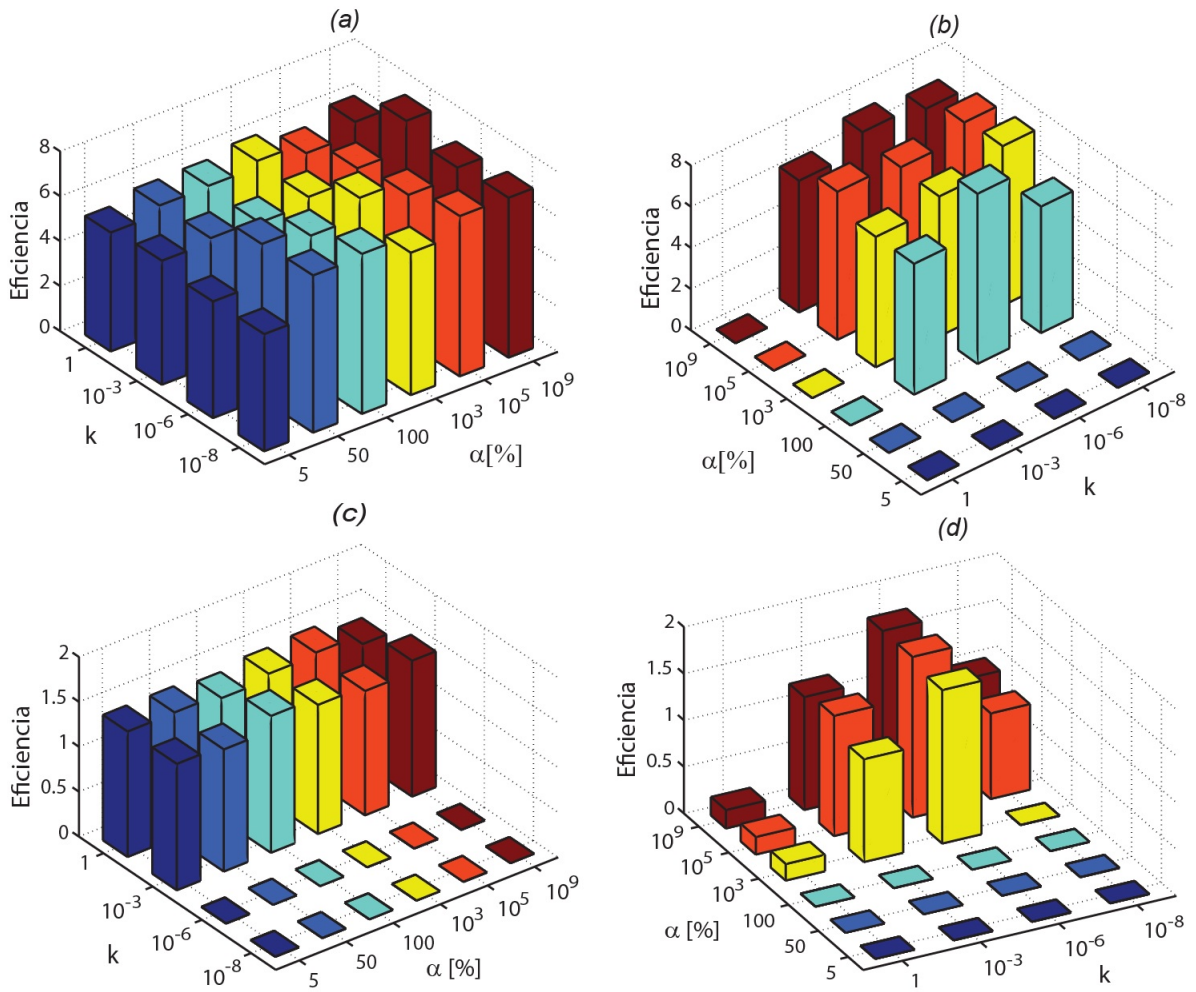


Figura 4.3: Eficiencia ante la variación del factor de amortiguamiento κ y el factor que limita la región de variación de los parámetros de los modelos α : a) y b) Eficiencia para modelo KV-KV con error inicial pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente, c) y d) Eficiencia para modelo KV-KVC con error inicial pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente.

4.4.2. Variación en la tolerancia de los mínimos locales g_{min} .

En este estudio se varió el parámetro g_{min} para 2 niveles de error inicial, pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$. Los valores de los parámetros del algoritmo fueron: $\kappa = 10^{-3}$, $\delta p_{min} = 10^{-10}$, $\chi_{min} = 10^{-8}$.

En la figura 4.4.a) y b) se muestra eficiencia cuando se varía g_{min} y α para el modelo KV-KV con $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente, mientras que en la figura 4.4.c) y d) se muestra la eficiencia para el modelo KV-KVC con $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente.

En la figura 4.4.a) se observa que cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, el modelo KV-KV es sensible al valor de $g_{min} = 10^{-3}$ e independientemente del valor de α donde la eficiencia llega a un valor aproximado de 120, para un $\alpha = 10^5$, mientras que cuando $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (ver figura 4.4.b), la eficiencia disminuye considerablemente, restringiéndola a una región en que $g_{min} \leq 10^{-8}$ y $\alpha \geq 100\%$. Por otro lado, el modelo KV-KVC no es sensible a la variación de g_{min} ni de α cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ (ver figura 4.4.c)) y cuando $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ para los valores $g_{min} = 10^{-3}$ y $\alpha \geq 10^3$ la eficiencia alcanza valores que varían entre 15 – 22.

En conclusión, tanto el modelo KV-KV como el modelo KV-KVC son sensible a la variación de la tolerancia de los mínimos locales, en particular en la región en que $g_{min} = 10^{-3}$ y $\alpha \geq 10^3\%$.

