

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**CORRUGACIÓN EN SUPERFICIES
GRANO CAPILARES**

MARÍA ESTER OYARZÚN GUZMÁN

Profesor Guía: Dr. Francisco Melo Hurtado

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO FÍSICO

SANTIAGO DE CHILE

MARZO 2015

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FISICA



CORRUGACIÓN EN SUPERFICIES GRANO CAPILARES

MARÍA ESTER OYARZÚN GUZMÁN

Profesor Guía : Dr. Francisco Melo

Profesores Comisión : Dr. Francisco Vivanco

: Dr. Belfor Galaz

: Dr. Dinesh Pratap Singh

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO FÍSICO

SANTIAGO DE CHILE

MARZO 2015

"CORRUGACIÓN EN SUPERFICIES
GRANO CAPILARES"

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al título de Ingeniero Físico

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO DE CHILE

MARZO 2015

"CORRUGACIÓN EN SUPERFICIES
GRANO CAPILARES"

MARÍA ESTER OYARZÚN GUZMÁN

Este trabajo de graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Francisco Melo H., del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato, Dr. Francisco Vivanco, Dr. Belfor Galaz Donoso, Dr. Dinesh Pratap Singh y Dr. Francisco Melo.

.....
Dr. Francisco Vivanco

.....
Dr. Belfor Galaz D.

.....
Dr. Dinesh Pratap Singh

.....
Dr. Francisco Melo H.
Profesor Guía

.....
Dra. Yolanda Vargas H.
Directora Departamento de Física

Dedicado a mi madre...
Porque te mereces el mundo entero

Agradecimientos

Primero que todo, quiero agradecer a mi familia, especialmente a mi mamá, Sandra Guzmán, quien no sólo en mi etapa universitaria sino también en mi educación básica y media me apoyó incondicionalmente. Ella creyó en mí, me ayudó en lo que estuvo a su alcance, me enseñó con su ejemplo y dio todo para que yo fuese profesional. Quiero agradecerle a mi hermano por inspirarme a ser una mejor persona cada día, a ser un buen ejemplo para él.

También les agradezco a Luisa Rojas, Ramona Sagaceta y Karen Ortega, tres mujeres increíbles que tengo la suerte de tener en mi vida.

A mis amigos de la Universidad, Pamela Hernández, Willy Klöckner, Vanessa Estroz, Daniel Montofré, Susana Lagos, Tania Silva, Rubén Meza, quienes me acompañaron en distintas etapas de mi carrera, en días de estudio y momentos de relajo.

Le agradezco a los miembros del Laboratorio de Física No Lineal, a Francisco Santibáñez por haber facilitado mi inicio en la física experimental. A Javier Contreras, por su buena disposición a responder mis interrogantes. A Nelson Sepúlveda, Manuel Sepúlveda y Gonzalo Martín. A Alejandro Ibarra e Ignacio Calderón por haber ayudado a la realización de este trabajo con sus conocimientos, además de su buen humor, lo que ayudó a que este período tuviera momentos de risa. A Érika Inostroza porque sin su presencia, el NLPLab no es lo mismo. Al profesor Francisco Melo, por permitirme realizar la tesis bajo su tutoría, por tener las palabras justas.

Gracias a su experiencia este trabajo dio excelentes frutos.

Agradezco a los profesores miembros de la comisión, por revisar y evaluar este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer muy especialmente a Víctor Duarte, por su paciencia en esta etapa, por su comprensión, apoyo e infinito amor. Gracias por tener la capacidad de sacarme una sonrisa incluso en los peores momentos, sin ti, este último período hubiese sido mucho más difícil.

A todos quienes de alguna forma aportaron al desarrollo de este trabajo de titulación.

Sinceramente, muchas gracias.

Resumen

En este trabajo se propone estudiar la respuesta mecánica de una superficie grano-capilar, constituida por cilindros hidrofóbicos flotando en un recipiente tipo Langmuir Blodgett corrientemente usado para el estudio de interfases. Cuando la interfaz es sometida a una pequeña compresión perpendicular al eje de los cilindros, se observa una respuesta reversible y elástica. Sin embargo, a altas compresiones la interfase presenta arrugas cuyo tamaño se puede caracterizar midiendo su longitud de onda y amplitud. A medida que se aumenta la compresión la modulación evoluciona pasando de arrugas a pliegues que absorben la deformación impuesta. Para describir los fundamentos físicos detrás de los fenómenos observados durante este trabajo, en el primer capítulo, se darán luces de los temas involucrados como capilaridad, tensión superficial, ángulos de contacto y presión de Laplace.

A continuación, en el capítulo 2, se explica en qué consiste la Perfilometría por Transformada de Fourier, método propuesto para describir y reconstruir una superficie que inicialmente es plana, pero que se deforma con el tiempo a medida que se ejerce compresión. Esta técnica permite obtener valores precisos de la deformación resultante.

En el capítulo 3, se presenta una recapitulación de los resultados obtenidos. En la primera parte del capítulo, se explica el montaje experimental y materiales utilizados para realizar los experimentos. Se obtuvo resultados para dos materiales: grafito y poliestireno. A continuación, se entregan resultados sobre la reconstrucción de la superficie y medición de las deformaciones generadas en ella, para las que se obtuvo una relación para cuantificar la longitud de onda en función del diámetro de

los cilindros. Además, se observó como varió la distancia entre los cilindros y se midió la fuerza experimentada por ellos cuando el sistema estaba bajo compresión y bajo relajo. Para terminar, se muestran imágenes tomadas con el objetivo de medir los ángulos de contacto de los cilindros en agua Milli Q.

Como una forma de describir los comportamientos observados, en el capítulo 4 se plantea una analogía con las fuerzas de Coulomb para describir las interacciones capilares entre los cilindros. Además, utilizando teoría de sólidos elásticos se propone una expresión para el módulo de flexión de la capa de cilindros, asumiendo que el sistema tiene un comportamiento similar al de placas delgadas. Se concluye que a pequeñas compresiones aplicadas, el sistema se comporta como un granular, predominando las interacciones capilares, sin embargo, después de cierto valor, el sistema se comporta como un sólido elástico.

Para concluir, en el capítulo 5: Proyecciones y Conclusiones, se dan ideas sobre posibles experimentos a realizar que podrían complementar los resultados de la investigación desarrollada durante este trabajo.

Tabla de Contenidos

Dedicatoria	VI
1. Introducción	5
1.1. Objetivos	6
1.1.1. Objetivos Generales	6
1.1.2. Objetivos Específicos	6
1.2. Estado del Arte	7
1.3. Capilaridad	9
1.3.1. Tensión Superficial	10
1.3.1.1. Definición Mecánica	10
1.3.2. Presión de Laplace y la Ecuación de Young-Laplace	12
1.3.3. Ecuación de Young y Fenómeno de Mojado	13
1.3.3.1. Ángulo de contacto	13
2. Perfilometría por Transformada de Fourier	15
2.1. Perfilometría por Transformada de Fourier	16
2.1.1. Geometría Óptica	17
2.1.2. Método FTP	20
2.1.3. Desarrollo de la Fase	21
3. Resultados	22
3.1. Montaje Experimental y Materiales	23

3.2. Medición de deformaciones	27
3.3. Medición de Fuerza en la superficie de cilindros	29
3.4. Medición de distancia entre cilindros	33
3.5. Transición entre Superficie Plana, Arrugas y Pliegue	36
3.5.1. Cilindros de grafito de 0.3 mm de diámetro	36
3.5.2. Cilindros de grafito de 0.7 mm de diámetro	39
3.5.3. Cilindros de poliestireno de 0.6 mm de diámetro	41
3.5.4. Cilindros de poliestireno de 1.0 mm de diámetro	43
3.6. Medición de la Longitud de Onda de las arrugas	45
3.7. Medición de Ángulos de Contacto	46
4. Modelamiento	50
4.1. Fuerza de Interacción entre cilindros	51
4.2. Comportamiento elástico de la capa de cilindros	54
5. Conclusiones y Proyecciones	57
5.1. Proyecciones	58
5.2. Conclusiones	59
A. Deducción de la Ecuación de Young Laplace	61
B. Deducción de la Ecuación de Young	64

Índice de Ilustraciones

1.1. Superficies granulares	8
1.2. Tensión superficial	11
1.3. Ángulos de Contacto	13
1.4. Ecuación de Young	14
2.1. Geometría FTP ejes ópticos cruzados	18
2.2. Geometría FTP ejes ópticos paralelos	19
2.3. Aplicación FTP	21
3.1. Montaje Experimental	24
3.2. Recipiente de Langmuir Blodgett	25
3.3. Perfilometría por Transformada de Fourier 3D	27
3.4. Perfilometría por Transformada de Fourier 2D	28
3.5. Curva de Fuerza vs Desplazamiento	30
3.6. Fuerza vs Desplazamiento caso no reversible	32
3.7. Distancia entre cilindros de grafito y poliestireno	34
3.8. Distancia mínima entre cilindros en función del diámetro	35
3.9. Deformación, fuerza y distancia para cilindros de 0.3 mm	37
3.10. Desarrollo de pliegues	38
3.11. Deformación, fuerza y distancia para cilindros de 0.7 mm	39
3.12. Deformación, fuerza y distancia para cilindros de 0.6 mm	41
3.13. Deformación, fuerza y distancia para cilindros de 1.0 mm	43
3.14. Longitud de onda arrugas	45

3.15. Ángulo de contacto polímero	47
3.16. Ángulo de contacto grafito	47
3.17. Menisco entre dos cilindros	48
3.18. Atracción y repulsión de cilindros	49
4.1. Meniscos entre dos cilindros	51
4.2. Cargas Capilares	52
4.3. Distribución de cargas capilares	53
4.4. Longitud de onda en función del diámetro (teoría)	56
A.1. Superficie esférica	62
B.1. Deformación gota	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivos Generales

Estudiar la respuesta mecánica de una superficie constituida por cilindros hidrofóbicos flotando en un recipiente tipo Langmuir Blodgett cuando el sistema es sometido a una compresión, y luego a un relajó, perpendicular al eje de los cilindros.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Utilizar la técnica de deposición de Langmuir Blodgett para formar la interfase agua-grafito.
- Utilizar la Perfilometría por Transformada de Fourier para medir la deformación en la dirección normal a la superficie.
- A partir de análisis de imágenes medir distancias entre los cilindros de grafito a medida que se aplica la deformación y que el sistema se relaja.
- Obtener una relación entre la fuerza y la deformación aplicada.
- Estudiar la aparición de pliegues y la formación de arrugas en la superficie de cilindros y su similitud con medios continuos.

1.2. Estado del Arte

La interacción entre partículas fue estudiada en un principio por M. M. Nicholson en 1947, quien consideró una burbuja de radio R en reposo sobre una superficie horizontal de fluido y calculó la altura de la superficie en la vecindad de la burbuja. Además de eso, estudió la fuerza de interacción entre un par de burbujas sobre un fluido [1].

Basándose en el trabajo realizado por Nicholson, W. A. Gifford y L. E. Scriven en 1970 estudiaron con mayor detalle las fuerzas de atracción y repulsión existente entre partículas flotantes. En particular, aplicaron su investigación a la interacción de cilindros horizontales y paralelos y obtuvieron una expresión para la fuerza efectiva de atracción entre ellos en función de sus ángulos de contacto [2].

En contraste a las investigaciones anteriores, en esta ocasión en vez de considerar sólo dos cilindros, se considera una superficie constituida por ellos. En este sistema, aparecen varios comportamientos propios de medios continuos, como láminas delgadas, lo que ha dejado cabida para realizar estudios sobre el tema. En el 2004, Vella y Aussillous observaron que superficies granulares bidimensionales formadas por partículas de tamaño que variaba entre 0.0025 - 6 mm se comportaban como sólidos elásticos, por ejemplo, desarrollaban arrugas y pliegues a medida que se les aplicaba una compresión [3], como se puede apreciar en la figura 1.1, y cuando esta era retirada la monocapa volvía a su estado no deformado.

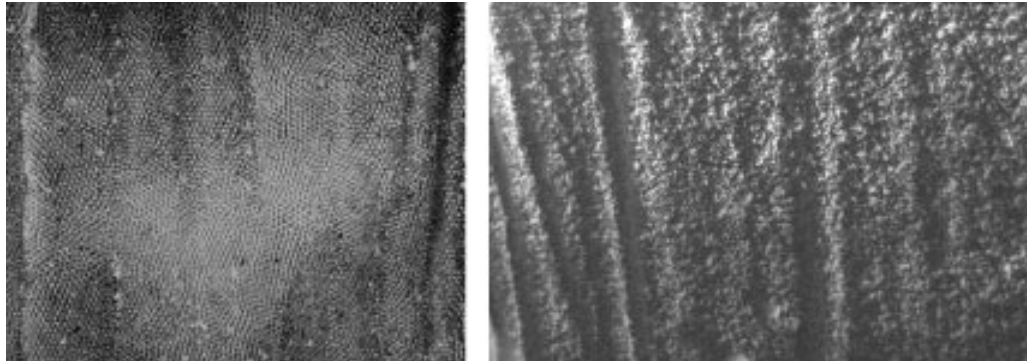


Figura 1.1: Izq: Superficie granular pandeada formada por partículas de diámetro 0.297 mm. Der: Superficie granular arrugada formada por partículas irregulares de diámetro cercano a 0.02 mm [3].

En el caso de la superficie de cilindros, estas arrugas y pliegues también aparecen bajo la acción de una compresión, pero no se ha intentado aún describir la respuesta del sistema bajo dichas condiciones. A lo largo de este trabajo, se logra caracterizar ambas inestabilidades, arrugas y pliegues, usando Perfilometría por Transformada de Fourier, técnica desarrollada por Takeda para medir deformaciones de superficies a través de la captura de una imagen de referencia y una deformada [4]. Lo novedoso en esta ocasión, es que es posible observar la deformación a medida que transcurre el tiempo, tomando más de una fotografía, así se puede estudiar la evolución del sistema cuando la compresión aumenta y cuando disminuye.

En la siguiente sección se verán conceptos relacionados con capilaridad, tensión superficial y ángulos de contacto. A partir de ellos, se puede explicar el comportamiento de cilindros hidrofóbicos que forman una superficie continua sobre un recipiente de Langmuir Blodgett. A pequeñas deformaciones, la curvatura de los meniscos a lo largo de cada cilindro es determinante en el comportamiento de un conjunto de ellos.

1.3. Capilaridad

Los efectos de la capilaridad son observables en fenómenos como la lluvia en las ventanas, en un insecto que camina sobre el agua o en el ascenso de un líquido en un tubo muy delgado. La mayoría de estas situaciones son cotidianas y no consiguen generar un mayor grado de atención en las personas. Sin embargo, en la capilaridad está la respuesta cuando queremos analizar el transcurso físico que hay detrás de cada uno de estos fenómenos. Para entender lo anterior, es necesario tener claros conceptos como interfase, capilaridad y tensión superficial.

Una interfase es el área que separa una fase de otra. Si consideramos que tenemos tres fases principales: sólido, líquido y gas, existen por lo tanto, tres combinaciones posibles: sólido-gas, sólido-líquido y gas-líquido. Las interfases pueden separar dos líquidos inmiscibles, como agua y aceite o dos superficies sólidas, las cuales por ejemplo, se estudian cuando se analiza el comportamiento mecánico de materiales. Las interfases gas-gas no existen, debido a que los gases se mezclan [5].

La capilaridad, es el estudio de las interfases entre dos líquidos inmiscibles o entre un líquido y aire [6]. Estas interfases son deformables, son libres de cambiar su forma con el fin de minimizar su energía de superficie.

1.3.1. Tensión Superficial

Como se mencionó anteriormente, los líquidos pueden ascender dentro de un tubo muy delgado y a pesar de parecer desafiar la gravedad, pueden adoptar formas extremadamente estables. Una superficie líquida puede ser pensada como una membrana estirada caracterizada por una tensión de superficie que se resiste a su distorsión. A continuación se explicará el origen físico de esta tensión superficial.

La tensión superficial es el resultado de la diferencia energética que existe entre las moléculas que se encuentran en el interior del líquido y las que se encuentran en la superficie. La fase líquida es un estado en el cual las moléculas se atraen unas a otras. Las moléculas que se hayan en el interior de un líquido se encuentran en un estado energéticamente favorable, rodeadas de otras moléculas, tienen un gran número de interacciones atractivas entre ellas, tales como fuerzas de Van der Waals o Enlaces de Hidrógeno, las que en promedio se anulan. Sin embargo, las moléculas que están en la superficie, están rodeadas por otras moléculas de su mismo tipo solo parcialmente, esto es energéticamente desfavorable. Con el objetivo de traer moléculas desde el interior del líquido hacia la superficie (para que existan mayores interacciones) se debe realizar trabajo. Con esta visión, la tensión superficial puede ser interpretada como la energía requerida para traer moléculas desde el interior de un líquido hacia la interfaz y así aumentar la superficie de contacto.

