

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Física**



**Propuesta educativa relacionada con el eje de Probabilidad y
Estadística para Segundo Medio, según enfoque CTSA**

Alejandro Antonio Duque Vergara

Profesores Guías:

**Nicolás Garrido Sánchez
Bárbara Ossandón Buljevic**

**Seminario de Grado para optar a la
Licenciatura en Educación de Física y
Matemática.**

Santiago – Chile

2022

**PROPUESTA EDUCATIVA RELACIONADA CON EL EJE DE PROBABILIDAD Y
ESTADÍSTICA PARA SEGUNDO MEDIO, SEGÚN ENFOQUE CTSA
BAJO EDUCACIÓN STEM INTEGRADA**

ALEJANDRO ANTONIO DUQUE VERGARA

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión de los profesores guías Bárbara Ossandón Buljevic y Nicolás Garrido Sánchez del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, Sr. Felipe Márquez Salinas y Sr. Paolo Núñez Carreño.

Felipe Márquez Salinas
Comisión Calificadora

Paolo Núñez Carreño
Comisión Calificadora

Bárbara Ossandón Buljevic
Profesor Guía

Nicolás Garrido Sánchez
Profesor Guía

Roberto Bernal Valenzuela
Director

Resumen

Las Bases Curriculares de MINEDUC (2016) establecen el Eje: Probabilidad y Estadística para la enseñanza media. El Eje responde a la necesidad que todo el estudiantado aprenda a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos, así como comprenda el rol de la probabilidad en la sociedad. Con ello, se espera formar estudiantes críticos/as que puedan utilizar la información, validar sus opiniones y tomar decisiones frente a múltiples situaciones de la vida real, donde la intuición, a veces, nos engaña. Es necesario que ella sea en base a evidencias que les permitan asumir su rol como ciudadano/a. Asimismo, el Programa de 2º medio de MINEDUC (2016, p.44) indica que “al final de este ciclo¹, las y los estudiantes podrán comprender el rol de la probabilidad en la sociedad, utilizando herramientas estadísticas y de la probabilidad misma”.

Consistente con ello, este Seminario de Grado se propuso crear estrategias educativas interdisciplinarias significativas para el/la estudiante según el enfoque Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS) de la Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación y la Cultura (OEI). Por ello, su objetivo es el diseño y creación de una propuesta educativa que presente problemas auténticos de la vida real del estudiante de 2º medio.

Lo anterior, significó idear problemas cuya solución requiriese una mirada interdisciplinar. La estrategia educativa se tradujo en actividades agrupadas en tres sesiones de aula y que, en síntesis, abordaron las siguientes situaciones problemáticas:

- Las actividades de la Sesión N° 1 denominada “La sangre” relaciona el concepto de variable aleatoria, probabilidad y el principio multiplicativo como una de las técnicas de conteo.
- Las actividades de la Sesión N° 2 denominada “El orden de las cosas” se relaciona con otras técnicas de conteo de tal manera que los/as estudiantes sientan la necesidad de establecer las ideas de permutación, variación y combinación, destacando su diferencia entre ellas. Para ello, se trabaja colaborativamente para analizar la formación de patentes del parque de automotriz chileno y sus consecuencias en el medio ambiente.
- Las actividades de la Sesión N° 3 denominada “Efecto de la radiación en la Tierra” se relacionan con la aplicación de la regla de Laplace (probabilidad clásica) con el objeto de tomar conciencia de los riesgos de enfermar con cáncer a la piel se trabaja colaborativamente con sus pares.

Lo anterior, respeta lo que señala la pirámide matemática que, para formarse en esa área, es necesario que el/la estudiante piense y razone matemáticamente, resuelva e interprete problemas llegando a conclusiones que sean capaces de comunicar a sus pares (Alsina, 2010).

¹ Eje: Probabilidad y Estadística

Finalmente, la estrategia educativa de este Seminario de Grado incluye indicaciones al docente, que fueron sometidas a evaluación por cuatro expertos elegidos por conveniencia. Los expertos valoraron la propuesta interdisciplinaria e hicieron observaciones que permitieron mejorarlas.

Palabras claves: Combinatoria, Currículo, Probabilidad, Variable aleatoria, CTSA

Abstract

The Curricular Bases of MINEDUC (2016) establish the Axis: Probability and Statistics for secondary education. It responds to the need for all students to learn to perform analysis, inferences and obtain information from statistical data, as well as understand the role of probability in society. With this, it is hoped to train critical students who can use information, validate their opinions and make decisions in the face of multiple real-life situations, where intuition sometimes deceives us. It is necessary that it be based on evidence that allows them to assume their role as citizens. Likewise, the MINEDUC Secondary School Program (2016, p.44) indicates that "at the end of this cycle, students will be able to understand the role of probability in society, using statistical tools and probability itself."

Consistent with this, this Degree Seminar aimed to create significant interdisciplinary educational strategies for the student according to integrated the Science, Technology, Society (CTS) approach of the Organization of Ibero-American States for Education and Culture (OEI). Therefore, its objective is the design and creation of an educational proposal that presents authentic problems of the real life of the 2nd grade student.

This meant devising problems whose solution required an interdisciplinary approach. The educational strategy was translated into activities grouped into three classroom sessions and which, in short, addressed the following problematic situations:

- The activities of Session No. 1 called "Blood" relates the concept of random variable, probability and the multiplicative principle as one of the counting techniques.
- The activities of Session No. 2 called "The order of things" are related to other counting techniques in such a way that the students feel the need to establish the ideas of permutation, variation and combination, highlighting their difference between them. . For this, we work collaboratively to analyze the formation of patents in the Chilean automotive fleet and its consequences on the environment.
- The activities of Session No. 3 called "Effect of radiation on Earth" are related to the application of the Laplace rule (classical probability) in order to become aware of the risks of getting sick with skin cancer. collaboratively with their peers.

The foregoing respects what the mathematical pyramid indicates that, in order to be trained in this area, it is necessary for the student to think and reason mathematically, solve and interpret problems, reaching conclusions that they are capable of communicating to their peers (Alsina, 2010). .

Finally, the educational strategy of this Degree Seminar includes indications to the teacher, it was submitted to evaluation by four experts chosen for convenience, who valued the interdisciplinary proposal and made observations that allowed it to be improved.

Agradecimientos

Este documento no sería posible gracias a muchas personas, entre ellas mis profesores guías, Bárbara Ossandón y Nicolás Garrido, que hicieron posible este Seminario de Grado tras orientar y corregir muchísimas veces este documento, sin ello no sería de la calidad que debería tener este escrito. También extendiendo este agradecimiento a la secretaria Janet Andrade.

También debo agradecer a mis padres, Antonio y Josefina; mis tíos Antonio y Rosa, que pusieron el hombro frente a todas a mis recaídas que tuve en todo mi período de formación académica. Además, sería mal agradecido sino doy las gracias a Tamara Galleguillos, Álvaro Aliaga y Cristian Mena, por vivir este proceso de desarrollo. Todas sus ayudas son agradecidas y con creces.

En otro aspecto agradezco a los docentes de la carrera que me iniciaron como profesor, ya que entregaron una formación académica de calidad acorde a la falta de profesores de matemática y de física.

Además, agradezco a Dios por otorgarme vivir este proceso de formación, y llegar a culmine este proceso de titulación. Hubo momentos que estuve a punto de tirar la toalla, pero no me rendí y seguía adelante hasta llegar a la meta que por mucho tiempo pareciera lejana. MI frase característica que me iluminó para seguir es que si tienes mil razones por llorar recuerda que tiene mil y uno razones por cuales vivir.

