

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE FISICA



**DIRECCIÓN GENERALIZA DE FRACTURA Y DIAGRAMA DE  
WULFF  
EN RASGADO DE LAMINAS DELGADAS ANISOTROPICAS**

ALEJANDRO ARTURO IBARRA ORELLANA

Profesor Guía: Dr. Francisco Melo

Trabajo de Titulación,  
para optar  
al título de Ingeniero Físico.

SANTIAGO DE CHILE  
SEPTIEMBRE 2015

"DIRECCIÓN GENERALIZA DE FRACTURA Y DIAGRAMA DE WULFF  
EN RASGADO DE LAMINAS DELGADAS ANISOTROPICAS"

ALEJANDRO ARTURO IBARRA ORELLANA

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Francisco Melo H., del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato, Dr. Iaroslav Ispolatov, Dr. Raúl Cordero y Dr. Luis Gaete.

.....  
Dr. Iaroslav Ispolatov

.....  
Dr. Raúl Cordero

.....  
Dr. Luis Gaete

.....  
Yolanda Vargas  
Directora

.....  
Dr. Francisco Melo  
Profesor Guía

©**Alejandro Arturo Ibarra Orellana.**

Creative Commons Atribucion-NoComercial Chile 3.0.

<<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/cl/>>

*Dedicado a  
mi familia...*

# Agradecimientos

Mi paso por los estudios de educación superior se lo debo principalmente a mi familia, la cual me brindo el apoyo para cursar este proceso, dándome la libertad de enfocarme en mis estudios. Esto lo aprecio al final de este proceso ya que muchos otros compañeros con mejores aptitudes no pudieron completar este programa de estudios sin ese crucial apoyo. A mi madre María Angélica por su incondicional apoyo en todos los aspectos, a mi padre, Federico, por su paciencia y comprensión a mi mal carácter, a Gonzalo, mi hermano que lo admiro profundamente por su carácter perseverante e impetuoso y a mi hermana Carolina por su afecto y demostrarme que podemos aprender de las personas que menos lo esperamos.

Debo agradecer a los integrantes del laboratorio de física no lineal, donde realice mi trabajo de tesis, al profesor Francisco Melo, por su guía en este proceso, a los profesores Francisco Vivanco y Leonardo Caballero por su buena disposición a brindarme su ayuda, a Javier Pastenes por sus acertados consejos en el proceso de composición de la tesis y a mis compañeros dentro del laboratorio Oscar y Víctor.

A los buenos amigos que hice en la carrera, Javier Enríquez, Josué Meneses y muchos otros con los cuales tuve cursos o realice trabajos y compartí en a lo largo de la carrera, me siento muy afortunado de haber conocido gente como ellos.

Y para finalizar al departamento de física de la Universidad de Santiago.

# Tabla de Contenido

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Tabla de Contenidos</b>	<b>III</b>
<b>Índice de Ilustraciones</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	4
1.2.1 Objetivo General . . . . .	4
1.2.2 Objetivos específicos . . . . .	4
<b>2 Caracterizacion</b>	<b>5</b>
2.1 Caracterización de láminas delgadas . . . . .	6
2.2 Trouser Test . . . . .	7
<b>3 Problema de O'keefe</b>	<b>11</b>
3.1 Modelo teórico . . . . .	12
3.2 Montaje experimental y Método de análisis de datos . . . . .	15
3.3 Resultados . . . . .	17
<b>4 Problema de la Regla</b>	<b>21</b>
4.1 Modelo Teórico . . . . .	22
4.2 Montaje experimental . . . . .	25

4.3	Resultados experimentales . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>35</b>
5.1	Conclusiones . . . . .	36
5.2	Proyecciones . . . . .	38
<b>A</b>	<b>Desarrollo de Cálculos</b>	<b>39</b>
A.1	Fractura hiperbólica en caso isotropico . . . . .	39
A.2	Trayectoria de fractura problema de O'keefe caso anisotropico . . . . .	41
A.3	Desarrollo de la influencia del pliegue . . . . .	45
A.4	Solución Analítica Problema de la regla . . . . .	47

# Índice de Ilustraciones

2.1	Caracterización de material . . . . .	6
2.2	Trouser Test, Diagrama . . . . .	7
2.3	Trouser Test, Fuerza . . . . .	8
2.4	Mapa de anisotropía . . . . .	8
2.5	Trouser test, configuración del pliegue . . . . .	9
3.1	Diagramas y Fuerza problema de O'keefe . . . . .	12
3.2	Representación gráfica calculo de dirección de fractura . . . . .	14
3.3	Diagrama de montaje experimental, experimento O'keefe . . . . .	16
3.4	Fracturas dirección $\theta_0 = 0$ respecto al material . . . . .	17
3.5	Fracturas dirección $\theta_0 = \pi/4$ respecto al material . . . . .	18
3.6	Fuerza opuesta por el material . . . . .	19
3.7	Comparación trayectorias analíticas y las calculadas mediante el método exacto . . . . .	20
4.1	Diagrama de vectores para el problema de la regla . . . . .	22
4.2	Diagrama de fuerzas . . . . .	23
4.3	Diagrama solución analítica, problema de la regla, $\hat{r}$ horizontal . . . . .	24
4.4	Diagrama de montaje experimental rasgado con una regla . . . . .	25
4.5	Diagrama de montaje experimental rasgado con una regla fuera de la regla . . . . .	27
4.6	Gráficos fuerza y ángulos en función de $\phi, \hat{T}$ constante, $\theta_r = 30^\circ$ . . . . .	29
4.7	Gráficos fuerza y ángulos en función de $\phi, \hat{T}$ constante, $\theta_r = 90^\circ$ . . . . .	30
4.8	Gráficos fuerza en función $\phi, \hat{r}$ constante, $\theta_r = 30^\circ$ . . . . .	31
4.9	Trayectoria de la fractura fuera de la regla . . . . .	32
4.10	Fuerza experimentada por fractura fuera de la regla . . . . .	34
A.1	Diagrama de hipérbola en el problema de O'keefe . . . . .	39
A.2	Diagrama de problema de O'keefe . . . . .	41

A.3 Diagrama problema de la regla . . . . .	45
---	----

# Resumen

Nuestro estudio exploró las fracturas mediante rasgado en películas delgadas. El rasgado se caracteriza por el efecto del cizalle en la cabeza de la fractura que resulta de los desplazamientos fuera del plano aplicados a la película, ejemplos simples de aquello son abrir un envase de galletas o romper una hoja de papel. Puesto que se trata de láminas delgadas, la energía elástica acumulada en el material es baja y el efecto de la fuerza externa se puede focalizar directamente sobre la fractura, lo que permite un análisis más simple y solamente basado en el trabajo de la fuerza externa y el criterio de Griffiths.

El objetivo de este trabajo es estudiar el efecto de la anisotropía en la trayectoria que sigue la fractura. Se propone un método para predecir el ángulo de fractura en función de la dirección efectiva de la fuerza aplicada sobre la fractura y del mapa de energía de fractura del material. Para ello primero se caracteriza la energía de fractura del material mediante el "trouser test" lo que llevó a seleccionar un material que tiene solo dos ejes de simetría uno de baja y otro de alta energía.

Se estudió el problema de O'keefe, que consiste tirar de las solapas de una lámina en direcciones opuestas: rasgar una hoja de papel con las manos es el ejemplo más simple. Este problema es relevante debido a que la energía almacenada en las solapas no juega un rol relevante sobre la fractura. Se observó que las trayectorias que siguen las fracturas son hipérbolas corregidas levemente por la anisotropía y con focos en los puntos de tiro. Mediante un método numérico se logró reproducir las trayectorias observadas, y un análisis en coordenadas hiperbólicas permitió encontrar una ecuación diferencial que predice correctamente la trayectoria de fractura en el caso débilmente anisotrópico.

Adicionalmente se estudió el problema del rasgado dirigido por una regla, la que se simuló por medio de un objeto con borde afilado y la acción de tirar sobre la solapa libre. Se observa que la anisotropía corrige las trayectorias hacia las direcciones de baja energía, también se observó que el pliegue aplica una fuerza en la dirección normal al filo de la regla, lo que aleja a la fractura de la regla. Cuando la fractura es forzada a seguir la dirección de la regla, la fuerza aumenta en función de la diferencia entre la dirección de tiro y la dirección de la regla.

# **Capítulo 1**

## **Introducción**

## 1.1 Introducción

Las láminas delgadas son materiales con espesor mucho menor que sus otras dimensiones, típicamente tienen espesores que van desde algunos nanómetros a varios micrómetros, y su comportamiento mecánico bajo distintas condiciones las convierten en materiales atractivos para aplicaciones tecnológicas. Entre sus aplicaciones se encuentran revestimientos térmicos, envoltorios para circuitos electrónicos, circuitos electrónicos flexibles, protección ante la abrasión o químicos entre otros usos. Sus particulares propiedades mecánicas se deben a que la rigidez en flexión y estiramiento (bending and stretching stiffness) disminuyen con el espesor de manera distinta, conduciendo a situaciones dominadas por la flexión.

La formación y la propagación de la fractura son fenómenos que han sido estudiados para entender cómo evitarlos, pero últimamente se ha vuelto relevante el control de la evolución de la fractura, o la formación de nuevas estructuras [1, 2] bajo distintos mecanismos de proliferación de fractura controlada. En el estudio de la evolución de la fractura se han encontrado fracturas en forma de espiral [3], o fracturas en zig zag al forzar la fractura mediante un objeto cilíndrico [4]. Otros trabajos estudian la evolución de una fractura de láminas adheridas a una superficie [5, 2]. En estos experimentos se producen fracturas bajo diversos mecanismos que involucran también la energía de adhesión de la película al sustrato, lo que conduce a la formación de estructuras o trayectorias de la fractura que son aún más intrincadas. Todo esto ha conducido a pensar que la fractura puede usarse como un método válido de formación de patrones de variados usos en microelectrónica y materiales inteligentes.

Las fracturas en láminas delgadas en comparación con materiales macizos son altamente reproducibles y proveen información del material. Otra característica interesante de estas películas es que la propagación de la fractura está asociada a la deformación impuesta, esto se debe a que la energía necesaria para que la fractura evolucione se compensa con que se provee de forma externa y no existe una fractura catastrófica. En otras palabras, el proceso de fractura es cuasi-estático.

El tipo de fractura estudiadas se denomina 'Tearing' o rasgado, se asocia a fracturas producidas por grandes desplazamientos fuera del plano (el plano formado por la lámina delgada antes de deformar). Ejemplos de este tipo son abrir un envoltorio plástico, rasgar en una lámina adhesiva al ser despegada de una superficie, o cortar papel con una regla. Al rasgar una lámina delgada la fuerza aplicada desde los puntos de tiro se focaliza alrededor de la fractura (la zona en la cual las tensiones se focalizan escala como  $h$ ), por lo tanto se puede asociar directamente

la fuerza medida desde los puntos de tiro con la fuerza necesaria para rasgar el material.

El problema más simple de fractura en láminas delgadas es rasgar una hoja de papel sostenida solo en dos puntos. El primer trabajo de este tipo fue realizado por O'keefe [7], quien da cuenta de los aspectos geométricos y energéticos del problema, además señala que la anisotropía es un factor en la evolución de la fractura, la cual es producidas por los procesos de fabricación. Nuestro trabajo en cambio, el efecto de la anisotropía en la fractura se introduce mediante una analogía con el mapa de Wulff [6], que describe un método para determinar la dirección de fractura a partir del mapa angular de la energía de fractura y el criterio de Griffiths generalizado.

El proceso de fractura está ligado al costo de energía superficial, ya que el proceso de fracturar un material crea dos superficies nuevas, por lo tanto la energía necesaria para rasgar la lámina debe compensar la creación de estas dos nuevas superficies.

$$2\gamma h ds = F dl \quad (1.1)$$

Podemos relacionar la fuerza  $F$  (o resistencia opuesta por el material a fracturarse) mediante el trabajo necesario para crear la fractura ( Ecuación 1.1 ), donde  $h$  es el espesor de la lámina y  $\gamma$  es la densidad de energía superficial,  $ds$  corresponde al diferencial de fractura,  $dl$  es el desplazamiento impuesto en el punto de aplicación de la fuerza.

Para abordar el problema de fracturas utilizaremos la tasa de liberación de energía por unidad de línea  $G$  o energía de fractura que equivale a  $2\gamma h$ . Debido a la naturaleza del material y los procesos de fabricación de las láminas, la densidad de energía superficial depende de las dirección donde se orientan los esfuerzos, por lo tanto la dirección de fractura dependerá de la dirección de los esfuerzos realizados, como la dirección donde la energía liberada sea un máximo (Criterio de Griffith).

En este trabajo abordaremos el problema caracterizando el material (Capítulo2) mediante el trouser test, el estudio del problema de O'keefe (Capítulo3), el cual consiste rasgar una lámina delgada tirando de dos puntos arbitrarios, este problema es interesante debido a que no existe contribución de la flexión de las solapas de tiro a la trayectoria de la fractura, por lo tanto la trayectoria depende de la configuración de los puntos de tiro y la anisotropía del material. En el capítulo 4 discutimos el efecto de restringir la movilidad de una de las solapas por un objeto afilado, debido a que existe tan solo una solapa libre la fractura se verá afectada por el posición y orientación de tiro, por la energía elástica liberada por la solapa libre y el efecto de la anisotropía del material.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

Caracterización de fracturas de láminas delgadas para fracturas realizadas por cizalle fuera del plano (Tercer modo de fractura).

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Caracterizar el utilizado para la realización de los posteriores experimentos.
- Construcción de un montaje para poder reproducir el problema de O'keefe.
- Construir un método numérico para determinar la trayectoria de fractura para el problema de O'keefe, considerando la anisotropía del material.
- Estudio del efecto en el rasgado de un material al fijar una de las solapas mediante un objeto afilado.

## **Capítulo 2**

# **Caracterización de láminas delgadas**

## 2.1 Caracterización de láminas delgadas

La caracterización de las fracturas de láminas delgadas se realizó mediante el "Trouser Test."° test de rasgado de pantalones, el test entrega información de la resistencia del material al fracturarse. Debido que el material posee características anisotropicas la dirección de propagación de fractura depende de la dirección de la fuerza aplicada y la dirección en la cual el material libere mayor energía.

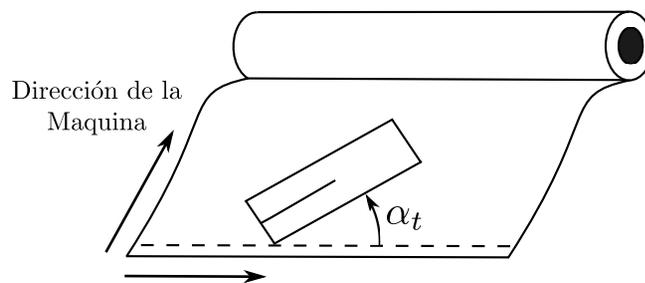


Figura 2.1: Diagrama muestras respecto al material, se puede observar que las muestras fabrican respecto a la dirección horizontal del material.

Por lo tanto la información necesaria del material es la tasa de liberación de energía  $G$  como función de  $\alpha_t$  (dirección de orientación de la muestra respecto al material, ver figura 2.1) y en función de la dirección de fractura  $\theta$ .