La interacción de las moléculas en la superficie del agua, por ejemplo, logran que ésta se comporte como una cama elástica, lo suficientemente fuerte como para soportar el peso de un insecto pequeño.

1.3.1.1. Definición Mecánica

Anteriormente se concluyó que para aumentar superficie, es necesario proporcionar energía. Consideremos una película de algún líquido extendida sobre

un marco, el cual tiene uno de sus extremos deslizables, como el mostrado en la figura 1.2. La película es relativamente delgada, digamos $1 \text{ } [\mu\text{m}]$, pero la distancia entre las superficies frontal y posterior es lo suficientemente amplia para evitar el solapamiento de ambas interfases. Si se aumenta el área superficial moviendo el extremo deslizable del marco una distancia dx a la derecha, se ha realizado trabajo. Este trabajo es proporcional al aumento de superficie, es decir, dA . El área superficial aumenta dos veces $b \cdot dx$ porque la película tiene un lado frontal y un lado posterior. Introduciendo la constante de proporcionalidad γ obtenemos:

$$\delta W = \gamma dA \quad (1.1)$$

Donde γ es la tensión superficial (o interfacial), una característica para una determinada interfaz, como agua-aire [7]. Dimensionalmente, $[\gamma] = EL^{-2}$, por lo tanto, la tensión superficial es expresada en unidades de J/m^2 .

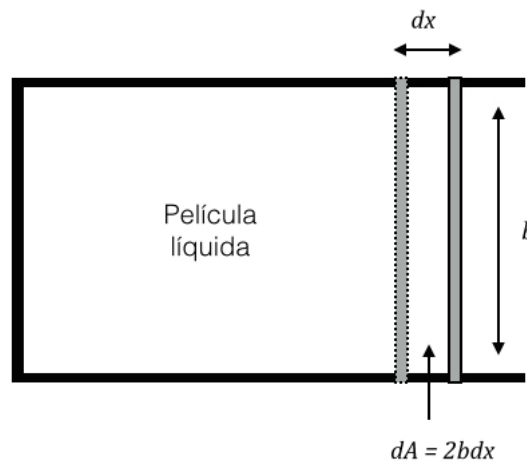


Figura 1.2: Montaje esquemático utilizado en la verificación de la ecuación 1.1 y definición de la Tensión Superficial.

La tensión superficial también puede ser definida como la fuerza F que se requiere para mantener el extremo deslizable en su lugar y equilibrar la fuerza de tensión superficial:

$$|F| = 2\gamma b \quad (1.2)$$

Ambos puntos de vista son equivalentes. Así es posible escribir:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -2\gamma b \quad (1.3)$$

La fuerza va dirigida hacia la izquierda mientras que x aumenta hacia la derecha, por eso el signo negativo.

1.3.2. Presión de Laplace y la Ecuación de Young-Laplace

La ecuación de Young-Laplace describe una de las principales leyes en la ciencia de las interfases: Si en equilibrio, una interfase entre dos fluidos está curvada, entonces hay una diferencia de presión a través de ella, dada por:

$$p = \frac{2\gamma}{R} \quad (1.4)$$

Donde γ corresponde a la tensión superficial y R al radio de curvatura de la interfase. La expresión más general de la ecuación de Young Laplace es escrita generalmente en términos de los dos radios de curvatura principales R_1 y R_2 en cualquier punto de una superficie y relaciona la diferencia de presión entre dos fases ΔP con la tensión superficial γ :

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.5)$$

La expresión anterior (deducida en el apéndice A) se reduce a la ecuación 1.4 en el caso de una gota o burbuja esférica, donde $R_1 = R_2 = R$. En ocasiones, ΔP es llamada también Presión de Laplace [5].

1.3.3. Ecuación de Young y Fenómeno de Mojado

1.3.3.1. Ángulo de contacto

La ecuación de Young es la base para realizar una descripción cuantitativa del fenómeno de mojado. Si consideramos una gota de líquido sobre una superficie sólida existen dos posibles comportamientos: el líquido se extiende en la superficie completamente (ángulo de contacto $\theta = 0$) o el líquido se esparce sólo parcialmente de manera que se puede definir un ángulo de contacto finito tal como se puede ver en la figura 1.3.

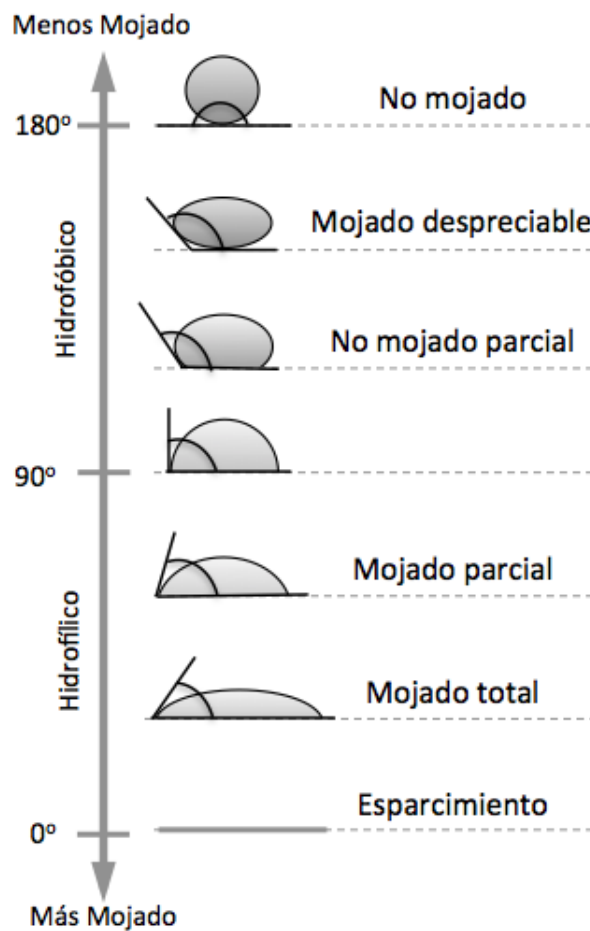


Figura 1.3: Cantidad de mojado para distintos valores de ángulos de contacto de una gota de líquido sobre una superficie sólida.

En el último caso se forma una línea de contacto de tres fases - también conocida como línea de mojado. En esta línea, las tres fases están en contacto: sólido, líquido y vapor (figura 1.4). La ecuación que relaciona el ángulo de contacto con las tensiones interfaciales γ_{SL} , γ_{LV} y γ_{SV} es la Ecuación de Young, deducida en el apéndice B [7]:

$$\gamma_{LV} \cos \theta = \gamma_{SV} - \gamma_{SL} \quad (1.6)$$

Si la tensión interfacial de la superficie sólida es mayor que la tensión de la interfase sólido - líquido ($\gamma_S > \gamma_{SL}$), el lado derecho de la ecuación de Young es positivo, esto implica que $\cos \theta$ tiene que ser positivo y el ángulo de contacto es menor a 90° : el líquido moja parcialmente el sólido. Si la interface sólido - líquido es energéticamente menos favorable que la superficie desnuda del sólido ($\gamma_S < \gamma_{SL}$), $\cos \theta$ tiene que ser negativo y el ángulo de contacto excederá los 90° .

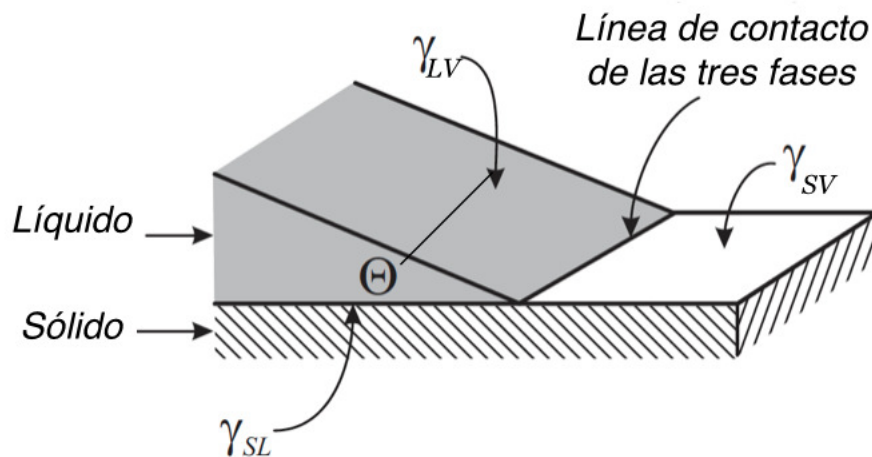


Figura 1.4: Borde de una gota de líquido con un ángulo de contacto θ sobre una superficie sólida. Se puede apreciar la línea de contacto de las 3 fases: sólido, líquido y vapor [7].

Capítulo 2

Perfilometría por Transformada de Fourier

Aunque existe una amplia variedad de configuraciones para trabajar con perfilometría basada en la proyección de franjas, el principio subyacente común a todas ellas es bastante simple: Un aparato que permita la proyección de un patrón de franjas y un sistema para registrar las imágenes de dicho patrón sobre un objeto [8]. Dentro de este contexto surge la Perfilometría por Transformada de Fourier, el método escogido durante esta investigación para medir la deformación inducida en la superficie de cilindros.

2.1. Perfilometría por Transformada de Fourier

La Perfilometría por Transformada de Fourier (FTP) es un método propuesto por Takeda [4] como una alternativa al Método de Contornos de Moiré, típicamente utilizado en perfilometría para reconstruir superficies y medir formas de objetos 3D. Entre las ventajas de la FTP se encuentra la distinción automática entre depresiones y elevaciones en un mapa de contornos y la mayor sensibilidad respecto a la técnica convencional de Moiré.

Para desarrollar esta técnica, un patrón de franjas de características conocidas es proyectado en un objeto de prueba en cierta dirección y la imagen resultante es observada desde una dirección diferente. Puesto que la dirección de proyección y observación son distintas, el patrón de franjas registrado es distorsionado según la forma del objeto y perspectiva. Es posible decir entonces, que la información acerca de las depresiones y elevaciones del objeto está codificada dentro del patrón de franjas deformado. La medición de las dimensiones del objeto se realiza comparando la imagen del patrón de franjas deformado con la imagen sin deformar. Hay entonces un desfase entre la imagen de referencia y la deformada, el cual permite cuantificar la forma del objeto a partir del cálculo de la Transformada de Fourier de ambas imágenes [8].

2.1.1. Geometría Óptica

La geometría necesaria para aplicar la Perfilometría por Transformada de Fourier es similar a la utilizada en la técnica de Proyección de Moiré, solo que en FTP la imagen de rejilla proyectada en un objeto es puesta directamente en el computador y procesada sin el uso de una segunda rejilla para generar la interferencia de franjas [4].

En la topografía de Moiré, se han propuesto y usado dos geometrías ópticas diferentes: Geometría de Ejes Ópticos Cruzados y Geometría de Ejes Ópticos Paralelos. En la primera de ellas, los ejes ópticos del proyector y la cámara permanecen en el mismo plano y se intersectan en un punto cerca del centro del objeto. En la Geometría de Ejes Paralelos, los ejes ópticos del proyector y la cámara permanecen en el mismo plano y son paralelos. Estas dos opciones están también disponibles para la FTP. Sin embargo, en este trabajo en particular, se utilizó la geometría de ejes ópticos paralelos.

A. Geometría de Ejes Ópticos Cruzados:

La figura 2.1 muestra una geometría en donde el eje óptico $E'_p - E_p$ del proyector intersecta el eje óptico de la cámara $E'_c - E_c$ en el punto O del plano de referencia R, un plano ficticio, normal a $E'_c - E_c$ y que sirve como referencia para medir la altura de los objetos $h(x, y)$. Las franjas de la rejilla G proyectada son normales al plano de la figura y su imagen conjugada, con período p , es formada por el proyector en el plano I a través del punto O. E'_p y E_p denotan respectivamente, los centros de la pupila de entrada y salida del proyector y de manera analoga, E_c y E'_c corresponden a los centros de la pupila de entrada y salida de la cámara. Finalmente, esta última es la que captura el plano de referencia R y ubica esa imagen en el plano del sensor S. E_p y E_c están localizados a la misma distancia l_o del plano R.

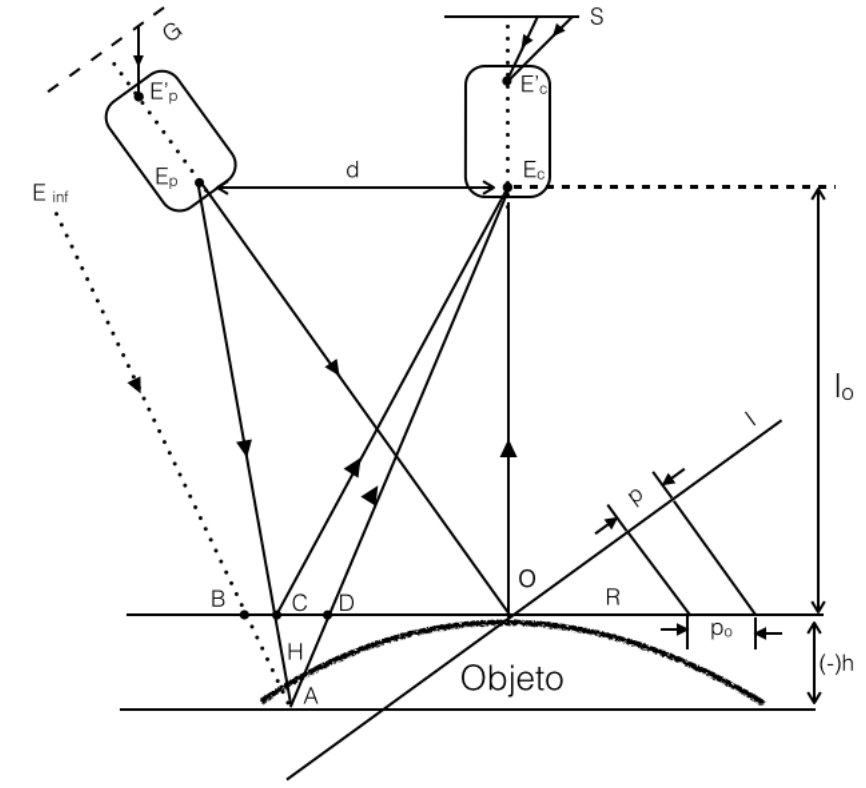


Figura 2.1: Geometría propuesta para aplicar la técnica Perfilometría por Transformada de Fourier con ejes ópticos cruzados.

B. Geometría de Ejes Ópticos Paralelos:

La figura 2.2 muestra una geometría en la cual el eje óptico $E'_p - E_p$ del proyector y el de la cámara $E'_c - E_c$ son paralelos y normales al plano de referencia R . La imagen conjugada de la rejilla G es formada en el plano R .

Al aplicar la Transformada de Fourier a las imágenes, se obtiene como resultado un mapa de fases que provee los datos 3D de los objetos. Entonces es necesario, llevar este mapa de fase a las coordenadas x , y y z de la superficie del objeto de prueba.