Tabla de Contenidos

Resumen	i
Abstract	iii
Agradecimientos	iv
Introducción	1
1. Antecedentes.....	2
1.1. Antecedentes Históricos de la Estadística y Probabilidad	2
1.2. Antecedentes de la Enseñanza de Estadística y Probabilidad	5
2. Planteamiento del Problema	7
3. Marco Teórico.....	10
3.1. La pirámide de la educación matemática	10
3.2. Enfoque CTSA y Educación STEM integrada	12
3.3. Marco Epistemológico de Referencia (MER).....	15
3.4 La enseñanza de las ciencias y las prácticas científicas de Osborne.....	17
3.5.- Estándares disciplinarios de Matemática para Educación Media	19
4. Diseño de la Estrategia Educativa	21
4.1. Sesiones construidas	23
4.2 Validación de la Propuesta Educativa	24
4.2.1 Opinión de Expertos/a.....	25
4.2.2. Optimización de la secuencia de actividades	28
4.3 Propuesta educativa optimizada con orientaciones al docente	30
5. Reflexiones Finales.....	47
6 Bibliografía.....	49
ANEXO A GUÍAS DE TRABAJO ANTES DE LA OPTIMIZACIÓN	52
ANEXO B: VALORACIONES DE LOS EXPERTOS A LAS GUÍAS DE TRABAJO.....	75
ANEXO C: GUÍAS CON LAS INDICACIONES AL DOCENTE	80
ANEXO D: GLOSARIO SOBRE DEFINICIONES EN EL ÁREA DE LAS PROBABILIDADES	105

Índices de tablas

Tabla 1 Sobre el significado de la probabilidad de Batanero (2002).....	16
Tabla 2 Objetivos por sesión de la propuesta	21
Tabla 3 Relación entre los fines de la propuesta y lo que indica el MINEDUC (2016) (Elaboración propia).....	24
Tabla 4 Cambios a las sesiones según los resultados de la validación de expertos	29

Índice de Figuras

Figura 1 Diagrama de árbol del primer problema planteado por Mére (Elaboración propia)3	
Figura 2 Situación a partir de que A ha ganado dos veces y B sólo una (Elaboración propia)	4
Figura 3 Pirámide de aprendizaje de la matemática (Alsina, 2010).....	10
Figura 4 Espacio temporal entre dos objetivos de aprendizaje que se recomienda realizar la propuesta.....	22
Figura 5 Opiniones de los expertos validadores a la propuesta inicial	27

Introducción

El Seminario de Grado, tiene como propósito general crear una estrategia educativa de aprendizaje situado (López, Llano y Rojas, 2021) para los y las estudiantes de segundo medio con enfoque CTSA referida a la Unidad N° 4 denominada Probabilidades (MINEDUC, 2016). Para lograr este objetivo se organizó de la siguiente manera:

El Capítulo 1 analiza los antecedentes históricos del desarrollo de la estadística y la probabilidad. El Capítulo 2 se aboca al planteamiento del problema, en relación con los desafíos y dificultades que presenta para los/as estudiantes el aprendizaje de la estadística y probabilidad. En el Capítulo 3, se presenta el sustento teórico, el marco epistemológico de referencia y la metodología escogida. El Capítulo 4 describe el diseño y la propuesta educativa propiamente tal optimizada después de la opinión de cuatro expertos. Para finalizar con el Capítulo 5 que son las reflexiones finales.

La propuesta educativa la constituyen tres guías que se desarrollan en tres sesiones de 90 minutos. Además, se incluyen las orientaciones al docente. La primera sesión se denomina “La sangre”, la segunda se llama “El orden de las cosas” y la tercera “Efecto de la radiación en la Tierra”.

La estructura de cada sesión es la siguiente: comienza develando los conocimientos previos de los/as estudiantes, referidos a variables aleatorias finitas; a continuación, se presentan situaciones que les permitan utilizar permutaciones y combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas. Por último, se focaliza en la comprensión del rol de la probabilidad en la sociedad. Lo anterior, incluye los Objetivos de Aprendizaje N° 10, 11 y 12 propuestos por MINEDUC (2016).

Este Seminario de Grado asimismo considera que la asignatura de Matemática propuesta en estas Bases Curriculares, se enfoca en la resolución de problemas, poniendo a prueba a los/as estudiantes para que desarrollen un conjunto de habilidades reflexionando, argumentando, exponiendo sus ideas y dando a conocer procedimientos utilizados en la resolución de determinadas situaciones problemáticas. Estas habilidades que MINEDUC propone en su organización curricular, son las que se propuso este Seminario de Grado desarrollar en los y las estudiantes a saber:

- Resolver problemas: Se refiere a solucionar una situación problemática sin que se le haya indicado un procedimiento. Por ende, necesita estrategias para indagar, experimentar, escoger o inventar procesos poniendo a prueba la curiosidad y creatividad.
- Representar: Consiste en traspasar desde una representación concreta hacia la pictórica llegando a un lenguaje simbólico o abstracto.
- Modelar: Se fundamenta en la construcción de un modelo físico o abstracto que refleje parte de las características de lo que se estudia, evaluando, modificando para encontrar patrones o regularidades.
- Argumentar y comunicar: se trata de dar a conocer y de convencer a otros la validez de sus ideas a través de argumentos.

1. Antecedentes

1.1. Antecedentes Históricos de la Estadística y Probabilidad

Es importante recordar que el uso de la estadística se remite a culturas milenarias (Restrepo y González, 2003). Gran parte de las civilizaciones como la griega, romana y otras coetáneas, eran aficionadas a los juegos. Hallazgos arqueológicos de la época, descubrieron el uso de astrágalos² como dados. Por nombrar sólo un caso, el lanzamiento de tabas³ romanas reflejaba el deseo de sus dioses, por ejemplo, de Venus, de las acciones a realizar en su vida diaria, descartando así, la incertidumbre en la toma de decisiones del ser humano (Corbalán y Sanz, 2011).

El desarrollo de la probabilidad, por parte de los griegos (cerca a los 1900 A.C.), fue prácticamente nulo debido a su complejo sistema numérico. Esta infertilidad se prolongó en la Edad Media, se mantuvo debido a factores como la reprobación cultural de los vicios como los juegos de azar y la frecuentación de tabernas. Sus esfuerzos estaban dedicados, más bien, al desarrollo de la geometría y la identificación de patrones de belleza

Por otra parte, la invención de la imprenta (mediados del s. XV), masificó los adelantos del conocimiento que antes se transmitían de forma oral. Es así como el libro *“Liber de ludo aleae”* de Girolamo Cardano es el primero dedicado al estudio de datos al azar, en particular, sobre el lanzamiento de dados. Cardano trabajó con las ideas de la definición clásica de probabilidad, pero no la definió. Introdujo la noción de asignar al 0, nula probabilidad de ocurrencia del evento y a 1, la certeza de su ocurrencia. No obstante, el verdadero desarrollo de la teoría de la probabilidad comenzó cuando Pascal y Fermat, en el s. XVII, se propusieron resolver los problemas que el Caballero de Méré planteó. Literalmente estos son los siguientes:

- I. *“Supongamos que dos jugadores, A y B, participan en una apuesta de \$60. Convienen en que el primero que haga 3 puntos ganará toda la apuesta, pero, cuando A ha ganado 2 puntos y B ha ganado 1, de mutuo acuerdo, deciden dejar el juego. ¿Cómo tendrían que repartirse la apuesta?”*
- II. *En el juego del lanzamiento de tres dados, ¿quién tiene más posibilidades de ganar: el que apuesta al número 9 o el que apuesta al número 10?*
- III. *¿Es o no ventajoso jugar a apostar que, al menos, aparece un 6 en cuatro tiradas de un dado?”* (Corbalán y Sanz, 2011, p.43).

A partir de estas preguntas y de la comunicación entre Pascal y Fermat, continuó el desarrollo de la teoría de la probabilidad a paso firme. Bernoulli, por su parte, en su obra *Ars Conjectandi*, continuó los trabajos de Huygens sobre juegos de azar, destacando el estudio del lanzamiento de una moneda sesgada⁴, lo cual permitió desarrollar los principios relacionados con la distribución

² Astrágalo: Uno de los huesos del tarso, que está articulado con la tibia y el peroné.

³ Taba: Sinónimo de Astrágalo. El Juego consiste en que se tira al aire una taba de cordero, u otro objeto similar, y se gana o pierde según la posición en que caiga aquella.

⁴ Se entiende sesgada como que no es objetivo o imparcial, sino que está condicionado. En el caso de la moneda sesgada, es aquella que está modificada para alterar, por ejemplo, la probabilidad de ocurrencia de una cara de ella.

binomial. Asimismo, Moivre (1718), en su libro *The Doctrine of Chance*, sigue la línea de Huygens y Bernoulli integrando en la teoría de la probabilidad, ideas del cálculo infinitesimal de Newton. En la misma línea, Gauss identificó que datos astronómicos seguían la forma de una campana (lo que hoy se conoce como Ley de Gauss o distribución normal).

Por su parte, Laplace (1749 - 1827) contribuyó en el desarrollo de la ciencia de las probabilidades a través del conocimiento de las leyes de la naturaleza. Él deseaba tener un conocimiento más exacto de las mismas y así desarrolló la teoría de las funciones generatrices y las fórmulas de los grandes números.

Posteriormente, Markov y Liapunov avanzaron en la teoría de la probabilidad permitiendo a Kolmogorov (1903- 1987) desarrollar la teoría axiomática de la probabilidad, gracias al desarrollo de las bases de la matemática moderna.