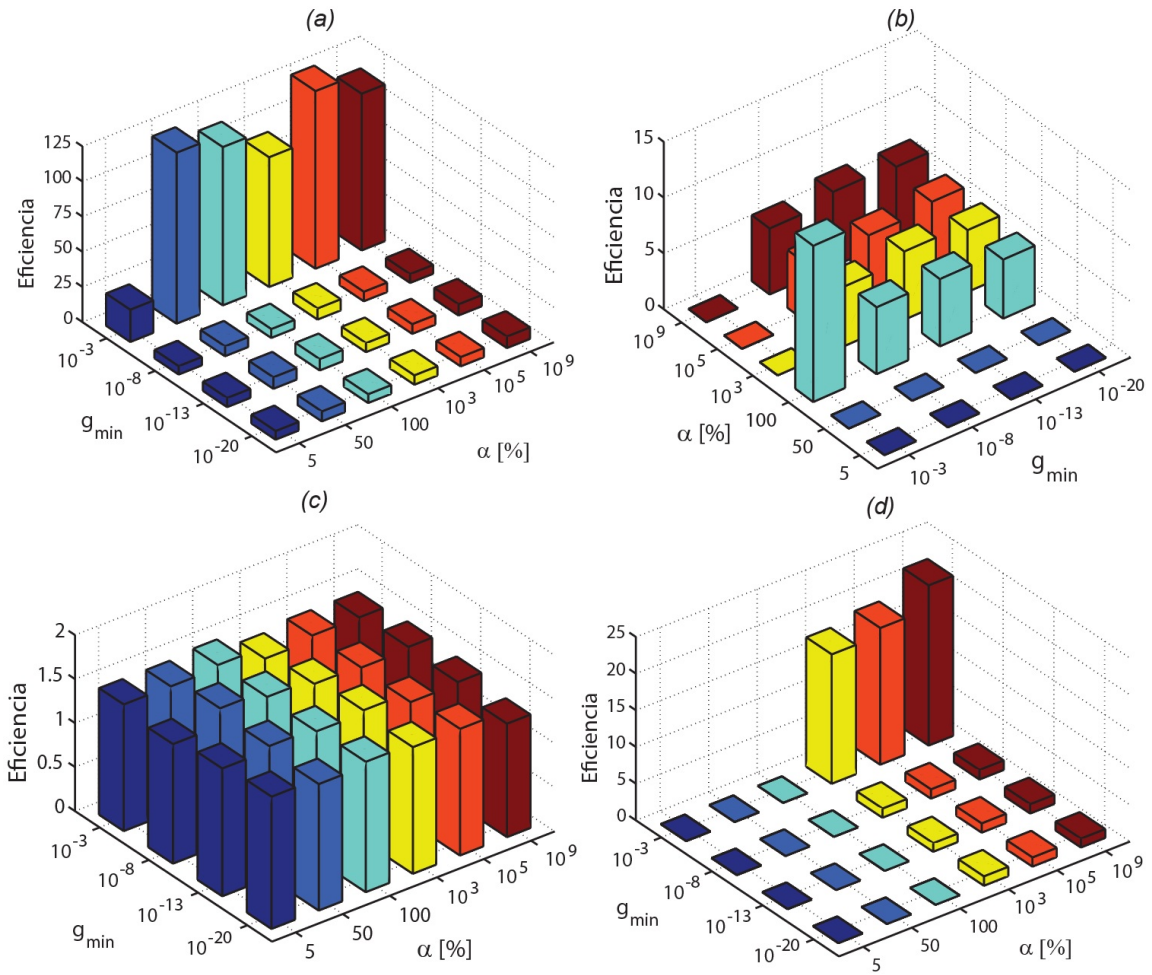


Figura 4.4: Estudio Paramétrico: Sensibilidad del algoritmo LM a la variación de g_{min} para el modelo KV-KV, a) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y b) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) y para el modelo KV-KVC, c) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y d) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$)

4.4.3. Variación del cambio del tamaño relativo del paso

$$\delta p_{min}.$$

En este estudio se varió el parámetro δp_{min} y se realizó con 2 niveles de error inicial, pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$. Los valores de los parámetros del algoritmo fueron: $\kappa = 10^{-3}$, $g_{min} = 10^{-13}$, $\chi_{min} = 10^{-8}$.

En la figura 4.5.a) y b) se muestra la eficiencia cuando se varía el cambio del tamaño relativo del paso, δp_{min} y α , para el modelo KV-KV con error inicial pequeño, $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande, $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente, mientras que en la figura 4.5.c) y d) se muestra la eficiencia para el modelo KV-KVC con error inicial pequeño, $\chi_{min}^0 \approx 0,2\%$ y error inicial grande, $\chi_{min}^0 \approx 500\%$, respectivamente.

En la figura 4.5.a) se observa que el modelo KV-KV cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, la maximización de la eficiencia está restringida a la región en que $\delta p_{min} \leq 10^{-5}$ y $\alpha \geq 50\%$, mientras que cuando $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (figura 4.5.b)), se restringe aún más la región a los valores de $\delta p_{min} \leq 10^{-5}$ y $\alpha \geq 100\%$, en ambos casos llegando a un valor máximo de ≈ 7 . Por otro lado, el modelo KV-KVC, cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ (ver figura 4.5.c)) no es sensible a la variación de δp_{min} exceptuando el caso en que $\delta p_{min} = 1$, mientras que cuando $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (ver figura 4.5.d)) la sensibilidad está restringida al valor de $\delta p_{min} = 10^{-5}$ y $\alpha \geq 10^3\%$ alcanzando un valor máximo ≈ 29 .

En conclusión, cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, el modelo KV-KV es más sensible a la variación de δp_{min} , mientras que cuando $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, el modelo KV-KVC es muy sensible para el caso en que $\delta p_{min} = 10^{-5}$ y $\alpha \geq 10^3\%$.

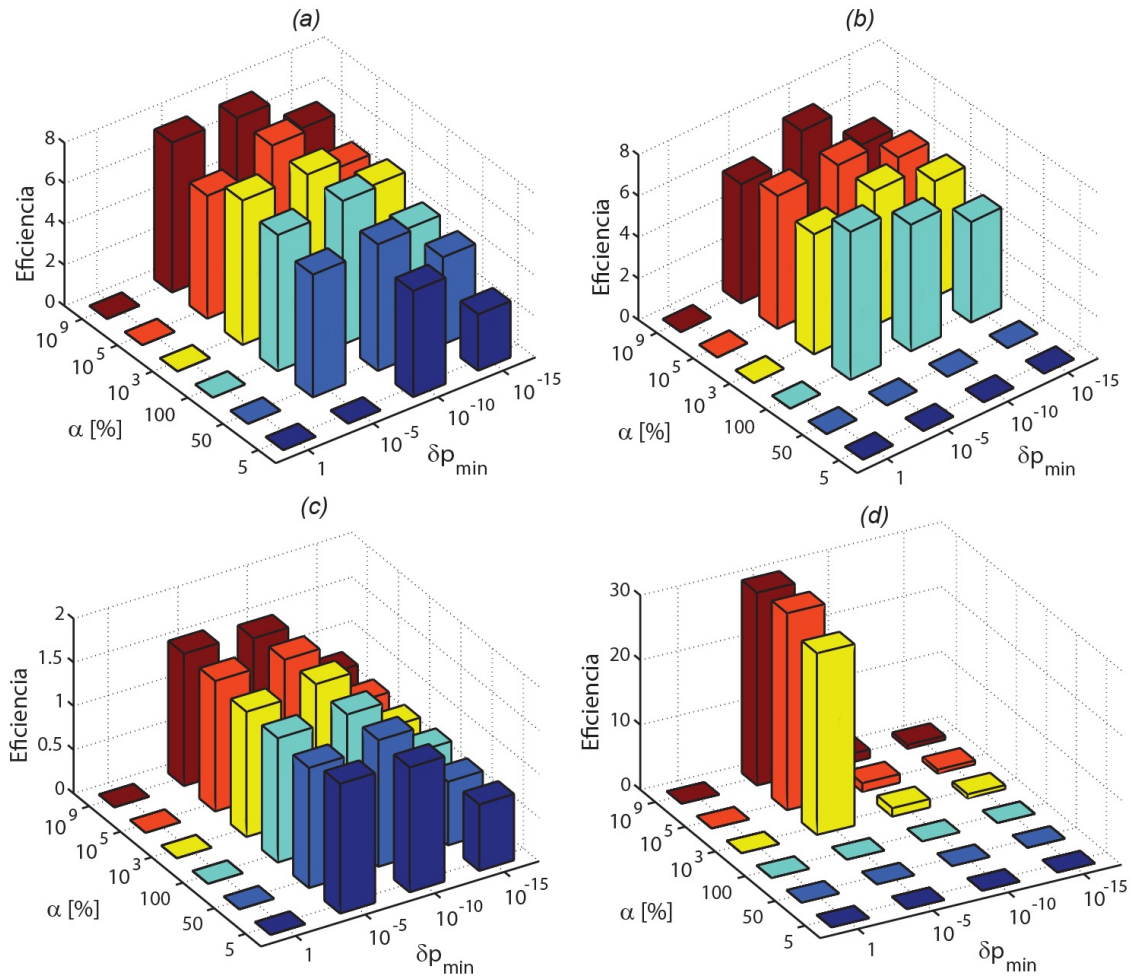


Figura 4.5: Estudio Paramétrico: Sensibilidad del algoritmo LM a la variación de δp_{min} para el modelo KV-KV, a) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y b) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) y para el modelo KV-KVC, c) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y d) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$).

4.4.4. Variación del nivel de error de detención χ_{min}

En este estudio se varió el parámetro χ_{min} y se realizó con 2 niveles de error inicial, pequeño $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y grande $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ y los valores de los parámetros del algoritmo fueron: $\kappa = 10^{-3}$, $g_{min} = 10^{-13}$, $\delta p_{min} = 10^{-10}$.

En la figura 4.6.a) y b) se muestra la eficiencia cuando se varía el nivel de error de detención, χ_{min} y α , para el modelo KV-KV con error inicial pequeño, $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande, $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente, mientras que en la figura 4.6.c) y d) se muestra la eficiencia para el modelo KV-KVC con error inicial pequeño, $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ y error inicial grande, $\chi_0^{rel} \approx 500\%$, respectivamente.