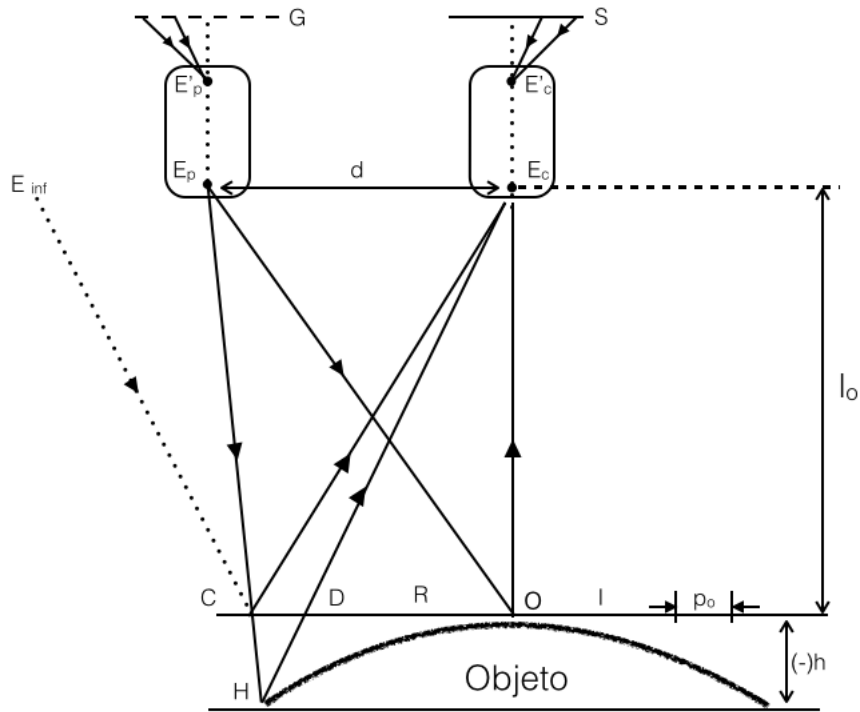


Figura 2.2: Geometría propuesta para aplicar la técnica Perfilometría por Transformada de Fourier con ejes ópticos paralelos

La conversión depende de los parámetros de la configuración experimental, incluyendo posición y orientación del proyector y la cámara, además de la ubicación del plano de referencia. La relación entre la fase y la altura es dada en el artículo de Takeda [4]:

$$h(x, y) = \frac{l_o \cdot \Delta\phi(x, y)}{\Delta\phi(x, y) - 2\pi f_r d} \quad (2.1)$$

Donde l_o es la distancia entre el centro óptico de la cámara y el plano de referencia R , d es la distancia entre E_c y E_p y f_r es la frecuencia espacial de las franjas proyectadas en el plano de referencia. $\Delta\phi(x, y)$ es la información de la fase la cual contiene la información de la altura de la superficie.

2.1.2. Método FTP

Cuando un objeto es puesto en el plano de referencia, la imagen del patrón de franjas puede ser expresado por una expansión en serie de Fourier [9]:

$$g(x, y) = r(x, y) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \exp(i(2\pi n f_r x + n\varphi(x, y))) \quad (2.2)$$

Cuando $h(x, y) = 0$, la imagen del patrón de franjas se puede expresar como:

$$g_o(x, y) = r_o(x, y) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \exp(i(2\pi n f_r x + n\varphi_o(x, y))) \quad (2.3)$$

Donde $r(x, y)$ y $r_o(x, y)$ corresponden a las distribuciones no uniformes de reflexión en la superficie del objeto, A_n es la constante de ponderación de la serie de Fourier y f_r es la frecuencia fundamental de las franjas proyectadas, $\varphi(x, y) = 2\pi f_o \overline{CD}$ es la fase resultante de la distribución de altura del objeto y $\varphi_o(x, y)$ es la fase original cuando $h(x, y) = 0$.

La transformada unidimensional de Fourier de la imagen observada en la ecuación 2.2 es calculada, obteniendo así el espectro de Fourier de la imagen. Usando un filtro de von Hann se puede obtener la componente fundamental del espectro de Fourier. A continuación se calcula la transformada inversa de Fourier de dicha componente fundamental. Se obtiene así, una imagen que contiene información sobre la imagen del patrón de franjas deformado:

$$\hat{g}(x, y) = A_1 r(x, y) \exp(i(2\pi f_r x + \varphi(x, y))) \quad (2.4)$$

La misma operación es aplicada a la ecuación 2.3, obteniendo:

$$\hat{g}_o(x, y) = A_1 r_o(x, y) \exp(i(2\pi f_r x + \varphi_o(x, y))) \quad (2.5)$$

La fase $\Delta\varphi_o(x, y)$ que tiene relación con la distribución de altura es:

$$\Delta\varphi(x, y) = \text{Im} \{ \log [\hat{g}(x, y) \cdot \hat{g}_o^*(x, y)] \} \quad (2.6)$$

2.1.3. Desenvolvimiento de la Fase

Se ha obtenido la distribución de fase $\Delta\varphi(x, y)$ dado por la ecuación 2.6. Puesto que el cálculo de la fase obtenido computacionalmente entrega sólo valores principales que van desde $-\pi$ a π , la distribución de fase está 'envuelta' en este rango, y consecuentemente tiene discontinuidades en los múltiplos de 2π para variaciones mayores de 2π . Estas discontinuidades pueden ser corregidas fácilmente ya sea añadiendo o substrayendo 2π , para obtener finalmente imágenes como la mostrada en la figura 2.3.

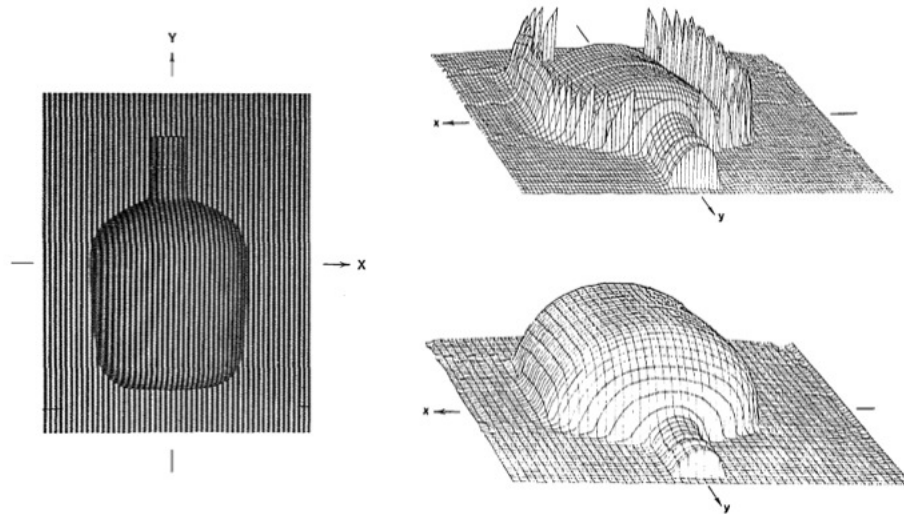


Figura 2.3: Izq: Patrón de franjas proyectado sobre la superficie de una botella. Der. Sup.: Distribución de fase envuelta. Der. Inf.: Distribución de fase desenvuelta.[4]

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos en los distintos experimentos realizados. A partir de las imágenes capturadas por una cámara CCD, se pueden obtener diferentes cantidades simultáneamente. Para comenzar, de un conjunto de imágenes que muestran la evolución en el tiempo del sistema de cilindros se puede reconstruir la superficie, además, de obtener la distancia promedio que hay entre los cilindros, junto con esto, una celda de carga entrega valores de la fuerza experimentada por los cilindros durante cada experimento.

3.1. Montaje Experimental y Materiales

En la figura 3.1 se muestra el montaje experimental usado para comprimir y relajar las capas de cilindros. Este consiste en un recipiente de Langmuir que contiene agua Milli Q, sobre la que se realiza la deposición de los cilindros. El recipiente tiene un ancho fijo de 50 [mm] y un largo de 60 [mm], el que puede disminuir hasta 30 [mm]. En el lado izquierdo del recipiente se encuentra una barrera móvil y en el lado opuesto se encuentra una celda de carga, cuya carga máxima es de 10 gr (0,1 N). Tanto la barrera móvil como el recipiente están hechos de teflón para minimizar la adhesión del surfactante y mantener el ángulo de mojado constante. La barrera está conectada a un motor Thorlab (TDC001) que permite controlar los valores de velocidad y aceleración con que se mueve, además de la longitud de los pasos dados. Por otro lado, la celda de carga es conectada a una fuente de poder (Zurich, DPS-2012M) que le suministra una diferencia de potencial de 14 [V] y a un osciloscopio (Tektronix, TDS 2012B) el cual permite hacer una correspondencia entre el voltaje medido por el osciloscopio con la fuerza ejercida por los cilindros sobre la celda de carga.

El experimento consiste en realizar la deposición de cada uno de los cilindros en el agua Milli Q entre la celda de carga y la barrera móvil, sin que estos se hundan. Posteriormente, se ejerce una compresión (o un relajo cuando la capa ya está com-

primida) sobre el sistema utilizando la barrera móvil que da entre 300 y 400 pasos. La longitud de cada paso corresponde al 10 % del diámetro de los cilindros utilizados en el experimento. Gracias a la celda de carga es posible medir la fuerza entre los cilindros en función del desplazamiento δ cuando cualquiera de los dos fenómenos, ya sea compresión o relajación, ocurre.

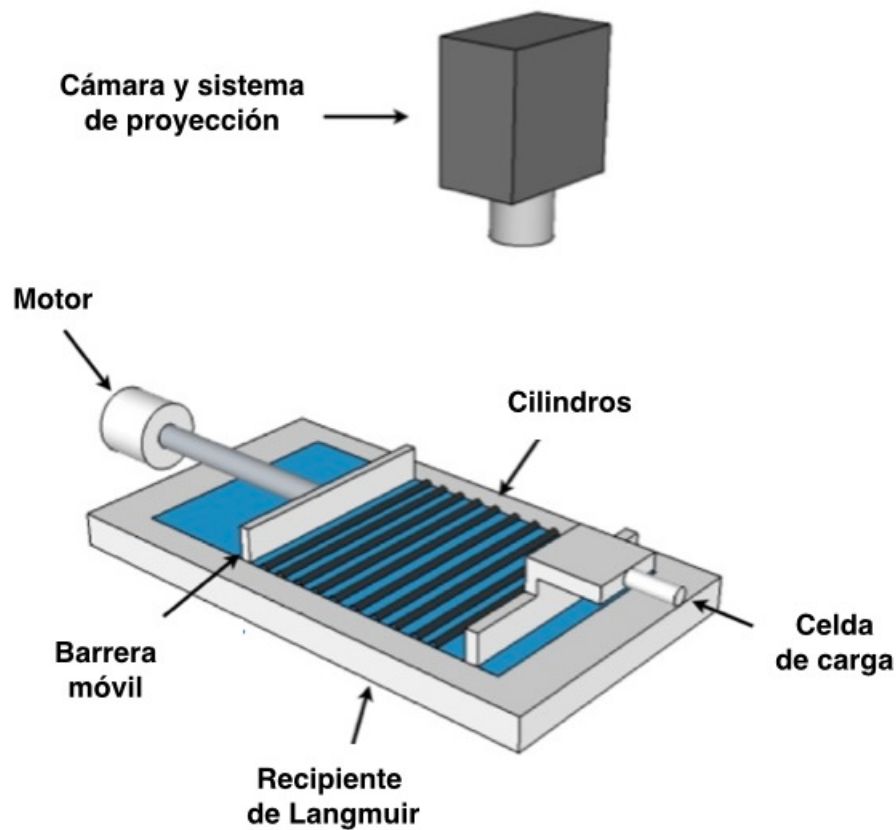


Figura 3.1: Montaje experimental utilizado para medir deformaciones en la superficie de cilindros. Incluye una celda de carga y una barrera móvil.

Sobre el recipiente, a 20 cm de altura, se encuentran de forma paralela un micro proyector (Samsung SP H03) y una cámara, que incluye un sensor CCD (Point Grey, FL3-GE-50S5M-C). Esta disposición es la necesaria para aplicar el método de Perfilometría por Transformada de Fourier (FTP) y poder medir la deformación ver-

tical experimentada por la capa de cilindros. Labview controla el proyector para que muestre un patrón sinusoidal de franjas sobre la superficie de cilindros de manera tal que las franjas estén perpendiculares a ellos. La cámara, por su parte, captura el patrón inicial y los patrones sucesivos generados a medida que la barrera se va moviendo y producto de esto comprimiendo la superficie y deformándola (una imagen por cada paso). Estas imágenes son analizadas gracias a una rutina realizada en Matlab, la cual entrega como resultado valores de la posición vertical de la capa de cilindros respecto al caso sin deformar.

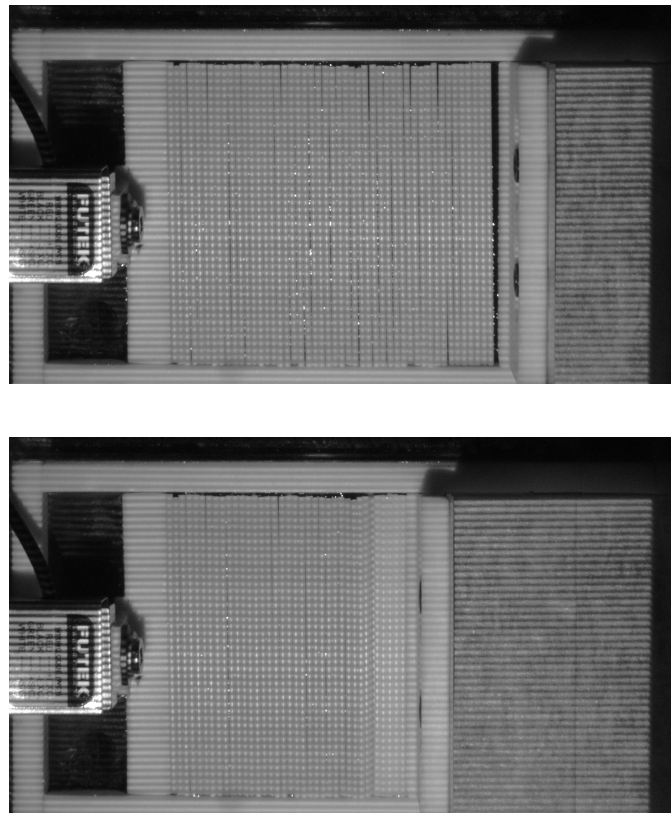


Figura 3.2: Recipiente de Langmuir Blodgett que contiene la capa de cilindros previo y posterior a la compresión. Se puede apreciar el patrón de franjas.

Los experimentos realizados se llevaron a cabo utilizando cilindros de dos

materiales distintos: grafito y poliestireno. En el caso del grafito, se hicieron ensayos con cilindros de 0.3, 0.5 y 0.7 [mm] de diámetro y 48 y 36 [mm] de longitud. Como cilindros de grafito se utilizaron minas de lápices, las que se caracterizan por tener porcentajes de cera y arcilla, los que varían según la dureza de la mina. En este caso en particular, se utilizaron minas de lápices B, H y 2H, las que tienen un 5 % de cera. Los porcentajes de arcilla son de 23 %, 31 % y 34 % respectivamente [10]. Luego, se realizaron ensayos con cilindros de poliestireno de 0.6 y 1.0 [mm] de diámetro. Los experimentos y la adquisición de datos fueron controlados por un programa de Labview diseñado para manejar de manera simultánea el movimiento de la barrera y la toma de fotos desde la cámara, además de la proyección del patrón sinusoidal.

3.2. Medición de deformaciones

Las imágenes obtenidas de la compresión y relajo de la capa de cilindros fueron analizadas con un algoritmo hecho en Matlab que calcula la Transformada de Fourier a cada imagen. Este algoritmo consigue reconstruir la superficie de cilindros y su deformación a medida que pasa el tiempo. La figura 3.3 por ejemplo, es resultado de una reconstrucción.

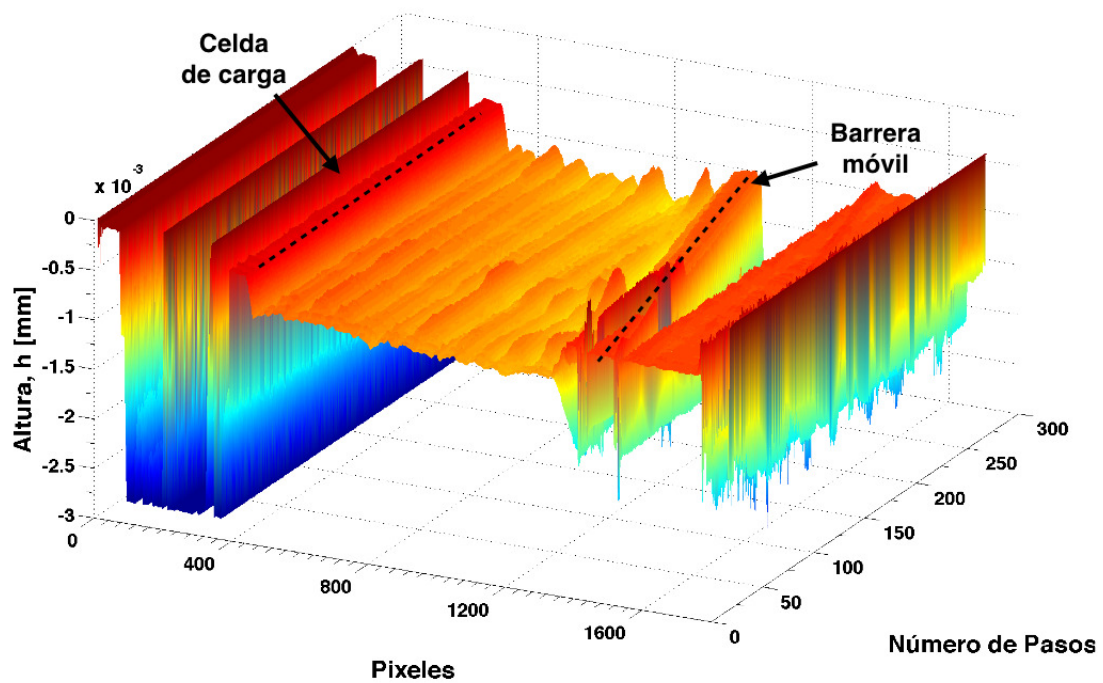


Figura 3.3: Reconstrucción 3D de una superficie de cilindros sometida a un ciclo de compresión de 300 pasos. La imagen es obtenida como resultado del análisis realizado usando Perfilometría por Transformada de Fourier.