Un ejemplo del uso cercano al público en general es un concurso de la televisión estadounidense, desarrollado desde el año 1963 hasta 1990, denominado *Let's Make a Deal*, cuyo animador era Monty Hall, quien colocaba a los concursantes frente a tres puertas cerradas. Detrás de una de ellas estaba el "premio" (un automóvil), y las otras puertas tenían premios menores (una cabra). Cuando el participante escogía una de las puertas, inmediatamente después, el presentador abría una sin premio y le daba al competidor la posibilidad de cambiar o de mantener su elección anterior. Frente a esta situación, los matemáticos se preguntaban ¿da lo mismo seguir con la puerta elegida o cambiarla? La respuesta a esta pregunta, la desarrolló la escritora Marilyn vos Savant que, según Record Guinness del año 1989, es quien posee uno de los coeficientes intelectuales más altos del mundo en su niñez. Ella, recomienda que conviene cambiarse de puerta ya que aumenta de un tercio a dos tercios, la probabilidad de ganar el premio, lo que trajo muchas discusiones con matemáticos que opinaban lo contrario.

Ahora bien, volviendo a la primera pregunta que se planteó el Caballero de Mére, en relación con que alguno de los concursantes A o B logre ganar el premio, se representan todas las jugadas posibles en la Figura 1, por su complejidad y por la importancia para el desarrollo de esta área.

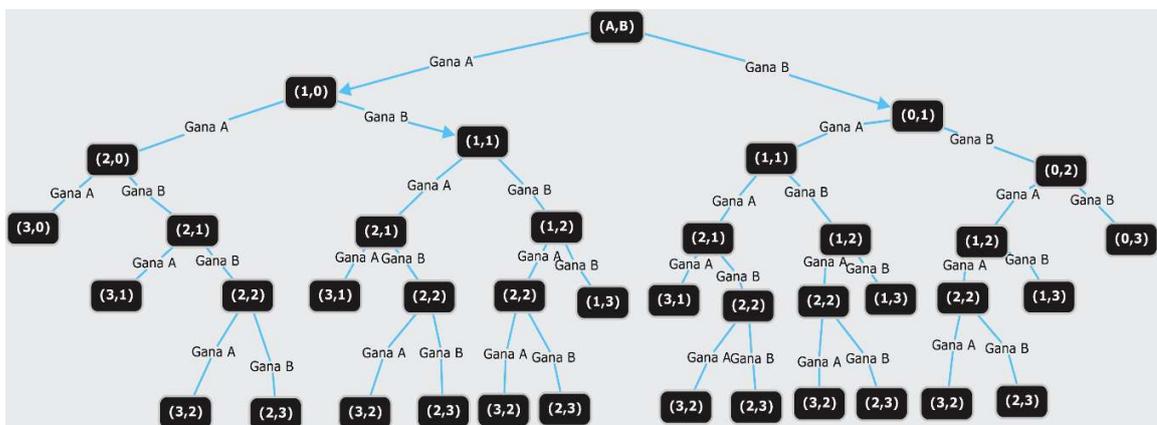


Figura 1 Diagrama de árbol del primer problema planteado por Mére (Elaboración propia)

Las jugadas posibles entre dos concursantes A y B, ganando el primero en juntar tres puntos, se sintetiza en la siguiente Figura 2 que indica la jugada a partir de la cual los concursantes deciden dejar el juego.

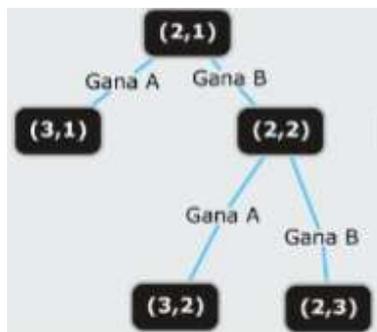


Figura 2 Situación a partir de que A ha ganado dos veces y B sólo una (Elaboración propia)

Se observa que, si se detiene el juego cuando el jugador A ha ganado dos veces y, el contrincante B solo una vez, existen 9 posibles resultados, dando ganador a A en 6 de ellos y a B solo 3; por lo tanto, la entrega del premio debe estar en la razón 6 es a 3, es decir 2 es a 1, repartiéndose \$ 40 y \$ 20, respectivamente.

Al final, Tartaglia (Corbalán y Sanz, 2011) al respecto, declaró que *“La resolución de tal pregunta debe ser judicial más que matemática, de modo que, cualquiera sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar”* lo que confundió y expuso a los jugadores a un conflicto judicial. Este conflicto se debe a que a pesar de que va ganando A, existe la posibilidad que gane B, siempre y cuando gane B los dos siguientes juegos (lo que equivale que A los pierda). Por tanto, es necesario desde el punto de vista del autor, y de las reglas iniciales del juego, quien haya obtenido mayor puntuación, se debiera llevar el premio completo.

A continuación, se analiza el tercer problema señalado anteriormente, por la importancia que también tuvo para el desarrollo de la teoría de la probabilidad. El problema dice así: *¿Es o no ventajoso jugar a apostar que, al menos, aparece un 6 en cuatro tiradas de un dado?”*

La probabilidad de que salga un seis en el lanzamiento de un dado (evento A) es un sexto $P(A) = \frac{1}{6}$, y de que no salga $P(A') = \frac{5}{6}$. Entonces como el lanzamiento iterado de los dados es un evento mutuamente independiente con respecto de los otros, la probabilidad de que no salga un seis en n lanzamientos es $P(A'_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$; lo que trae como consecuencia que la probabilidad de que salga al menos un seis en cuatro lanzamientos - como es el caso del problema - es $P(A_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Evaluando la expresión en $n = 4$, se obtiene un valor aproximado de 0,518, lo que implica que es ventajoso apostar a la aparición de un seis en cuatro tiradas de un dado.

Esta manera de resolver el problema planteado fue interesante porque propuso un método menos complejo que el existente en la época de Méré, el cual era calcular las probabilidades una

por una. En cambio, aquí lo hizo calculando el complemento de la probabilidad de que no se cumpla la condición establecida.

A continuación, se describe brevemente los inicios de la enseñanza de la estadística y probabilidad.

1.2. Antecedentes de la Enseñanza de Estadística y Probabilidad

La Estadística es considerada una ciencia joven, y su mayor desarrollo se alcanzó en las últimas décadas, no obstante, la didáctica de esta área es aún más reciente. Holmes (2002), menciona que la enseñanza de la estadística y probabilidad fue introducida en el currículo de Inglaterra a estudiantes de 16 a 19 años de forma optativa en la década de los 60, con el objeto de ofrecer una especialización matemática, ya que la consideraban importante para la formación ciudadana. Los argumentos que esgrimieron para su incorporación, en el currículo fueron - en síntesis - los siguientes:

- *La formación ciudadana es importante para saber leer e interpretar datos y gráficos.*
- *Es útil para la formación posterior a la educación secundaria, es decir, para su futuro profesional.*
- *Desarrolla el pensamiento crítico y,*
- *ayuda a comprender otros temas interdisciplinarios y de la vida de los ciudadanos.*

Ahora bien, desde el año 2009, el currículo chileno ha insertado la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en los primeros niveles de enseñanza básica hasta completar toda su etapa escolar. Esta inserción curricular surge principalmente dicen Estrella y Olfos, (2013) por presiones internacionales, para mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de la estadística y probabilidad en enseñanza media. Además, señalan que las/os docentes no han tenido una formación adecuada en sus cursos de formación inicial o de educación continua en Estadística, ya que expresan errores en esta área, manejan concepciones limitadas e incluso erróneas, y no conocen cómo trabajan los estudiantes (Del Pino y Estrella, 2012). Como expertos en didáctica de la Estadística señalan también que, en el mundo de la incertidumbre en la que se desarrolla esta disciplina, es necesario considerar la interdisciplina para su enseñanza, por tratarse de una característica primordial de la misma.

Araneda y otros (2011) señalan que este es un problema globalizado. No solo ocurre en Chile. La educación universitaria de quienes serán las y los futuros docentes no está especialmente diseñada para los nuevos desafíos en la enseñanza de la Estadística. En particular, su formación suele ser muy teórica, no entendiendo cabalmente los conceptos de azar e incertidumbre, esenciales para esta ciencia (Estadística). En general, los profesores de matemática de enseñanza media han tenido estudios sobre Probabilidad, pero no sobre su enseñanza.

Fischbein (1975), por su parte, propone adelantar la enseñanza de la probabilidad a la infancia, aunque sea a través de intuiciones parciales ya que es necesaria una educación de la incertidumbre.

Asimismo, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000) propuso algo muy similar. Por ello, MINEDUC (2012) ha establecido *Estándares Orientadores para las Carreras de Pedagogía en Educación Media* que deben cumplir las universidades para la formación de docentes, así como cursos de acción formativa, en Estadística y Probabilidad, para los profesores en ejercicio.

En particular, este Seminario de Grado contribuirá a los estándares 17, 18 y 19 que se describen a continuación.