En la figura 4.6.a) se puede observar que el modelo KV-KV cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$, la eficiencia es maximizada para los valores en que $\chi_{min} \leq 10^{-8}$ e independientemente del valor de α , mientras que en el caso en que $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ (ver figura 4.6.b)) la región de maximización se acota a los valores de $\chi_{min} \leq 10^{-8}$ y $\alpha \geq 100\%$, en ambos casos variando la eficiencia entre los valores 5 y 7. Por otro lado, el modelo KV-KVC, cuando $\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$ (ver figura 4.6.c)), es prácticamente insensible a la variación de α y χ_{min} , excepto el caso en que $\chi_{min} = 10^{-3}$, donde la eficiencia es nula, además cuando $\chi_0^{rel} \approx 500\%$ se acota aún más la región donde la eficiencia es no nula, a la región en que $\chi_{min} \leq 10^{-8}$ y $\alpha \geq 10^3\%$, donde la eficiencia varía entre 1 y 1,4.

En conclusión, el modelo KV-KV es sensible a la variación de χ_{min} y α en la región $\chi_{min} \leq 10^{-8}$ y $\alpha \geq 100\%$, mientras que para el modelo KV-KVC, la eficiencia es no nula en la región $\chi_{min} = 10^{-8}$ y $\alpha \geq 10^3\%$.

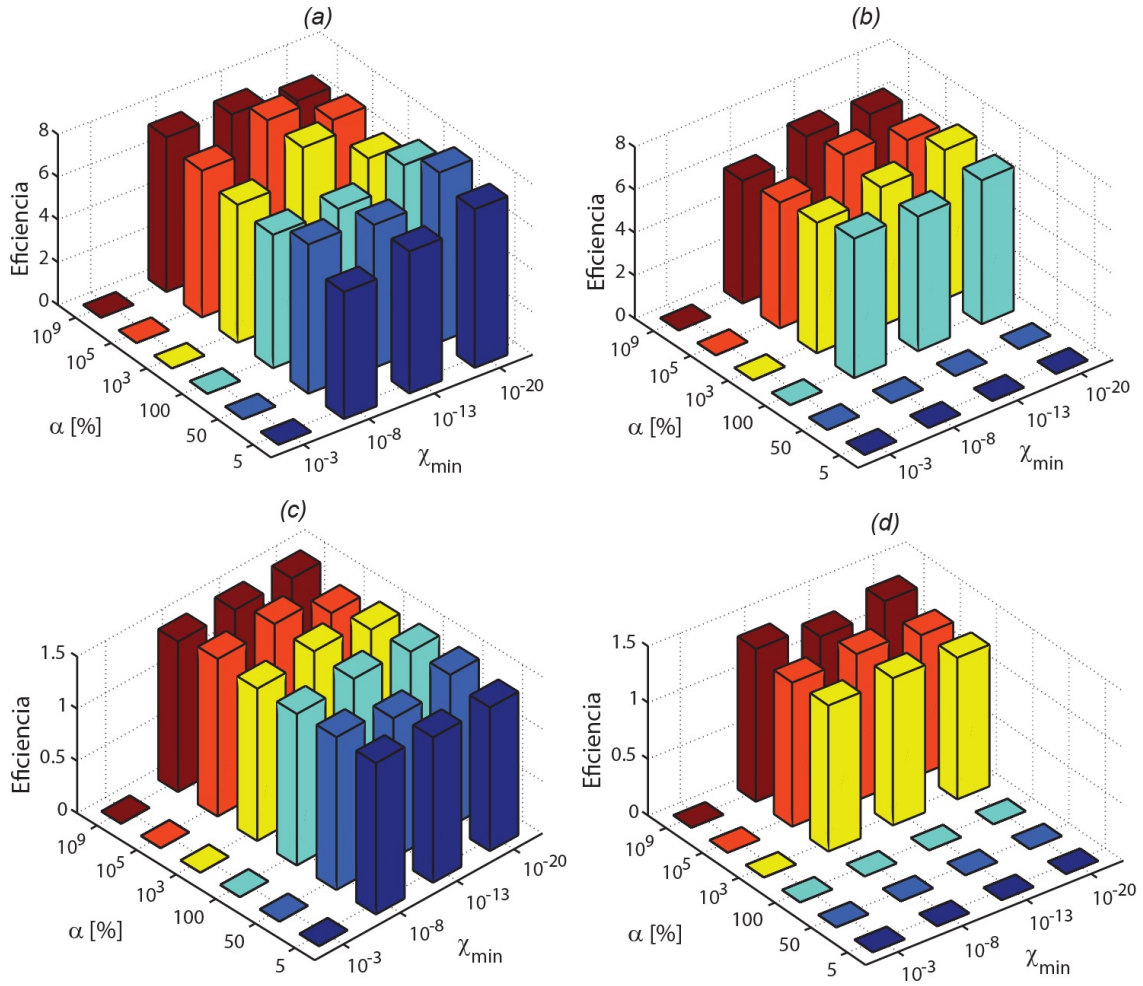


Figura 4.6: Estudio Paramétrico: Sensibilidad del algoritmo LM a la variación de χ_{min} para el modelo KV-KV, a) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y b) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$) y para el modelo KV-KVC, c) Error inicial pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) y d) Error inicial grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$).

Del estudio paramétrico se pudo concluir que tanto el factor de amortiguamiento κ y el nivel de error de detención χ_{min} no afectan mucho a la eficiencia de ambos modelos (KV-KV, KV-KVC), debido a que estos parámetros no son criterios de detención, aunque se maximiza la eficiencia para $\kappa = 10^{-3}$ y $\chi_{min} = 10^{-8}$, los valores para los que α maximizó la eficiencia fueron, para el modelo KV-KV: $\alpha \geq 100\%$ y el modelo KV-KVC: $\alpha \geq 10^3\%$. Los modelos son altamente sensibles a la variación

de g_{min} y δp_{min} , debido a que estos parámetros están relacionados con los criterios de detención del algoritmo LM (ecuación 3.12 y 3.13), por lo que deberían ser los parámetros más determinantes al utilizar cualquier región de la imagen, y los valores en que fue maximizada la eficiencia fue para $g_{min} = 10^{-3}$ y $\delta p_{min} = 10^{-5}$.

4.5. Estudio de Versatilidad.

En el estudio de versatilidad de los modelos, primero se realizó un estudio preliminar que probara el método de ajuste de los modelos utilizados en los estudios anteriores, esto es, se definieron los valores de los parámetros del algoritmo κ y χ_{min} , con un α que se aumenta gradualmente en función del error inicial desde $\alpha = 100\%$ para el modelo KV-KV y un error inicial desde $\alpha = 10^3\%$ para el modelo KV-KVC (esto son los límites superior e inferior de α según el estudio precedente). En este estudio preliminar se utilizó una muestra poroelástica formada por una esponja homogénea a manera de determinar la capacidad de adaptación del método de ajuste a cambios en las curvas de deformación axial producidos ya sea por variaciones propias de las propiedades poroelásticas de la muestra, condiciones de borde asociadas al experimento o la distribución de esfuerzos en el material y a la calidad de los elastogramas de deformación axial (imagen ASE) en si. Una vez realizado este estudio, se realizó el estudio de versatilidad se utilizó una esponja homogénea con una inclusión circular de mayor densidad de poros (densidad de poros de la inclusión aproximadamente 4 veces mayor que la densidad de poros de la esponja homogénea), para así determinar la versatilidad (capacidad de adaptación de los modelos) del método de ajuste ante variaciones drásticas de las propiedades poroelásticas del material. Los valores de los parámetros del algoritmo son: $\kappa = 10^{-3}$, $\chi_{min} = 10^{-8}$, $I_{max} = 500$ iteraciones. Tanto el valor de la tolerancia de los mínimos locales, g_{min} , como el cambio relativo del tamaño del paso, δp_{min} , es actualizado por el algoritmo de acuerdo a cada píxel, ya que estos parámetros intervienen directamente el proceso iterativo

del algoritmo LM (ver figura 3.11) y por lo tanto afectan la eficiencia del ajuste.

4.5.1. Estudio Preliminar: Esponja Homogénea

Se aplicó el esquema de ajuste mostrado en la figura 3.11 para el modelo KV-KV y un procedimiento similar para el modelo KV-KVC . En la figura 4.7.a) se muestra la imagen B-Mode del último frame adquirido a los 60 minutos del ensayo de fluencia, en la figura 4.7.b) la ASE del último frame adquirido a los 60 minutos del ensayo de fluencia, en la figura 4.7.c) y figura 4.7.d) el coeficiente de determinación de la imagen completa tanto para el ajuste realizado por el modelo KV-KV como para KV-KVC, en escala de colores, donde el color azul representa a los ajustes de los píxeles con un $r^2 \leq 0,9$ y el color rojo representa a los ajustes de los píxeles con $r^2 = 1$.