## 2.2 Trouser Test

El trouser test consiste en dos soportes, en el soporte superior se fija la muestra en posición vertical, el otro soporte tiene la capacidad de moverse (con velocidad constante) donde se fija la segunda solapa, en uno de los soportes se coloca una celda de carga para registrar la resistencia opuesta por el material a fracturarse. El espesor de las láminas se mantuvo constante ( $h = 50[\mu m]$ ).

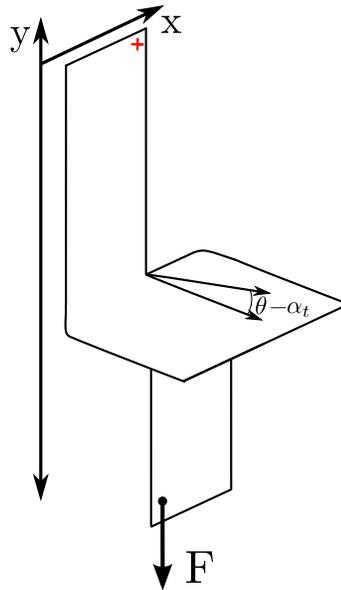


Figura 2.2: Diagrama del Trouser Test, los puntos de tiro deben corresponder a los extremos de cada solapa como se muestra en la figura, de esta manera no se introducen otros factores geométricos al proceso de caracterización, como un factor de fuerza efectiva debido a la orientación de los puntos de tiro (en el capítulo 3) se discute este efecto.

La tasa de energía liberada al realizar la fractura es igual al trabajo realizado por la fuerza, por lo tanto podemos relacionar la fuerza medida con tasa de liberación de energía superficial dado un diferencial de fractura  $ds$  producido por un desplazamiento de las solapas  $dl$  mediante la ecuación 2.1.

$$Gds = Fdl \quad (2.1)$$

El diferencial de fractura se relaciona con el desplazamiento de las solapas mediante  $2 \cos(\theta - \alpha)ds = dl$ . Por lo tanto  $G$  se relaciona con  $F$  mediante la ecuación 2.2.

$$G(\theta) = 2F \cos(\theta - \alpha) \quad (2.2)$$

Al graficar la fuerza medida en función del desplazamiento (Figura 2.3), se observa la formación de un plateau, el promedio del plateau corresponde a la fuerza opuesta por el material, el trouser test se realiza para distintos valores del ángulos  $\alpha$ , lo cual corresponde a cortar muestras a cortar muestras del material para distintas direcciones según el diagrama 2.1.

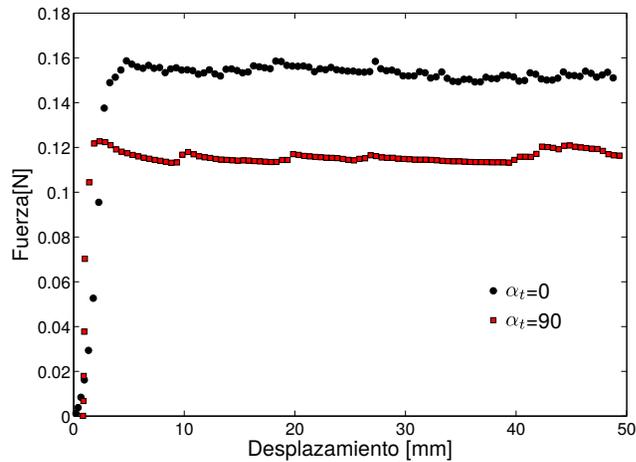


Figura 2.3: Fuerza en función del desplazamiento, medida al realizar el trouser test, la fuerza aumenta hasta alcanzar el plateau, el cual corresponde a la resistencia opuesta por el material a fracturarse, la zona de transición antes del plateau corresponde al desplazamiento para flexionar las solapas, se observa que la fuerza para una muestra en la dirección horizontal es mayor que para una en la dirección vertical del material

Mediante la información obtenida en el trouser test y la ecuación 2.2, se construyó el mapa de anisotropía del material.

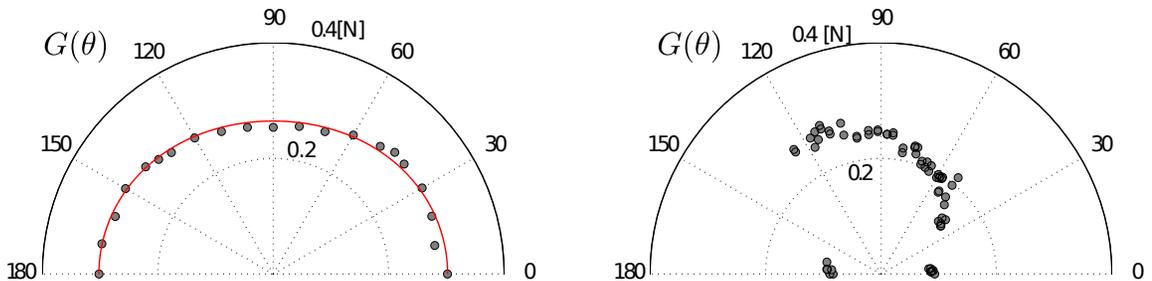


Figura 2.4: Tasa de liberación de energía en función de la dirección de fractura, el mapa de la izquierda corresponde a un material de baja anisotropía, el mapa de la derecha corresponde a un material de alta anisotropía

Los mapas de anisotropía 2.4, muestran la tasa de liberación de energía en función de la dirección de fractura, en el material de baja anisotropía existe una diferencia relativa de 14% entre la dirección vertical y horizontal, la dirección vertical de fractura es más favorable que la horizontal, la curva continua roja representa el ajuste numérico de una elipse, el eje mayor(dirección horizontal) corresponde a  $G_1 = 301,93[mN]$  ó  $\gamma_1 = 6,04[kJ/m^2]$ , el eje menor (dirección vertical) con valor  $G_2 = 264,64[mN]$  o  $\gamma_2 = 5,29[kJ/m^2]$ , a cada uno de estos ejes los llamaremos ejes de simetría uno y dos del material. En el material que muestra alta anisotropía existen direcciones rasgado donde el material elige otras direcciones de fractura, las direcciones para que el material no se fractura, delimita zonas de alta y baja energía de fractura, este fenómeno es documentado en la publicación Forbidden Directions for the Fracture of Thin Anisotropic Sheets: An Analogy with the Wulff Plot [6].

Se observa en la figura 2.2 que ambas solapas de la muestra se encuentran curvadas en direcciones opuestas, se exploró realizar este experimento curvando solo una solapa (ver 2.5), al realizar este experimento se observó que las fracturas para distintas direcciones del material se desvían alrededor de  $8^\circ$  de la dirección te tiro, esta fractura se desvía en dirección de la solapa curvada. La fuerza medida en la segunda configuración es alrededor  $24[mN]$  mayor que para la primera configuración.

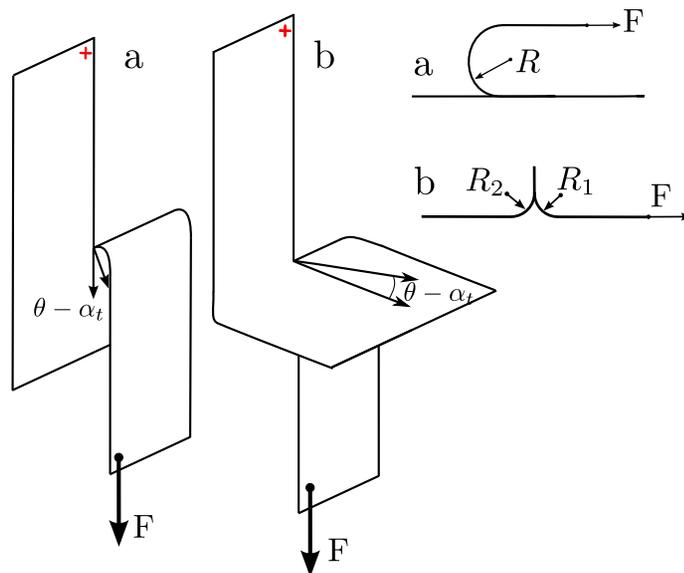


Figura 2.5: Dos configuraciones para el trouser test, la configuración B posee dos solapas curvadas en  $90^\circ$  y la configuración A posee solo una solapa curvada  $180^\circ$

La energía de una lámina doblada en forma cilíndrica es  $U = \pi Bw/R$ , depende del largo

del cilindro  $w$ , la rigidez del material  $B$  y el radio de curvatura  $R$ . Podemos atribuir la diferencia de las observaciones experimentales entre las dos configuraciones a el efecto del pliegue en la evolución de la fractura, ya que la solapa curvada disminuye su energía al disminuir su ancho por lo tanto aplica una fuerza (proporcional a  $\partial_w U$ , ver [5]) en la dirección del pliegue, en la configuración B las dos solapas tienen curvatura en sentidos opuestos por lo tanto la energía elástica total de los pliegues es cero.

## **Capítulo 3**

### **Problema de O'keefe**

### 3.1 Modelo teórico

En este capítulo se desarrolla el problema de O'keefe [7], que consiste en realizar cizalle fuera del plano a una muestra tirando de dos puntos arbitrarios, este problema es particularmente relevante ya que bajo la observaciones del capítulo anterior 2, el rol que juegan la energía elástica de las solapas es nulo, por lo tanto la fractura será guiada por la configuración de los puntos de tiro, posición de la fractura inicial y la anisotropía del material.

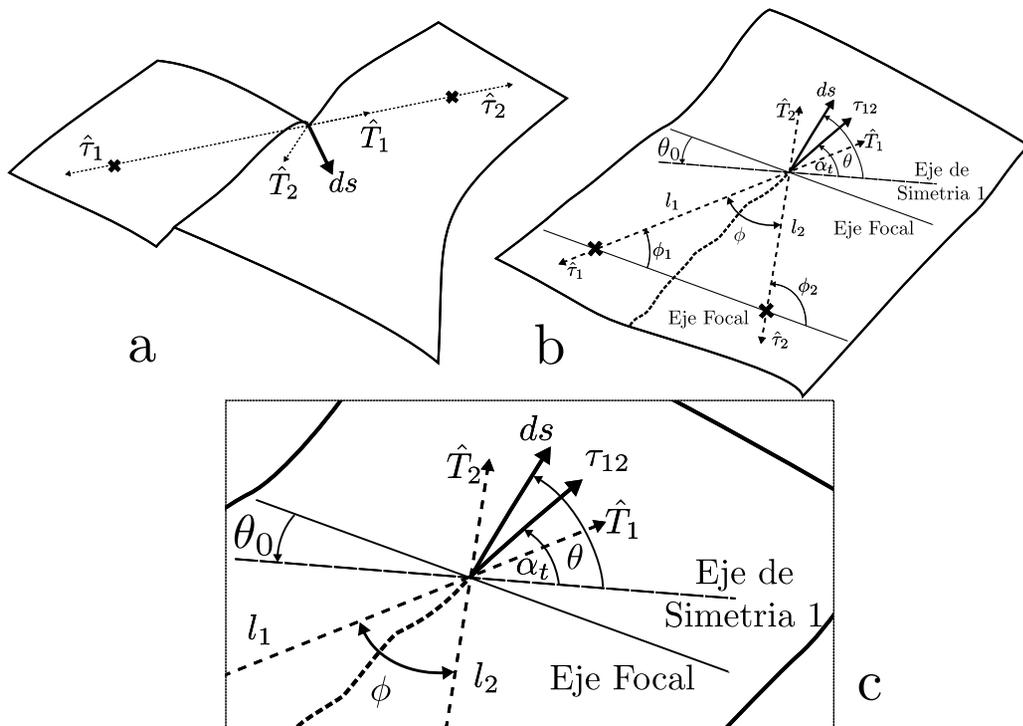


Figura 3.1: Diagrama del problema de O'keefe, se observa en la figura a) la disposición de la solapa al ser rasgada, las cruces en corresponden a la posición de los vectores de tiro  $\hat{\tau}$ , y los vectores de rasgado  $\hat{T}$ , en la figura b) se encuentra el diagrama de la lámina estirada, en este diagrama podemos definir las variables utilizadas para describir la evolución de la fractura.

Al igual que la descripción del trouser test, se determinó una expresión para la fuerza, a partir de comparar de la tasa de liberación de energía con el trabajo realizado por la fuerza. En este caso es necesario describir el crecimiento de la fractura a partir del crecimiento de cada una de las solapas dada la deformación impuesta  $dl$ , cada una de las solapas aumentara su largo en  $dl_1$  y  $dl_2$  respectivamente (Ver 3.1).

La trayectoria de la fractura se describe mediante la curva  $\vec{s}$ , en cada punto de la trayectoria podemos definir los brazos de tiro  $l_1$  y  $l_2$  (Ver 3.1,b), cada una de las rectas se intercepta la el punto de fractura con su respectivo punto de tiro. En el diagrama de la lámina estirada se define el eje focal, esta recta intercepta los dos puntos de tiro, define el ángulo  $\theta_0$  entre el eje focal y el eje horizontal de simetría del material (eje de simetría uno). En el punto de fractura podemos definir los vectores de rasgado  $\hat{T}_1$  y  $\hat{T}_2$ (ver 3.1,c), estos son la prolongación de los brazos de tiro.

En diagrama de rasgado de la lámina (3.1,a), se observa que al rasgarse la lámina los vectores de tiro  $\hat{r}$  se orientan en sentidos opuestos y se puede trazar un recta entre los puntos de tiro y el punto de fractura.

Los vectores de rasgado definen la dirección de aplicación de la fuerza, esta dirección corresponde a la mediatriz entre los vectores de rasgado, en el caso de una material isotrópico esta es la dirección de liberación de máxima energía, a este vector se denomina  $\vec{r}_{12}$ , y forma el ángulo  $\alpha_t$  con el eje de simetría uno del material. Al aplicar una deformación  $dl$  la fractura evoluciona  $d\vec{s}$ , en la dirección de evolución de la fractura podemos definir el vector unitario  $\hat{t}$ , que describe el ángulo  $\theta$  con el eje de simetría uno.

La construcción de vectores de rasgado permite relacionar el crecimiento de los brazos de fractura con los ángulos de rasgado  $\alpha_t$  y  $\theta$  la dirección de fractura (ver ecuación 3.1), el diferencial de crecimiento de cada brazo de fractura puede ser descrito como la proyección de su correspondiente vector de rasgado sobre la dirección de evolución de la fractura.

$$dl = dl_1 + dl_2 = \hat{T}_1 \cdot \hat{t} ds + \hat{T}_2 \cdot \hat{t} ds \quad (3.1)$$

Siguiendo el procedimiento del capítulo anterior (2), podemos calcular el trabajo realizado sobre la fractura por el desplazamiento  $dl$  y relacionarlo con la energía liberada por la fractura,(ver ecuación 3.2), se puede comprobar que para dos puntos de tiro iguales ( $\phi = 0$ ) se obtiene la relación 2.2.

$$G(\theta) ds = F(\hat{T}_1 + \hat{T}_2) \cdot \hat{t} ds$$

$$G(\theta) = F|\hat{T}_1 + \hat{T}_2| \cos(\theta - \alpha_t)$$

$$G(\theta) = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t) \quad (3.2)$$

El problema de O'keefe se puede estudiar como un sistema discreto, para obtener la trayectoria de la fractura dados puntos de tiro y un punto de fractura inicial, a partir de la construcción de vectores (Ver figura 3.1), podemos definir  $\vec{r}_i$  como un punto de la fractura  $\vec{s}$ , y los puntos de tiro  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$ , de esta forma  $\vec{l}_1 = \vec{r}_i - \vec{p}_1$  y  $\vec{l}_2 = \vec{r}_i - \vec{p}_2$ , si imponemos un crecimiento de

la fractura en la dirección  $\hat{t}$ , por lo tanto el próximo punto de fractura será  $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Delta l \vec{t}$ , donde  $\Delta l$  es la longitud de fractura impuesta.