- Estándar N° 17: *“Es capaz de motivar la recolección y estudios de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis.”* Para ello, la estrategia educativa de este Seminario de Grado incluye la resolución de problemas que requieran la recolección de datos, análisis y su descripción a través de gráficos.
- *Estándar N° 18: “Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas”.* Para ello, las actividades de las Guías de este Seminario de Grado, tiene como objetivo desarrollar la capacidad de aplicar técnicas de conteo como permutaciones, variaciones y combinaciones y calcular la probabilidad en casos equiprobables (modelo de Laplace) y, también, en los no equiprobables.
- *Estándar N° 19: “Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas”* Para ello, las actividades de las Guías permiten realizar el estudio de las variables aleatorias mediante el uso de gráficos, tablas y ecuaciones.

Los estándares señalados y los actualizados en MINEDUC (2021b), integran los conocimiento y habilidades sobre la estadística y probabilidad con la finalidad de formar personas que puedan elaborar explicaciones en base a las probabilidades, comprender la estadística y probabilidades como una herramienta para estudiar fenómenos naturales y sociales, interpretar nueva información considerando su incertidumbre asociada, entre otros.

La incorporación de estos contenidos se debe a una tendencia mundial de alfabetización científica a estudiantes centrada en la formación ciudadana para que comprendan noticias, hechos y estudios, y sus consecuencias para la toma de decisión. Además, lo considera conocimiento de base, de gran parte de las disciplinas científicas y tecnológicas, así como una herramienta útil para el desarrollo del pensamiento científico.

A continuación, se amplía el planteamiento del problema que dio origen a este Seminario de Grado.

2. Planteamiento del Problema

A pesar de que el concepto de azar está presente en la vida cotidiana, en muchos contextos y situaciones donde aparecen las nociones de certidumbre e incertidumbre, riesgo y probabilidad, la literatura señala que, en ocasiones no se distingue entre situaciones azarosas y deterministas como acostumbra la Estadística y la Matemática, respectivamente, ya sea por tradiciones culturales y/o educativas. Ahora bien, la literatura también constata que la forma de enseñar estadística y probabilidad ha variado en el transcurso del tiempo por diversas razones. Batanero (2002) declara que, gran parte de los profesores de secundaria de matemática, no tienen, necesariamente, una formación en didáctica de la estadística en su formación inicial docente, en consecuencia, su enseñanza es excesivamente técnica o muy superficial si esta se hace memorística. En la preparación de sus clases - continúa la autora - los docentes realizan prácticas tales como extraer problemas de libros de forma literal o sin contextualizarlos o, simplemente no lo incluyen en su planificación docente. Ella sugiere que es necesario reforzar la formación del razonamiento probabilístico para la comprensión de situaciones auténticas de la vida real, enseñándola de una forma más experimental, no solamente asociada a juegos de azar. Por ejemplo - señala - pronóstico del tiempo, diagnóstico médico, entre otros.

Un o una estudiante que no aprende estadística y probabilidad afecta a su formación ciudadana, desarrollo personal y profesional, ya que, si no es capaz de analizar datos, por ejemplo, de medios de comunicación masivos u otros problemas a los que se enfrentará en su vida, las determinaciones que tomará como ciudadano o ciudadana, no contará con argumentos basados en evidencias tales que le permitan tomar buenas decisiones para su vida, el medio ambiente y las generaciones actuales y posteriores. Esto tiene relación con lo que se denomina *cultura estadística* según Fernández, F., Soler, N., y Sarmiento, B. (2007, p.02). Esta cultura se refiere a la *“Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante”*.

Como consecuencia de esta definición, los/as estudiantes deben desarrollar la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real ya que el entorno y la vida está impregnado de azar y fenómenos aleatorios. Es por esto, que se debe cambiar la forma de enseñar la estadística y la probabilidad, de tal manera, que el/la estudiante se comprometa con su aprendizaje, ya que coincidimos con MINEDUC (2019) cuando declara que *“La sociedad actual, caracterizada por el cambio, las tecnologías, la información y la comunicación, requiere de nuevas competencias para enfrentar estos desafíos (...) Se requieren programas con enfoque activo, que fortalezcan el pensamiento crítico, la colaboración y la creatividad. Los estudiantes deben desarrollar*

*competencias para vivir y trabajar en un entorno en constante transformación y para puestos de trabajo que aún no existen*⁵.

Lo anterior, es un desafío para el profesorado, toda vez que ello se refiere a considerar la interdisciplinariedad, entre otros. Palm (2008) señala que la forma de lograr esta interdisciplinariedad es que el estudiantado se encuentre desafiado ante tareas auténticas. Estas, entendidas como aquellas que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable, en una situación particular, y, que, en este caso, potencie la matemática del entorno.

En este sentido, se consideró, en este Seminario de Grado, que el eje *Estadística y Probabilidad*, en particular, la unidad de segundo medio, referida a *técnicas de conteo y de variable aleatoria* permiten presentar al estudiantado situaciones auténticas. Para ello, se crearon situaciones-problemas cuya resolución exige una mirada interdisciplinaria. Se busca entonces, el desarrollo de competencias claves para la vida, a través del compromiso del estudiante con su propio aprendizaje.

Por último, para su diseño y construcción se consideraron algunas concepciones alternativas de los estudiantes en esta área que se detallan más adelante, ya que como dicen Del Puerto y Seminara (2010), el estudiante tiene un saber anterior que puede ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces, éste no se agrega al anterior sino lucha contra él. Los autores terminan señalando que los principales obstáculos detectados en su trabajo son la obtención de información espacial y la traducción del lenguaje coloquial al matemático. Por su parte, Bachelard (1988, p.8) señala que ellas son verdaderos obstáculos epistemológicos. Las concepciones alternativas (CA) señala la literatura en esta área son principalmente las siguientes:

- Interpretación basada en solo lo posible o imposible
- El azar no puede medirse matemáticamente
- Un ensayo no está relacionado con otros ensayos
- Interpretación incorrecta del lenguaje
- Inferencias no válidas

En la construcción de las estrategias de aprendizaje se este Seminario de Grado, se consideraron principalmente las siguientes concepciones alternativas (CA):

- El azar no puede medirse matemáticamente, desarrollado en la sesión 1 y 3
- Interpretación incorrecta del lenguaje, enfocados en las sesiones 1 y 2
- Inferencias no válidas fue tomado en considerado en la sesión 3

Consistente con lo anterior, los objetivos planteados en este Seminario de Grado son:

⁵ <http://www.curriculumnacional.cl/614/w3-propertyvalue-120245.html> recuperada 20 de agosto 2019

Objetivo General

Contribuir a través de la estadística y probabilidad al desarrollo del pensamiento crítico, la argumentación basada en evidencias para la formación ciudadana elaborando una estrategia educativa de aprendizaje situado para estudiantes de Segundo Medio, a través del enfoque CTSA.

Objetivos Específicos

- Diseñar y construir Guías para el aprendizaje situado de la combinatoria y variable aleatoria en Segundo Medio, de tal manera que los/as estudiantes reflexionen y argumenten para la resolución de problemáticas interdisciplinariamente.
- Diseñar y construir Orientaciones al/la Docente para el aprendizaje situado de la combinatoria y variable aleatoria en Segundo Medio, de tal manera que los/as estudiantes reflexionen y argumenten para la resolución de problemáticas interdisciplinariamente.
- Recoger opinión de expertos/as para refinar Guías del Estudiante y Orientaciones al/la Docente.

3. Marco Teórico

3.1. La pirámide de la educación matemática

La pirámide alimenticia se creó con el fin de clasificar y controlar el consumo de los alimentos, y en otro ámbito, Alsina (2010) creó la pirámide de la educación matemática para señalar los recursos que necesitan el alumnado para desarrollar la competencia matemática, tal como se observa en la Figura 3.



Figura 3 Pirámide de aprendizaje de la matemática (Alsina, 2010)

El autor describe las características de esta pirámide de la siguiente manera:

“En la base de este organigrama piramidal (...) están las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro contexto (matematización del entorno); la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios con un contenido matemático o los recursos tecnológicos como el ordenador y la calculadora. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto” (Alsina, 2010, p. 13-14).

Para aprender matemática hay que fomentar lo siguiente según el mismo autor:

- *Pensar y razonar matemáticamente*
- *Plantearse y resolver problemas*

- *Obtener, interpretar problemas*
- *Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático*
- *Usar las técnicas matemáticas básicas y los instrumentos para hacer matemática*
- *Interpretar y representar expresiones.*
- *Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto de forma oral o escrita usando lenguaje matemático respecto a un sistema de referencia móvil y reversible.*

El autor agrega que, una persona es *competente matemáticamente* cuando es capaz de hacer lo siguiente:

- *Pensar matemáticamente, es decir, construir conocimiento matemático en situaciones que tenga sentido: experimentar, intuir, relacionar, abstraer.*
- *Razonar matemáticamente: realizar inducciones y deducciones, particularizar y generalizar.*
- *Plantear y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas, planificaciones y desarrollar estrategias de resolución de ellos y validar sus resultados.*
- *Obtener, interpretar y generar información con sentido matemático.*
- *Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.*
- *Comunicar el trabajo y los descubrimientos que hace al resto, tanto oralmente como por escrito, empleando lenguaje matemático.*
- *Usar técnicas matemáticas básicas como operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos; e instrumentos como calculadoras, software de dibujo o medida para hacer matemática (Alsina, 2010, p.10).*

Por su parte, la Agencia de Calidad de la Educación (2019) según los resultados PISA del 2018, señala que un individuo está capacitado en el área de Matemática si es capaz de formular, emplear e interpretar la Matemática en una variedad de contextos. Esto incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas. Esto ayuda a las personas a reconocer el papel que desempeñan la Matemática en el mundo y que permite hacer juicios y decisiones bien fundadas para construir ciudadanos comprometidos y reflexivos.