Es posible ver que en el píxel 500 aproximadamente está la celda de carga (primera línea punteada) a una altura superior respecto a la capa de cilindros. A continuación, está la superficie de cilindros, que llega hasta los 1400 píxeles en

un principio, pero a medida que se realiza el esfuerzo esta área va disminuyendo llegando a los 1000 pixeles. Posterior a esta capa, está la barrera móvil que comprime los cilindros también a una altura superior. Cuando la compresión se lleva a cabo aparece un patrón de arrugas bien definido que se puede caracterizar a partir de su longitud de onda. A medida que aumenta el esfuerzo, este patrón de arrugas deriva en la formación de un pliegue. De manera adicional, esta reconstrucción de ejemplo, puede ser analizada bidimensionalmente.

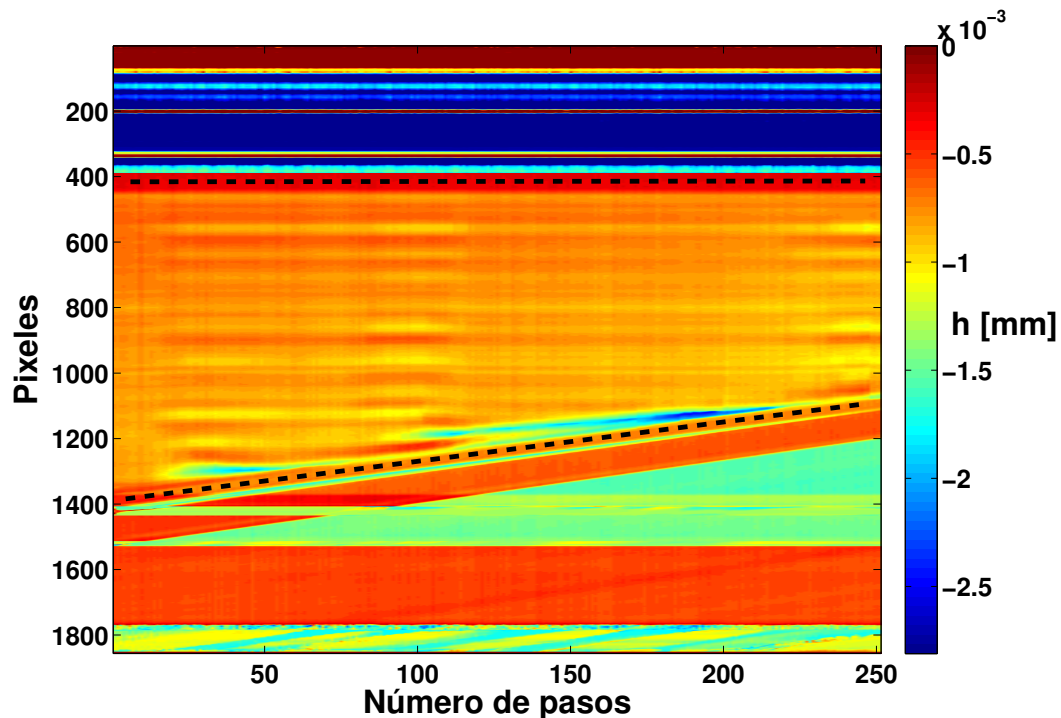


Figura 3.4: Imagen bidimensional equivalente a la figura 3.3 resultante del análisis usando Perfilometría por Transformada de Fourier.

De la figura 3.4 es posible obtener un valor para la deformación vertical h de la capa de cilindros con respecto a la condición inicial sin comprimir en función del desplazamiento δ de la barrera, reflejado en el número de pasos. Las alturas son medidas tomando como referencia la superficie del recipiente. Las líneas segmentadas a la altura de los 400 y 1400 pixeles corresponden respectivamente

a la celda de carga y la barrera móvil. Ya que se toman varias imágenes es posible observar la evolución de estas arrugas a medida que pasa el tiempo. Un rápido análisis de este ejemplo muestra que a medida que el desplazamiento aumenta aparecen algunas arrugas (colores amarillos, rojos y anaranjados) que en un inicio no están, seguidas por uno o dos pliegues cuando se alcanzan los máximos de desplazamiento. Estos se ven en color celeste cuando comienza su formación y en un tono azul cuando ya son más profundos. Observaciones muestran que las dos inestabilidades pueden o no coexistir, es decir, hay casos en que se observan arrugas y luego pliegues, y otros casos en que hay arrugas y pliegues simultáneamente. El mismo comportamiento es observado en el caso de medios continuos elásticos [11].

3.3. Medición de Fuerza en la superficie de cilindros

Gracias a la celda de carga parte del montaje, es posible medir la fuerza experimentada por los cilindros cuando sufren una compresión o cuando, luego de esta, el sistema se relaja paulatinamente con los mismos parámetros que se comprimió. Al inicio, se realizaron experimentos con distintos valores de velocidad y aceleración, pero se llegó a la conclusión que estos parámetros no eran determinantes para la resultante de fuerza, por lo tanto, se decidió llevar a cabo todas las mediciones con una velocidad y aceleración igual a $0,3 \text{ mm/s}$ y $0,3 \text{ mm/s}^2$ respectivamente. Luego de fijar estas constantes, mediante Labview se consigue que el motor mueva la barrera un número de pasos suficientes para que la capa de cilindros se arrugue y/o pliegue. El número de ellos varió entre 300 y 400, cada paso tenía una longitud igual al 10% del diámetro de los cilindros. De la medición de fuerza en función del desplazamiento (ya sea medido en milímetros o en número de pasos) se obtienen curvas como la mostrada en la figura 3.5:

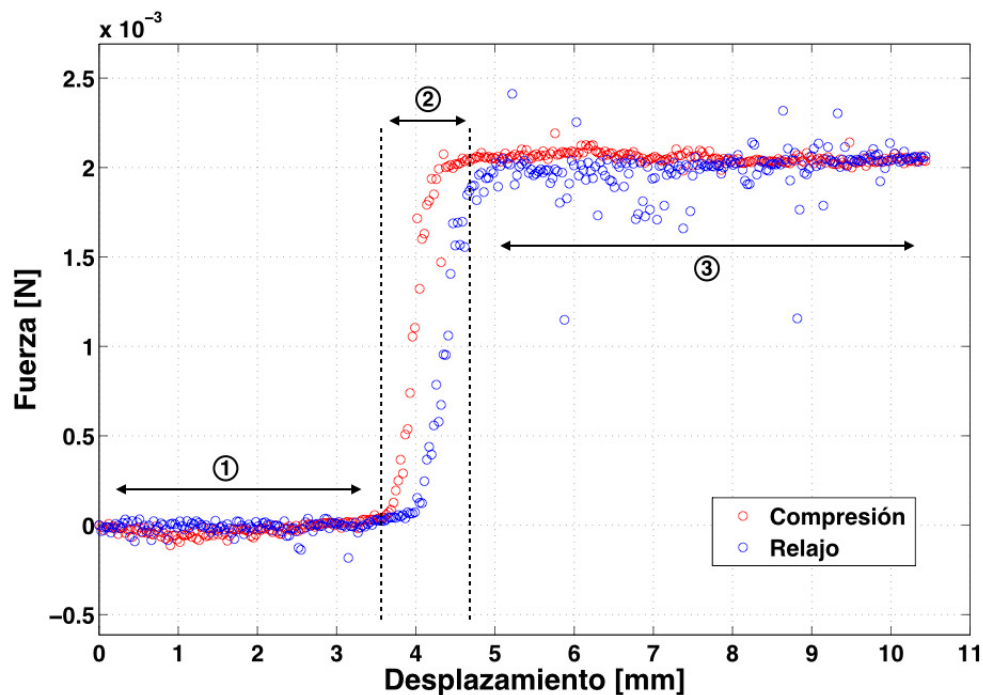


Figura 3.5: Fuerza experimentada por cilindros de 0.3 [mm] de diámetro a medida que se realiza la compresión de la superficie y a medida que se realiza el relajó.

La figura 3.5 muestra una curva típica de fuerza versus desplazamiento cuando la superficie de cilindros se comprime (en rojo) y cuando se relaja (en azul). Se puede observar que la curva tiene tres regímenes principales: inicia con valores de fuerza cercanos a cero cuando el desplazamiento es pequeño, luego hay un aumento brusco de la pendiente durante un corto período de tiempo, para posteriormente llegar a un plateau, donde la fuerza alcanza un valor de saturación.

La magnitud casi nula de la fuerza en la etapa inicial de la curva se debe a las condiciones iniciales del experimento. La superficie de agua Milli Q se cubre con cilindros pero no en un 100 %, quedando espacios entre ellos. Por lo tanto, la fuerza medida en la primera etapa de la curva, que es distinta de cero pero muy pequeña, se debe al acercamiento entre los cilindros producto del movimiento de la barrera, se acomodan sus líneas de contacto, pero estos aún no se tocan.

En la segunda etapa de la curva, se ve un incremento brusco de la magnitud de la fuerza durante un intervalo de tiempo que es pequeño en comparación a la duración total de la compresión. Aquí, hay contacto entre los cilindros, pero la superficie se mantiene plana, no aparece aún ningún tipo de inestabilidad, la fuerza aumenta, pero la superficie no llega a modularse. Sin embargo, en la etapa 3 de la curva, la fuerza alcanza un valor de saturación, aparecen las primeras inestabilidades en el sistema, un patrón de arrugas y posteriores pliegues resultan en que la fuerza se mantiene aproximadamente constante a pesar de que continúa la compresión.

Se puede observar en este caso en particular, que la curva de relajo del sistema, en azul, coincide de manera aproximada con la curva de compresión, en rojo. Los valores de fuerza que tienen lugar durante el relajo coinciden con los que hubo en la compresión en las mismas posiciones. Esto hace que el experimento sea reversible en un alto porcentaje. Las arrugas y pliegues formados en la superficie, son deshechos en el mismo orden en el que fueron apareciendo, sin pérdida de elementos, quedando la superficie plana como en un principio.

Sin embargo, esto no siempre es así. Existen casos en que durante la compresión se hunden algunos de los cilindros que conforman los pliegues. Cuando esto ocurre, al llevar a cabo el relajo quedan espacios vacíos en la superficie. Producto de lo anterior, cuando los pliegues y arrugas se deshacen durante el relajo, los cilindros dejan de estar en contacto rápidamente, la celda de carga no mide ningún valor y entonces la fuerza se va a cero. Un ejemplo de este caso, un experimento que no es reversible, se puede ver reflejado en las curvas mostradas en la figura 3.6:

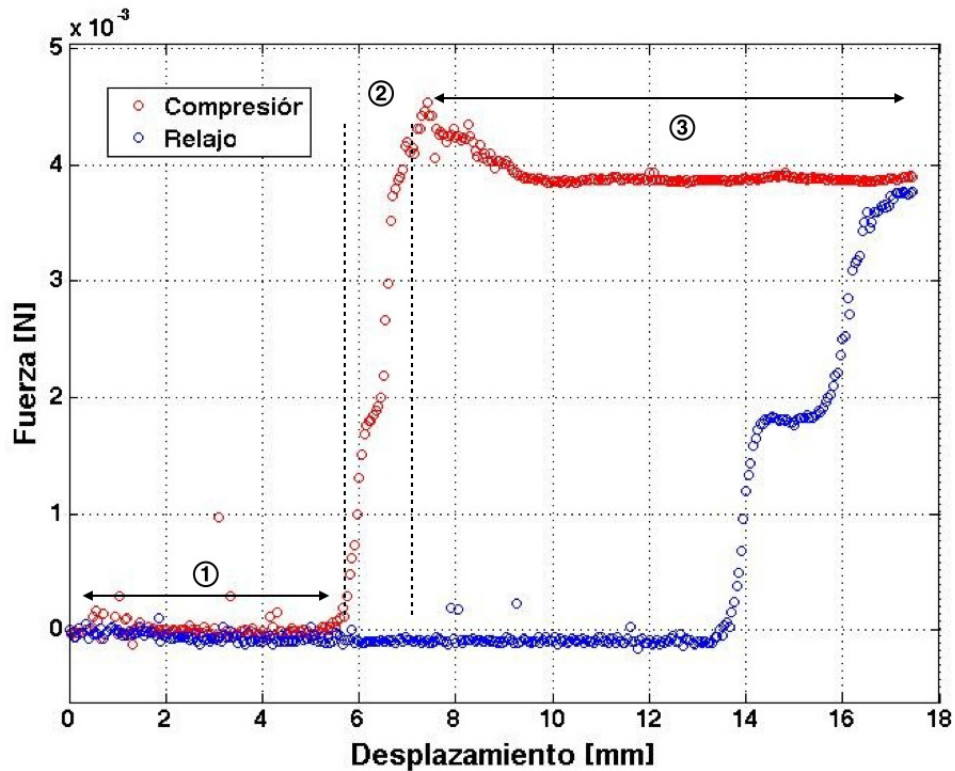


Figura 3.6: Fuerza experimentada por cilindros de poliestireno de 1 mm a medida que se realiza la compresión de la capa y a medida que se realiza el relajo.

En la curva de relajo de la figura 3.6, se puede ver que la tercera etapa, cuando la superficie está modulada, tiene un corto período de duración. Esto quiere decir, que las arrugas y pliegues formados durante la compresión se deshacen rápidamente cuando el proceso inverso se lleva a cabo. Esto se debe a la pérdida de cilindros que tuvo lugar durante la compresión, cuando el sistema se relaja, quedan vacantes en la superficie y los cilindros pierden contacto haciendo que la fuerza disminuya su valor antes de lo esperado.

3.4. Medición de distancia entre cilindros

Las imágenes que muestran la superficie de cilindros y su evolución en el tiempo, como las mostradas en la figura 3.2, no sólo permiten medir la deformación cuando se ejecuta una compresión o un relajo, sino también permiten medir la distancia promedio entre los cilindros a medida que suceden estos fenómenos en función del desplazamiento. Lo anterior, gracias al análisis de los perfiles de intensidad.

Como se puede apreciar en la figura 3.2 la intersección entre los cilindros y el patrón de franjas resulta en la aparición de puntos blancos, los que definen perfiles de intensidad. Es posible entonces, calcular la Transformada de Fourier de ellos y obtener como resultado la longitud de onda del perfil. Si a este valor de longitud de onda, se le resta el diámetro de los cilindros, se obtiene la distancia promedio entre ellos. Haciendo este tratamiento en cada etapa de la compresión, es posible ver cómo varía la distancia en función del número de paso o desplazamiento y obtener curvas como las mostradas en la figura 3.7.