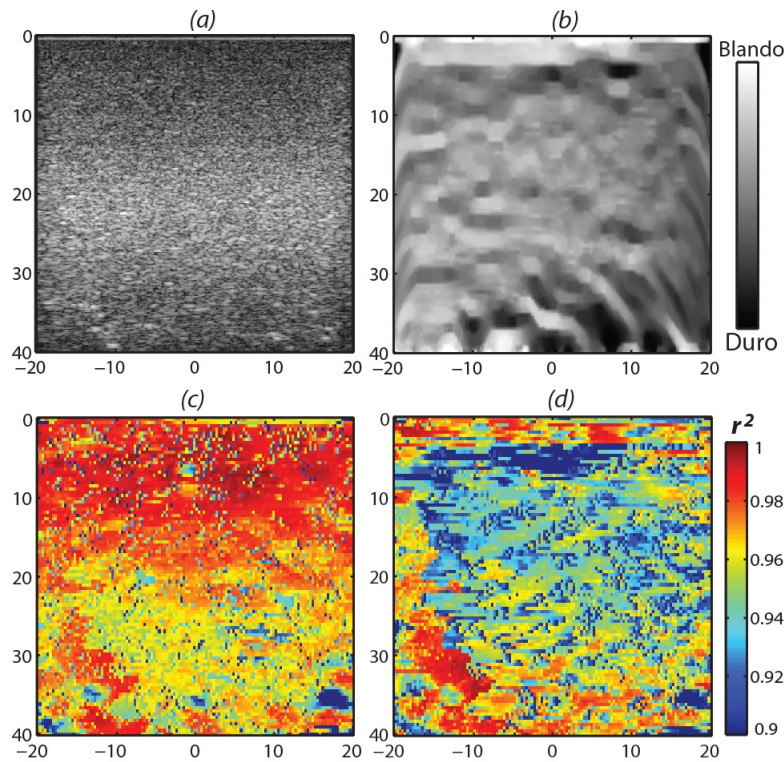


Figura 4.7: Estudio Preliminar en esponja homogénea: a) Imagen B-mode. b) Imagen de ASE. c) Coeficiente de determinación para cada píxel de la imagen utilizando el modelo KV-KV. d) Coeficiente de determinación para cada píxel de la imagen utilizando el modelo KV-KVC.

De la figura 4.7.a) se puede apreciar el patrón de speckles de la esponja homogénea típico de una imagen ultrasónica. De la figura 4.7.b) se puede apreciar que en la región del borde inferior de la esponja, que estaba en contacto con el plato de carga, aparece con una mayor dureza que el resto de la esponja, probablemente debido a efectos de borde. En las figura 4.7.c) y figura 4.7.d) se puede observar que el modelo KV-KV realiza un ajuste de una mayor calidad que el realizado por el modelo KV-KVC, esto es debido a como se vio en el estudio paramétrico, que cuando se restringe los parámetros del algoritmo LM, la calidad de ajuste realizado por el modelo continuo disminuye, debido a que al ser de una mayor complejidad, son más los parámetros que debe ajustar en condiciones más restrictivas. En la tabla 4.4. se

muestra el tiempo que tarda el algoritmo en realizar el ajuste a la imagen completa, el porcentaje de píxeles que realizan un ajuste con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ y el coeficiente de determinación promedio para los píxeles con $r^2 \geq 0,95$, utilizando los modelos KV-KV y KV-KVC en el caso de una esponja homogénea.

<i>Valores para ajuste Imagen completa</i>			
Modelos	<i>CPUTime</i> [min]	Píxeles con $r^2 \geq 0,95$	$r^2_{promedio} \geq 0,95$
KV-KV	≈ 14	$\approx 56[\%]$	0,9741
KV-KVC	≈ 93	$\approx 31[\%]$	0,9663

Tabla 4.4: Valores del costo computacional (CPUTime) para el ajuste de la imagen completa, el porcentaje de píxeles con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ y el coeficiente de determinación promedio para los píxeles con $r^2 \geq 0,95$ para el ajuste de los modelos KV-KV y KV-KVC en el caso de una esponja homogénea en ensayos de fluencia.

De los valores presentados en la tabla 4.4, se puede apreciar que el modelo KV-KV tiene un CPUTime aproximadamente 6 veces menor que el modelo KV-KVC y que tanto el porcentaje de píxeles con un coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ como el promedio del coeficiente de determinación de los píxeles con $r^2 \geq 0,95$ es mayor utilizando el modelo KV-KV que cuando se utiliza el modelo KV-KVC. En conclusión el modelo KV-KV se adapta más y es más eficiente que el modelo KV-KVC ante la variación de la calidad de los elastogramas de deformación axial (ASE).

4.5.2. Estudio de versatilidad: Esponja Homogénea con Inclusión circular rígida

En este estudio se evaluó la capacidad de adaptación (versatilidad) de cada modelo a cambios drásticos de las propiedades poroelásticas del material. Para esto se usó una esponja homogénea con una inclusión cilíndrica de $19[mm]$ de diámetro y con una densidad de poros aproximadamente 4 veces mayor que la de la esponja homogénea, mostrada en la figura 3.2.c)

En la figura 4.8 se muestra el B-Mode (a), la ASE (b), el coeficiente de correlación (c), la evolución temporal de la deformación en la región dentro de la inclusión, fuera de la inclusión y en la interfaz esponja-inclusión (d), y el coeficiente de determinación de cada píxel tanto para el ajuste realizado por el modelo KV-KV (e) como para el KV-KVC (f), en escala de colores, donde el color azul representa a los ajustes de los píxeles con un $r^2 \leq 0,9$ y el color rojo representa a los ajustes de los píxeles con $r^2 = 1$. De la figura 4.8.a) se puede observar en la imagen B-Mode la inclusión cuya matriz sólida tiene una rigidez mayor que la de la esponja homogénea, también se observa una zona de bajo contraste ecográfico producto del cambio de material (estructura de poros e impedancia acústica) en la parte inferior de la inclusión, debido a su mayor rigidez que la de la esponja homogénea. En la figura 4.8.b) se aprecia en la imagen ASE claramente el mapa de deformación del material y precisamente la inclusión se deforma mucho menos que la esponja homogénea debido principalmente a que la inclusión tiene una mayor densidad de poros (rigidez), pero también al efecto de la interfaz esponja-inclusión, que se visualiza de manera clara como una elipsoide de color más claro (en la escala de grises) en el borde de la inclusión, debido a que la interfaz afecta la distribución de esfuerzos alrededor de la inclusión en el entorno de ésta. En la figura 4.8.c) muestra el coeficiente de correlación que nos indica la calidad de la imagen ASE, y se aprecia que el coeficiente de correlación en la mayoría de los píxeles fue alto ($> 0,95$), excepto en la parte inferior de la inclusión, debido a la sombra acústica presente en la imagen B-Mode y por consiguiente, afecto la

calidad de la imagen ASE en dicha región.