A continuación, se desarrolla el enfoque denominado CTS de la OEI basado en la tesis para optar al grado de Magister en Investigación en educación de Ossandón (2007, pp.85-93) que, es otro de los sustentos teóricos que respaldan este Seminario de Grado.

3.2. Enfoque CTSA y Educación STEM integrada

A partir de la segunda guerra mundial ocurren una serie de catástrofes como son los accidentes nucleares de Chernobyl (Ucrania en 1986), la bomba atómica de Hiroshima y Nagasaki (Japón en 1945), derrames de petróleo en el mar, entre otros. Cerezo (1998) y otros señalan que, hechos que cuestionan el modelo unidireccional de crecimiento vigente que indicaba que, a mayor desarrollo de la ciencia, mayor era el tecnológico y esto inevitablemente aumentaba la riqueza y, por consiguiente, el bienestar social.

El *enfoque CTS* surge en la década de los 60 y busca comprender la dimensión ética social del desarrollo de la ciencia y la tecnología, y sus consecuencias en el ecosistema. Considera el carácter único de los sucesos, y el trabajo colaborativo de las comunidades para abrir la ciencia a la luz pública y a la ética, promoviendo la participación ciudadana educada científica y tecnológicamente. Se desarrolló según dos corrientes. Una de ellas originó el llamado «*programa fuerte*» de la sociología del conocimiento científico (origen europeo). La segunda es de origen norteamericana. Se centró en las consecuencias sociales (y ambientales) de los productos tecnológicos y se expresó en movimientos de protesta social producidos durante los años 60 y 70 (García y otros, 2001).

Los estudios y programas CTS se han elaborado en el campo de la investigación, promoviendo la actividad científica como proceso social, en el de las políticas públicas, promoviendo la creación de mecanismos democráticos que faciliten la toma de decisiones en temas relativos a políticas científico-tecnológicas y principalmente, en el campo de la educación, en enseñanza secundaria y universitaria. En la secundaria existen dos asociaciones importantes de profesores con este enfoque. Ellas son la norteamericana National Science Teachers Association (NSTA) y la británica Association for Science Education (ASE).

CTS, en educación se propone, además, lograr que los/as estudiantes se comprometan con su aprendizaje, cuidando que posean información pertinente, para que sean capaces de trabajar colaborativamente para articular conocimientos, argumentos basados en evidencias, sobre la base de problemas significativos para ellos/as, relacionados con las implicancias del desarrollo científico-tecnológico. El rol del profesor/a es proporcionar materiales conceptuales y empíricos a las/os estudiantes para la construcción de puentes argumentativos. En la educación secundaria este enfoque se ha aplicado de tres formas, ellas son:

- *Injertos CTSA*. Son añadidos temáticos presentados como problemas en las asignaturas de ciencias. Esta modalidad se hace en función de casos reales o simulados. se recoge la noción de *Issues* en ciencia y tecnología, es decir, problemas identificados cuyas causas de desequilibrio pueden encontrarse en desarrollos particulares de la ciencia y la tecnología, para avanzar progresivamente en su conocimiento y búsqueda de soluciones (Cerezo, 1998). Algunas experiencias en esta modalidad son los proyectos «*Ciencia a través de Europa*», y, el proyecto de Inglaterra *SATIS* (Science and Technology in Society).

- *CTSA pura o como añadido curricular* en el currículum tradicional con una materia de CTSA pura, bajo la forma de asignatura optativa u obligatoria. Aquí el contenido científico juega un papel subordinado a las humanidades.
- *Ciencia y Tecnología vista a través de CTSA*. Son disciplinas aisladas, o cursos pluridisciplinarios, o líneas de proyectos pedagógicos interdisciplinarios, por ejemplo, se toman problemas relacionados con el rol futuro del estudiante en la sociedad, como ciudadano, como profesional y, luego se selecciona y estructura el conocimiento científico-tecnológico necesario para que el estudiante pueda tomar una decisión o entender un problema social relacionado con la ciencia, tecnología, medio ambiente y sociedad.

Estudios realizados por la NSTA a estudiantes de enseñanza media, que habían recibido una educación en ciencias con orientación CTS, señalan algunas características importantes comunes a las tres modalidades de aplicación que son: la motivación del estudiante, el estímulo de vocaciones en ciencias, una mejora en la creatividad y en la comprensión de conceptos científicos.

El enfoque CTSA genera una propuesta didáctica, innovadora y alternativa de la enseñanza tecnocientífica, que hace el énfasis en la formación de ciudadanos científicos y tecnológicos en sus estudiantes. Para ello el docente debe ser un profesional crítico, capaz de elaborar estrategias pedagógicas y didácticas bajo este contexto, y así no convertir al alumnado en entes memorizadores ni repetidores, sino uno que está preparado con argumentos sólidos, promoviendo el desarrollo de habilidades, conocimientos y valores necesarios para tomar decisiones con responsabilidad social, conocimientos, habilidades, implicaciones entre la sociedad y el ambiente; y ciencia y tecnología.

Posterior a este enfoque, se desarrollaron la *educación STEM integrada*, cuyo acrónimo STEM significa, en inglés, Science, Technology, Engineering, and Mathematics. Surge a principios de los años 90, con el fin de elevar el interés de los jóvenes por la ciencia para incrementar profesiones en estas áreas. Al igual que el enfoque CTS, se trabaja con los y las estudiantes situaciones problemáticas reales con el objeto de involucrarlos en el aprendizaje, cuidando integrar algunas de las áreas de STEM para su contextualización y resolución.

Ello implica, por ejemplo, considerar problemas cuya resolución requiere la colaboración de equipos de trabajo y una mirada inter o multi o transdisciplinaria que considere transversalmente algunas de las áreas que incluyen el acrónimo STEM. La diferencia principal entre un ejercicio y un problema es que al desarrollar el primero se hace la aplicación directa de un algoritmo de forma más o menos mecánica. En cambio, el desarrollo de una situación-problema o problemática consiste en la búsqueda de una meta, que no se alcanza de forma inmediata, ya que se requiere reflexionar, investigar, definir estrategias y por tanto, más tiempo para su resolución.

Friedman (2005), por su parte, subraya que su desarrollo comenzó a tener éxito cuando se creó el grado de Education STEM en la Virginia Tech University en el año 2005. De lo que se trata dice Couso (2017, p.27) es que *“tenemos que conseguir enseñar ciencia e ingeniería desarrollando la creatividad, la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la comunicación y la metacognición”* incorporando también - continúa la autora - lo que se ha denominado habilidades del s. XXI o *soft skills* (habilidades blandas) como son las socioemocionales para el trabajo en equipo, pensamiento crítico y creatividad, entre otros. Esto se relaciona con la alfabetización STEM que podría definirse como la esfera educacional orientada a la resolución de problemas reales con propuestas educativas que pueden llegar a ser transdisciplinarias, Interdisciplinarias, y multidisciplinarias (Martín-Páez y otros, 2019; Zollman, 2012). Estos autores, termina señalando que, si estas propuestas se implementan bien, los beneficios son cognitivos, procedimentales y actitudinales. Por tanto, *educación STEM integrada está* concebida para ser trabajada principalmente mediante lo que se denomina aprendizaje basado en proyectos (ABP) y aprendizaje basado en problemas (Abp) ya que, los estudiantes se enfrentan a problemas reales que tienen que ser resueltos creativa y colaborativamente. Así, se fortalecen las conexiones entre las diferentes áreas de aprendizaje y se enriquecen las habilidades, cuando estas áreas se combinan para ser usadas en contextos auténticos, donde deben buscar creativamente una solución o respuesta. Como el aprendizaje es activo y los contenidos son aplicados en la práctica, se ha visto que los estudiantes se comprometen con la tarea y se logra desarrollar tanto actitudes como habilidades de alto nivel cognitivo⁶.