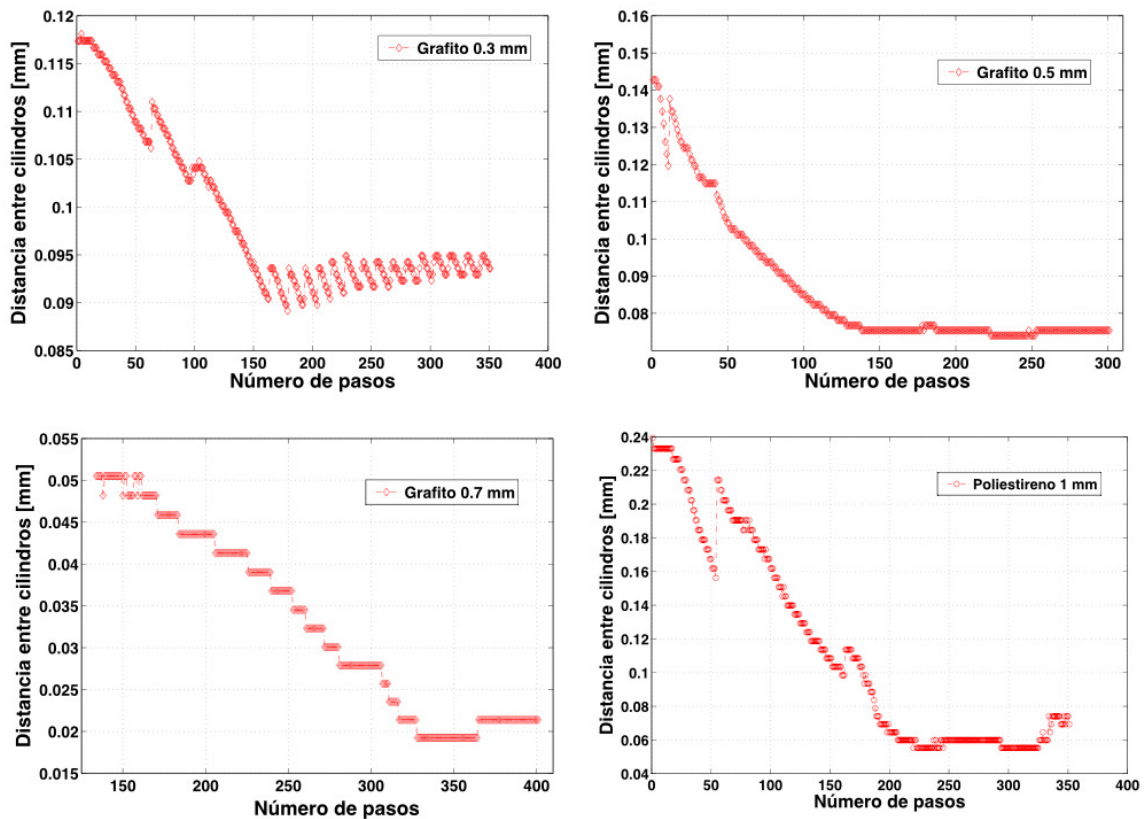


Figura 3.7: Variación de la distancia entre cilindros de grafito de 0.3, 0.5 y 0.7 mm de diámetro y cilindros de poliestireno de 1 mm de diámetro en función del desplazamiento durante una compresión.

En base a la medición de la distancia entre cilindros en función del desplazamiento para distintos diámetros, se concluye que la distancia d decrece y luego se satura a medida que el desplazamiento se incrementa. Este comportamiento se observa para todos los cilindros, independientemente del diámetro. La figura 3.8 ilustra la evolución de la distancia mínima entre los cilindros d_{min} como función del diámetro D , mostrando que a medida que aumenta el diámetro de los cilindros, menor es el valor de d_{min} .

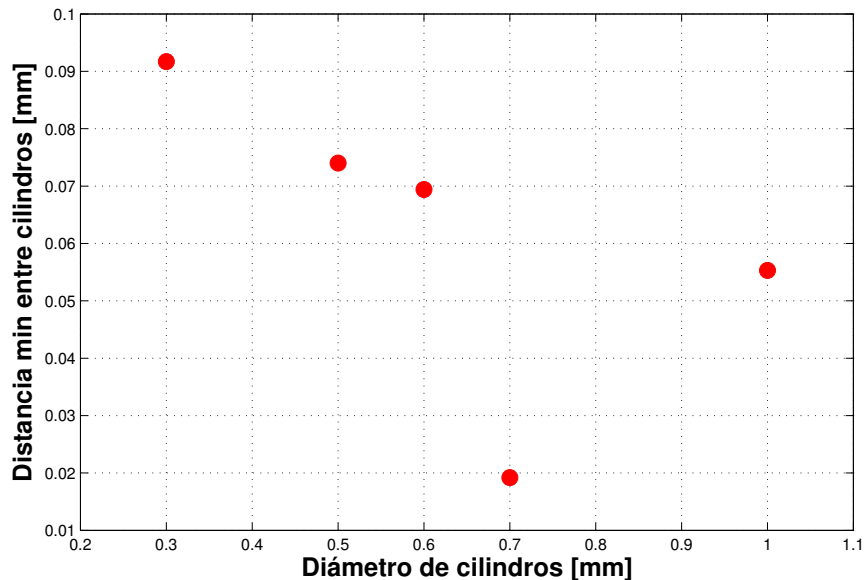


Figura 3.8: Distancia mínima entre cilindros durante un experimento de compresión considerando cilindros de grafito de 0.3, 0.5, 0.7 [mm] y cilindros de poliestireno de 0.6 y 1.0 [mm].

En la figura 3.8 se puede ver que la distancia mínima entre cilindros alcanzada decrece a medida que aumenta el diámetro, sin embargo, en el caso particular del grafito de 0.7 mm hay un fuerte decrecimiento de dicha distancia en comparación a los otros cilindros de diferente diámetro. Esto se debe a que el estado inicial del sistema en esta ocasión fue mucho más compacto, esto quiere decir que prácticamente no había espacio entre un cilindro y el anterior, por lo tanto cuando se realiza la compresión la distancia entre los cilindros queda en un valor constante, sin sufrir una gran variación, no presenta el comportamiento mostrado en las figuras 3.7.

3.5. Transición entre Superficie Plana, Arrugas y Pliegue

Se consideran a continuación de manera simultánea los diagramas de deformación, las curvas de fuerza y de distancia en función del desplazamiento. A partir de estos resultados, es posible tener una visión más amplia acerca de la respuesta mecánica de la superficie de cilindros.

3.5.1. Cilindros de grafito de 0.3 mm de diámetro

En la figura 3.9 se muestran los diagramas de deformación para dos experimentos realizados con cilindros de grafito de 0.3 mm de diámetro. Respecto a la fuerza, ambos experimentos tienen una curva cuyo comportamiento corresponde al descrito en la figura 3.5, la principal diferencia es que ahora se puede observar que la fuerza tiene una pendiente mucho mayor en la primera etapa de la curva, alcanzando valores cercanos a la milésima de Newton. Junto con esto, el valor de la distancia disminuye en ambos casos.

A continuación, se puede identificar el segundo régimen de las curvas, aquel en que la fuerza sufre un aumento brusco durante poco tiempo. En los diagramas de deformación de A y B se puede observar que la superficie aún no presenta ninguna inestabilidad en esta segunda etapa. Sin embargo, cuando la fuerza llega a un valor de saturación se puede ver que en los dos casos aparece una modulación en la superficie.

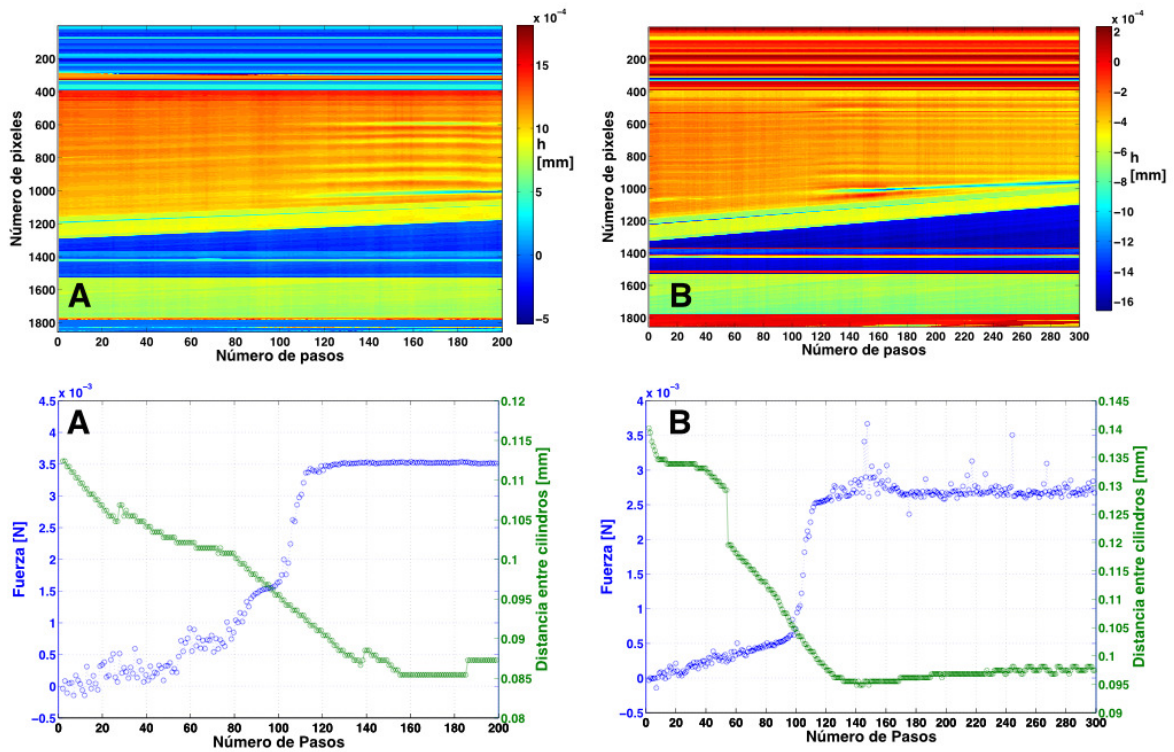


Figura 3.9: Las imágenes superiores corresponden a los diagramas de deformación de dos experimentos realizados con cilindros de 0.3 mm de diámetro. Las imágenes inferiores corresponden a las curvas de variación de fuerza y distancia en función del desplazamiento, para cada experimento respectivamente.

En el diagrama A, se observa una modulación, con una amplitud bien definida a partir de la variación de colores entre amarillo y rojo, cuya longitud de onda es posible medir. Simultáneamente, aparece un fold (en color celeste) que se hace cada vez más profundo a medida que aumenta la compresión. Es importante notar que el inicio de ambas inestabilidades coincide con la llegada de la fuerza a su valor máximo y coexisten hasta el final del experimento. También se debe observar que no se produce una disminución de la fuerza con el desarrollo del pliegue, porque este no implica un relajamiento de la superficie.

Por otro lado, en el diagrama de deformación B, se observa una respuesta

distinta de la superficie a la aparición del pliegue. La estabilización de la fuerza en un valor más menos constante sigue coincidiendo con la aparición de la modulación de la superficie y del pliegue. Sin embargo, en la vecindad de este último las arrugas son de una amplitud mayor. Cuando el pliegue crece en el número de elementos que lo conforman se aprecia un relajo de la superficie. La energía que estaba en un principio almacenada en la modulación, se focaliza en el aumento del tamaño del pliegue. Esta disminución en la energía almacenada en la superficie se ve reflejada en la pequeña caída que se puede ver en la curva de fuerza. También se observa que la estabilización del valor de la fuerza, coincide con la saturación de la distancia de separación promedio entre los cilindros.

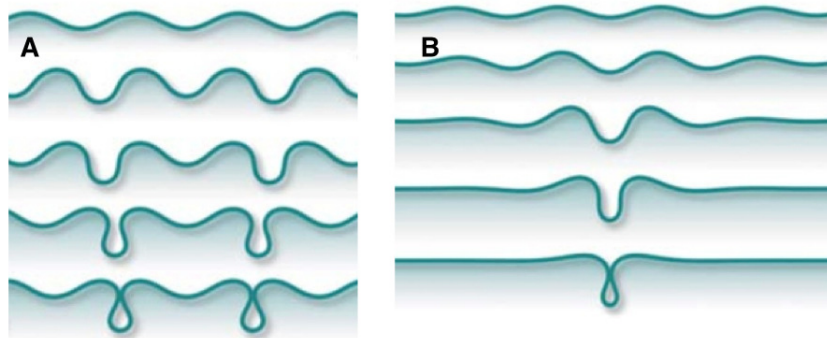


Figura 3.10: Perfil de posibles respuestas de la superficie a la compresión: A. Modulación de la superficie, aumento de la amplitud, generación de pliegues, coexistencia. B. Formación de modulación, mayor amplitud de la misma, focalización, generación del pliegue [11].

En general, en los experimentos realizados con cilindros de 0.3 mm de diámetro, aparece siempre por lo menos un pliegue. Cada pliegue está formado por 20 cilindros en promedio y no se presenta pérdida de ellos a medida que se realiza la compresión, resultando en experimentos que son reversibles y que tienen la capacidad de volver a su estado inicial una vez terminado el relajo.

3.5.2. Cilindros de grafito de 0.7 mm de diámetro

Se obtuvieron diagramas de deformaciones y curvas de fuerzas y distancia en función del desplazamiento para cilindros de grafito de 0.7 mm de diámetro. En la figura 3.11 se pueden observar resultados para dos experimentos que se armaron con iguales condiciones iniciales.

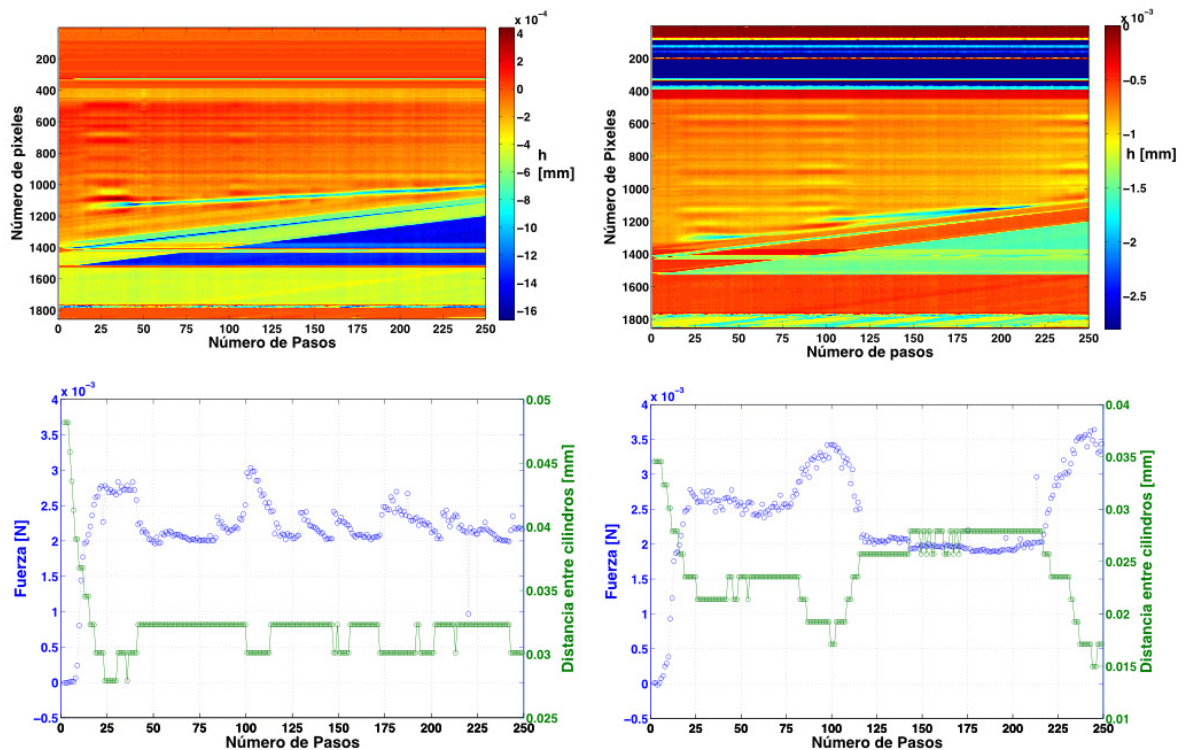


Figura 3.11: Las imágenes superiores corresponden a los diagramas de deformación de dos experimentos realizados con cilindros de 0.7 mm de diámetro. Las imágenes inferiores corresponden a las curvas de variación de fuerza y distancia en función del desplazamiento, para cada experimento respectivamente.

En el caso de los experimentos con cilindros de 0.7 mm se observa un comportamiento un tanto diferente a la curva tipo mostrada en la figura 3.5. Se puede ver que la primera etapa de dicha curva, caracterizada principalmente por el bajo valor de la fuerza, no está en las curvas de fuerza de la figura 3.11. Lo anterior, es

producto de las condiciones iniciales de los experimentos realizados. En esta ocasión, la superficie de agua milli Q se cubrió en su totalidad con cilindros, teniendo la precaución que no quedara espacio entre ellos, por lo tanto el efecto del movimiento de la barrera fue inmediato. Puesto que los cilindros ya estaban en contacto al comienzo del experimento, la fuerza aumenta su valor desde los primeros pasos de la compresión. Paralelamente a esto, se puede ver que cuando la fuerza aumenta su pendiente, la distancia entre cilindros disminuye.