La dirección de fractura es arbitraria  $\hat{t}$ , en el caso de un material isotrópico la dirección de fractura sera impuesta sera  $\vec{T}_{12}$  calculada a partir de las posiciones de tiro  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$  y la posición actual de la fractura. Para imponer propiedades anisotrópicas al material se debe determinar  $\hat{t}$  en función de las propiedades del material, para ello se utiliza la construcción propuesta por en la publicación [6], la predicción de la dirección de fractura se determina al encontrar una solución de la ecuación 3.2 para  $\theta$ , dado una dirección de tiro  $\alpha_t$ . Ya que para cada paso calculamos los vectores  $\hat{T}_1$  y  $\hat{T}_2$  podemos calcular el ángulo  $\phi$ , de esta manera podemos obtener la fuerza mediante la ecuación 3.2.

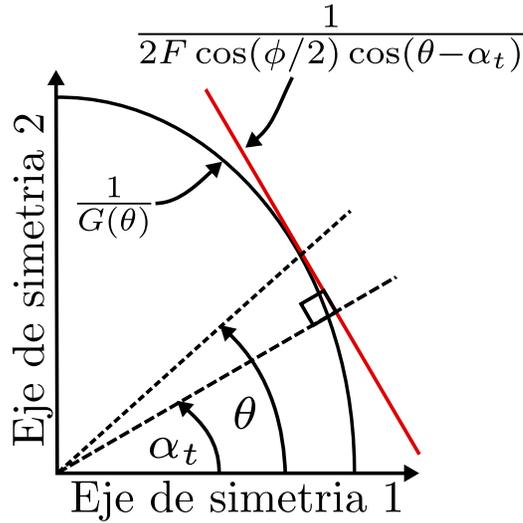


Figura 3.2: Se observa que es posible encontrar la dirección de fractura solucionando el inverso de la ecuación 3.2 de esta forma  $G(\theta)^{-1}$  es una curva y  $[2 \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t)]^{-1}$  es una recta en función de  $\theta$ , en la dirección  $\alpha_t + \pi/2$ , la dirección de fractura corresponde a la intercepción entre la recta y la curva  $G(\theta)^{-1}$

Ya que cada brazo de tiro crece en la misma cantidad, se espera que  $|l_1 - l_2| = cte$  en el caso isotrópico, lo cual corresponde a una hipérbola (mediante el marco geométrico anteriormente expuesto esto se demuestra en el apéndice A.1).

Para desarrollar una descripción analítica de la fractura en el caso anisotrópico se introducen las variables  $u = (l_1 - l_2)/2c$  y  $v = (l_1 + l_2)/2c$  (El termino  $2c$  corresponde a la distancia entre los dos puntos de tiro) de esta forma llevamos el problema a un sistema de coordenadas hiperbólicas. En el apéndice A.2 se desarrollan los argumentos matemáticos para

derivar la ecuación 3.3. Se puede observar que los existen dos términos, el que es acompañado por  $\cos(2\theta_0)$  corresponde cuando algunos de los ejes de simetría coincide con el eje focal, el termino con  $\sin(2\theta_0)$  corresponde a el eje focal no coincidente con los ejes de simetría. En el apéndice (A.2) se discute una aproximación para encontrar una solución analítica. De todas maneras esta ecuación puede ser resulta numéricamente para todo el espacio de parámetros iniciales posibles ( $|u_0| < 1$ ). El termino  $\Delta G$  corresponde a la diferencia en la energía de fractura entre los los ejes de simetría del material y el termino  $G_0$  al promedio.

$$\frac{du}{dv} = \frac{\Delta G}{G_0} \left[ 2uv \frac{u^2 - 1}{v^2 - u^2} \cos(2\theta_0) + \sqrt{\frac{1 - u^2}{v^2 - 1}} \left\{ \frac{v^2 + u^2 - 2v^2u^2}{v^2 - u^2} \right\} \sin(2\theta_0) \right] \quad (3.3)$$

## 3.2 Montaje experimental y Método de análisis de datos

Para poder replicar el fenómeno se construyó el montaje expuesto en la figura 3.3, mediante el cual podemos fijar las posiciones de tiro y para una muestra con una pequeña fractura inicial. Los puntos de tiro esta soportados en dos pinzas con puntas esféricas, para que al evolucionar la fractura el punto de la fractura se pueda alinear con los puntos de tiro, las muestras tienen una separación entre los focos de  $100[mm]$  y la posición inicial de la fractura varía entre  $10[mm]$  a  $90[mm]$  respecto a uno de los focos. La muestra es posicionada en las pinzas como se muestra en la figura 3.3, para medir la fuerza es utilizada una celda de carga Futek de resolución  $0,001[N]$  y rango de  $8,896[N]$ , la cual está asociada a una de las pinzas, el sistema es desplazado mediante un servo motor Thorlabs, el cual puede medir el desplazamiento realizado con una resolución de  $1[\mu m]$ , para automatizar el proceso se construye un programa en Labview, en el cual se fija la velocidad de tiro ( $1[mm/s]$ ), y se registra la posición, tiempo y fuerza. Como de observa en el capítulo anterior 2, las fuerzas de fractura oscilan alrededor de  $150[mN]$ , pero si observamos la ecuación 3.2, y despejamos la fuerza se observa que esta se comporta como  $\cos(\phi/2)^{-1}$ , por lo tanto en el caso de  $\phi$  cercanos  $\pi$  se espera que  $F \gg G$ , por lo tanto para explorar estas configuraciones el montaje debe soportar fuerzas del orden de algunos newton.

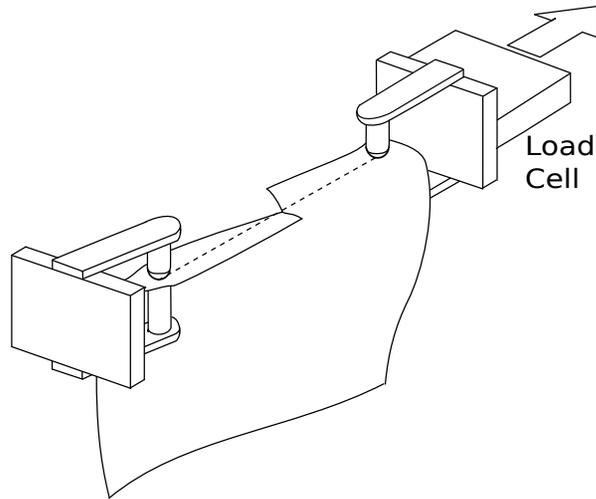


Figura 3.3: Diagrama del montaje experimental utilizado en el experimento de O'keefe, se observa que los soportes tienen extremos esféricos para que las solapas puedan girar en los puntos de tiro

Cuando una muestra ya es sometida al ensayo mecánico anteriormente expuesto, la trayectoria que sigue la fractura se mide mediante una fotografía de la muestra.

Para obtener el camino de la fractura se realiza análisis de imágenes, de esta forma se obtiene una descripción cartesiana de la fractura, para ello se debe seleccionar un punto inicial para poder reconstruir el camino de la fractura en la imagen. El método utilizado para seguir la fractura en la imagen a partir del punto inicial de fractura, consiste en buscar los pixeles que corresponden a fractura (buscar máximos locales), en la dirección de evolución de la fractura, para lograr esto la imagen la fractura es capturada utilizando iluminación rasante de esta forma se aumenta el contraste de la fractura en la lámina transparente, luego podemos aumentar más el contraste de la imagen obtenida mediante métodos numéricos. Para poder relacionar la fuerza y el desplazamiento (del servomotor) con el camino que sigue la fractura, se debe determinar el punto (en el set de datos desplazamiento / fuerza) donde la fractura se empieza a propagar, ese punto corresponde a la máxima resistencia opuesta por el material, de esta forma podemos relacionar el punto inicia de la fractura con la fuerza (A este punto también se fija como posición inicial desplazamiento del servo  $l = 0$ ), para relacionar el resto de puntos de la fractura debemos relacionar la extensión de los brazos de la fractura con el desplazamiento registrado por el servo motor, si fijamos las posiciones de tiro podemos determinar los brazos de tiro para cada punto en la fractura, los cuales se relacionan con el desplazamiento realizado mediante  $|l_1| + |l_2| = l$ , de esta forma cada punto de fractura tiene asociado fuerza, desplazamiento del servo y tiempo,

este proceso se realiza iterativamente buscando disminuir el error entre la fuerza observada y la calculada a través de los parámetros geométricos en la imagen, el parámetro que se cambia en el proceso iterativo es el punto inicial en una vecindad del punto inicial seleccionado manualmente.

Ya que se fijaron los puntos de tiro y la posición inicial de la fractura, podemos realizar una reconstrucción de la fractura mediante el método discreto expuesto en el marco teórico, así podemos compararlos con los resultados experimentales.

### 3.3 Resultados

Se realizaron experimentos para muestras en la dirección vertical del material ( $\theta_0 = 0$ ), la cual es la dirección más favorable de fractura, y para la dirección  $\theta_0 = \pi/4$ . La separación entre los puntos de tiro se mantuvo constante y se varia la posición inicial de la fractura, cada ensayo se clasifica con el nombre PXX donde XX corresponde a la posición del punto de fractura inicial respecto al punto de tiro izquierdo.

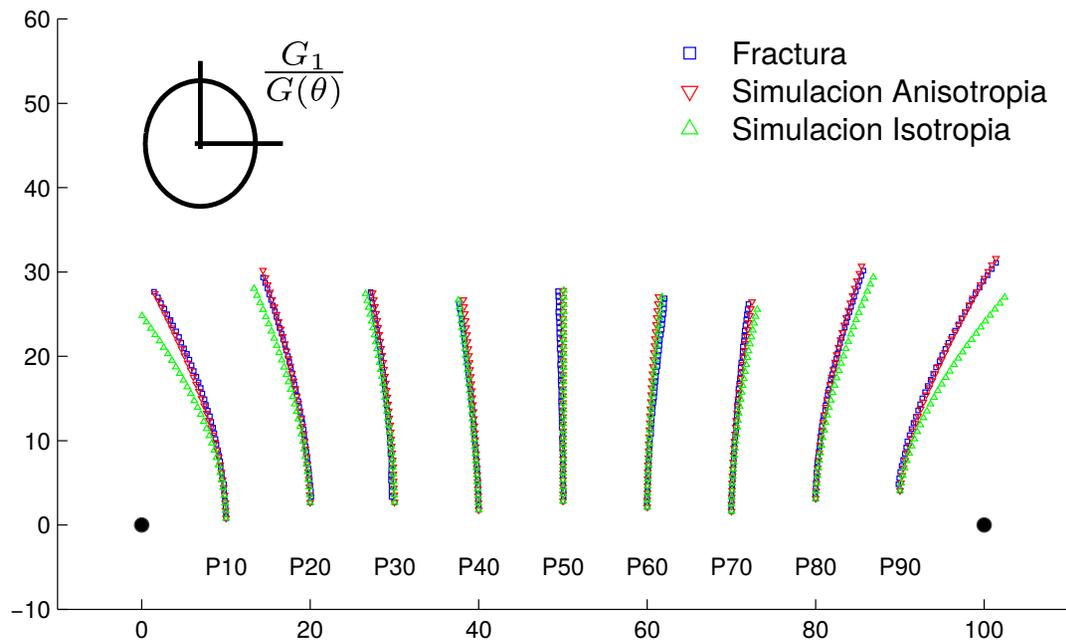


Figura 3.4: Camino de las fracturas para distintos puntos iniciales de fractura, estas muestras son cortadas en la dirección más favorable del material, los círculos negros en las posiciones (0,0) y (100,0) corresponde a los puntos de tiro o focos de la hipérbolas

Se observa en 3.4, que el camino de las fracturas son hipérbolas las cuales son corregidas por el efecto de la anisotropía del material, se observa que la corrección se realiza hacia la dirección  $\theta_0 = 0$ , y el efecto es simétrico para posiciones a la derecha e izquierda de la fractura P50, en el caso de P50 la dirección de tiro coincide con la dirección más favorable del material, por lo tanto no observamos desviaciones en respecto del caso isotrópico. Los fracturas construidas mediante el método discreto se ajustan para el caso anisotrópico, pero se puede observar que el caso isotrópico se desvía de la fractura observada, este efecto se ve acentuado en los casos donde la fractura inicial se encuentra más cercana a los puntos de tiro.

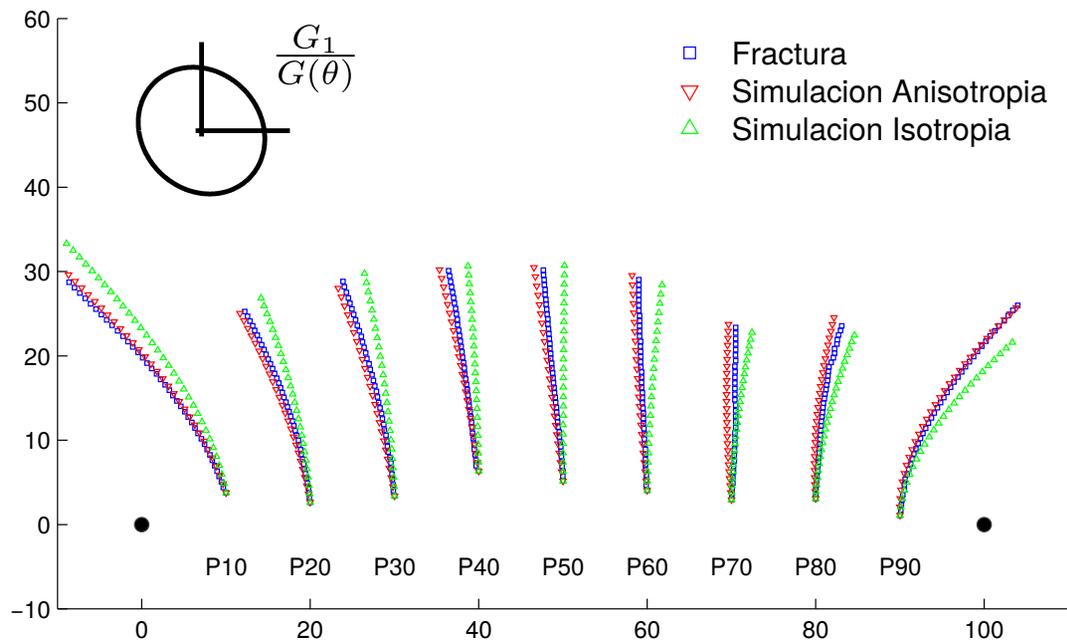


Figura 3.5: Camino de las fracturas para distintos puntos iniciales de fractura, estas muestras son cortadas en la dirección  $\theta_0 = \pi/4$  respecto al material, los círculos negros en las posiciones (0,0) y (100,0) corresponde a los puntos de tiro o focos de la hipérbolas

En el gráfico 3.5 se observan las fracturas para muestras orientadas en la dirección  $\theta_0 = \pi/4$  que corresponde a una mediatriz entre la dirección más y menos favorable de fractura, por lo tanto las hipérbolas son corregidas hacia la izquierda, buscando la dirección más favorable de fractura. Podemos observar que para el caso P70 se observa el comportamiento asintótico que

se debiera manifestar en la configuración P50.