La literatura⁷ ha comprobado que, en particular, estas metodologías tienen un alto impacto en los estudiantes por las siguientes razones:

- Existe una mayor motivación, curiosidad y placer en la tarea a realizar.
- Los aprendizajes son relevantes y aplicables.
- El aprendizaje es más profundo y se mantiene a largo plazo.
- Existe una mayor interacción con adultos y organizaciones: interés en futuro laboral.
- Promueve el desarrollo del pensamiento crítico a través de la solución de problemas.
- Genera un mejor clima de aula: colaboración y trabajo en equipo.
- Incentiva el uso de la tecnología y la creatividad.

Este Seminario de Grado recoge - como se dijo - elementos de la estrategia educativa de resolución de problemas ya que, por un lado, permite plantear problemas de la vida real a los estudiantes, cuya solución exige trabajo en equipos organizados y colaborativos y por otro, porque se adecúa a las condiciones, al contexto y propósito de este Seminario de Grado.

⁶ Extraído de <https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-article-70749.html> visitado el 16 de abril de 2019

⁷ Extraído en <http://www.curriculumnacional.cl/614/w3-propertyvalue-120245.html> visitado el 16 de abril de 2019)

3.3. Marco Epistemológico de Referencia (MER)

El MER de este Seminario de Grado se enfoca en el eje “Probabilidad y Estadística”, centrado en probabilidades para el logro de los siguientes objetivos de aprendizaje, declarados en las Bases Curriculares de MINEDUC (2016) de 2do medio, en el área de Matemática.

- OA 10: Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:
 - *Definiendo la variable.*
 - *Determinando los posibles valores de la incógnita.*
 - *Calculando su probabilidad.*
 - *Graficando sus distribuciones.*
- OA 11: *Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.*
- OA12: Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:
 - *Revisando informaciones de los medios de comunicación.*
 - *Explicando decisiones basadas (...) en probabilidades.*

Se escoge trabajar con la *probabilidad clásica* o también denominada de Laplace, porque esta permite, a priori, en un experimento aleatorio, asignar a cada elemento del espacio muestral una probabilidad igual a cada evento, denominándose este fenómeno *equiprobabilidad*. Por otra parte, la *probabilidad empírica* que, está basada en la frecuencia relativa obtenida después de un experimento que, al repetirlo una cantidad grande de veces, la frecuencia relativa tiende a acercarse a un valor, que es el de la probabilidad clásica, en la mayoría de los casos ya que hay muchas situaciones en que no es posible determinar probabilidades con el modelo de Laplace, por lo que solo se puede hacer en forma empírica, por ejemplo, si el espacio muestral no es finito.

El concepto de *probabilidad clásica* o de Laplace, surge al necesitar cuantificar una medida del azar, que se define como el cociente entre los casos probables y los posibles. Este número real, varía entre cero (imposibilidad de ocurrencia) y uno (certeza de ocurrencia), ambos valores inclusive.

En este sentido. Batanero (2002) amplía la concepción de probabilidad, según los distintos significados, campos de problemas, procedimientos, elementos lingüísticos, definiciones y conceptos relacionados que sintetizó según la tabla siguiente.

Significado de la Probabilidad	Campos de Problemas	Algoritmos y procedimientos	Elementos Lingüísticos	Definiciones y Propiedades	Algunos conceptos relacionados
Intuitivo	<ul style="list-style-type: none"> • Sorteos • Adivinación 	<ul style="list-style-type: none"> • Manipulación de generadores de azar: cartas y dados 	<ul style="list-style-type: none"> • Lenguaje ordinario 	<ul style="list-style-type: none"> • Opinión impredecible, creencia 	<ul style="list-style-type: none"> • Suerte • Destino
Clásica	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculos de esperanzas o riesgos en juegos de azar 	<ul style="list-style-type: none"> • Combinatoria, • Proporciones • Análisis a priori de la estructura del experimento 	<ul style="list-style-type: none"> • Triángulo aritmético • Listado de sucesos • Fórmulas combinatorias 	<ul style="list-style-type: none"> • Equi-probabilidad de sucesos simples • Cociente de casos favorables y posibles 	<ul style="list-style-type: none"> • Esperanza, • Equitatividad • Independencia
Frecuencial	<ul style="list-style-type: none"> • Estimación de parámetros en poblaciones 	<ul style="list-style-type: none"> • Registros de datos estadísticos a posteriori. • Ajustes de curvas matemáticas • Análisis matemático • Simulación 	<ul style="list-style-type: none"> • Tablas y gráficos estadísticos • Curvas de densidad • Tabla de números aleatorios • Tabla de distribuciones 	<ul style="list-style-type: none"> • Límite de las frecuencias relativas • Carácter objetivo basado en la evidencia empírica 	<ul style="list-style-type: none"> • Frecuencia relativa • Universo • Variable aleatoria • Distribución de probabilidad
Subjetiva	<ul style="list-style-type: none"> • Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles 	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Bayes • Asignación subjetiva de probabilidades 	<ul style="list-style-type: none"> • Expresión de la probabilidad condicional 	<ul style="list-style-type: none"> • Carácter subjetivo • Revisable con la experiencia 	<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidad condicional • Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	<ul style="list-style-type: none"> • Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos 	<ul style="list-style-type: none"> • Teoría de conjuntos • Álgebra de conjuntos • Teoría de la medida 	<ul style="list-style-type: none"> • Símbolos conjuntistas 	<ul style="list-style-type: none"> • Función medible 	<ul style="list-style-type: none"> • Espacio muestral • Espacio de probabilidad • Conjuntos de Borel

Tabla 1 Sobre el significado de la probabilidad de Batanero (2002)

Además, Batanero (1997; 2006) destaca la necesidad de reflexionar sobre la idea de *aleatoriedad* que es la base de la estadística y que no tiene una definición sencilla ya que existen una multitud de modelos -continúa- como el de la convergencia de las frecuencias relativas, o la distribución binomial u otros.

Para obtener datos (casos probables y posibles), una de las herramientas son las técnicas de conteo basadas en el principio multiplicativo y la notación factorial. Las principales técnicas de conteo son las permutaciones, variaciones y combinaciones. Las *permutaciones* consisten en la formación de un arreglo de un conjunto con un orden establecido. En cambio, las *variaciones* no se consideran todos los elementos, sin embargo, es importante el orden en la formación de los grupos. Por último, las *combinaciones* son grupos no ordenados ni utilizan todos los elementos para formar los grupos.

El concepto de *variable aleatoria* es una función definida cuyo dominio, es el espacio muestral de un experimento aleatorio y el recorrido, es un subconjunto de los números reales. Se clasifican en dos tipos: variables discretas y continuas. La *variable aleatoria discreta* es aquella cuyo recorrido es un conjunto de número de cardinalidad finita o infinita numerable; en cambio, la *variable aleatoria continua* está contenida en un intervalo de número reales. La principal variable aleatoria continua es la distribución normal, que es representada por medio de la famosa campana de Gauss.

El segundo referente del MER, son las ocho prácticas científicas de Osborne (2014), prácticas que fueron incluidas, en su conjunto, en las guías creadas en este Seminario de Grado.

3.4 La enseñanza de las ciencias y las prácticas científicas de Osborne

Osborne (2014) propuso para la enseñanza de la ciencia el desarrollo de ocho prácticas científicas con el objeto de reproducir en el aula la forma cómo trabajan los y las científicos. Estas prácticas son las siguientes:

1. Hacerse preguntas y definir problemas. Es el punto de partida, ya que haciendo preguntas permite el avance de la ciencia o (investigación científica). Las preguntas planteadas por los estudiantes aclaran el conocimiento previo de los estudiantes (concepciones alternativas) y permite enfocar al desarrollo del conocimiento.
2. Desarrollar y usar modelos. Consiste en la elaboración de representaciones físicas, tangibles o esquemáticas que permiten estudiar cosas demasiado grandes como los volcanes y los planetas; y tan pequeñas como el átomo.
3. Construir explicaciones y diseñando soluciones. Esta práctica se interrelaciona con la anterior, ya que es necesario un modelo para poder explicar un fenómeno.
4. Participar con argumentos basados en pruebas. Consiste en la búsqueda de evidencias para fundamentar.
5. Planificación y realización de investigaciones: Se pide a los alumnos que realizan pesquisas y tratan de refutar o validar una hipótesis.
6. Analizar e interpretar datos. La observación e investigación producen datos, que deben representarse mediante gráficos, funciones para interpretar el o los modelos.
7. Usar matemática y pensamiento computacional. La medición es la base de la ciencia y los datos obtenidos son sometidos a los análisis matemáticos y algoritmos dependiendo de las variables que se tienen.
8. Obtener, evaluar y comunicar conocimientos. Un punto importante de hacer ciencia es comunicarla, por lo que existen cinco actividades comunicativas para la ciencia que son: escribir ciencia, hablar ciencia, leer ciencia, hacer la ciencia y la representación de ideas científicas utilizando un lenguaje académico y científico.