La segunda etapa de la curva tipo, en que el módulo de la fuerza aumenta rápidamente, sí se observa en estos experimentos, para llegar posteriormente a su valor máximo, cercano a los 3.5 mN en la mayoría de los experimentos. Cuando la fuerza llega a un valor aproximadamente constante, también se estabiliza la distancia entre los cilindros. Al igual que en los experimentos realizados con cilindros de 0.3 mm, se observa que aparece una modulación en la superficie cuando la fuerza alcanza valores cercanos a su máximo. Junto con la modulación aparecen también pliegues que se van desarrollando a medida que avanza la compresión. Generalmente son dos que se dan en la misma posición, uno después de otro, y están constituidos en promedio por un número de cilindros cercano a los 15.

Respecto a la respuesta del sistema a la compresión, se observa un único comportamiento. Hay una modulación en la superficie generada por la compresión. En estas circunstancias, la fuerza tiene un valor cercano al máximo y la distancia tiene valores cercanos a cero. Cuando aparece el pliegue esta modulación desaparece y la superficie se aplanan, lo que se refleja en una caída del valor de la fuerza y un aumento en la distancia entre cilindros. Este valor de fuerza no aumenta hasta que la compresión genere una nueva modulación o pliegue. Por lo tanto, en estos experimentos no hay una coexistencia de arrugas y pliegues. Es posible identificar esta respuesta del sistema con el caso B de la figura 3.10.

A diferencia de los experimentos hechos con cilindros más pequeños, en esta ocasión sí hay pérdida de elementos cuando se desarrolla la compresión. La mayoría de las veces esta pérdida equivale a unos 15 cilindros menos.

3.5.3. Cilindros de poliestireno de 0.6 mm de diámetro

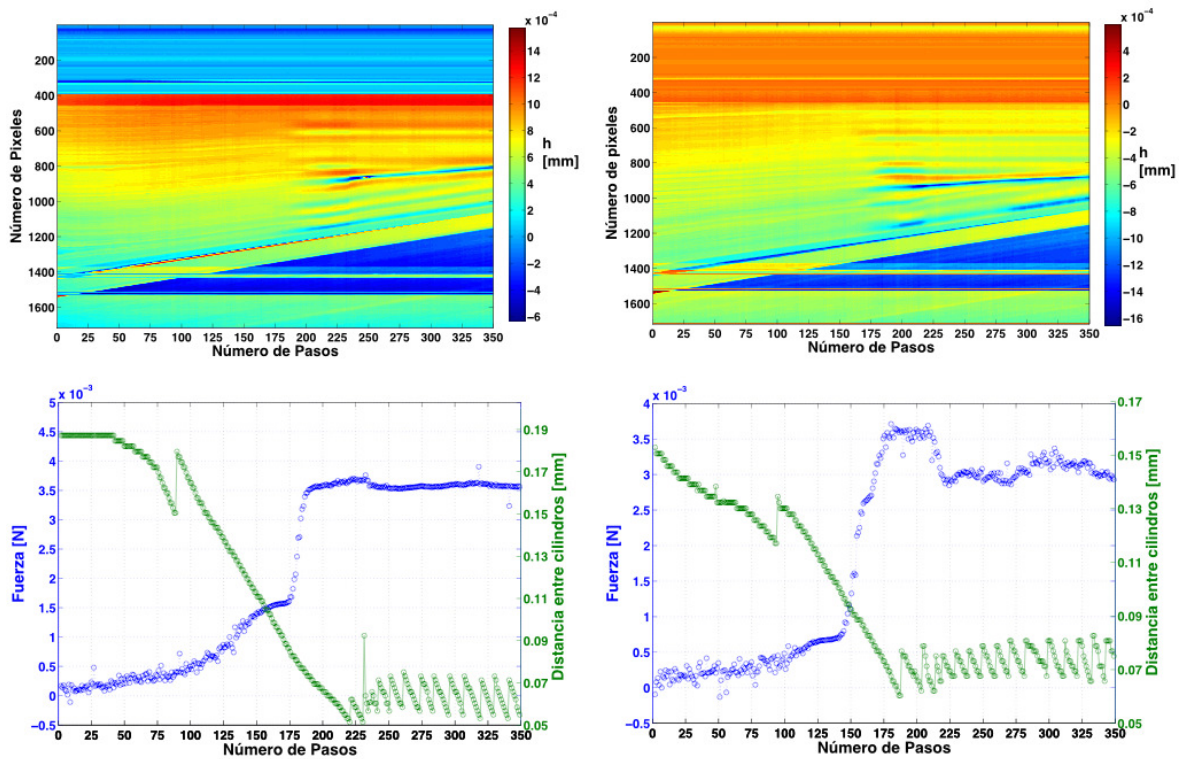


Figura 3.12: Diagrama de deformación de experimento realizado con cilindros de poliestireno de 0.6 mm de diámetro. Las imágenes inferiores corresponden a las curvas de variación de fuerza y distancia en función del desplazamiento para cada experimento.

Los experimentos realizados con cilindros de poliestireno de 0.6 mm de diámetro se hicieron con 350 pasos de 0.06 mm cada uno. Las condiciones iniciales son de un sistema más relajado, dejando espacios variables entre los cilindros. Es

debido a esto que se observa una mayor dispersión en los primeros valores de fuerza, cuando los cilindros se acercan producto del movimiento de la barrera, pero aún no presentan contacto. Al igual que en los experimentos con cilindros de grafito de 0.7 mm de diámetro, el valor de saturación de la fuerza es cercano a los 3.5 [mN], en este momento su valor puede variar o no dependiendo de la respuesta de la superficie a la compresión.

Cuando la fuerza llega a su valor de saturación, se observa que comienzan las inestabilidades en la superficie. De los comportamientos vistos en los cilindros de grafito más pequeños (0.3 mm de diámetro), aquí hay mayor tendencia a la coexistencia de arrugas y pliegues desde su inicio hasta el final de cada experimento. Hay algunos casos en que la aparición de pliegue conlleva un aplanamiento de la superficie y consecuentemente una caída en el valor de la fuerza, pero dicha variación no es tan significativa como lo era en el caso del grafito de 0.7 mm. Debido a lo mismo, como la variación en la fuerza es pequeña, no se ve reflejada en las curvas de distancia, su valor promedio se mantiene aproximadamente constante. Entonces, más que un pliegue localizado, lo que se tiene más bien, es un patrón de arrugas de alta amplitud, parecido más al caso A de la figura 3.10.

En todos los experimentos se desarrolla un único pliegue construido en promedio por 13 cilindros. En general, los cilindros depositados en el agua milli Q fueron alrededor de 70. Hubo algunos casos en que se perdieron algunos cilindros en el fondo, pero el número no fue mayor a 5.

3.5.4. Cilindros de poliestireno de 1.0 mm de diámetro

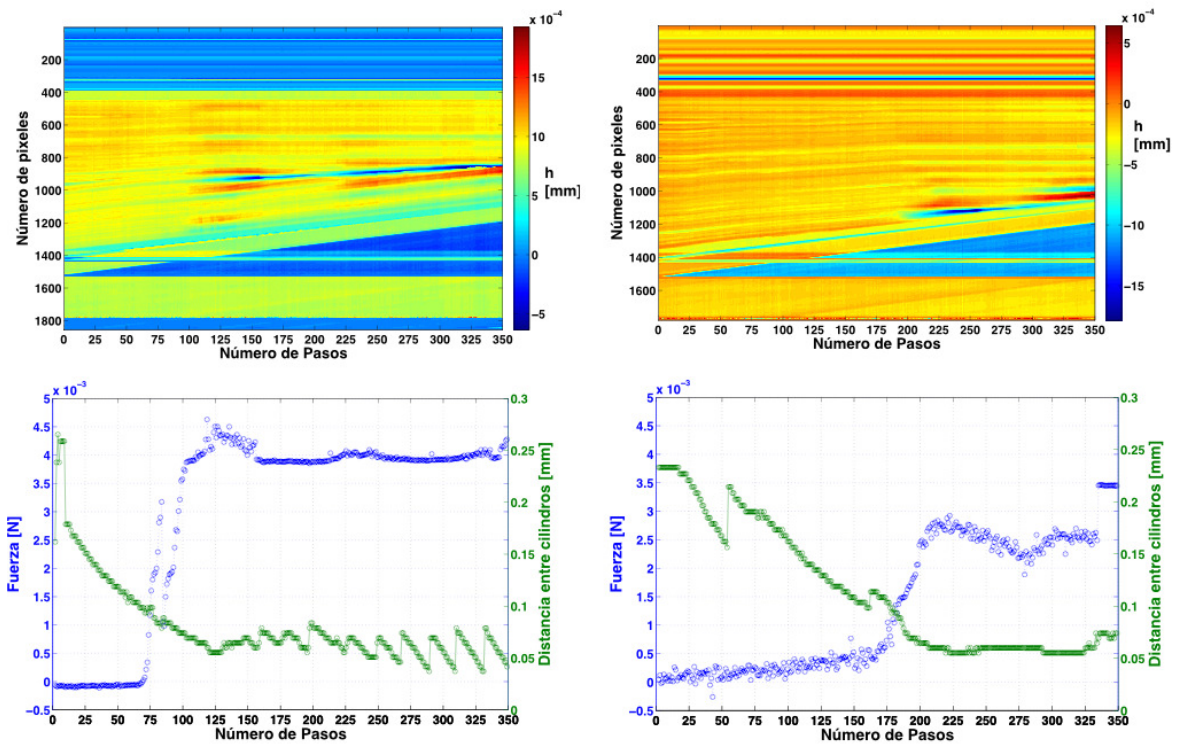


Figura 3.13: Las imágenes superiores corresponden a los diagramas de deformación de dos experimentos realizados con cilindros poliestireno de 1.0 mm de diámetro. Las imágenes inferiores corresponden a las curvas de variación de fuerza y distancia en función del desplazamiento, para cada experimento respectivamente.

Los experimentos realizados con cilindros de poliestireno de 1 mm de diámetro se llevaron a cabo en 350 pasos de 0.1 mm cada uno. A diferencia de lo anterior, en casi la totalidad de los experimentos de este tipo la superficie de agua milli Q no se cubrió completamente con cilindros, sólo dos tercios de ella, por lo tanto, en general se obtuvieron curvas cuya primera etapa tiene larga duración producto del bajo número de cilindros utilizados. Por ejemplo, en el diagrama de deformación de recho, los cilindros tardaron en estar en contacto, por ende la magnitud de la fuerza aumentó, pero muy lentamente. Independiente de ello, la curva de distancia muestra

un decrecimiento de ella, lo que evidencia que efectivamente los cilindros se están acercando. A continuación, se puede ver que la fuerza cambia bruscamente su pendiente aproximadamente en la mitad del experimento, y luego de esto, llega a su valor de saturación.

A pesar del bajo número de cilindros que constituyen el sistema y la consecuente tardanza de ellos en estar en contacto, de todas formas es posible observar respuestas del sistema a la aplicación de compresión. Aparece una modulación en la superficie pero de menor amplitud en comparación a los casos anteriores. También surgen pliegues posterior a la formación de arrugas pero estos no coexisten con ellas, sino más bien, absorben la energía almacenada y consiguen que la superficie se aplane. Sin embargo, hubo un par de experimentos que se realizó con un número mayor de cilindros, por ejemplo el mostrado en el diagrama de deformación izquierdo. En este se puede ver que hay una baja en la fuerza con la formación del pliegue y la superficie se aplane, más adelante surge otro pliegue pero que no logra una disminución en la fuerza, es más que un pliegue una arruga de alta amplitud.

En general, en estos experimentos no hubo una pérdida de cilindros porque el número de ellos era bajo en un principio, por lo tanto todos los experimentos fueron reversibles, lo que implica que su curva de relajo coincidía con su curva de compresión. Respecto al tamaño de los pliegues estos estuvieron formados en promedio por 5 cilindros.

3.6. Medición de la Longitud de Onda de las arrugas

Tal como se puede apreciar en la figuras de la sección anterior, en la mayoría de los experimentos es posible identificar una longitud de onda característica del patrón de arrugas generado, la cual se puede medir. Dicha longitud de onda varía con el diámetro de los cilindros, como se muestra en la figura 3.14, independiente si el material utilizado es grafito o poliestireno.

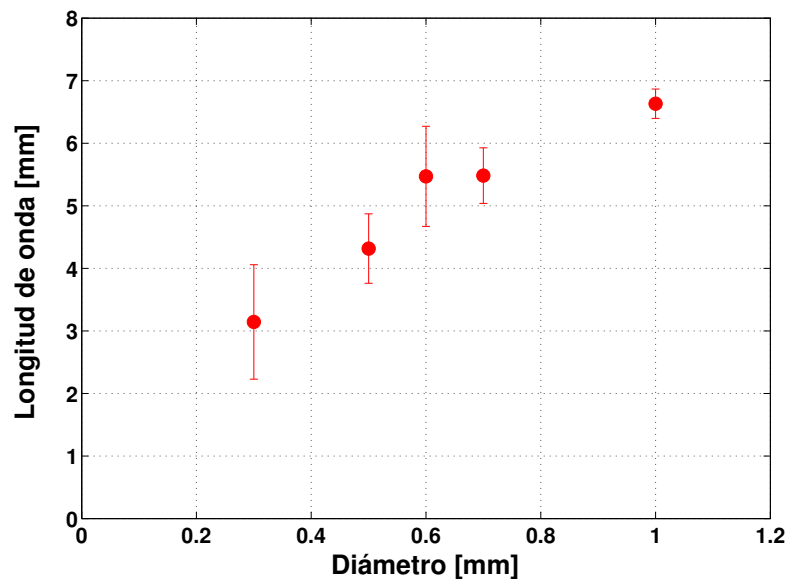


Figura 3.14: Variación de la longitud de onda de las arrugas en función del diámetro de los cilindros: 0.3, 0.5 y 0.7 mm de grafito y 0.6 y 1.0 mm de poliestireno.

A partir del gráfico anterior, se deduce que existe una relación entre el diámetro de los cilindros y la longitud de onda de la modulación generada. En el siguiente capítulo, se presentará un modelo que generalice esta relación.

3.7. Medición de Ángulos de Contacto

El comportamiento hidrofóbico o hidrofílico de los cilindros sobre agua Milli Q, es un factor determinante en la formación de arrugas y pliegues en la superficie de cilindros a medida que se ejerce una compresión o un relajo. Arrugas y/o pliegues que se pueden mantener o deshacer a medida que aumenta el esfuerzo aplicado. Cuando los pliegues se deshacen es debido que el contacto entre los cilindros era menor al necesario e ingresa agua dentro del pliegue, lo que provoca que los cilindros que lo forman se hundan. Cuando esto ocurre, la deformación deja de ser reversible y al llevar a cabo el relajo aparecen sectores de vacío en la superficie. El hecho que los cilindros se mantengan en contacto entre sí o que se hundan tiene que ver con el grado de mojado y el ángulo de contacto entre la superficie del cilindro y el agua Milli Q.

Es posible ver que cuando un cilindro se deposita sobre la interfase agua-aire, esta se deforma, apareciendo un menisco que se prolonga a lo largo de toda la línea de contacto del cuerpo. Con el objetivo de observar esta deformación y medir los ángulos de contacto, se deposita un único cilindro sobre el agua Milli Q y se observa cómo se deforma la superficie alrededor de él. Lo anterior, se realizó para un cilindro de poliestireno de 1 mm de diámetro y un cilindro de grafito de 0.7 mm de diámetro. En el caso del poliestireno, se obtuvo la imagen mostrada en la figura 3.15. Es importante mencionar que se cuidó que los cilindros no estuvieran cerca del borde del recipiente contenedor, puesto que la interfase aire-agua es distorciónada significativamente por la presencia de la pared y esto perjudica la visualización de la deformación en la superficie causada por la presencia del cilindro. Lo segundo, fue procurar que el cilindro no estuviera mucho tiempo en el agua antes de tomar las imágenes debido a que tiende a hundirse debido a su propio peso y la superficie comienza a mojarse. El ángulo de contacto medido para el cilindro de poliestireno es de $79,7 \pm 0,9$, lo que evidencia un comportamiento hidrofílico.

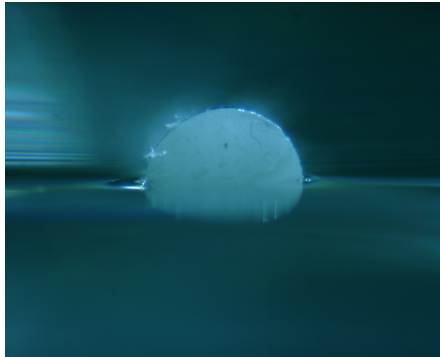


Figura 3.15: Cilindros de poliestireno de 1 [mm] de diámetro flotando en agua Milli Q.