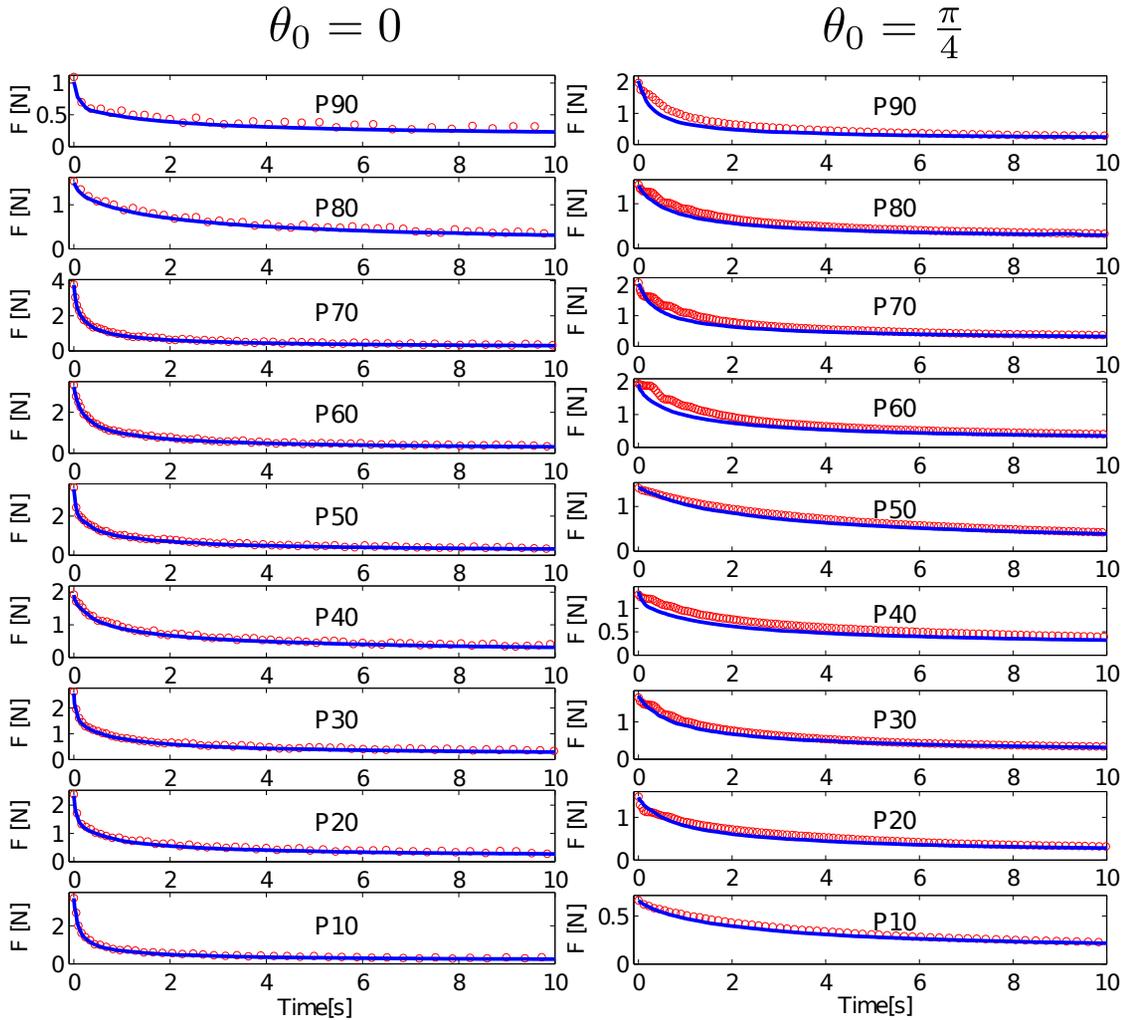


Figura 3.6: Fuerza en función del tiempo, para el experimento de O'keefe, la línea continua corresponde a la fuerza calculada a partir de la imagen mediante la ecuación 3.2, los parámetros calculados a partir de la imagen son  $\phi, \alpha_t$  y  $\theta$ , los círculos rojos a la fuerza medida

En la figura 3.6 se muestran la fuerza observada y reconstruida a partir de la imagen, la similitud entre los dos métodos de obtener la fuerza nos permite validar el método de medición de fuerza a través de la imagen. El valor de fuerza inicial en cada caso varía ya que el punto inicial describe distintos valores del ángulo  $\phi$  entre los brazos de fractura.

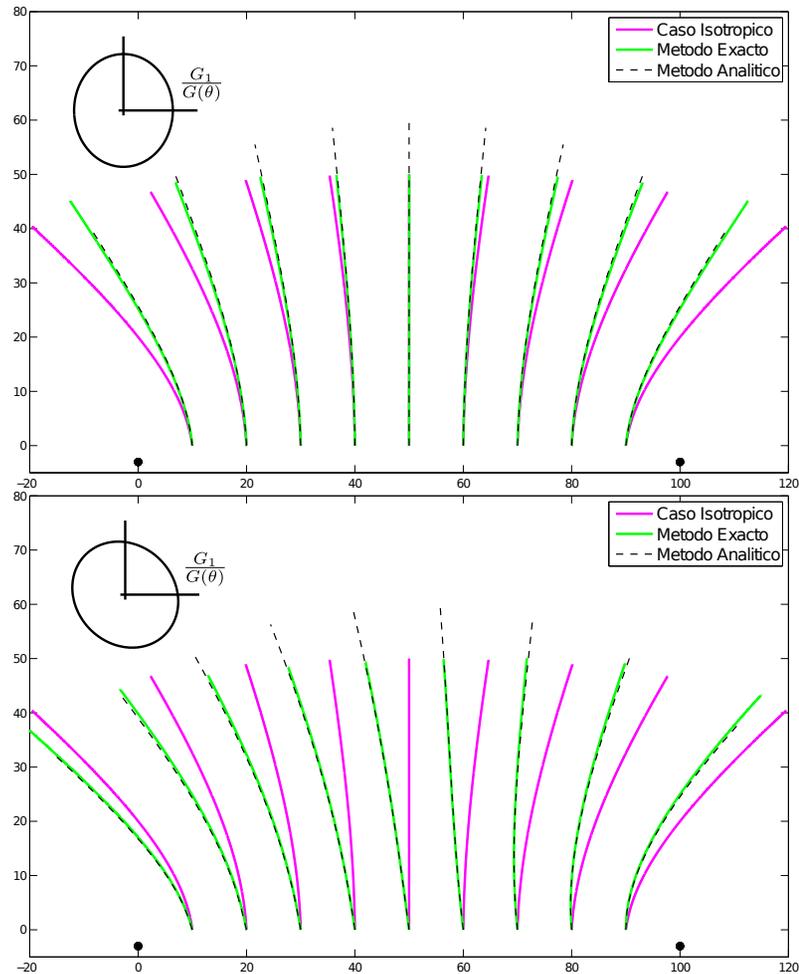


Figura 3.7: Gráficos de trayectorias de fractura para distintas configuraciones de rasgados, los puntos rojos corresponde a los puntos de tiro, la trayectoria analítica es calculada a partir de la ecuación 3.3, las otras curvas son construidas mediante el método discreto

Mediante los experimentos realizados se observa que el problema de O'keefe, tiene dos regímenes, inicialmente está gobernado fuertemente por la configuración inicial del sistema ( Posiciones de tiro y fractura inicial), por lo tanto el comportamiento isotrópico e anisotrópico no manifiestan fuertes diferencias, pero al evolucionar y encontrar el comportamiento asintótico de las hipérbolas estas se ven afectadas por la anisotropía del material, se debe considerar que la anisotropía del material varía tan solo un 14% entre los ejes de simetría vertical y horizontal del material, y aun así basta para corregir la dirección de fractura de forma considerable.

## **Capítulo 4**

# **Problema de la Regla**

## 4.1 Modelo Teórico

En este capítulo se desarrolla el problema de cortar una lámina con un borde afilado, este problema es equivalente a cortar una lámina con una regla, en este problema una de las solapas de la muestra queda bajo el objeto afilado y la otra queda libre, por lo tanto esta solapa puede ser orientada en distintas direcciones al ser rasgada (en contraposición al problema de O'keefe 3, que para dos puntos de tiro existe una sola orientación de las solapas para rasgarse). Para poder encontrar una relación entre la fuerza opuesta por la lámina y la energía liberada se calcula el trabajo realizado por la fuerza 2.1, para relacionar la fractura  $\vec{s}$  con el desplazamiento realizado  $l$ .

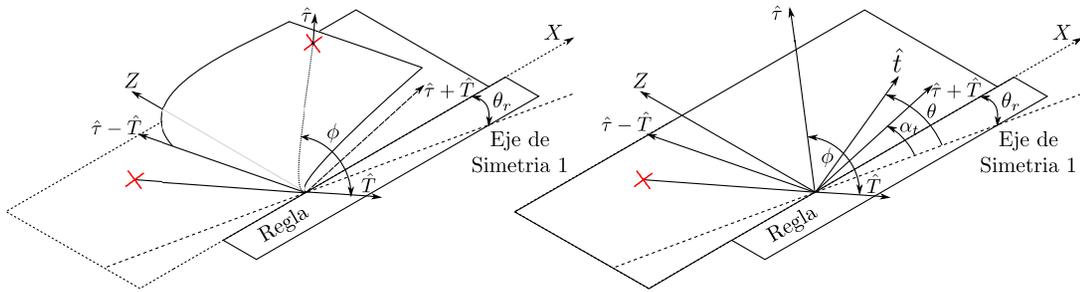


Figura 4.1: Construcción de vectores para el problema de la regla, se observa que se define un vector de rasgado  $\hat{T}$ , y uno de tiro  $\hat{t}$

$$dl = dl_{\hat{T}} + dl_{\hat{t}} = \hat{T} \cdot \hat{t} ds + \hat{t} \cdot \hat{t} ds \quad (4.1)$$

En el diagrama 4.1 se observa solo un punto de tiro, el cual define el vector de rasgado  $\hat{T}$ , con origen en la fractura, al rasgar la lámina la solapa es orientada en la dirección del vector de tiro  $\hat{t}$ . En este caso la descripción del crecimiento del brazo de tiro se realiza a partir de la proyección de los vectores de tiro y rasgado sobre la fractura.

$$\begin{aligned} G(\theta) &= F(\hat{T} + \hat{t}) \cdot \hat{t} \\ G(\theta) &= F|\hat{T} + \hat{t}| \cos(\theta - \alpha_t) \\ G(\theta) &= 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

La ecuación 4.2 al igual que 3.2 describe la relación entre la fuerza, la energía de fractura y los parámetros geométricos del sistema, ya que en este problema se ve involucrada solo una solapa, debemos considerar la energía del pliegue formado por la solapa, se observa el pliegue tiene forma cónica.

$$G(\theta) + \frac{dU}{ds} = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t) \quad (4.3)$$

$$G(\theta) = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - (\alpha_t + \pi \tan(\alpha_c)/2)) \quad (4.4)$$

El desarrollo para obtener la ecuación 4.4, se encuentra en el apéndice A.3, donde  $\alpha_c$  corresponde a la pendiente del cono formado por la solapa curvada. Este factor es considerado debido a las observaciones de realizadas en el capítulo 2 del efecto de un pliegue sobre la fractura, este factor es considerado en el estudio de rasgado de una lámina adherida a un sustrato [5].

En cada punto de fractura se observa que podemos definir un sistema ortogonal a partir de los vectores  $\hat{\tau} + \hat{T}$  y  $\hat{\tau} - \hat{T}$ , el vector  $\hat{\tau} + \hat{T}$  corresponde a la dirección de fuerza resultante, el vector  $\hat{\tau} - \hat{T}$  corresponde a la dirección donde se orienta el pliegue de la solapa, en este sistema se puede definir un diagrama de fuerzas 4.2 en el cual es fácil identificar la fuerza aplicada en la dirección de tiro y la fuerza aplicada por la solapa.

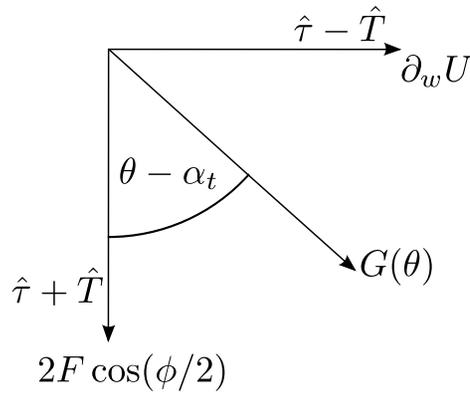


Figura 4.2: Diagrama de fuerzas aplicadas a en el punto de fractura, el sistema coordinado expuesto corresponde a un sistema construido a partir de los vectores  $\hat{\tau} + \hat{T}$  y  $\hat{\tau} - \hat{T}$ , los cuales corresponde a la dirección resultante de tiro y a la dirección del pliegue de la solapa respectivamente

Es importante mencionar la razón que el objeto que sujeta la solapa debe ser afilado (como una regla), si el objeto es afilado, la fuerza se aplica directamente en el punto de fractura, si el objeto no es afilado la fuerza se aplica sobre el borde del objeto creando un campo elástico alrededor del punto de fractura.

Para el estudio de la trayectoria fuera de la fractura lejos de la regla fijaremos  $\hat{\tau}$  perpendicular a la regla, también fijaremos los ejes del material a la regla (Ver figura4.3).

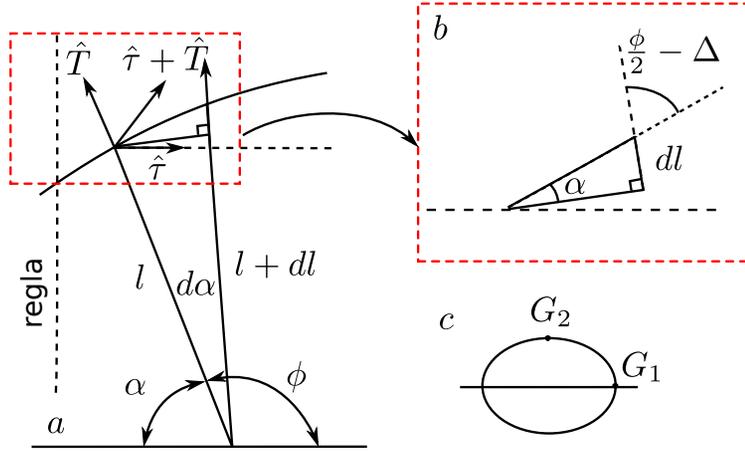


Figura 4.3: A-Diagrama de vectores de tiro y rasgado, se observa que  $\hat{\tau}$  es paralelo a uno de los ejes del material, en esta configuración  $\hat{\tau}$  es constante y  $\hat{T}$  varia su dirección a medida que la fractura evoluciona B-Detalle del triángulo rectángulo formado por la recta  $l + dl$  y una recta perpendicular que se intercepta con la recta  $l$  y el camino de la fractura. Se realiza esta construcción para encontrar una ecuación diferencial que permita relacionar  $l$  con  $\phi$ . C- Disposición de los ejes del material,  $G_1$  y  $G_2$  corresponden a el valor de los ejes de simetría del mapa de energía de fractura del material.