En la figura 4.8.d) se observa la evolución temporal completa de la deformación en distintas regiones de la imagen. Tanto en la interfaz (línea punteada color negro) como en la región exterior a la inclusión (línea punteada color rojo) se puede observar que tienen una respuesta viscoelástica rápida para luego irse deformando de manera más pausada. Este se debe a que en un inicio, cuando el esfuerzo instantáneo es aplicado, el material se comporta con un modulo de compresibilidad efectivo correspondiente a un material poroelástico no confinado (modelo KLM, ecuación 2.26, líquido es exudado para mantener la presión de poros constante), el que tiene un tiempo característico de respuesta, τ_1 , para luego dar paso a otra respuesta viscoelástica lenta mediante el, dominada por la deformación lenta de la matriz sólida (debido a que el líquido fue exudado casi en su totalidad), fase que tiene otro tiempo característico, τ_2 . En la zona de la inclusión, tarda más tiempo en reaccionar ante este campo de esfuerzo, lo que permite que la respuesta viscoelástica lenta domine su evolución temporal de su deformación. Esto es debido a 2 condiciones presentes en la situación: el campo de esfuerzo al que está siendo sometido la zona inmediatamente superior a la interfaz, se ve afectado por la interfaz esponja-inclusión, distribuyéndose alrededor de la zona superior de la interfaz esponja-inclusión, y además en que la rigidez de la inclusión es mayor que la rigidez de la esponja homogénea, por lo que se necesita un campo de deformación mayor para que se presente la respuesta viscoelástica rápida en la inclusión. De manera que ambos tiempos característicos, τ_1 y τ_2 dependen de como evoluciona la rigidez y viscosidad efectiva del material bifásico durante el proceso de exudación del líquido. En la figura 4.8.e) y figura 4.8.f) se puede apreciar que el modelo KV-KV realiza un mejor ajuste aún dentro de la inclusión exceptuando a la región que es afectada por la sombra acústica que afecta la imagen ASE (figura 4.8.b), mientras que el modelo KV-KVC no logra realizar un buen ajuste en la inclusión.

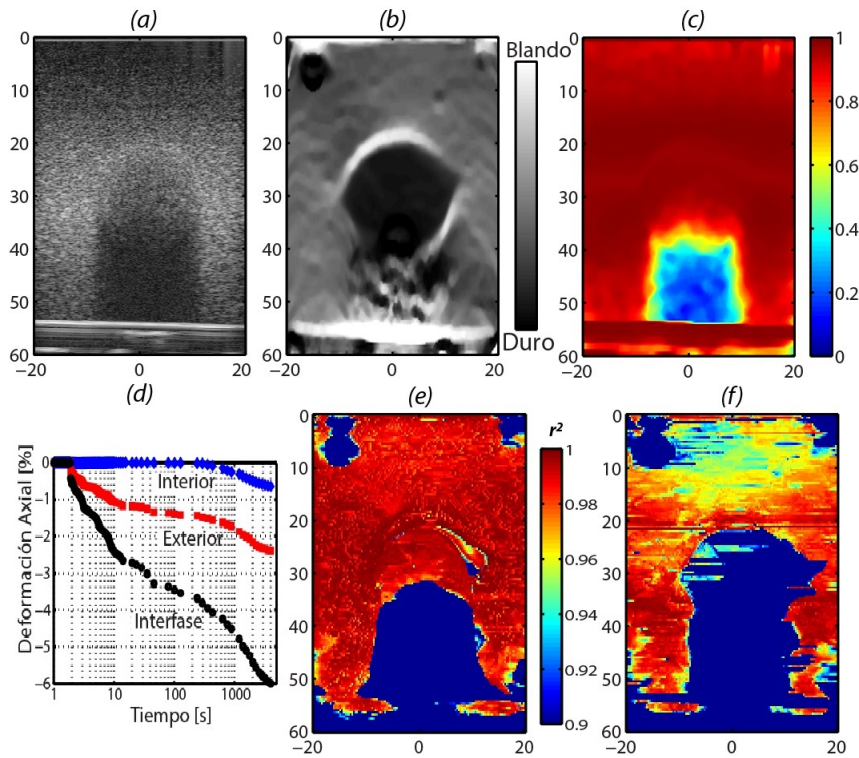


Figura 4.8: Estudio Versátilidad de esponja homogénea con inclusión rígida: a) Imagen B-mode. b) Imagen de ASE. c) Coeficiente de Correlación para la imagen completa. d) Evolución temporal de la deformación axial para la región dentro de la inclusión, afuera de la inclusión y en la interfaz esponja homogénea-inclusión. e) y f) Coeficiente de determinación para cada píxel de la imagen utilizando el modelo Bimodal Kelvin-Voigt Simple y Bimodal Kelvin-Voigt Continuo, respectivamente.

En la tabla 4.5 se muestra el tiempo que tardan en realizar el ajuste a la imagen completa, el porcentaje de píxeles que realizan un ajuste con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ y el coeficiente de determinación promedio de los píxeles con $r^2 \geq 0,95$, para los modelos KV-KV y KV-KVC para el caso de una esponja con una inclusión con mayor densidad de poros en ensayos de fluencia.

<i>Valores para ajuste Imagen completa</i>			
Modelos	<i>CPUTime</i> [minutos]	Píxeles con $r^2 \geq 0,95$	$r^2_{promedio} \geq 0,95$
KV-KV	≈ 10	$\approx 70[\%]$	0,9906
KV-KVC	≈ 148	$\approx 52[\%]$	0,9767

Tabla 4.5: Valores del costo computacional (*CPUTime*) para el ajuste de la imagen completa, porcentaje de píxeles con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ y el coeficiente de determinación promedio para los píxeles con $r^2 \geq 0,95$ para el ajuste de los modelos KV-KV y KV-KVC, respectivamente, en el caso de una esponja con una inclusión rígida en ensayos de fluencia.

De la tabla 4.5 se puede apreciar que el *CPUTime* del modelo KV-KVC es aproximadamente 14 veces mayor que el *CPUTime* del modelo KV-KV. Además el porcentaje de píxeles con coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ es mayor en el modelo KV-KV que en el KV-KVC. El valor del coeficiente de determinación promedio de los píxeles superiores al umbral ($r^2 \geq 0,95$) en el modelo KV-KV es mayor al del modelo KV-KVC. Por lo que se puede concluir que el modelo KV-KV es más versátil que el modelo KV-KVC cuando existen cambios drásticos en la impedancia acústica (variaciones en las propiedades poroelásticas) de la muestra. Para visualizar mejor el efecto de la inclusión sobre las propiedades viscoelásticas efectivas observadas en la figura 4.8.e) y 4.8.f) se muestran los parámetros viscoelásticos extraídos de la aplicación del modelo KV-KV (figura 4.9). Los factores de amplitud G_1 y G_2 se muestran en la figura 4.9.a) y 4.9.b), respectivamente y los tiempos característicos τ_1 y τ_2 en la figura 4.9.c) y 4.9.d), respectivamente