Por otro lado, en el caso del grafito, se obtuvieron imágenes como las mostradas en las figuras 3.16. En esta oportunidad, el ángulo de contacto medido es de $59,5 \pm 0,6$.

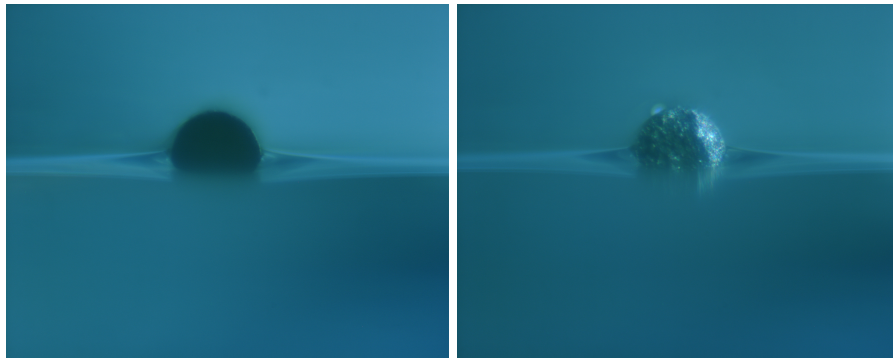


Figura 3.16: Cilindros de grafito de 0.7 [mm] de diámetro flotando en agua Milli Q.

Como se puede ver en las figuras 3.15 y 3.16 un cilindro único deforma la interfaz, tal como lo hace la pared del recipiente. El cilindro puede permanecer en la superficie gracias a la fuerza de empuje, la cual tiende a empujar al cilindro fuera del líquido. Esta fuerza es balanceada por la fuerza de tensión superficial, la que se opone a la deformación de la superficie y por lo tanto, actúa para mantener al

cilindro en el líquido. Estos dos efectos competitivos llegan a equilibrarse [12]. En este punto de equilibrio, el cilindro está parcialmente fuera del líquido pero la interfase es ligeramente deformada. Esta deformación es lo suficientemente significativa para influir en otros cilindros que estuviesen cerca, los cuales se moverían a lo largo del menisco y se agregarían al primer cilindro espontáneamente o se alejarían de él.

Luego de tomar imágenes de cilindros aislados sobre la superficie de agua Milli Q, se quiso observar qué sucedía cuando dos cilindros estaban en contacto. Para lo anterior, se utilizaron dos cilindros de grafito de 0.7 mm de diámetro e igual longitud. El resultado de lo anterior se observa en la figura 3.17:

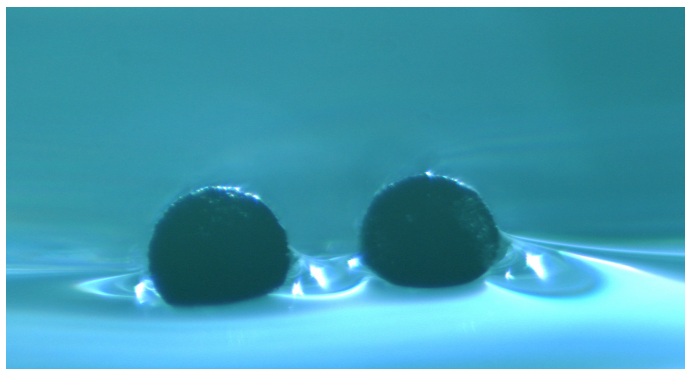


Figura 3.17: Dos cilindros de grafito de 0.7 [mm] de diámetro flotando en agua Milli Q.

Es posible ver que los meniscos exteriores no se ven mayormente afectados, sin embargo, los meniscos interiores de los cilindros si se ven deformados debido a la presencia del segundo cilindro. A causa de la rugosidad de los cuerpos, la curvatura de los meniscos formados no se mantiene constante a lo largo de la línea de contacto de cada cilindro, pasa de cóncavo a convexo y viceversa. Lo anterior, provoca que a veces los cilindros sufran atracción y otras veces repulsión antes de llegar a un punto de estabilidad, como se puede ver en la figura 3.18 [2]. La primera configuración es inherentemente inestable. Las etapas sucesivas van sucediendo a

medida que pasa el tiempo, pero el alineamiento final, no siempre es alcanzado.

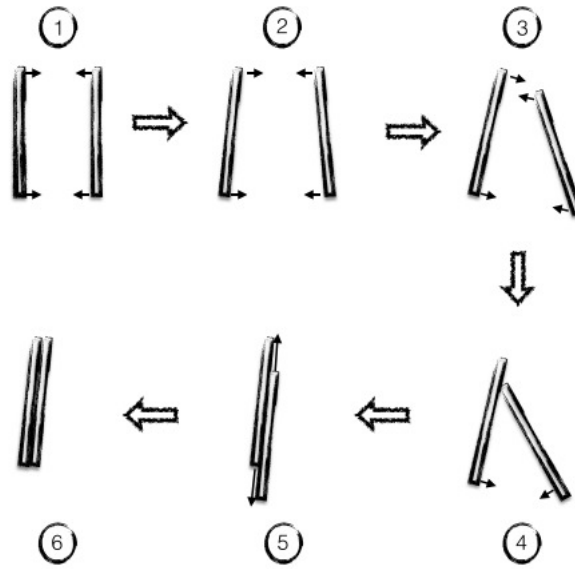


Figura 3.18: Etapas del movimiento y posterior contacto de los cilindros flotantes.

Capítulo 4

Modelamiento

4.1. Fuerza de Interacción entre cilindros

Si los cilindros se acercan o se repelen entre ellos depende de la curvatura de los meniscos. Es decir, la interacción capilar es atractiva si los meniscos de ambos cuerpos exhiben la misma curvatura (ambos concavos o convexos), mientras que cuando los meniscos exhiben diferente curvatura (concavo - convexo, o viceversa) la interacción es repulsiva. La naturaleza cóncava o convexa de los meniscos depende de las propiedades de mojado del material de fabricación y de la rugosidad de la superficie sólida. En el caso ideal de nula rugosidad, la curvatura del menisco es constante a lo largo de toda la línea de contacto. En el caso general, la línea de contacto alrededor del objeto es ondulada, en el sentido que la curvatura cambia a lo largo de la línea de contacto. Como consecuencia de lo anterior, la interacción se vuelve más compleja.

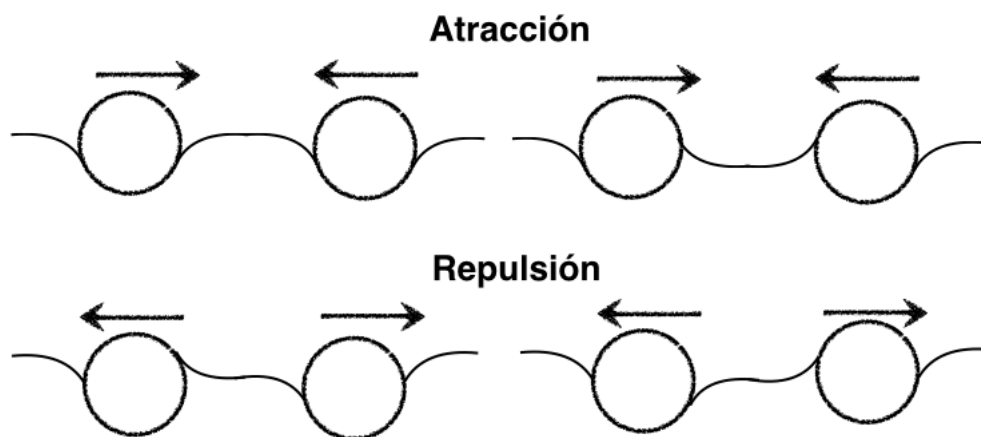


Figura 4.1: Esquema de las posibles configuraciones de los meniscos entre los cilindros.

Con el objetivo de describir estas interacciones, se realiza una analogía con las cargas eléctricas, la cual ha resultado exitosa. En un amplio rango de distancia, las fuerzas capilares se comportan como una versión bidimensional de la Ley de

Coulomb [13]. Se cree que las partículas flotando en una interfase líquido/gas están sometidas a una fuerza de largo alcance, una fuerza capilar, además de las fuerzas de Van der Waals y electrostáticas. Si la distancia R , entre dos partículas flotando en una superficie líquida es mucho menor que el recíproco de la constante capilar (2,7 mm para el agua), la fuerza capilar lateral entre ellas está dada por:

$$F = 2\pi\gamma \frac{Q_1 Q_2}{R} \quad (4.1)$$

Donde γ es la tensión superficial del líquido y Q_1 y Q_2 son las cargas capilares de las partículas 1 y 2 [14]. La carga capilar es definida por:

$$Q = r \sin \psi \quad (4.2)$$

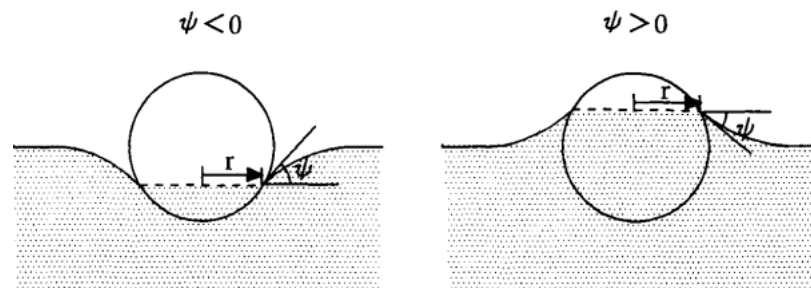


Figura 4.2: Radios ' r ' de los periferios de mojado y ángulos de contacto ψ respecto al plano horizontal, para esferas mojables y no mojables.

Con el radio del periferio de mojado r , y el ángulo de contacto ψ medido respecto a la horizontal. Dependiendo de los signos de ψ de las partículas, las fuerzas serán atractivas ($\psi_1 \psi_2 > 0$) o repulsivas ($\psi_1 \psi_2 < 0$).

Dado que a la superficie de cilindros no se les ha realizado ningún tratamiento para reducir su rugosidad, es lógico pensar que la línea de contacto de los cilindros con la superficie será ondulada. Por lo tanto, existirá una distribución de carga capilar como la mostrada en la figura 4.3. Debido que los cilindros están restringidos

a permanecer paralelos unos respecto a los otros durante todo el experimento, la interacción existente entre ellos depende de la coincidencia de sus meniscos. Puesto que la distribución de carga depende de la rugosidad de la superficie de los cilindros, es estadísticamente imposible tener un emparejamiento total de las curvaturas de los meniscos en las líneas de contacto. Como resultado de lo anterior, la interacción entre los cilindros resulta ser repulsiva.

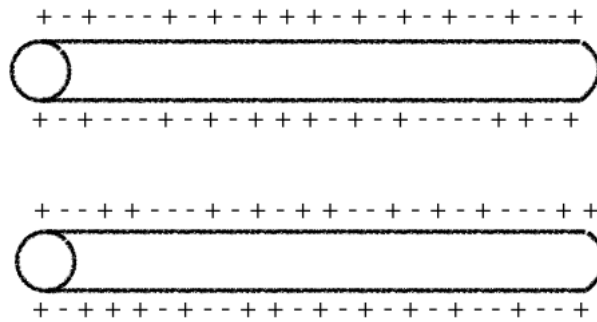


Figura 4.3: Distribución de Cargas Capilares

4.2. Comportamiento elástico de la capa de cilindros

Como fue mencionado en el capítulo anterior, cuando se ejerce una compresión a nivel de la superficie de los cilindros se obtiene como resultado la aparición de arrugas y/o pliegues en ella. Dichas arrugas se pueden caracterizar a partir de sus longitudes de onda y su valor varía como la raíz del diámetro de los cilindros que forman la superficie, independiente del material.

Para intentar generalizar este resultado, se compara el comportamiento colectivo de la capa de cilindros con el observado en sólidos delgados y elásticos sometidos a compresión. Vella [3] estudió la elasticidad de las monocapas de partículas llegando a la conclusión que hay una variedad de comportamientos propios de los sólidos que pueden ser observados en monocapas de partículas hidrofóbicas sobre una interfase agua-aire. Lo anterior, para un amplio rango de tamaño de partículas $2,5 \mu m - 6 \text{ mm}$. Por ejemplo, una monocapa se pandea al ejercer una compresión, demostrando que puede soportar estrés anisotrópico. Esta compresión puede ser soportada sólo por un material con un módulo de cizalle distinto de cero, característica propia de un sólido. Una vez que la compresión es retirada, la monocapa vuelve a su estado no-deformado, 'aplanando' las arrugas formadas por el pandeo. Esta elasticidad remanente también es característica de los sólidos.

Dadas las similitudes entre el comportamiento de sistemas elásticos y el observado en la capa de cilindros, se propone una definición para el módulo de flexión del sistema como una forma de caracterizarlo:

$$B = \gamma d^2 = \frac{\gamma}{d} d^3 \quad (4.3)$$

Esta expresión sugiere que el módulo de bending de la capa de cilindros es el producto de la tercera potencia del espesor efectivo de la capa con la cantidad γ/d , la cual tiene las dimensiones del Módulo de Young. Esta expresión es similar

a aquella que es usada para describir el Módulo de Flexión de sólidos elásticos. Teorías sobre láminas delgadas entregan la siguiente expresión para la longitud de onda de las arrugas [11]:

$$\lambda = 2\pi \left(\frac{B}{\rho g} \right)^{1/4} \quad (4.4)$$

El valor de tensión superficial usado para el agua Milli Q fue medido usando el método "Gota colgante". Esta medición arrojó el valor de 48 mN/m, independientemente del cilindro usado. Dado que los cilindros se asumen estar en contacto, se estima que la longitud característica d es igual a la mitad del diámetro de los cilindros, obteniendo la siguiente expresión para la longitud de onda en función del diámetro D :

$$\lambda = 2\pi \left(\frac{\gamma}{4\rho g} \right)^{1/4} D^{1/2} \quad (4.5)$$

Para chequear la validez del modelo planteado para el módulo de flexión B en la ecuación 4.3, es posible reemplazar valores para γ y D , obteniendo la curva sólida mostrada en la figura 4.4. Así, será posible estudiar su correlación con los datos obtenidos anteriormente (figura 3.14). Se puede notar que los valores experimentales se encuentran en acuerdo con los valores teóricos.

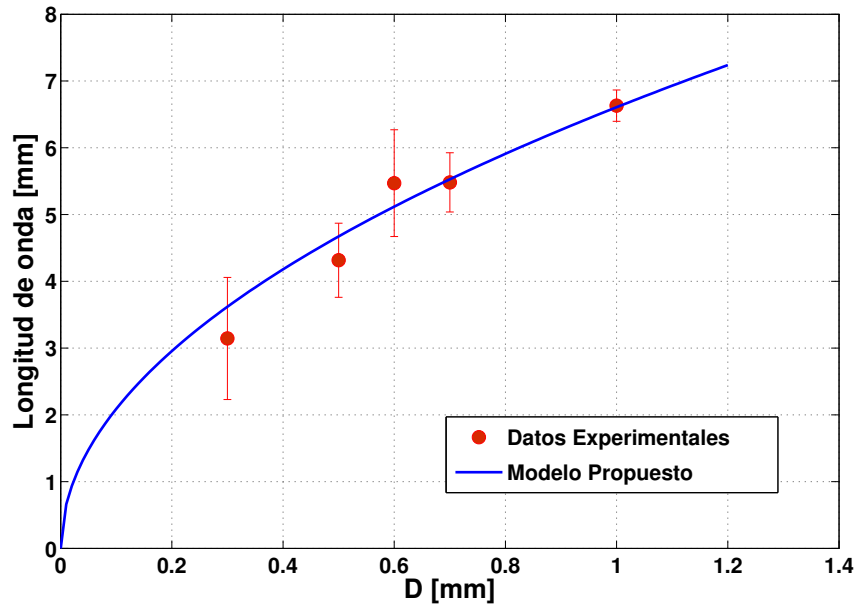


Figura 4.4: Correlación entre datos experimentales y teoría para láminas elásticas.

Capítulo 5

Conclusiones y Proyecciones

5.1. Proyecciones

Como es de esperar, este trabajo podría ser complementado con experimentos adicionales. En esta sección se darán ejemplos de posibles experiencias a realizar en el futuro.