A partir de la figura 4.3 se deriva  $\tan(\alpha) = dl/l\alpha$  y  $\alpha + \pi/2 + \phi/2 + \Delta = \pi$ , además  $d\alpha = -d\phi$ . El termino  $\Delta$  está relacionado a la diferencia en la dirección de fractura introducida por la anisotropía, si hacemos  $\Delta = 0$  se puede encontrar una relación para la trayectoria de la fractura 4.5.

$$\frac{l(\phi)}{l(\phi_0)} = \frac{1 - \cos(\phi_0)}{1 - \cos(\phi)} \quad (4.5)$$

Para considerar el efecto de la anisotropía se debe asociar la anisotropía al termino  $\Delta = \theta - \phi/2$  ( $\phi/2 = \alpha_t$  dirección de tiro efectiva), la condición de fractura se puede expresar de la forma  $\tan(\Delta) = -G'(\phi/2)/G(\phi/2)$ , si sé que considera  $\Delta$  introduce pequeñas correcciones a la trayectoria,  $\Delta = -G'(\phi/2)/G(\phi/2)$ , de esta forma podemos derivar la ecuación 4.6.

$$\frac{l(\phi)}{l(\phi_0)} = \left( \frac{1 - \cos(\phi_0)}{1 - \cos(\phi)} \right)^{1-2\Delta G/G_0} \quad (4.6)$$

En la ecuación 4.6 el termino  $\Delta G = G_2 - G_1$  (Ver figura 4.3-C) y el termino  $G_0$  corresponde al promedio de  $G_2$  y  $G_1$ .

- $\Delta G > 0$  La regla está orientada en la dirección menos favorable del material.
- $\Delta G < 0$  La regla está orientada en la dirección mas favorable del material.

El desarrollo detallado de este cálculo se encuentra en el apéndice A.4.

## 4.2 Montaje experimental

Las variables de control en este experimento son  $\hat{T}$  y  $\hat{\tau}$ , variar  $\hat{T}$  corresponde a cambiar la posición del punto de tiro en la lámina, al variar  $\hat{\tau}$  cambiamos la orientación de la solapa o cambiar  $\phi$  (ver ecuación 4.4), otra variable corresponde a la dirección del material en cual las muestras son fabricadas.

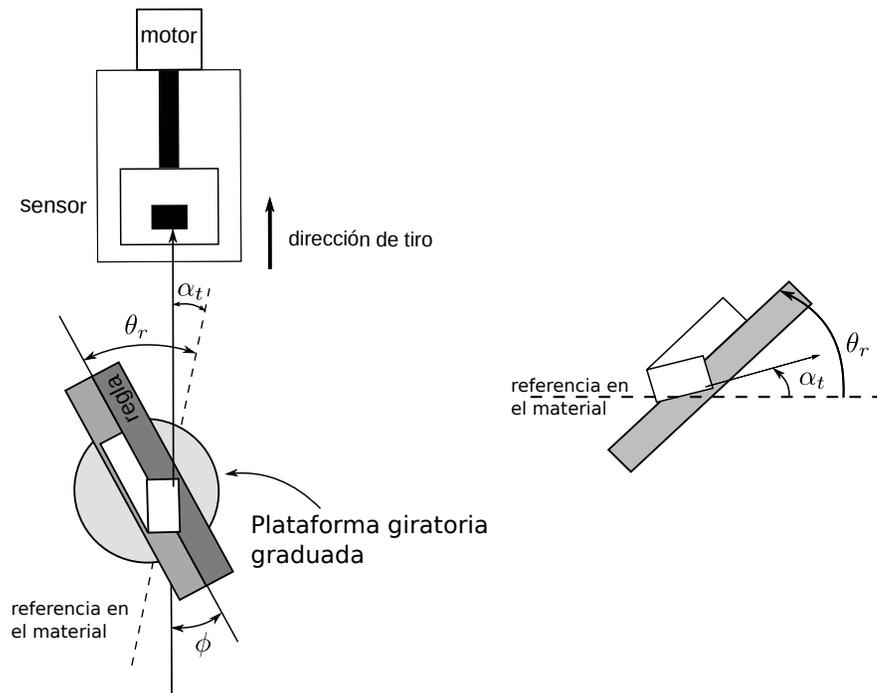


Figura 4.4: Montaje experimental de rasgado de láminas delgadas con un objeto afilado, este montaje permite variar  $\phi$  al rotar la plataforma giratoria, se exploran valores de  $\phi$  entre  $45^\circ$  a  $-45^\circ$ , el valor negativo de  $\phi$  lo asociamos a la solapa se posiciona sobre la regla, en la figura de la derecha se muestra solo la regla y la disposición de la dirección de tiro efectivo  $\alpha_t$

El montaje construido para este experimento consta en una regla de acrílico afilada, la cual es montada anclada a una base plana donde se posiciona la muestra, la base de la regla se

posiciona sobre una plataforma giratoria graduada (ver 4.4). Para registrar la fuerza se utiliza una celda de carga Futek, la cual se desplaza mediante un servo motor, (las especificaciones técnicas de estos instrumentos son iguales a las del experimento de O'keefe 3). Al posicionar la muestra en la regla se conecta el punto de tiro con el sensor de fuerza mediante un hilo de nylon, para sujetar el hilo a la muestra se coloca en el extremo del hilo un soporte plástico de  $3[mm]$  de ancho y  $6[mm]$  de largo, el cual se sujeta a la muestra con cinta adhesiva. Designamos la variable  $\theta_r$  a la dirección de la regla respecto al material.

La variable de control utilizada en los experimentos es el ángulo  $\phi$  el cual corresponde al ángulo entre el vector de rasgado  $\hat{T}$  y el vector de tiro  $\hat{\tau}$ . En el primer experimento se fija  $\hat{T}$  paralelo a la regla para distintos valores de  $\phi$ . El segundo experimento se fija  $\hat{\tau}$  paralelo a la regla y cambiamos  $\hat{T}$ , lo que equivale a cambiar el punto de tiro en la muestra. El ángulo de fractura para cada muestra se mide a través de una fotografía de la muestra.

La deformación impuesta son  $2,5[mm]$ , se selecciona esta ventana estrecha de medición ya que mediante esta configuración 4.4, el parámetro ángulo  $\phi$  varía al aplicar la deformación, mediante argumentos geométricos se puede demostrar que el máximo error cometido es alrededor de un grado (para una deformación de  $2,5[mm]$ , hilo que une la muestra con el sensor  $50[cm]$ , para  $\phi$  inicial  $45^\circ$ ).

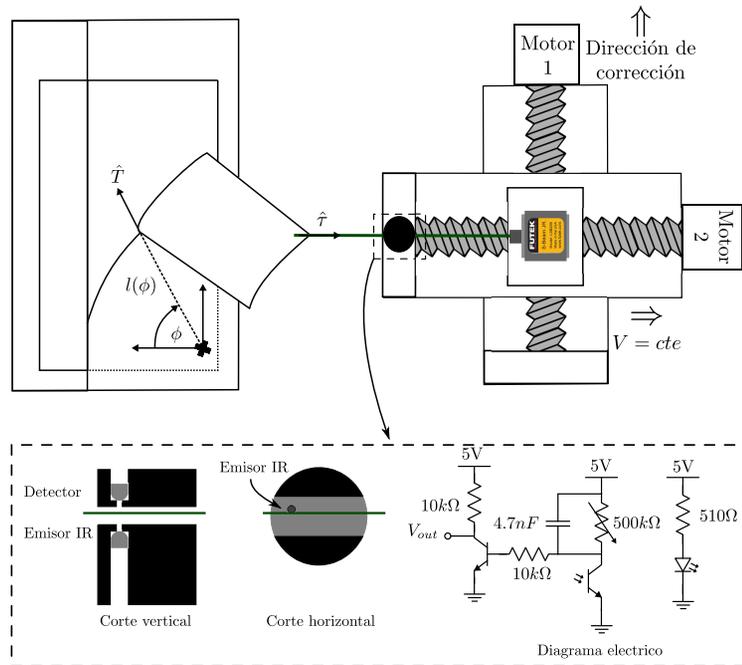


Figura 4.5: Montaje experimental para orientar la dirección de tiro perpendicular a la regla, el motor 2 se desplaza a velocidad constante, el segundo motor corrige las desviaciones de la cuerda utilizada para unir el sensor con el punto de tiro, para detectar la desviación de la cuerda se utiliza un sensor óptico. El zoom muestra el sensor utilizado para detectar la desviación en la dirección de tiro, el corte vertical muestra el detector óptico y el emisor IR, el corte horizontal de la cavidad donde pasa la cuerda muestra la posición del emisor IR, el tercer panel muestra el circuito utilizado para en el detector óptico y el emisor

Para explorar el comportamiento de la trayectoria de la fractura lejos de la regla, fijado la dirección de la tiro perpendicular a la regla, se construye el montaje del diagrama 4.5, en el cual se utilizan dos actuadores lineales motorizados, mediante el motor dos se impone la deformación a la lámina para rasgarla, en este actuador se posiciona una celda de carga. La celda de carga se une a la lámina delgada mediante una cuerda. Para mantener la dirección de tiro perpendicular a la regla se utiliza el segundo actuador (motor 1) y un sensor óptico para detectar el error en la dirección de tiro, de esta forma cuando el sensor detecta la desviación el motor 1 corrige en la dirección de corrección.

El sensor utilizado para detectar la desviación de la cuerda fue construido a partir de un led IR y un foto-transistor. El foto-transistor y el led IR están confrontados por lo tanto la cuerda al desviarse bloquea el paso de la luz (Sensor óptico por transmisión), debido a el voltaje colector emisor del

foto transistor aumenta y por lo tanto disminuye la corriente de base del transistor, por lo tanto el  $V_{out}$  aumenta, mediante el potenciómetro se puede calibrar el sensor para detectar la cuerda, de esta manera se pueden obtener estados bloqueado/no-bloqueado, la señal eléctrica es capturada mediante un microcontrolador que se comunica mediante usb con el computador que controla el experimento.

La regla y su respectivo soporte se disponen como se muestra en el diagrama 4.5. Se exploran en este experimento muestras cordatas en los dos ejes de simetría del material, por lo tanto para muestras cortadas en el eje de simetría uno,  $\theta_r = 0$ ; y las que son cortadas en la dirección del eje de simetría dos,  $\theta_r = \pi/2$ . Las dimensiones de las muestras utilizadas son  $20cm$  de largo y  $10cm$  de ancho. La porción de la muestra queda bajo la regla es de  $2cm$ , y la fractura inicial se realiza a  $5cm$  del borde inferior de la muestra. Se fija el valor de  $l(\phi_0) = 8cm$  y el valor de  $\phi_0 = 20^\circ$ .

Para medir la pendiente del cono ( $\alpha_c$ ) formado por la solapa se utiliza FTP (perfilometría por transformada de fourier), para distintas disposiciones de la solapa la pendiente observada varía entre  $17^\circ$  y  $23^\circ$ .

### 4.3 Resultados experimentales

El experimento de  $\hat{T}$  paralelo a la regla se realizó para dos direcciones distintas del material, y disposiciones de la regla, en estos experimentos se midió la fuerza, y posteriormente se calcula la fuerza esperada en función del ángulo de fractura observado (mediante la ecuación 4.4), además se calcula una predicción de la fuerza a partir de la dirección de tiro se calcula se estima la dirección de fractura (mediante el método expuesto en el capítulo 3), de esa forma de calcula la fuerza estimada mediante 4.4. En los dos cálculos la pendiente  $\alpha_c = 20^\circ$ .

La energía de fractura para este cálculo se utilizó el valor encontrado en la caracterización del material 2. Se conviene que las direcciones de tiro por fuera de la regla corresponden a  $\phi > 0$ , y las direcciones de tiro sobre la regla  $\phi < 0$ .

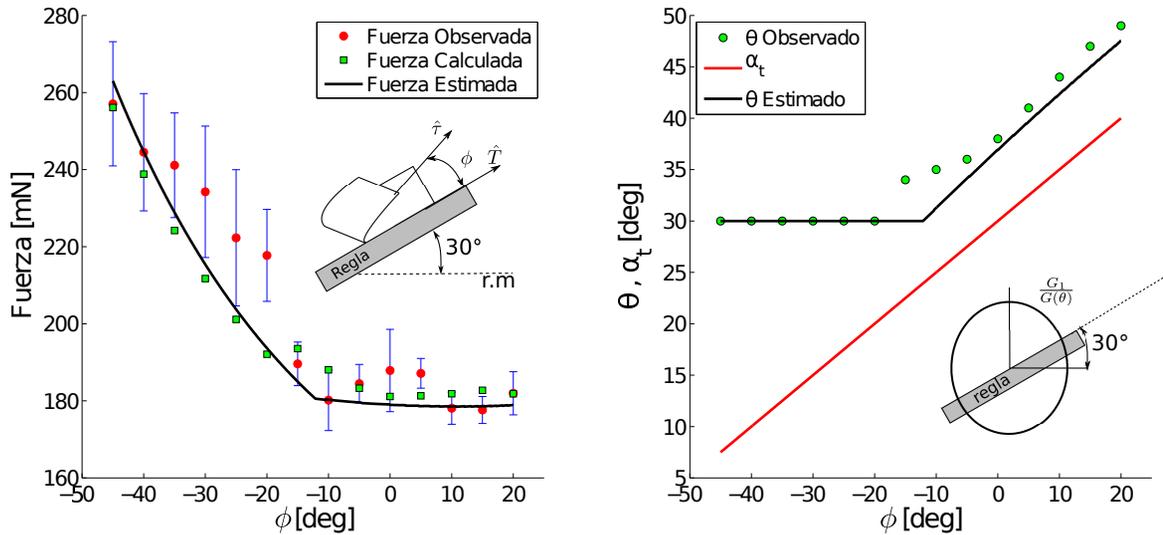


Figura 4.6: A la izquierda se encuentra gráfico de fuerza en función de  $\phi$ , a la derecha ángulos de fractura en función de  $\phi$ , la figura muestra que disposición de la solapa respecto a la regla, en el gráfico de fuerzas los círculos rojos corresponden a la fuerza observada con barras de error azules, los cuadrados verdes corresponde a la fuerza calculadas a partir de la fractura observada, línea negra corresponde a la predicción de la fuerza, en el gráfico de ángulos, la línea roja corresponde a la dirección de tiro  $\alpha_t$ , los círculos verdes corresponden a las dirección de fractura observada, la línea negra corresponde a la predicción de la dirección de fractura

Se observa el gráfico 4.6 de dirección de fractura observada es mayor que la dirección de tiro, esto se debe al efecto de la anisotropía y la orientación del pliegue, debido a esto la estimación del ángulo de fractura es menor que la observada, ya que esta estimación solo da cuenta de la anisotropía sobre la fractura, este experimento se realizó en la dirección  $\theta_r = 30^\circ$ . Se observa que la dirección de tiro  $\alpha_t = 30^\circ$  la dirección de fractura no sigue la regla, la estimación predice este comportamiento, pero no es capaz de predecir la dirección de tiro para la cual se despega de la regla.

La fuerza calculada y estimada se aproxima a la fuerza observada, en el periodo donde la dirección de fractura no sigue la regla la estimación y el cálculo se ajustan de mejor manera. Cuando la fractura sigue la regla la fuerza estimada y calculada sigue el comportamiento de la fuerza observada pero es menor que la fuerza observada.