Estas prácticas fueron consideradas en el diseño de las sesiones creadas en coherencia con lo que señalan los estándares de la profesión docente (MINEDUC, 2021a).

- En la sesión 1 se desarrollan las prácticas científicas números 1, 3, 6 y 2, ya que se preguntan acerca del riesgo que tiene una persona de padecer hipertensión arterial y para ello, se les pide a los estudiantes que tomen datos, los analicen y modelen además los tipos de sangre. Oportativamente desarrollan la práctica científica Número 7 ya que pueden elaborar

un programa computacional para resolver la situación planteada (riesgo de la persona de sufrir hipertensión arterial)

- En la sesión 2 a los estudiantes se les presenta un desafío que consiste en encontrar el número máximo de patentes que se pueden hacer recurriendo a herramientas como el diagrama de árbol (práctica número 1) Para ello desarrollan y usan modelos para saber el número de patentes que se pueden fabricar (Práctica 2).
- En la Sesión 3 “Efecto de la radiación de la Tierra”. Analiza información para resolver un problema como es analizar si el incremento del CO₂ en qué porcentaje aumentó el cambio climático en un periodo determinado (Prácticas 1, 4, 5 y 6) busca evidencias y comunica los efectos del cambio climático (Práctica 8) a sus pares.

Para desarrollar la última práctica científica de Osborne relacionada con la comunicación de la ciencia (obtener, evaluar y comunicar conocimientos) tanto oral como escrita se propone a los/as estudiantes la elaboración de un poster científico. Entendiendo que un poster es un instrumento de comunicación que transmite de forma clara, concisa y permanente su contenido, sin la fugacidad de una exposición oral. Sus ventajas son:

- Se puede leer, analizar y estudiar el contenido cuando quiera y por el tiempo que estime conveniente,
- La representación pictórica y gráfica puede facilitar la comprensión del contenido a transmitir ya que es más fácil recordar o retener imágenes que una exposición oral,
- Permite elaborar una presentación de un trabajo de forma rigurosa, pero simultáneamente, amena y atractiva.

Las recomendaciones para su realización son:

- Tener en consideración el texto, tablas, figuras e imágenes a incluir en el poster,
- Incluir título, los autores, introducción, metodología, resultados, conclusiones y referencias bibliográficas,
- Utilizar con eficacia los recursos visuales,
- Cuidar redacción y ortografía,
- Vigilar que toda la información incluida coincida,
- Toda información que no sea importante o relevante no debe incluirse en el poster.

3.5.- Estándares disciplinarios de Matemática para Educación Media

La propuesta también considera las exigencias ministeriales referentes a los estándares de la profesión docente en el área de matemática en educación media. (MINEDUC, 2021b)

Las sesiones de la propuesta consideran los estándares C (Probabilidades y estadística) y F (Habilidades y actitudes matemáticas).

A continuación, el detalle de cada estándar:

Estándar C: Probabilidades y Estadística

Conocimiento disciplinar

- 2.- Vincula la estadística descriptiva y la inferencial, usando los datos como evidencia, generalizando más allá de la descripción de los datos, y expresando conclusiones con cierto grado de incertidumbre para conectar con la inferencia formal*
- 5.- Determina los principios básicos del cálculo de probabilidades a partir de experimentos aleatorios y estudia el desarrollo de modelos de probabilidad, distinguiendo cualitativamente la probabilidad teórica y la experimental.*
- 6.- Utiliza el principio multiplicativo para desarrollar técnicas de conteo de resultados de experimentos aleatorios simples y compuestos, como permutaciones, combinaciones y variaciones, y los aplica para el cálculo de probabilidades.*
- 8.- Define variables aleatorias y las utiliza para modelar fenómenos aleatorios (...) y evalúa la pertinencia del modelo en situaciones de índole social, cultural o científica.*
- 11.- Comprende el potencial de la Probabilidades y Estadística como herramienta para estudiar fenómenos naturales y sociales, y como por ejemplo de la estrecha relación entre la matemática y las otras áreas del conocimiento.*

Didáctica disciplinar

- 14.- Planifica unidades didácticas que promueven la resolución de problemas estadísticos con un uso de herramientas digitales, en el marco de situaciones relevantes de la vida social, cultural y científica, para fomentar el ejercicio de una ciudadana informada y crítica que toma decisiones basados en evidencias.*
- 15.- Formulan preguntas a sus estudiantes para que discutan y contrasten en grupo pequeño las concepciones teórica y experimental de probabilidad a través de medios concretos y simulaciones computacionales, e incentiva la participación de todos sus estudiantes en la puesta en común.*

Estándar F: Habilidades y Actitudes Matemáticas

Conocimiento disciplinar

- 1.- *Modela fenómenos sociales y naturales a través del planteamiento de preguntas, la definición de variables, la resolución de problemas, y el análisis e interpretación de sus resultados frente a dichos fenómenos.*
- 2.- *Modela fenómenos estadísticos que consideren contextos de interés de sus estudiantes, planteando preguntas, recopilando datos para analizarlos y obtener una respuesta, interpretándola frente a la pregunta original, y atendiendo a la variabilidad de los datos.*
- 5.- *Comunica sus ideas matemáticas de forma coherente, efectiva y con un lenguaje matemático claro, en forma escrita y oral, ante diversas audiencias.*
- 7.- *Crea y edita contenidos para promover el aprendizaje de la matemática a través de proyectos en ambientes digitales con distintos formatos: texto, imagen, multimedia, página web, etc.*
- 9.- *Mantiene altas expectativas sobre el aprendizaje matemático de todos/as sus estudiantes, desestimando prejuicios o sesgos sobre la capacidad que tendrían algunos grupos de personas para aprender matemática, y proponiendo acciones para generar una cultura escolar inclusiva.*

Didáctica disciplinar

- 14.- *Promueve interacciones entre estudiantes, grupos y el curso completo mediante preguntas efectivas, para que sus estudiantes analicen y evalúen las ideas y argumentos matemáticos de sus pares, y estimulen su razonamiento.*
- 15.- *Valora las diversas respuestas de sus estudiantes y utiliza el error como parte de las actividades del aprendizaje y del proceso de creación de conocimiento matemático, generando oportunidades para descubrirlos y corregirlos.*
- 16.- *Retroalimenta de manera efectiva a sus estudiantes a partir del análisis de sus respuestas en la resolución de problemas, informándoles con claridad lo que se espera de su aprendizaje matemático, sin sesgos de género, cultura, etnia o nivel socioeconómico.*

4. Diseño de la Estrategia Educativa

El diseño de la propuesta educativa es consistente con el sustento teórico del enfoque denominado CTSA (Ciencia, Tecnología, Sociedad y Medio Ambiente) de la OEI (Organización de los Estados Iberoamericanos), puesto que se pretende, que los y las estudiantes desarrollen actitudes y hábitos de trabajo colaborativo, en base a una propuesta de resolución de problemas interdisciplinaria, con el objetivo de que los y las estudiantes analicen el impacto del desarrollo de la ciencia, y la tecnología en la sociedad y el medio ambiente.

En particular, en este Seminario de Grado se ha utilizado lo que se denomina *injeritos CTSA* apoyado por actividades inspiradas en la metodología aprendizaje basado en la resolución de problemas (Abp).

Con estos referentes se construyen las tres guías cuyo contenido matemático y las prácticas científicas asociadas, se resumen en el cuadro siguiente:

Sesión	Objetivos
Sesión 1: La sangre	Al finalizar la sesión aplicaran el principio multiplicativo, la regla de Laplace, probabilidad y variables aleatoria para resolver y reflexionar sobre problemas vinculados con la sociedad cívica y social.
Sesión 2: El orden de las cosas	Al finalizar la sesión aplicaran los conceptos de permutación y combinatoria para resolver y reflexionar sobre problemas vinculados con la sociedad cívica y social.
Sesión 3: Efecto de la radiación en La Tierra	Mediante el trabajo en equipo, los estudiantes consolidarán contenidos de probabilidad clásica, para tomar conciencia sobre los efectos del cambio climático y de algunas de sus consecuencias.

Tabla 2 Objetivos por sesión de la propuesta

Las leyes, principios y funciones matemáticas que se requieren para resolver las guías, se presentan, en detalle, en el Anexo C.

En el caso de la propuesta educativa desarrollada en este Seminario de Grado, se presentan problemas auténticos relacionados, por ejemplo, con grupos de sangre, cáncer de piel por radiación, aumento del parque automotriz y la elaboración de patentes; conformación de diversos equipos de futbol y otros que más adelante se presentan.

Los conocimientos que se estiman como “modelos iniciales” para una favorable ejecución de la propuesta son

Sesión 1

- Operatoria en números reales
- Intervalos en números reales
- Razones, proporciones y porcentajes
- Unidades para medir presión (Física)

Sesión 2:

- Operatoria en los números reales
- Razones, proporciones y porcentajes
- Función lineal
- Razonamiento inductivo
- Manejo de Excel

Sesión 3:

- Operatoria en los números reales

En este contexto, esta propuesta puede ser trabajada según la línea temporal que se muestra en la figura 4.