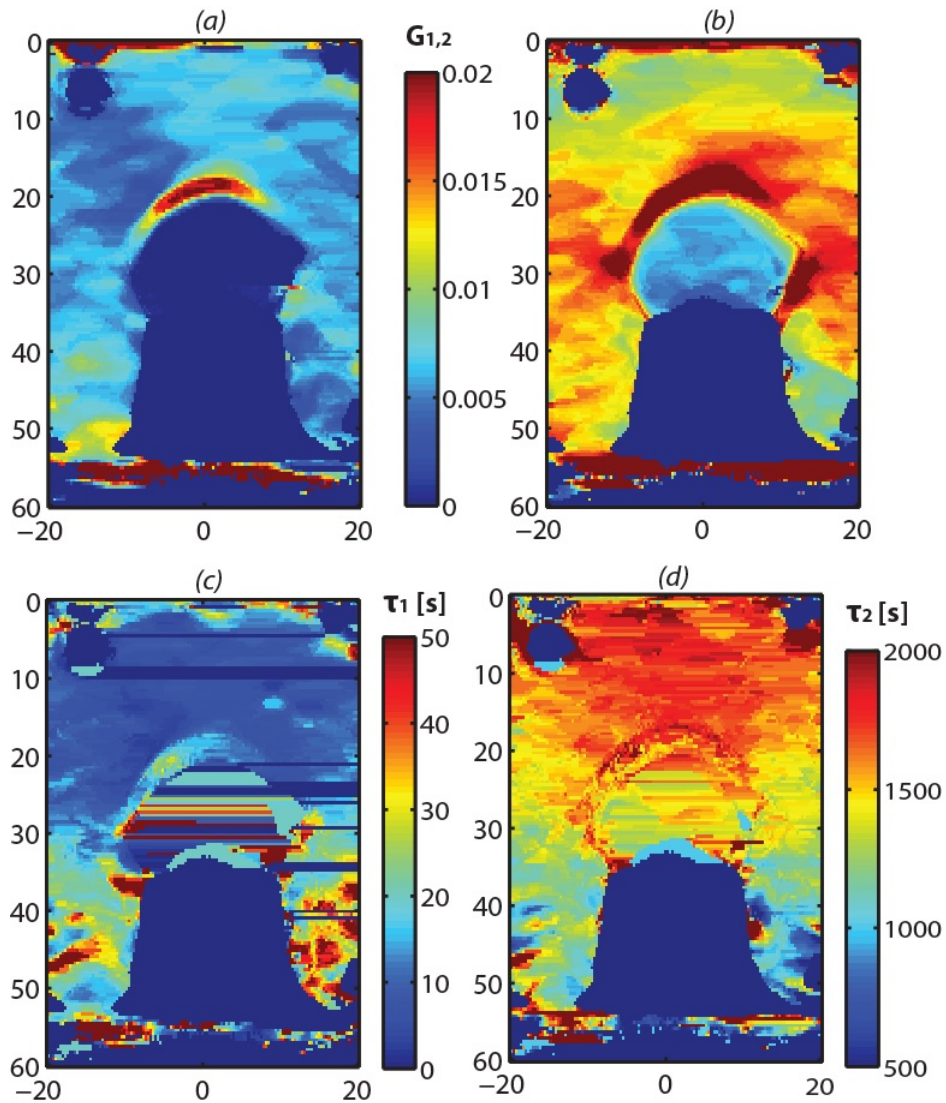


Figura 4.9: Estudio Versatilidad de esponja homogénea con inclusión rígida: a) y b) Variación de los factores de amplitud G_1 y G_2 del modelo bimodal Kelvin-Voigt simple para cada píxel, respectivamente. c) y d) Variación de los tiempos característicos τ_1 y τ_2 del modelo bimodal Kelvin-Voigt simple para cada píxel, respectivamente.

De la figura 4.9.a) se puede apreciar que el factor de amplitud G_1 que está relacionado con el comportamiento viscoelástico rápido, es bastante pequeño, variando entre $0,005 \leq G_1 \leq 0,01$ en la esponja homogénea y es cero en la inclusión, lo que está de acuerdo con lo presentado en la figura 4.8.d) donde sólo se apreciaba una res-

puesta viscoelástica lenta en la inclusión. Además se puede apreciar la particularidad de que en la región que está sobre la interfaz esponja-inclusión, el factor de amplitud G_1 alcanza su valor máximo, lo que también está de acuerdo con la figura 4.8.d), donde se aprecia que la deformación en la región de la interfaz esponja-inclusión tiene una amplitud de deformación mayor que en cualquier región de la imagen. De la figura 4.9.b) se puede apreciar que en la mayor parte de la imagen el factor de amplitud G_2 , que está relacionado con la respuesta viscoelástica lento caracterizada por τ_2 , es mucho mayor que G_1 , por lo que la mayor contribución a la deformación de la muestra está dada por el comportamiento viscoelástico lento. Cabe destacar también que en la región de la interfaz el valor de G_2 es maximizado por lo que en esa región también hay una respuesta viscoelástica lenta dominante. Dentro de la inclusión si bien existe un factor de amplitud G_2 mayor que G_1 , éste sigue siendo mayor en la región exterior a la muestra. De la figura 4.9.c) y d) se puede observar que el tiempo característico τ_2 es mucho mayor que el tiempo característico τ_1 en casi 2 ordenes de magnitud.

En conclusión, el comportamiento mecánico temporal de esta muestra, en ensayos de fluencia está caracterizado por dos tiempos característicos, un tiempo característico corto, τ_1 (menor a 50[s]), que da cuenta de un comportamiento viscoelástico rápido, y un tiempo característico largo, τ_2 (aproximadamente 1700[s]), que da cuenta de un comportamiento viscoelástico lento, que en domina el comportamiento mecánico total de la muestra poroelástica en ensayos de fluencia.

Capítulo 5

Conclusión

Del trabajo presentado se concluyó que el modelo Kelvin-Voigt Bimodal Simple (KV-KV) es el modelo que describe con mayor precisión, alta eficiencia y versatilidad la evolución mecánica temporal de muestras poroelásticas en ensayos de fluencia.

Del estudio no restrictivo de ajuste de modelos, se concluyó que el modelo bifásico KLM, si bien realizó un ajuste con calidad aceptable ($r^2 = 0,97$), el costo computacional era muy alto (por lo menos 15 veces mayor que en los modelos reológicos) y debido a las restricciones propias del modelo, tales como las condiciones de borde e iniciales requeridas, tiene poca factibilidad técnica de ser utilizado en condiciones clínicas (exámenes en pacientes con linfedema), por lo que se descartó como opción para los estudios posteriormente realizados.

Del estudio comparativo de modelos reológicos se concluyó que el modelo que realiza ajustes de mayor calidad es el modelo KV-KV cuando el error relativo inicial es pequeño ($\chi_0^{rel} \approx 0,2\%$) mientras que cuando el error relativo inicial es grande ($\chi_0^{rel} \approx 500\%$), los modelos KV-KVC y KV-KV son los que realizan ajustes de mayor calidad ($r^2 \geq 0,97$).

Del estudio paramétrico se concluyó que ante la manipulación de los parámetros de tolerancia de los mínimos locales, g_{min} y la variación del tamaño relativo del paso, δp_{min} , sí se logra maximizar la eficiencia del algoritmo. En el caso de la

tolerancia de los mínimos locales, g_{min} , alcanza su mayor valor de eficiencia cuando $g_{min} = 10^{-3}$ y $\alpha \geq 10^3$, alcanzando un valor de 120, para el modelo KV-KV y de 22, para el modelo KV-KVC. Mientras que para la variación del tamaño relativo del paso, δp_{min} , alcanza su mayor valor de eficiencia cuando $\delta p_{min} = 10^{-5}$ y $\alpha = 10^9 \%$, alcanzando un valor de 7, para el modelo KV-KV y de 28 para el modelo KV-KVC.

Estos resultados se deben a que ambos parámetros g_{min} y δp_{min} están directamente relacionados con los criterios de detención del algoritmo LM (ecuación 3.12 y 3.13).

Del estudio de versatilidad se concluyó, que en el caso en que la muestra poroelástica era una esponja homogénea, el modelo KV-KV resultó ser más versátil que el modelo KV-KVC, donde la proporción el costo computacional ($CPUTime$) fue aproximadamente 6 veces mayor para el modelo KV-KVC que la del modelo KV-KV. El porcentaje de píxeles que obtuvieron un coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ fue de aproximadamente del 56 % para el modelo KV-KV y mientras que para el modelo KV-KVC fue de aproximadamente del 31 % . Por otro lado, para el caso en que la esponja homogénea tenía una inclusión con una densidad de poros aproximadamente 4 veces mayor (era más rígida), también el modelo KV-KV resultó ser más versátil que el modelo KV-KVC, donde se obtuvo un costo computacional para el modelo KV-KVC de aproximadamente 14 veces mayor que para el modelo KV-KV. El porcentaje de píxeles con un coeficiente de determinación $r^2 \geq 0,95$ fue aproximadamente del 70 % para el modelo KV-KV y aproximadamente del 52 % para el modelo KV-KVC. Además de la visualización de los parámetros del modelo KV-KV se determinó que el comportamiento viscoelástico lento, descrito por τ_2 , es el comportamiento que domina la evolución temporal de la deformación de la muestra poroelástica. El factor de amplitud de deformación G_2 es mayor al factor de amplitud de deformación G_1 y que respuesta viscoelástica rápida τ_1 está presente dentro de los primeros 30[s] (tiempo característico τ_1) y la respuesta viscoelástica lenta se logra apreciar después de los 1000[s] (tiempo característico τ_2).

Capítulo 6

Perspectivas

Por último, de los resultados obtenidos en este trabajo, las perspectivas de trabajos futuros a realizar son:

- Estudio que relacione las propiedades poroelásticas (permeabilidad) con los parámetros de modelos viscoelásticos:
 1. Variación de la densidad de poros del material: Utilizar esponjas con distinta densidad de poros, de manera de caracterizar estos materiales y poder comparar los comportamientos mecánicos temporales de éstos.
 2. Variación de cambios en la impedancia acústica del material: Utilizar otra combinación de esponja-inclusión, donde la proporción de densidad de poros sea muy similar o cuando la esponja tenga una mayor rigidez que la inclusión.
 3. Variación de la viscosidad efectiva del material: Utilizar fluidos de distinta viscosidad para saturar la muestra poroelástica de manera de conocer como afecta la variación de la viscosidad efectiva de la muestra (esponja-fluido) su comportamiento mecánico temporal.