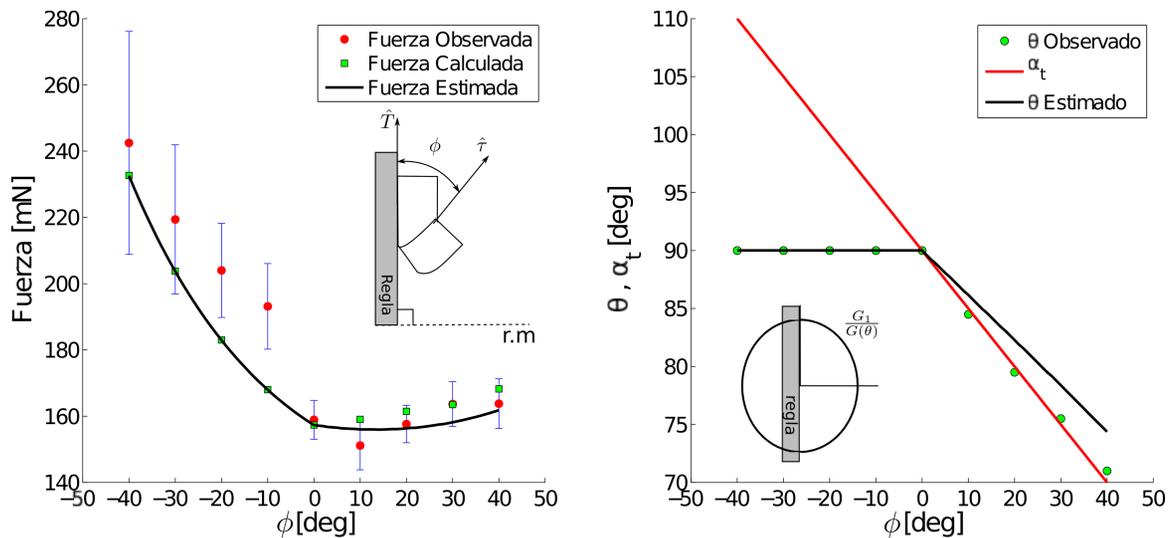


Figura 4.7: A la izquierda se encuentra gráfico de fuerza en función de  $\phi$ , a la derecha ángulos de fractura en función de  $\phi$ , a la derecha ángulos de fractura en función de  $\phi$ , la figura muestra que disposición de la solapa respecto a la regla, en el gráfico de fuerzas los círculos rojos corresponden a la fuerza observada con barras de error azules, los cuadrados verdes corresponde a la fuerza calculadas a partir de la fractura observada, línea negra corresponde a la predicción de la fuerza, en el gráfico de ángulos, la línea roja corresponde a la dirección de tiro  $\alpha_t$ , los círculos verdes corresponden a las dirección de fractura observada, la línea negra corresponde a la predicción de la dirección de fractura

La dirección de fractura para el experimento realizado en la dirección  $\theta_r = 90^\circ$  del material (ver gráfico 4.7), coincide con la dirección de tiro  $\alpha_t$ , y se aleja de la dirección estima de fractura. Debido a la dirección del material seleccionada, se espera que la dirección estimada es mayor que la observada, la dirección observada se aleja de la estimada debido a que el pliegue se orienta en la dirección contraria a la de orientación de la anisotropía.

Al igual que en el experimento realizado en la dirección  $\theta_r = 30^\circ$ , la fuerza observada en el experimento con  $\theta_r = 90^\circ$ , la fuerza para las direcciones de que no siguen la regla se ajustan los cálculos/estimaciones a las observaciones.

Ya que  $\phi$  es el ángulo entre  $\hat{T}$  y  $\hat{r}$ , podemos fijar  $\hat{r}$ , y variar  $\hat{T}$  para construir los mismos valores de  $\phi$  anteriormente explorados. Se exploran direcciones de tiro para las cual la dirección de fractura sigue la regla.

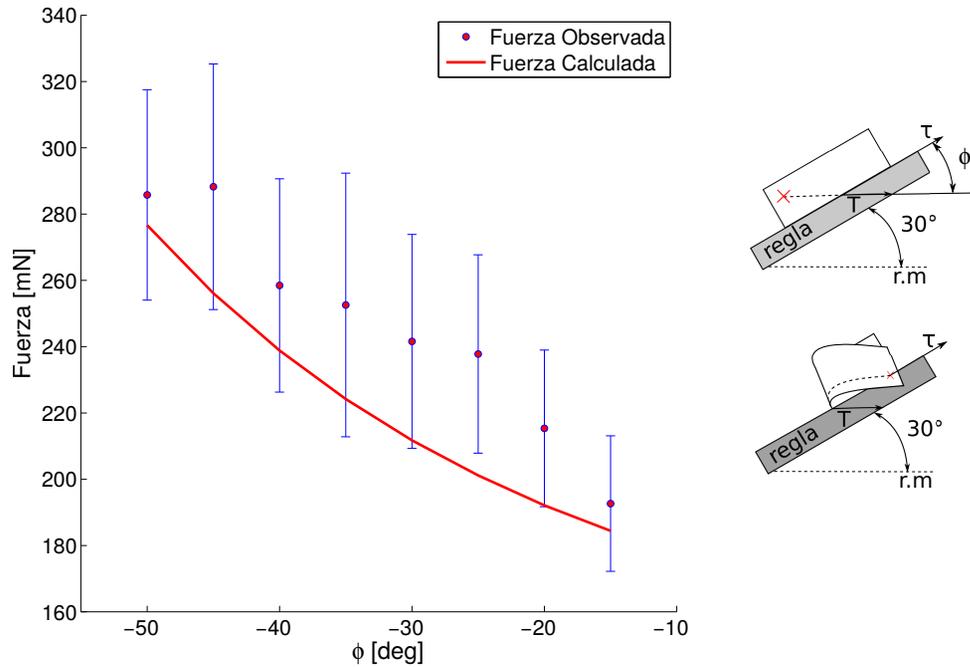


Figura 4.8: Fuerza en función de  $\phi$ , para  $\hat{\tau}$  fijo paralelo a la regla y distintos valores de posición de tiro  $\hat{T}$ , círculos rojos corresponden al valor de la fuerza observado con barras de error azul, la línea roja corresponde a la fuerza calculada a partir del ángulo de fractura observado

Se observa que la fuerza observada en el experimento de  $\hat{\tau}$  constante (ver figura 4.8), que la fuerza responde al modelo, pero es mayor para todos los valores de  $\phi$ , se puede observar que el rango de fuerzas corresponde al mismo rango de fuerzas que en experimento de  $\hat{T}$  constante paralelo a la regla y  $\hat{\tau}$ , esto muestra que la variable de control adecuada es  $\phi$  sin importar la combinación  $\hat{\tau} - \hat{T}$  que lo forme.

En los experimentos que buscan explorar la trayectoria de la fractura lejos de la regla orientando la dirección de tiro perpendicular a la regla. Podemos observar en la figura (4.9), las trayectorias de la fractura observada en el plano cartesiano (el origen de este sistema coordenado corresponde a la posición de tiro), debido a que las fracturas tienen distintos puntos inicial no podemos comparar las entre ellas, o utilizando la ecuación 4.6. Por lo tanto se propone realizar una descripción de la fractura observada con las variables de la ecuación 4.6, calculando  $l_{obs} = \sqrt{x_{obs}^2 + y_{obs}^2}$  y  $\phi_{obs} = \tan^{-1}(y_{obs}/x_{obs})$ , (Donde el subíndice *obs* se refiere a variables observadas ó obtenidas a través de la imagen de la fractura). Aun con esta transformación si queremos comparar  $l_{obs}$  con  $l$  calculado a partir de la ecuación 4.6, debemos hacerlo para cada trayectoria. Para poder realizar una comparación global de todos los ensayos podemos normalizar los valores  $l_{obs}$  y  $l$  dividiendo

por el factor  $l_{obs}(\phi_{obs})(1 - \cos(\phi_{obs}))$  y luego graficar  $l$  en función de  $\phi$ , podemos observar como las curvas colapsan en la figura (4.9 derecha).

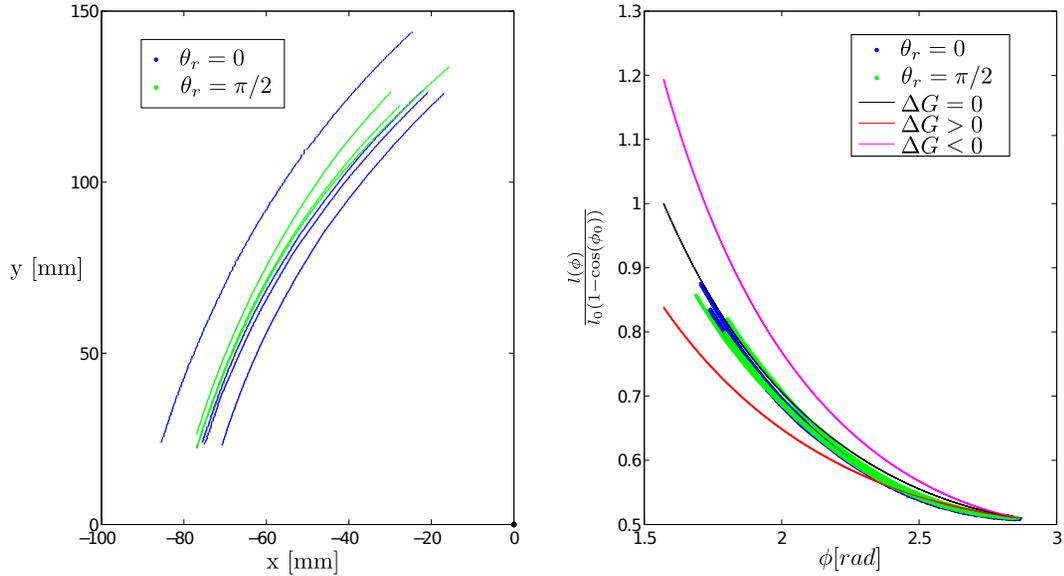


Figura 4.9: Trayectoria de la fractura para el vector de tiro orientado perpendicular a la regla, la figura de la izquierda muestra las trayectorias una descripción cartesiana, la figura de la derecha corresponde a la una normalización de la fractura observada de esta forma podemos comparar fracturas con distintas condiciones iniciales.

La trayectoria de las fracturas realizadas se pueden comparar mediante la figura 4.9, en la cual se observan la longitud del brazo de fractura normalizado, las curvas continuas corresponden a las predicciones de la ecuación 4.6, la curva de color magenta ( $\Delta G < 0$ ) corresponde a orientar a la regla al rededor del eje de simetría dos, ya que esta dirección corresponde al eje de menor energía se observa que  $l$  aumenta su longitud en esa dirección, al contrario para la curva de color rojo ( $\Delta G > 0$ ). La curva negra entre estas dos curvas corresponde a la trayectoria isotrópica ( $\Delta G = 0$ ). Se observa que las curvas experimentales se despliegan encuentran entre las dos curvas anisotrópicas, pero se concentran alrededor de la predicción isotrópica. En el caso de las muestras orientadas en el eje de simetría dos ( $\theta = \pi/2$ ), podemos explicarlo con lo observado en los experimentos expuestos anteriormente, la anisotropía en este caso guía la fractura hacia la regla pero el pliegue se orienta perpendicularmente a la dirección de tiro efectiva  $\vec{\tau}_{12}$ , por lo tanto estos dos efectos se "apantallan" por lo tanto no observamos el efecto de la anisotropía. Por otro lado las muestras orientadas en el eje de simetría se concentran alrededor de la curva isotrópica, bajo el argumento anterior deberían concentrarse cerca de la curva roja, ya que la anisotropía y

el pliegue deben orientar la trayectoria lejos de la regla.

Mediante la trayectoria de la fractura podemos calcular la fuerza necesaria para la evolución de la fractura en función del desplazamiento efectuado por el actuador lineal, para ello utilizamos la relación 4.2. Podemos calcular la pendiente punto a punto de la fractura, de esta forma obtenemos  $\theta_{obs}$ , la dirección de aplicación de la fuerza se calcula mediante  $\alpha_{t_{obs}} = \phi_{obs}/2$  y las energía de fractura fue anteriormente caracterizada. Aun así debemos relacionar estas variables con el desplazamiento realizado por el actuador, podemos escribir  $l(\phi) = l(\phi_0) + \int_{\phi_0}^{\phi} d\bar{s}(\phi')$ , ya que el brazo de fractura aumenta su tamaño el largo de la fractura realizada. Aun así el punto donde la fractura se apoya se ha desplazado en la dirección x, por lo tanto se debe agregar un término  $\int_{\phi_0}^{\phi} \hat{x} \cdot d\bar{s}(\phi')$ . Debido a que la fuerza se empieza a registrar antes que se inicia la propagación de la fractura debemos relacionar la fuerza registrada por el sensor de fuerza con la calculada a partir de la imagen, para ello buscamos peak de fuerza registrado ( Se observa que el inicio la propagación de la fractura está relacionado con el máximo de la fuerza registrada ), por lo tanto podemos suponer que después de este punto la fractura ya inicio su propagación. Para poder encontrar un sub conjunto de datos de fuerza registrada comparables la fuerza calculada buscamos un subset que minimice el error entre el punto inicial de la fuerza calculada y la registrada.

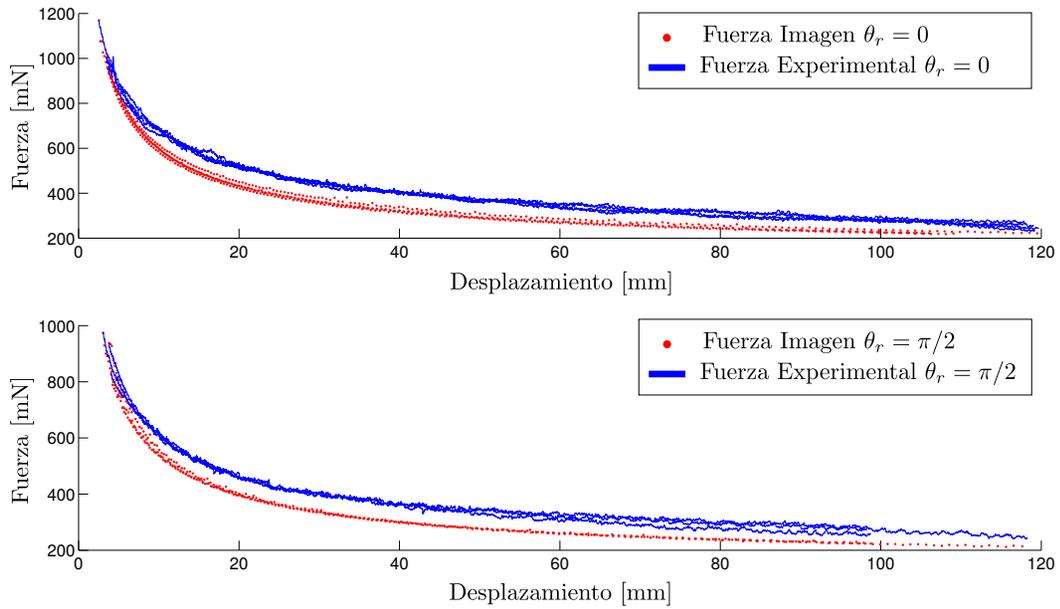


Figura 4.10: Fuerza observada y reconstruida a partir de la trayectoria de la de fractura y el mapa de energía de fractura del material, el gráfico superior corresponde a la fuerza cuando la regla está orientada paralela al eje de simetría uno, el gráfico inferior corresponde a la fuerza cuando la regla se orienta en la dirección del eje de simetría dos.