Si fuese posible contar con un recipiente de mayor longitud, una buena idea, sería estudiar si los resultados entregados en este trabajo son válidos para una superficie de cilindros con una longitud superior a 60 mm. Es decir, verificar si siguen apareciendo arrugas y pliegues en el sistema y estudiar las características de ambos fenómenos en este caso en particular. Estudiar si el número de arrugas que aparece es mayor y ver cómo varía la longitud de onda de estas, si aumenta o no su valor y si la dependencia de este parámetro con el diámetro sigue siendo parabólica. En este trabajo se pudo ver que el número de pliegues está restringido entre cero y dos. Sería interesante verificar si este número aumenta a medida que crece la longitud de la superficie.

A una escala menor, se vio como las fuerzas capilares pueden causar atracción o repulsión entre dos cilindros. Los experimentos fueron realizados con el grado de rugosidad por defecto que tenía la superficie de los cilindros. Sólo en una ocasión se realizaron experimentos con una rugosidad distinta y no se obtuvieron resultados destacables. Sin embargo, sería interesante, cambiar la rugosidad de la superficie de los cilindros de manera más controlada, poder caracterizar este parámetro con un valor y observar si las fuerzas capilares alteran su efecto en el comportamiento del sistema.

Las curvas de estireno, de 0.6 y 1.0 mm, presentan un defecto que se da cerca de la mitad del valor máximo de fuerza. Por ahora, se presume que este defecto se debe a una modificación de la línea de contacto de los últimos cilindros

que se unen cuando se logra el máximo de compresión. Dicha modificación se debe al acomodamiento que sufren las distribuciones de carga capilares cuando los cilindros se acercan y hacen contacto. Para corroborar esta teoría, se propone repetir algunos experimentos aumentando la resolución en este intervalo, para ver con más detalle qué sucede cuando ocurre esta anomalía.

5.2. Conclusiones

De manera general, es posible afirmar que se lograron todos los objetivos planteados al principio de este trabajo. Primero que todo, la Perfilometría por Transformada de Fourier (FTP) resultó ser un método efectivo para reconstruir y caracterizar las deformaciones producidas en la superficie de cilindros. Con ella, se logró medir la longitud de onda de las arrugas generadas y obtener una expresión para la variación de su valor con el diámetro de los cilindros. Además, se pudo observar la evolución del sistema con el paso del tiempo al capturar no sólo dos imágenes (número mínimo con el cual el método de reconstrucción funciona) sino un número que varió entre 300 y 400.

A continuación, se pudo estudiar cómo variaba la distancia entre los cilindros a medida que el sistema se comprimía utilizando procesamiento de imágenes en Matlab. Las curvas obtenidas evidencian que la distancia entre cilindros disminuye a medida que los cilindros se comprimen, como era de esperar, y que la distancia mínima alcanzada también disminuye con la aumento del diámetro de los cilindros. No se le prestó mayor atención a la variación de esta distancia cuando el sistema se relajaba. Lo anterior producto que existieron experimentos que no fueron reversibles. Estos últimos resultaban cuando el sistema perdía cilindros (se hundían) durante la compresión. Al ocurrir esto, quedaban espacios vacíos en la superficie, haciendo que perdiera sentido el medir la distancia entre cilindros cuando el sistema volvía a su estado inicial.

Otra dificultad que resultó de los experimentos no reversibles es que durante el relajamiento no se podía establecer una correlación entre el retroceso de la barrera y la fuerza medida en la celda de carga, debido nuevamente a los espacios vacíos generados por el hundimiento de cilindros. El valor de la fuerza se iba rápidamente a cero, producto de la falta de contacto entre los cilindros que quedaban en la superficie.

Durante los experimentos de compresión se midió la variación de la fuerza en función del desplazamiento, donde se pudo identificar tres comportamientos característicos. A pequeñas compresiones la fuerza se mantiene cercana a cero, para luego llegar a un punto en el que su pendiente cambia bruscamente durante un pequeño intervalo, para finalizar llegando a un valor de saturación para mayores desplazamientos. En el caso de los cilindros de grafito la fuerza medida alcanzó valores de 2,3 mN.

Un análisis de las deformaciones desarrolladas por la superficie de cilindros, revela que los pliegues se producen a altas compresiones. A bajos esfuerzos sólo aparecen arrugas. Se construyó un modelo para definir el módulo de flexión del sistema. La comparación entre los datos experimentales y el modelo planteado utilizado usualmente en teoría de sólidos, reveló que las capas de cilindros presentan un comportamiento elástico desde un valor crítico de compresión en adelante. Para pequeñas deformaciones, se comportan como un ensamble granular, con interacciones capilares, mientras que para altas deformaciones se comportan como un sólido elástico. La transición entre ambos regímenes es debido a la saturación de la distancia de separación entre los cilindros.

Apéndice A

Deducción de la Ecuación de Young Laplace

Se considera una superficie esférica curvada de área xy . Cualquier punto en esta superficie puede ser definido usando 3 coordenadas y de manera análoga, cualquier superficie en el espacio puede ser definida a partir de 2 radios de curvatura R_1 y R_2 . Por ejemplo, esta superficie puede corresponder a una burbuja que se expande. Las únicas contribuciones energéticas son debido a la presión y tensión superficial $U = E_P + E_S$. En el eje z , la burbuja se encuentra en equilibrio (mínima energía), esto implica:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial E_P}{\partial z} + \frac{\partial E_S}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

En particular, el término debido a la presión $E_P = -pV$, y su derivada:

$$\partial E_P = -pdV - Vdp \quad (\text{A.2})$$

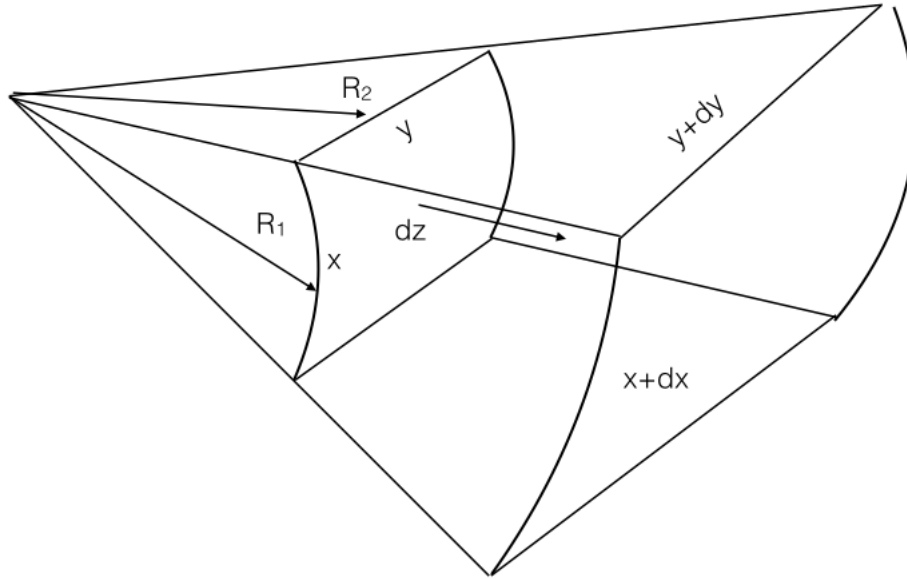


Figura A.1: Se examina la porción de una burbuja con longitudes de arco lo suficientemente pequeñas x e y .

Asumimos que la presión p no varía sobre el cambio infinitesimal de volumen, por lo tanto: $\partial E_P = -pdV$. Ahora, el término debido a la tensión superficial, $E_S = -\gamma A$ y su derivada correspondiente:

$$\partial E_S = \gamma dA \quad (\text{A.3})$$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación que define la condición de equilibrio:

$$-p \frac{\partial V}{\partial z} + \gamma \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \Rightarrow p \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma \frac{\partial A}{\partial z} \Rightarrow p \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz = \gamma \frac{\partial A}{\partial z} \cdot dz \quad (\text{A.4})$$

La derivada del área respecto a z resulta:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \cdot dz = \frac{\partial(xy)}{\partial z} \cdot dz = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \cdot y + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot x \right) \cdot dz = (x dy + y dx) \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado, la derivada del volumen respecto a z :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = xy + xz \frac{\partial y}{\partial z} + yz \frac{\partial x}{\partial z} = xy \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz = xy \cdot dz \quad (\text{A.6})$$

El segundo y tercer término de la ecuación anterior se desprecian porque la derivada de y respecto a z y de x respecto a z son mucho menor que 1. La ecuación de equilibrio finalmente queda en:

$$\gamma(xdy + ydx) = p \cdot x \cdot y \cdot dz \quad (\text{A.7})$$

Es posible deducir que:

$$\frac{x}{x + dx} = \frac{R_1}{R_1 + dz} \quad \frac{y}{y + dy} = \frac{R_2}{R_2 + dz} \quad (\text{A.8})$$

Reemplazando estas últimas ecuaciones en la expresión 1.4 resulta:

$$\gamma \cdot \left(\frac{xydz}{R_2} + \frac{xydz}{R_1} \right) = p \cdot x \cdot y \cdot dz \quad (\text{A.9})$$

$$\Rightarrow \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Deducción de la Ecuación de Young

Deducimos la ecuación de Young a partir de un típico ejemplo. Consideremos una gota circular en una superficie plana sólida y su variación de Energía Libre de Gibbs dG cuando se esparce una cantidad infinitesimal. Durante el esparcimiento, el radio de la zona de contacto aumenta de a a $a' = a + da$ (figura B.1). Si asumimos que el volumen se mantiene constante, su altura decrece de h a $h' = h + dh$ (dh es negativo). Si la variación de la Energía de Gibbs es negativa, el proceso ocurre de forma espontánea. Por otro lado, si la variación dG resulta ser positiva el proceso será no espontáneo y la gota se contraerá. En equilibrio, situación que resulta ser la más favorable energéticamente, tenemos $dG = 0$.

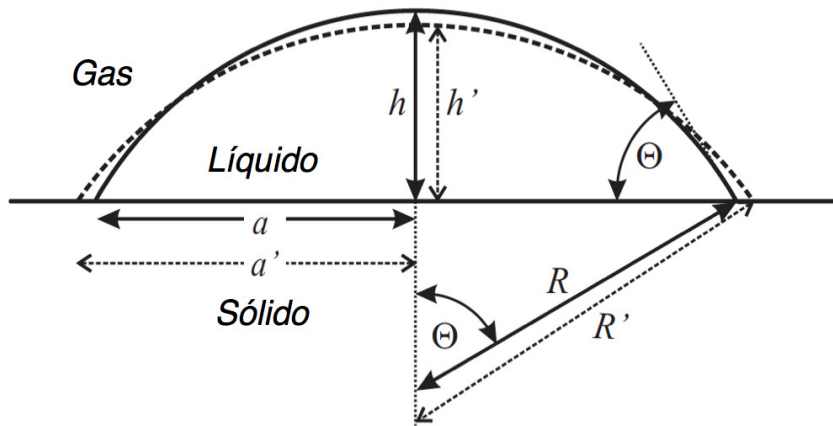


Figura B.1: Gota líquida con un área de contacto circular en una superficie plana y sólida.

Por una parte, asumimos que la gota es tan grande, que la contribución de la Presión de Laplace no conduce a una variación significativa de la Energía libre de Gibbs; para gotas muy pequeñas, es necesario incluir una corrección. Por la otra parte, asumimos que la gota es lo suficientemente pequeña de tal forma que la gravitación se puede despreciar. Como consecuencia, su forma resulta en un casquete esférico. El resultado también es válido para gotas grandes, pero para gravitación despreciable el tratamiento matemático es mucho más simple.

Cuando la gota se esparce, la superficie libre sólida pasa a ser una interface sólido-líquida. La variación del área $dA_{SL} = 2\pi a da$ conduce a una variación de la energía de superficie: $(\gamma_{SL} - \gamma_S)dA_{SL}$. Adicionalmente, el área de la superficie en la interface líquido-gas cambia.

La geometría nos dice que la superficie de un casquete esférico es:

$$A_L = \pi (a^2 + h^2) \tag{B.1}$$

Un pequeño cambio en el radio de contacto a , conduce a un cambio en el área de la superficie líquida:

$$dA_L = \frac{\partial A_L}{\partial a} da + \frac{\partial A_L}{\partial h} dh = 2\pi a da + 2\pi h dh \quad (\text{B.2})$$

La variación del área de la superficie depende de dos variables: a y h . De todas formas, estas dos variables no son independientes porque el volumen de la gota es constante. El volumen de un casquete esférico es:

$$V = \frac{\pi}{6} (3ha^2 + h^3) \quad (\text{B.3})$$

Un pequeño cambio de este volumen es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \pi ah da + \frac{\pi}{2} (a^2 + h^2) dh \quad (\text{B.4})$$

Puesto que el volumen se asume como constante ($dV = 0$), tenemos:

$$-\pi ah da = \frac{\pi}{2} (a^2 + h^2) dh \Rightarrow \frac{dh}{da} = -\frac{2ah}{a^2 + h^2} \quad (\text{B.5})$$

De la Ley de Pitágoras, $R^2 = a^2 + (R - h)^2 \Rightarrow a^2 = 2Rh - h^2$, obtenemos:

$$\frac{dh}{da} = -\frac{2ah}{2Rh - h^2 + h^2} = -\frac{a}{R} \quad (\text{B.6})$$

Y:

$$\begin{aligned} dA_L &= 2\pi a da - 2\pi h \frac{a}{R} da \\ &= 2\pi a \left(1 - \frac{h}{R}\right) da \\ &= 2\pi a \left(\frac{R-h}{R}\right) da \\ &= 2\pi a \cos \theta da \end{aligned}$$

Ahora, es posible escribir la variación total de la Energía libre de Gibbs como:

$$dG = (\gamma_{SL} - \gamma_S) dA_{SL} + \gamma_L dA_L \quad (\text{B.7})$$

$$= 2\pi a (\gamma_{SL} - \gamma_S) da + 2\pi a \gamma_L \cos \theta da \quad (\text{B.8})$$

En el equilibrio, $dG = 0$, es posible llegar directamente a la ecuación de Young:

$$\gamma_{SL} - \gamma_S = \gamma_L \cos \theta \quad (\text{B.9})$$

Referencias

- [1] M. M. Nicolson. The interaction between floating particles. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45:288–295, April 1949.
- [2] W. A. Gifford and L. E. Scriven. On the attraction of floating particles. *Chemical Engineering Science*, 26:287 – 297, 1971.
- [3] P. Aussillous D. Vella and L. Mahadevan. Elasticity of an interfacial particle raft. *Europhysics Letters*, 68(2):212 – 218, October 2004.
- [4] Mitsuo Takeda and Kazuhiro Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurements of 3-d object shapes. *Applied Optics*, 22(24):3977 – 3982, December 1983.
- [5] Hans-Jurgen Butt and Michael Kappl. *Surface and Interfacial Forces*, chapter Capillary Forces, pages 127 – 161. Wiley - VCH, 2010.
- [6] David Quéré Pierre-Gilles de Gennes, Françoise Brochard-Wyart. *Capillarity and Wetting Phenomena*, chapter Capillarity: Deformable interfaces, pages 1 – 28. Springer, 2004.
- [7] Michael Kappl Hans-Jurgen Butt, Karlheinz Graf. *Physics and Chemistry of Interfaces*, chapter Contact angle phenomena and wetting, page 495. Wiley - VCH, 3rd edition, April 2013.

- [8] Pablo Javier Cobelli, Agnès Maurel, Vincent Pagneux, and Philippe Petitjeans. Global measurement of water waves by fourier transform profilometry. *Experiments in Fluids*, 46(6):1037–1047, 2009.
- [9] Qingjin Peng Chunsheng Yu. A unified-calibration method in ftp-based 3d data acquisition for reverse engineering. *Optics and Lasers in Engineering*, 45(3):396 – 404, 2007.
- [10] Weidong Geng. *The Algorithms and Principles of Non-photorealistic Graphics*, chapter Simulating Artistic Media for Digitized Creation of Artworks. Springer, 2010.
- [11] Haim Diamant Fabian Brau, Pascal Damman and Thomas A. Witten. Wrinkle to fold transition: Influence of the substrate response. *Soft Matter*, 9:8177–8186, 2013.
- [12] Dominic Vella and L. Mahadevan. The 'cheerios effect'. *American Journal of Physics*, 73(9):817–825, 2005.
- [13] Peter A. Kralchevsky and Nikolai D. Denkov. Capillary forces and structuring in layers of colloid particles. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 6(4):383 – 401, 2001.
- [14] Tadao Sugimoto. *Monodispersed Particles*, chapter Applications to Fundamental Studies, pages 549 – 550. 2001.