- Estudios clínicos en pacientes con linfedema:
 1. Establecer protocolo de medición en pacientes con linfedema: duración del ensayo y esfuerzo aplicado.
 2. Establecer parámetros de interés que influyen la calidad de elastogramas de deformación axial (ASE).
 3. Estudio de factibilidad: Distinción de etapas iniciales (diagnóstico prematuro) y guía de tratamientos para el Linfedema.

Bibliografía

- [1] J Ophir, I Céspedes, Hm Ponnekanti, Y Yazdi, and X Li. Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues. *Ultrasonic imaging*, 13(2):111–134, 1991.
- [2] J Ophir, SK Alam, B Garra, F Kallel, E Konofagou, T Krouskop, and T Varghese. Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 213(3):203–233, 1999.
- [3] I Céspedes, J Ophir, H Ponnekanti, and N Maklad. Elastography: elasticity imaging using ultrasound with application to muscle and breast in vivo. *Ultrasonic Imaging*, 15(2):73–88, 1993.
- [4] Brian S Garra, E Ignacio Céspedes, J Ophir, Stephen R Spratt, Rebecca A Zuurbier, Colette M Magnant, and Marie F Pennanen. Elastography of breast lesions: initial clinical results. *Radiology*, 202(1):79–86, 1997.
- [5] A. Lorenz, H. Sommerfeld, M. Garcia-Schurmann, and et al. A new system for the acquisition of ultrasonic multicompression strain images of the human prostate in vivo. *IEEE Trans Ultrason Ferroelec Freq Control*, 46(5):1147–1153, 1999.
- [6] Karsten Mark Hiltawsky, Martin Krüger, Claudia Starke, Lothar Heuser, Helmut Ermert, and Arne Jensen. Freehand ultrasound elastography of breast

- lesions: clinical results. *Ultrasound in medicine & biology*, 27(11):1461–1469, 2001.
- [7] R. Souchon, O. Rouviere, A. Gelet, V. Detti, S. Srinivasan, J. Ophir, and J. Y. Chapelon. Visualization of hifu lesions using elastography of the human prostate in vivo: preliminary results. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 29:1007–1015, 2003.
- [8] A. Lyshchik, T. Higashi, R. Asato, S. Tanaka, J. Ito, J. J. Mai, C. Pellot-Barakat, M.F. Insana, A. B. Brill, T. Saga, M. Hiraoka, and K. Togashi. Thyroid gland tumor diagnosis at us elastography. *Radiology*, 237(1):202–211, 2005.
- [9] Unmin Bae, Manjiri Dighe, Theodore Dubinsky, Satoshi Minoshima, Vijay Shamdasani, and Yongmin Kim. Ultrasound thyroid elastography using carotid artery pulsation preliminary study. *Journal of Ultrasound in Medicine*, 26(6):797–805, 2007.
- [10] Adrian Săftoiu and Peter Vilman. Endoscopic ultrasound elastography—a new imaging technique for the visualization of tissue elasticity distribution. *Journal of Gastrointestinal and Liver Diseases*, 15(2):161, 2006.
- [11] R. Righetti, F. Kallel, R. J. Stafford, R. E. Price, T. A. Krouskop, J. D. Hazle, and J. Ophir. Elastographic characterization of hifu-induced lesions in canine livers. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 25(7):1099–1113, 1999.
- [12] S. Bharat, U. Techavipoo, M. Kiss, W. Liu, and T. Varghese. Monitoring stiffness changes in lesions after radiofrequency ablation at different temperatures and durations of ablation. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 31:415–422, 2005.
- [13] R. Souchon, G. Bouchoux, E. Maciejko, C. Lafon, D. Cathignol, M. Bertrand, and J. Chapelon. Monitoring the formation of thermal lesions with heat-induced echo-strain imaging: a feasibility study. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 31:251–259, 2005.

- [14] C. de Korte, G. Pasterkamp, A. F. W van der Steen, H. A. Woutman, and N. Bom. Characterization of plaque components with intravascular ultrasound elastography in human femoral and coronary arteries in vitro. *Circulation*, 102:617–623, 2000.
- [15] Seshadri Srinivasan, T Krouskop, and Jonathan Ophir. Comparing elastographic strain images with modulus images obtained using nanoindentation: preliminary results using phantoms and tissue samples. *Ultrasound in medicine & biology*, 30(3):329–343, 2004.
- [16] S Srinivasan, T Krouskop, and J Ophir. A quantitative comparison of modulus images obtained using nanoindentation with strain elastograms. *Ultrasound in medicine & biology*, 30(7):899–918, 2004.
- [17] Raffaella Righetti, Jonathan Ophir, Seshadri Srinivasan, and Thomas A Krouskop. The feasibility of using elastography for imaging the poisson’s ratio in porous media. *Ultrasound in medicine & biology*, 30(2):215–228, 2004.
- [18] Raffaella Righetti, Jonathan Ophir, and Thomas A Krouskop. A method for generating permeability elastograms and poissons ratio time-constant elastograms. *Ultrasound in medicine & biology*, 31(6):803–816, 2005.
- [19] Raffaella Righetti, Mariapaola Righetti, Jonathan Ophir, and Thomas A Krouskop. The feasibility of estimating and imaging the mechanical behavior of poroelastic materials using axial strain elastography. *Physics in medicine and biology*, 52(11):3241, 2007.
- [20] Elisa E Konofagou, Timothy P Harrigan, Jonathan Ophir, and Thomas A Krouskop. Poroelastography: imaging the poroelastic properties of tissues. *Ultrasound in medicine & biology*, 27(10):1387–1397, 2001.

- [21] R. Righetti, J. Ophir, R. M. Chandrasekhar, B. S. Garra, and T. A. Krouskop. A new method for generating poroelastograms in noisy environments. *Ultrasonic Imaging*, 27:181–198, 2005.
- [22] Gearóid P Berry, Jeffrey C Bamber, Cecil G Armstrong, Naomi R Miller, and Paul E Barbone. Towards an acoustic model-based poroelastic imaging method: I. theoretical foundation. *Ultrasound in medicine & biology*, 32(4):547–567, 2006.
- [23] M Sridhar, J Liu, and MF Insana. Viscoelasticity imaging using ultrasound: parameters and error analysis. *Physics in medicine and biology*, 52(9):2425, 2007.
- [24] Ingolf Sack, Bernd Beierbach, Uwe Hamhaber, Dieter Klatt, and Jrgen Braun. Non-invasive measurement of brain viscoelasticity using magnetic resonance elastography. *NMR in Biomedicine*, 21(3):265–271, 2008.
- [25] JJ Ammann, R Rivera, and J Ophir. Rheological modeling of the time-dependent behavior of poroelastic materials under creep test experiments 5th int. In *Conf. Ultrasonic Measurement of Tissue Elasticity (Snowbird, UT)*, pages 8–11, 2006.
- [26] Sanjay P Nair, Xu Yang, Thomas A Krouskop, and Raffaella Righetti. Performance analysis of a new real-time elastographic time constant estimator. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 30(2):497–511, 2011.
- [27] TA Krouskop, DR Dougherty, FS Vinson, et al. A pulsed doppler ultrasonic system for making noninvasive measurements of the mechanical properties of soft tissue. *J Rehabil Res Dev*, 24(2):1–8, 1987.
- [28] Raffaella Righetti, Brian S Garra, Louise M Mobbs, Christina M Kraemer-Chant, Jonathan Ophir, and Thomas A Krouskop. The feasibility of using