En la figura 4.10, se presenta la fuerza registrada por el sensor y la fuerza calculada a partir de la trayectoria de la fractura, se puede observar que existe una diferencia entre la fuerza observada y calculada para todas las muestras, esta diferencia sistemática se puede asociar al pliegue formado por la solapa y el roce con la superficie de la regla al arrastrar la solapa.

## **Capítulo 5**

# **Conclusiones**

## 5.1 Conclusiones

El estudio realizado permitió identificar los factores que influyen en la evolución de las fracturas en láminas delgadas, estos corresponden a la configuración de los puntos donde se aplican la deformación, la elasticidad de los pliegues formados y la anisotropía del material.

La caracterización realizada mediante el trouser test, permitió obtener un mapa de la anisotropía del material, se observó en el material de baja anisotropía la variación de la energía de fractura varía en 14% entre los dos ejes principales del material, el material con alta anisotropía presenta un régimen de alta y baja energía, en los cuales están separados por una zona donde el material no se fractura. El proceso de caracterización también reveló la influencia de los pliegues formados por el material sobre la evolución de la fractura.

Para aislar la influencia del pliegue sobre la fractura se realizó un experimento donde las solapas se curvan en sentidos opuestos de esta forma los pliegues no juegan ningún papel sobre la evolución de la fractura. Este problema lo llamamos problema de O'keefe que consiste rasgar una lámina tirado de dos puntos a rededor de una fractura, debido a la geometría del problema las trayectorias observadas son hipérbolas cuyos focos corresponden a los puntos de tiro, las hipérbolas son corregidas por el efecto de la anisotropía, para este problema se propuso un método para construir la trayectorias de la fractura de forma discreta (numéricamente) considerando la anisotropía del material, al realizar el experimento para dos direcciones la predicciones se ajustan a las trayectorias observadas.

Para realizar la construcción discreta de la fractura se utilizó un algoritmo que a partir el mapa de energía de fractura del material y la dirección de tiro efectiva se calcula la dirección de fractura, al comparar los resultados experimentales con esta construcción se observó una coherencia entre las predicciones y los experimentos.

En este problema se propuso una ecuación diferencia que describe el sistema, ya que las trayectorias corresponden hipérbolas corregidas por la anisotropía se realiza una descripción a partir de la corrección realizada a una hipérbola inicial caracterizada por  $u_0$ , en el caso isotrópico este valor se conserva constante para toda la trayectoria, por lo tanto se derivó una ecuación del tipo  $du/dv = F(u, v)$ . Para derivar este modelo caracterizamos la anisotropía como una elipse de semiejes  $G_1$  y  $G_2$  y suponemos que la diferencia entre  $\theta$  y  $\alpha_t$ , por lo tanto  $G(\theta) \sim G(\alpha_t)$ . Al integrar numéricamente el modelo se observa que coincide con el método discreto (El cual es validado mediante los experimentos). Se realizó la integración numérica de la ecuación diferencia ya que es de primer orden y no se pueden separar variables.

Es natural preguntarse en que difiere este estudio con el de O'keefe. A diferencia de O'keefe se

explora la anisotropía del material y su efecto sobre la trayectoria de la fractura, y se caracteriza la fuerza necesaria para rasgar el material.

En el experimento de la regla los tres factores anteriormente mencionados intervienen en la evolución de la fractura. Mediante la construcción de los vectores de tiro y rasgado se identifica la dirección de tiro efectiva, (al igual que en el problema de O'keefe), además en este caso esta construcción permite determinar la orientación del pliegue formado por la solapa. Debido a que la solapa se forma fuera de la regla, la fuerza aplicada por el pliegue siempre guía a la fractura fuera de la dirección de la regla. Por otro lado el efecto de la anisotropía depende de la dirección seleccionada del material donde se orienta la regla y las direcciones de fractura que la regla restringe, de esta manera la anisotropía puede asociarse con el pliegue para alejar la fractura de la dirección de tiro efectiva (Figura 4.6), o apantallarse entre ellas (Figura 4.7).

Se observó que en todos los casos estudiados, en el momento que la fractura es guiada por la regla la fuerza aumenta linealmente con el ángulo  $\phi$ , esto se debe a que la fuerza depende de un factor  $(\cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t))^{-1}$ , que medida que aumentamos  $\phi$ , pero también aumenta la diferencia entre el ángulo de fractura observado(dirección de la regla) y la dirección de tiro efectivo ( $\alpha_t$ ).

En el estudio de la trayectoria de la fractura al tirar en dirección perpendicular a la regla, las fracturas se alejan de la regla, si contrastamos estos resultados con el modelo propuesto se observa que las trayectorias siguen el modelo isotrópico, sin importar la orientación de los ejes de simetría del material. En el caso en el cual la regla se orienta en la dirección del eje de simetría dos se puede explicar ya que la anisotropía del material orienta la fractura hacia la regla y el pliegue formado por la solapa en la dirección contraria. En el caso que el eje de simetría uno se orienta en dirección de la regla el argumento anterior no es válido ya que la anisotropía y el pliegue debieran orientar la fractura en dirección contraria a la regla. Por lo tanto este comportamiento debe ser asociado en errar en la dirección de tiro, debido a que el mecanismo de corrección de dirección de tiro, esta sobre corrigiendo la dirección de tiro por lo tanto la dirección de tiro efectiva no corresponde a la del modelo que utilizamos para comparar.

A partir de las anteriores experiencias se puede afirmar que es posible medir la fuerza de fractura en cada punto de las fractura a partir de la imagen, la geometría del problema y el mapa de energía de fractura de del material, esto se observa en el problema de O'keefe, las diferencias observadas en problema de la regla se deben al efecto del pliegue.

## 5.2 Proyecciones

En el trabajo introdujo el efecto del pliegue mediante el factor de corrección  $\pi \tan(\alpha_c)/2$  en la dirección de tiro. La pendiente del cono se realizó mediante la técnica de perfilometría por transformada de Fourier, para ello se colorearon de color blanco muestras y se plegaron imitando la forma que tomaban al ser rasgadas. Esto supone que el pliegue mantiene en forma constante a medida que la fractura evoluciona por lo tanto es un buen método para estimar el efecto del pliegue pero no da una medida precisa del efecto del pliegue sobre la fractura. Por lo tanto es interesante caracterizar la forma del pliegue a medida que se rasga la lámina.

En el capítulo 4 se estudió el problema de una sola solapa, la cual forma un pliegue cónico, en esta discusión se propone la dirección en la cual se orientara el pliegue, ya se orienta perpendicular a la dirección de tiro, es interesante preguntarse si es equivalente tirar en una dirección dada a empujar un pliegue orientado perpendicular a esa dirección de tiro. Esta equivalencia es expuesta en los experimentos de espirales [3], en el cual se empuja de un pliegue dada una semilla de fractura y luego se tira de un pliegue en una configuración equivalente.

Una mejora que se puede introducir en el experimento de la regla corresponde a optimizar el mecanismo de tiro y corrección, ya que el problema que se observa es la sobre corrección. Sería interesante añadir otro sensor óptico en la parte inferior de la cuerda (Ver 4.5, corte horizontal), de esta forma podemos evitar el efecto de la sobre corrección aplicada en el proceso de tiro.

## Apéndice A

# Desarrollo de Cálculos

### A.1 Fractura hiperbólica en caso isotropico

Para demostrar que la trayectoria observada en el problema de O'keefe corresponde a una hipérbola, describimos los brazos de tiro (Ver figura A.1).

$$l_1^2 = (x + c)^2 + y^2 \rightarrow 2l_1 dl_1 = 2(x + c) + 2y_2$$

$$l_2^2 = (x - c)^2 + y^2 \rightarrow 2l_2 dl_2 = 2(x - c) + 2y_2$$

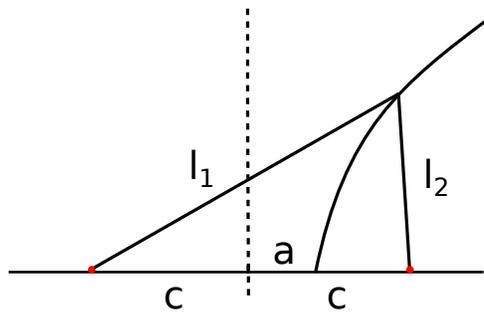


Figura A.1

Ya que cada brazo de la fractura crece en igual magnitud a medida que la fractura evoluciona se afirma que  $l_1 - l_2 = cte$  por lo tanto  $dl_1 = dl_2$ .

$$\frac{(x+c)}{l_1}dx + \frac{ydy}{l_1} = \frac{(x-c)}{l_2}dx + \frac{ydy}{l_2} \quad (\text{A.1})$$

$$-ydy \left( \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right) = dx \left( \frac{(x-c)}{l_2} - \frac{(x+c)}{l_1} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$-ydy(l_1 - l_2) = dx(l_1(x-c) - l_2(x+c)) \quad (\text{A.3})$$

$$-ydy(l_1 - l_2) = dx((l_1 - l_2)x - c(l_1 + l_2)) \quad (\text{A.4})$$

$$-ydy(l_1 - l_2)^2 = dx((l_1 - l_2)^2x - c(l_1^2 + l_2^2)) \quad (\text{A.5})$$

El termino  $l_1 - l_2 = 2a$  se obtiene a partir de la definici3n de los brazos de tiro haciendo  $y = 0$  y  $x = a$ , al igual que el termino  $l_1^2 - l_2^2 = 4xc$ .

$$-ydy4a^2 = dx(4xa^2 - 4xc^2) = 4xdx(a^2 - c^2)$$

Se define  $a^2 + b^2 = c^2$  e integramos

$$\frac{ydy}{b^2} = \frac{xdx}{a^2} \rightarrow -\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = cte$$

## A.2 Trayectoria de fractura problema de O'keefe caso anisotropico

El vector  $t$  tangente a la curva  $s$  que describe la fractura se puede escribir como

$$t = \frac{T_1 + T_2}{|T_1 + T_2|} \cos(\theta - \alpha_t) + \frac{T_1 - T_2}{|T_1 - T_2|} \sin(\theta - \alpha_t) \quad (\text{A.6})$$

El crecimiento del largo de cada puede ser descrito como  $dl_1 = t \cdot T_1 ds$  y  $dl_2 = t \cdot T_2 ds$ .

$$dl_1 + dl_2 = t \cdot (T_1 + T_2) ds = |T_1 + T_2| \cos(\theta - \alpha_t) ds \quad (\text{A.7})$$

$$dl_1 - dl_2 = t \cdot (T_1 - T_2) ds = |T_1 - T_2| \sin(\theta - \alpha_t) ds \quad (\text{A.8})$$

$$|T_1 + T_2| = \sqrt{2 + 2T_1 \cdot T_2} = 2 \cos(\phi/2) \quad (\text{A.9})$$

$$|T_1 - T_2| = \sqrt{2 - 2T_1 \cdot T_2} = 2 \sin(\phi/2) \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.11})$$

$$\frac{dl_1 - dl_2}{dl_1 + dl_2} = \tan(\phi/2) \tan(\theta - \alpha_t) = -\tan(\phi/2) \frac{G'(\theta)}{G(\theta)} \quad (\text{A.12})$$

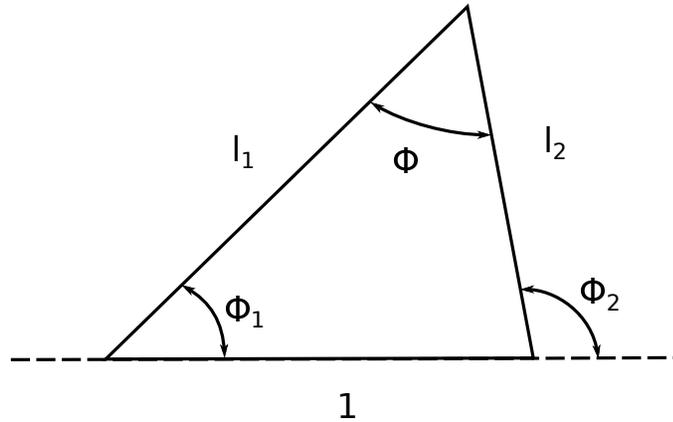


Figura A.2: Diagrama de problema de O'keefe, se observa la formación de un triángulo escaleno, se observa que los brazos de tiro son normalizados por la distancia entre los foco de la hipérbola

El termino  $\tan(\phi/2)$  se desarrolla de la siguiente manera.

$$\tan(\phi/2) = \frac{\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)} = \frac{2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)}{2 \cos^2(\phi/2)} = \frac{\sin(\phi)}{1 + \cos(\phi)} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2(\phi)}{(1 + \cos(\phi))^2}}$$

Utilizando el teorema del coseno podemos relacionar el ángulo  $\phi$  con los brazos de tiro  $\cos(\phi) = \frac{l_1^2 + l_2^2 - 1}{2l_1l_2}$ .

$$\tan(\phi/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\phi)}{1 + \cos(\phi)}} = \sqrt{\frac{2l_1l_2 - l_1^2 - l_2^2 + 1}{2l_1l_2 + l_1^2 + l_2^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1 - (l_1 - l_2)^2}{(l_1 + l_2)^2 - 1}}$$

Podemos describir el sistema en coordenadas hiperbólicas  $u = l_1 - l_2$  y  $v = l_1 + l_2$

$$\frac{du}{dv} = \tan(\theta - \alpha_t) \sqrt{\frac{1 - u^2}{v^2 - 1}}$$

El termino  $\tan(\theta - \alpha_t)$  introduce correcciones producidas por las propiedades anisotropicas, por lo tanto  $\theta = \alpha_t$  implica que el propiedades isotropicas. Si suponemos  $\epsilon = \tan(\theta - \alpha - t)$  constante.

$$\frac{du}{dv} = \epsilon \sqrt{\frac{1 - u^2}{v^2 - 1}} \rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \epsilon \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

$$\cos^{-1}(u) - \cos^{-1}(u_0) = -\epsilon(\cosh^{-1}(v) - \cosh^{-1}(v_0))$$

$$\cos^{-1}(u) = -\epsilon(\cosh^{-1}(v) - \cosh^{-1}(v_0)) + \cos^{-1}(u_0)$$

$$u = \cos(\epsilon(\cosh^{-1}(v) - \cosh^{-1}(v_0)) - \cos^{-1}(u_0)) \quad (\text{A.13})$$

Podemos si hacemos  $\epsilon = 0$ , se obtiene  $u = u_0$ , esta solución corresponde a una hipérbola. El mínimo valor que puede tomar el termino  $v_0$  es 1. Debido que no podemos elegir el parámetro  $\epsilon$  mediante un criterio físico, desarrollamos el termino anisotropico a partir de la energía de fractura ,(Elipse con ejes de mayor y menor energía , $G_1$  y  $G_2$  respectivamente).

$$\tan(\theta - \alpha_t) = -\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}$$

Ya que a lo largo de la trayectoria la diferencia  $\theta - \alpha_t$  son pequeñas correcciones, podemos asumir que  $G(\theta) \sin G(\alpha_t)$ .

$$\frac{G'(\alpha_t)}{G(\alpha_t)} = \frac{-2G_1 \cos(\alpha_t) \sin(\alpha_t) + 2G_2 \cos(\alpha_t) \sin(\alpha_t)}{G_1 \cos^2(\alpha_t) + G_2 \sin^2(\alpha_t)}$$

$$\frac{2\cos(\alpha_t) \sin(\alpha_t)(G_2 - G_1)}{G_0} = \frac{2 \sin(2\alpha_t) \Delta G}{G_0}$$