- poroelastographic techniques for distinguishing between normal and lymphedematous tissues in vivo. *Physics in medicine and biology*, 52(21):6525, 2007.
- [29] Yupeng Qiu, Mallika Sridhar, Jean K Tsou, Karen K Lindfors, and Michael F Insana. Ultrasonic viscoelasticity imaging of nonpalpable breast tumors: preliminary results. *Academic radiology*, 15(12):1526–1533, 2008.
- [30] Paolo A Netti, Laurence T Baxter, Yves Boucher, Richard Skalak, and Rakesh K Jain. Macro-and microscopic fluid transport in living tissues: Application to solid tumors. *AIChE journal*, 43(3):818–834, 1997.
- [31] D Ambrosi and F Mollica. On the mechanics of a growing tumor. *International journal of engineering science*, 40(12):1297–1316, 2002.
- [32] YUP Samarin. Construction of exponential approximations for creep curves by the successive separation of exponential terms. *Problemy Prochnosti*, (9):24–27, 1974.
- [33] YC Fung. *Biomechanics: biomechanical properties of living tissues*, 1981.
- [34] CG Armstrong, WM Lai, and VC Mow. An analysis of the unconfined compression of articular cartilage. *Journal of biomechanical engineering*, 106(2):165–173, 1984.
- [35] Gearóid P Berry, Jeffrey C Bamber, Naomi R Miller, Paul E Barbone, Nigel L Bush, and Cecil G Armstrong. Towards an acoustic model-based poroelastic imaging method: Ii. experimental investigation. *Ultrasound in medicine & biology*, 32(12):1869–1885, 2006.
- [36] Ricardo Leiderman, Paul E Barbone, Assad A Oberai, and Jeffrey C Bamber. Coupling between elastic strain and interstitial fluid flow: ramifications for poroelastic imaging. *Physics in medicine and biology*, 51(24):6291, 2006.

- [37] Reint De Boer. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory. *Applied Mechanics Reviews*, 49(4):201–262, 1996.
- [38] Bear Jacob. Dynamics of fluids in porous media. *Soil Science*, 1972.
- [39] Jacob Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation, 2013.
- [40] RE Collins. Flow of fluids through porous materials. 1961.
- [41] Maurice A Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2):155–164, 1941.
- [42] James R Rice and Michael P Cleary. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics*, 14(2):227–241, 1976.
- [43] JR Rice. Elasticity of fluid-infiltrated porous solids (poroelasticity). *Stress*, 2:2, 1998.
- [44] Herbert F Wang. Theory of linear poroelasticity. *Princeton Series in Geophysics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.
- [45] DS Chandrasekharaiah and SC Cowin. A complete solution for a unified system of field equations of thermoelasticity and poroelasticity. *Acta mechanica*, 99(1-4):225–233, 1993.
- [46] Clifford Truesdell and Richard Toupin. *The classical field theories*. Springer, 1960.
- [47] PA Torzilli and Van C Mow. On the fundamental fluid transport mechanisms through normal and pathological articular cartilage during function: the formulation. *Journal of biomechanics*, 9(8):541–552, 1976.

- [48] VC Mow, SC Kuei, WM Lai, and CG Armstrong. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments. *Journal of biomechanical engineering*, 102(1):73–84, 1980.
- [49] Ray M Bowen. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science*, 18(9):1129–1148, 1980.
- [50] Ray M Bowen. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science*, 20(6):697–735, 1982.
- [51] CG Armstrong, WM Lai, and VC Mow. An analysis of the unconfined compression of articular cartilage. *Journal of biomechanical engineering*, 106(2):165–173, 1984.
- [52] WM Lai, JS Hou, and VC Mow. A triphasic theory for the swelling properties of hydrated charged soft biological tissues. In *Biomechanics of diarthrodial joints*, pages 283–312. Springer, 1990.
- [53] SC Cowin, S Weinbaum, and Yu Zeng. A case for bone canaliculi as the anatomical site of strain generated potentials. *Journal of biomechanics*, 28(11):1281–1297, 1995.
- [54] Stephen C Cowin. Bone poroelasticity. *Journal of biomechanics*, 32(3):217–238, 1999.
- [55] Yuan-Cheng Fung. *Biomechanics*. Springer, 1990.
- [56] JZ Wu, W Herzog, and M Epstein. Evaluation of the finite element software abaqus for biomechanical modelling of biphasic tissues. *Journal of biomechanics*, 31(2):165–169, 1997.
- [57] Dieter Klatt, Uwe Hamhaber, Patrick Asbach, Jürgen Braun, and Ingolf Sack. Noninvasive assessment of the rheological behavior of human organs using mul-

- tifrequency mr elastography: a study of brain and liver viscoelasticity. *Physics in medicine and biology*, 52(24):7281, 2007.
- [58] Roxana Chotard-Ghodsnia and Claude Verdier. Rheology of living materials. In *Modeling of biological Materials*, pages 1–31. Springer, 2007.
- [59] Alexandr V Kobelev, RIMMA M Kobeleva, YURIJ L Protsenko, and Irina V Berman. 2d rheological models for stress relaxation and creep in living soft tissues. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 7(1):23, 2005.
- [60] Mostafa Fatemi and Avinash C Kak. Ultrasonic b-scan imaging: Theory of image formation and a technique for restoration1. *Ultrasonic Imaging*, 2(1):1–47, 1980.
- [61] Jørgen A Jensen. Ultrasound imaging and its modeling. In *Imaging of Complex Media with Acoustic and Seismic Waves*, pages 135–166. Springer, 2002.
- [62] Jørgen Arendt Jensen. A model for the propagation and scattering of ultrasound in tissue. *Acoustical Society of America. Journal*, 89(1):182–190, 1991.
- [63] Thomas L Szabo. *Diagnostic ultrasound imaging: inside out*. Academic Press, 2004.
- [64] K Kirk Shung and Gary A Thieme. *Ultrasonic scattering in biological tissues*. CRC Press, 1992.
- [65] Robert F Wagner, Stephen W Smith, John M Sandrik, and Hector Lopez. Statistics of speckle in ultrasound b-scans. *Sonics and Ultrasonics, IEEE Transactions on*, 30(3):156–163, 1983.
- [66] TA Tuthill, RH Sperry, and KJ Parker. Deviations from rayleigh statistics in ultrasonic speckle. *Ultrasonic imaging*, 10(2):81–89, 1988.

- [67] G Parry and J Dainty. Laser speckle and related phenomena. *Topics in Applied Physics Series*, 1984.
- [68] Armen Sarvazyan. Shear acoustic properties of soft biological tissues in medical diagnostics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(4):2329–2330, 1993.
- [69] Jonathan Ophir, S Kaiser Alam, Brian S Garra, Faouzi Kallel, Elisa E Konofagou, Thomas Krouskop, Christopher RB Merritt, Raffaella Righetti, Remi Souchon, Seshadri Srinivasan, et al. Elastography: imaging the elastic properties of soft tissues with ultrasound. *Journal of Medical Ultrasonics*, 29(4):155–171, 2002.
- [70] Jean Amman, Ricardo Rivera, and Jonathan Ophir. Viscoelastic characterization of soft materials through creep test experiments. *Fourth Intentional Conference on the Ultrasonic Measurement and Imaging of Tissues Elasticity*, 4(1):54, 2005.
- [71] Kenneth Hoyt, Flemming Forsberg, and Jonathan Ophir. Comparison of shift estimation strategies in spectral elastography. *Ultrasonics*, 44(1):99–108, 2006.
- [72] Arun K Thittai, Belfor Galaz, and Jonathan Ophir. Axial–shear strain distributions in an elliptical inclusion model: Experimental validation and in vivo examples with implications to breast tumor classification. *Ultrasound in medicine & biology*, 36(5):814–820, 2010.
- [73] Yanning Zhu and Timothy J Hall. A modified block matching method for real-time freehand strain imaging. *Ultrasonic Imaging*, 24(3):161–176, 2002.
- [74] Hairong Shi and Tomy Varghese. Two-dimensional multi-level strain estimation for discontinuous tissue. *Physics in medicine and biology*, 52(2):389, 2007.

- [75] Richard GP Lopata, Maartje M Nillesen, Hendrik HG Hansen, Inge H Gerrits, Johan M Thijssen, and Chris L De Korte. Performance evaluation of methods for two-dimensional displacement and strain estimation using ultrasound radio frequency data. *Ultrasound in medicine & biology*, 35(5):796–812, 2009.
- [76] S Srinivasan, J Ophir, and SK Alam. Elastographic imaging using staggered strain estimates. *Ultrasonic Imaging*, 24(4):229–245, 2002.
- [77] Kaj Madsen, Hans Bruun, and Ole Tingleff. Methods for non-linear least squares problems. 1999.