El termino  $\Delta G$  corresponde a  $G_2 - G_1$  y el termino  $G_0$  corresponde al promedio entre  $G_2$  y  $G_1$ . Debemos escribir esta relación en términos de  $l_1$  y  $l_2$ , de del diagrama A.2 se observa que  $\alpha_t = \phi/2 + \phi_1$  y  $\phi = \phi_2 - \phi_1$

$$\sin(2\alpha_t) \frac{\Delta G}{G_0} = \frac{\Delta G}{G_0} \sin(\phi + 2\phi_1) = \frac{\Delta G}{G_0} \sin(\phi_2 + \phi_1)$$

$$\frac{\Delta G}{G_0} [\sin(\phi_1) \cos(\phi_2) + \sin(\phi_2) \cos(\phi_1)]$$

Si aplicamos el teorema del seno para el triángulo descrito en la figura A.2 obtenemos.

$$\frac{l_2}{\sin(\phi_1)} = \frac{1}{\sin(\phi)} = \frac{l_1}{\sin(\pi - \phi_2)}$$

De esta relación podemos obtener  $\sin(\phi_1) = l_2 \sin(\phi)$  y  $\sin(\phi_2) = l_1 \sin(\phi)$ . Mediante el teorema del coseno se obtiene  $\cos(\phi_1) = \frac{l_1^2 - l_2^2 + 1}{2l_1}$  y  $\cos(\phi_2) = \frac{l_1^2 - l_2^2 - 1}{2l_2}$ .

$$\frac{\Delta G}{G_0} [l_2 \cos(\phi_2) + l_2 \cos(\phi_1)] \sin(\phi) = \frac{\Delta G}{G_0} \sin(\phi) [l_2^2 - l_1^2]$$

De esta forma podemos desarrollar la ecuación A.12.

$$\frac{du}{dv} = \tan(\phi/2) \frac{\Delta G}{G_0} \sin(\phi) (l_1^2 - l_2^2) \quad (\text{A.14})$$

$$= (1 - \cos(\phi)) \frac{\Delta G}{G_0} (l_1^2 - l_2^2) \quad (\text{A.15})$$

$$= -\frac{\Delta G}{G_0} uv \left[ \frac{2l_1 l_2 - l_1^2 - l_2^2 + 1}{2l_1 l_2} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$= -2 \frac{\Delta G}{G_0} uv \left[ \frac{1 - u^2}{v^2 - u^2} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$(\text{A.18})$$

$$\frac{du}{dv} = 2 \frac{\Delta G}{G_0} uv \left[ \frac{u^2 - 1}{v^2 - u^2} \right] \quad (\text{A.19})$$

Si hacemos  $u = u_0$  al lado derecho de la ecuación, de esta forma podemos integrar.

$$\int_{u_0}^u du' = \int_{v_0}^v 2 \frac{\Delta G}{G_0} u_0 v' \left[ \frac{u_0^2 - 1}{v'^2 - u_0^2} \right] dv' \quad (\text{A.20})$$

$$u = \frac{\Delta G}{G_0} (u_0^2 - 1) u_0 \ln \left( \frac{v^2 - u_0^2}{v_0^2 - u_0^2} \right) + u_0 \quad (\text{A.21})$$

Para generalizar el resultado anterior (ecuación A.21), para direcciones arbitrarias de los ejes, debemos agregar una rotación a la elipse asociada a la anisotropía.

$$\frac{G'(\alpha_t)}{G(\alpha_t)} = \frac{2 \cos(\alpha_t - \theta_0) \sin(\alpha_t - \theta_0) (G_2 - G_1)}{G_1 \cos^2(\alpha_t - \theta_0) + G_2 \sin^2(\alpha_t - \theta_0)} = \frac{2 \cos(\alpha_t - \theta_0) \sin(\alpha_t - \theta_0) (G_2 - G_1)}{G_0}$$

El termino anterior se desarrolla reemplazando  $\alpha_t = \phi/2 - \phi_1$

$$\frac{G'(\alpha_t)}{G(\alpha_t)} = \frac{\Delta G}{G_0} [(l_2^2 - l_1^2) \sin(\phi) \cos(2\theta_0) + \sin(2\theta_0) \{\cos \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \sin \phi_2\}] \quad (\text{A.22})$$

El termino acompañado por  $\cos(2\theta_0)$  corresponde al caso desarrollado al rededor de los ejes de simetría A.19. A continuación se desarrolla el termino acompañado por  $\sin(2\theta_0)$ .

$$\frac{du}{dv} = \frac{\Delta G}{G_0} \tan(\phi/2) \{ \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \} \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{\Delta G}{G_0} \sqrt{\frac{1-u^2}{v^2-1}} \left\{ \frac{(l_1^2 - l_2^2 + 1)(l_1^2 - l_2^2 + 1)}{4l_1^2 l_2^2} - l_1 l_2 \sin^2 \phi \right\} \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{\Delta G}{G_0} \sqrt{\frac{1-u^2}{v^2-1}} \left\{ \frac{(uv)^2 - 1}{v^2 - u^2} - \frac{v^2 - u^2}{4} (1 - \cos^2 \phi) \right\} \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{\Delta G}{G_0} \sqrt{\frac{1-u^2}{v^2-1}} \left\{ \frac{(uv)^2 - 1}{v^2 - u^2} - \frac{v^2 - u^2}{4} \left( 1 - \left[ \frac{u^2 + v^2 - 2}{v^2 - u^2} \right]^2 \right) \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{\Delta G}{G_0} \sqrt{\frac{1-u^2}{v^2-1}} \left\{ \frac{v^2 + u^2 - 2v^2 u^2}{v^2 - u^2} \right\} \quad (\text{A.27})$$

Por lo tanto la forma general de la ecuación diferencial que describe la evolución de la fractura es la ecuación A.28, en este caso al realizar la aproximación  $u = u_0$  podemos integrar la ecuación, la solución que acompaña al termino  $\sin(2\theta_0)$ , corresponde a la ecuación A.29.

$$\frac{du}{dv} = \frac{\Delta G}{G_0} \left[ 2uv \frac{u^2 - 1}{v^2 - u^2} \cos(2\theta_0) + \sqrt{\frac{1-u^2}{v^2-1}} \left\{ \frac{v^2 + u^2 - 2v^2 u^2}{v^2 - u^2} \right\} \sin(2\theta_0) \right] \quad (\text{A.28})$$

$$u(v) = (1 - 2u_0^2) \sqrt{1 - u_0^2} \ln \left( 2 \frac{\sqrt{v^2 - 1} + v}{\sqrt{v_0^2 - 1} + v_0} \right) + 2u_0(u_0^2 - 1) \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - u_0^2} v}{u_0 \sqrt{v^2 - 1}} \right) - \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - u_0^2} v_0}{u_0 \sqrt{v_0^2 - 1}} \right) \right] \quad (\text{A.29})$$

El termino dentro de  $\tanh^{-1}$  decae al evolucionar la fractura (al aumentar  $v$ ), para algunos set de parámetros  $u_0$  este termino toma el valor de 1 o -1, lo cual corresponde a la singularidad de la  $\tanh^{-1}$ , por lo tanto esta aproximación no logra dar una solución comparable con el método discreto o las observaciones experimentales,(esto se observa en los casos en que la fractura inicial esta cerca de los focos).

### A.3 Desarrollo de la influencia del pliegue

Se observo que el pliegue tiene la forma de un cono truncado. La energía de la solapa doblada en forma cónica  $U = \frac{Eh^3\pi \ln(r_w/r_c)}{\tan(\alpha_c)}$ ,  $r_w$  corresponde al radio de la base del cono,  $r_c$  al radio menor del cono,  $\alpha_c$  es la pendiente del cono.

$$\frac{dU}{dx} = -F \frac{dl}{dx}$$

$$\frac{Eh^3\pi}{\tan(\alpha_c)} \frac{d \ln(r_w/r_c)}{dx} = \frac{Eh^3\pi}{\tan(\alpha_c)} \left[ \frac{1}{r_w} \frac{dr_w}{dx} - \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dx} \right] = -F \cos(\phi/2)$$

El termino  $dr_w/dx$  corresponde al cambio de forma de la base del cono, si consideramos que la base no cambia de forma este termino puede ser eliminado. El segundo termino de la suma puede ser obtenido al calcular la variación del perímetro de la circunferencia descrita en el extremo de menor radio, debido a un desplazamiento  $dx$

$$d(\pi r_c) = dx \rightarrow \frac{dr_c}{dx} = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{Eh^3}{\tan(\alpha_c)r_c} \ln(r_w/r_c) = F \cos(\phi/2) \quad (\text{A.30})$$

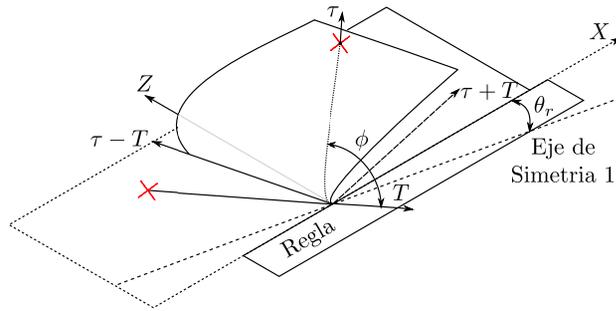


Figura A.3: Diagrama de la lamina con una de sus solapas libres

Si desarrollamos el termino elástico de la ecuación 4.3.

$$G(\theta) + \frac{dU}{ds} = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t)$$

$$G(\theta) + \frac{dU}{dr_c} \frac{dr_c}{dz} \frac{dz}{ds} = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t)$$

$$G(\theta) - \frac{E\ell^3\pi}{\tan(\alpha_c)r_c} \tan(\alpha_c) \sin(\theta - \alpha_t) = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t)$$

$$G(\theta) - \pi F \cos(\phi/2) \tan(\alpha_c) \sin(\theta - \alpha_t) = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - \alpha_t)$$

$$G(\theta) = 2F \cos(\phi/2) [\cos(\theta - \alpha_t) + \pi \tan(\alpha_c) \sin(\theta - \alpha_t)/2]$$

Podemos reducir los términos trigonométricos mediante y mediante la aproximación  $f(x + \epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x)$  donde el término  $\epsilon = \pi \tan(\alpha_c)/2$  con  $\epsilon \ll 1$

$$G(\theta) = 2F \cos(\phi/2) \cos(\theta - (\alpha_t + \pi \tan(\alpha_c)/2)) \quad (\text{A.31})$$

## A.4 Solución Analítica Problema de la regla

La solución analítica de la trayectoria seguida por la fractura cuando no sigue la regla se desarrolla según los argumentos dados en el capítulo 4, se considera el término  $\Delta$  pequeño.

$$\frac{dl}{l} = -\frac{\cos(\phi/2 - \Delta)}{\sin(\phi/2 - \Delta)} d\phi = -\frac{\cos(\phi/2)\cos(\Delta) + \sin(\phi/2)\sin(\Delta)}{\sin(\phi/2)\cos(\Delta) - \cos(\phi/2)\sin(\Delta)} d\phi$$

$$\frac{dl}{l} = -\frac{\cos(\phi/2) + \Delta \sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2) - \Delta \cos(\phi/2)} d\phi \quad (\text{A.32})$$

Para agregar el término anisotrópico desarrollamos la energía de fractura como una elipse donde los semi ejes corresponden a la energía en cada uno de los ejes de simetría del material.

$$\begin{aligned} G(\phi/2) &= G_1 \cos^2(\phi/2) + G_2 \sin^2(\phi/2) \approx G_0 \\ G'(\phi/2) &= -2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) G_1 + 2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) G_2 \\ G'(\phi/2) &= 2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) (G_2 - G_1) = \sin(\phi) (G_2 - G_1) = \sin(\phi) \Delta G \end{aligned}$$

La ecuación 2.2 es una relación de energía, si derivamos esta ecuación encontramos una relación de balance de torques, de este modo  $-\sin(\theta - \alpha_t) / \cos(\theta - \alpha_t) = G' / G$  el término  $\theta - \alpha_t$  corresponde a la diferencia entre la dirección de fractura esperada, y la observada.

$$\tan(\Delta) = -\frac{G'}{G} \rightarrow \Delta = -\frac{G'}{G} = -\sin(\phi) \frac{\Delta G}{G_0} \quad (\text{A.33})$$

De esta forma podemos desarrollar la fracción de la ecuación A.32 y agregar el término de anisotropía.

$$\begin{aligned} \frac{dl}{l} &= -\left[ \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} + \Delta \right] \left[ 1 + \frac{\cos(\phi/2)\Delta}{\sin(\phi/2)} \right] d\phi \\ \frac{dl}{l} &= -\left[ \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} + \left( 1 + \frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)} \right) \Delta + \Delta^2 \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right] d\phi \\ \text{El término } \Delta &\gg \Delta^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dl}{l} = -\left[ \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} + \Delta \frac{\sin^2(\phi/2) + \cos^2(\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)} \right] d\phi = -\left[ \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} + \frac{\Delta}{\sin^2(\phi/2)} \right] d\phi$$

Si agregamos el término de anisotropía mediante la ecuación A.33.

$$\frac{dl}{l} = - \left[ \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} - \frac{2\Delta G \cos(\phi/2)}{G_0 \sin(\phi/2)} \right] d\phi = - \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \left[ 1 - 2 \frac{\Delta G}{G_0} \right] d\phi$$

Integrando

$$-2 \ln(\sin(\phi/2)) \Big|_{\phi_0}^{\phi} = \frac{1}{1 - 2\Delta G/G_0} \ln(l) \Big|_{l(\phi)}^{l_1(\phi_0)}$$

$$\left( \frac{\sin^2(\phi_0/2)}{\sin^2(\phi/2)} \right)^{1-2\Delta G/G_0} = \left( \frac{1 - \cos(\phi_0)}{1 - \cos(\phi)} \right)^{1-2\Delta G/G_0} = \frac{l}{l(\phi_0)}$$

De esta forma podemos replicar la ecuación 4.6, si hacemos  $\Delta G = 0$  se obtiene la ecuación 4.5.

# Bibliografía

- [1] L.F. Pease III, P. Deshpande, Y. Wang, W. B. Russel and S. Y. Chou. Self-formation of sub-60-nm half-pitch gratings with large areas through fracturing. *Nature*, 2007.
- [2] J. Marthelot, B. Roman, J. Bico, J. Teisseire, D. Dalmas and F. Melo. Self-replicating cracks: A collaborative fracture mode in thin films. *Physical Review Letter*, 2014.
- [3] V. Romero, B. Roman, E. Hamm and E. Cerda. Spiral tearing of thin films. *Soft Matter*, 2013.
- [4] B. Audoly, M. Reis and B. Roman. Cracks in thin sheets: When geometry rules the fracture path. *Physical Review Letter*, 2005.
- [5] E. Hamm, P. Reis, M. LeBlanc, B. Roman and E. Cerda. Tearing as a test for mechanical characterization of thin adhesive films. *Nature*, 2008.
- [6] A. Takei, B. Roman, J. Bico, E. Hamm and F. Melo. Forbidden directions for the fracture of thin anisotropic sheets: An analogy with the wulff plot. *Physical Review Letter*, 2013.
- [7] O'keefe Robert. Modeling the tearing of paper. *Am. J. Phys*, 1994.