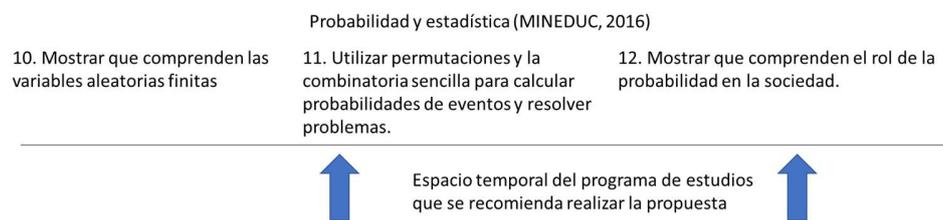


Figura 4 Espacio temporal entre dos objetivos de aprendizaje que se recomienda realizar la propuesta

4.1. Sesiones construidas

Este Seminario de Grado, coherente con sus referentes teóricos y metodológicos, diseñó y construyó tres sesiones de trabajo de 90 minutos aproximadamente para los y las estudiantes con sus correspondientes orientaciones al docente, que respetan los Objetivos de Aprendizaje de las bases curriculares de MINEDUC (2016).

El diseño de las sesiones abordó algunos contenidos de las disciplinas Estadística y Probabilidad con foco en esta última, para estudiantes de 2^{do} medio, a través de situaciones problemáticas contextualizadas como las siguientes:

Sesión 1: La sangre

Sesión 2: El orden de las cosas

Sesión 3: Efecto de la radiación en la Tierra

El material con las principales actividades que se desarrollan en cada una de ellas, sus objetivos de aprendizaje e indicadores de logro se presentan a continuación. Se agrega además una mirada transversal del abordaje de la estadística y probabilidad en los distintos niveles según las BBCC de MINEDUC (2016) y su referencia a los estándares declarados para las carreras de pedagogía en educación media (MINEDUC, 2021b)

Sesiones elaboradas para 2 ^{do} medio.	1: La sangre.	2: El Orden de las Cosas.	3: Efecto de la radiación en la Tierra
Contenidos	Principio multiplicativo, permutación y variable aleatoria.	Variación y combinación.	Probabilidad.
Actividad principal	Estudio de los distintos grupos de sangre en humanos y formación de minutas con diversas legumbres.	Producción de patentes y elaboración de alimentos.	Factores que intervienen en el cáncer de piel: Cifras y Estadística.
Objetivos de Aprendizaje de 2do medio (MINEDUC, 2016)	N°11: Utilizar permutaciones y combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.	N°11: Utilizar permutaciones y combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.	Parte del N°12: Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad: - Revisando informaciones de medios comunicación. - Identificando suposiciones basadas en probabilidad. - Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.
Habilidades matemáticas (MINEDUC, 2016)	Resolver problemas	Resolver problemas	Argumentar y comunicar

Indicadores de logro	<ul style="list-style-type: none"> - Aplican el término "n!" en resolución de problemas azarosos. - Realizan permutaciones de hasta cinco elementos, con material concreto o pictóricamente. - Reconocen el patrón con el cual se aumenta el total de posibilidades si se agrega un elemento. 	<ul style="list-style-type: none"> -Aplican el término "n!" en resolución de problemas azarosos. -Resuelven problemas (...) de la vida cotidiana, aplicando combinatoria y permutaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> -Identifican artículos de diarios o revistas, cuyo contenido se relaciona con probabilidades. - Aplican las reglas multiplicativa, aditiva y de la combinatoria de probabilidades, para tomar decisiones que involucran frecuencias relativas de procesos de producción, de seguridad, etc. -Realización de un poster científico.
----------------------	--	---	---

Tabla 3 Relación entre los fines de la propuesta y lo que indica el MINEDUC (2016) (Elaboración propia).

Las orientaciones al docente se encuentran en el apartado 4.3.2. A continuación, se presenta la opinión de los y las expertos que permitió mejorar las guías.

4.2 Validación de la Propuesta Educativa

En primer lugar, señalar que, en la literatura se observa que el concepto de *experto* es bastante polisémico. Garrote y Rojas (2015) señalan que su correcta aplicación depende de los criterios de selección y del número adecuado de los mismos. En nuestro caso, se definió el perfil de experto para analizar las actividades de las cuatro sesiones a aquellos que, por un lado, representen a quienes aplicarían la propuesta (profesor de matemática de 2^{do} medio). Otro perfil es que su experticia fuese en estadística y probabilidad, otro especialista en educación y a la vez profesor del área, y cuidando el tema género también se seleccionó una profesora de matemática a nivel universitario y magister en el uso de tecnología. Sus perfiles se detallan más adelante.

Continúan los autores señalando que el juicio de expertos⁸ es un método de validación de un instrumento, una investigación o un material de enseñanza, por parte de personas de vasta trayectoria que emiten una información, evidencias o valoraciones, y puede, en ciertos casos, ser el único indicador de validez. si bien existen grados de subjetividad, las ventajas de usar esta metodología son principalmente:

- ya que producen una amplia y pormenorizada información del objeto en estudio
- dar validez y fiabilidad del instrumento en cuestión
- el número de evaluadores dependen de la cercanía y el contexto a que está sometido el autor del documento.

A continuación, se describen los perfiles de los expertos junto con sus opiniones.

⁸ Recuperado de https://www.nebrija.com/revista-linguistica/files/articulosPDF/articulo_55002aca89c37.pdf

4.2.1 Opinión de Expertos/a

La optimización de la propuesta educativa de este Seminario de Grado se realizó en base al juicio de cuatro expertos que, en adelante, se identificarán por las siglas JSAMG, HARCL, NPLI y CMZMA. Fueron escogidos de una muestra no probabilística seleccionada por conveniencia, por tener cercanía con estos profesionales de la educación.

A continuación, se hará una breve descripción de los perfiles de cada uno de ellos.

- 1) JSAMG: Profesor de Estado en Física y Matemática de la Universidad de Santiago y Magister en Educación de la Universidad de Chile. Realiza clases de Física en el colegio Royal American School.
- 2) HARCL: Profesor de Estado en Física y Matemática de la Universidad de Santiago. Candidato a Magister en Educación, realiza clases en colegio y en la Universidad.
- 3) NPLI: Profesora de Estado en Física y Matemática de la Universidad de Santiago. Realiza clases en el colegio José Victorino Lastarria de ambas asignaturas, en los niveles séptimo y octavo año, y además en enseñanza media.
- 4) CMZMA: Profesora de Educación Matemática y Computación de la Universidad de Santiago y Master of Arts of Education, NMSU. Realiza clases en la Universidad de Santiago y es asesora pedagógica en colegios.

A continuación, se presentan las valoraciones positivas y negativas de los expertos que permitieron su refinamiento.

El primer experto, JSAMGE expresa lo siguiente:

Fortalezas de la propuesta:

- Valida la contextualización de la guía de trabajo 0 con genética.
- Uso de tecnologías de la información como, por ejemplo, código QR.
- Uso de póster como herramienta de síntesis.
- Uso del Kino como fuente de problemas.

Debilidades de la propuesta:

- Sugiere aumentar preguntas exploratorias.
- Explicitar nivel, asignatura, unidad de trabajo y metodología cada guía de trabajo.
- Existen ambigüedades en algunas actividades.
- Es necesario revisar la redacción, por ejemplo, las preguntas deben estar en plural debido a que se trabaja en equipo y mantener coherencia en la numeración de las actividades.

El segundo experto, HARCL, expresa los siguientes comentarios generales:

- Sugiere realizar guía de trabajo con indicaciones al docente.
- Incluir conceptos relevantes dentro de las guías, ya que no se logra entender el contexto de trabajo.

- Mejorar la redacción de las guías.
- Disminuir la cantidad de símbolos, ya que tienden a confundir.

El tercer experto, NPLI realizó los siguientes comentarios:

- No se explica al estudiante cómo calcular probabilidades.
- En general, no se formaliza los contenidos a abordar.
- Faltan explicaciones para la elaboración de afiche y debate.
- Los cuadros verdes son innecesarios. Las figuras no aportan nada a la guía.
- Aprueba el uso de exposición de sus resultados, pero duda que alcance a realizarlo en la hora de clase.
- No encuentra necesaria las lluvias de ideas.

La cuarta experta, CMZMA realizó los siguientes comentarios:

- Aparecen preguntas descontextualizadas entre sí.
- No se ve reflejado en las preguntas, el desarrollo del razonamiento y búsqueda de modelos.
- Existe problema de redacción.

El detalle de sus opiniones se encuentra en el Anexo A y una representación de ellas, se presenta a continuación.

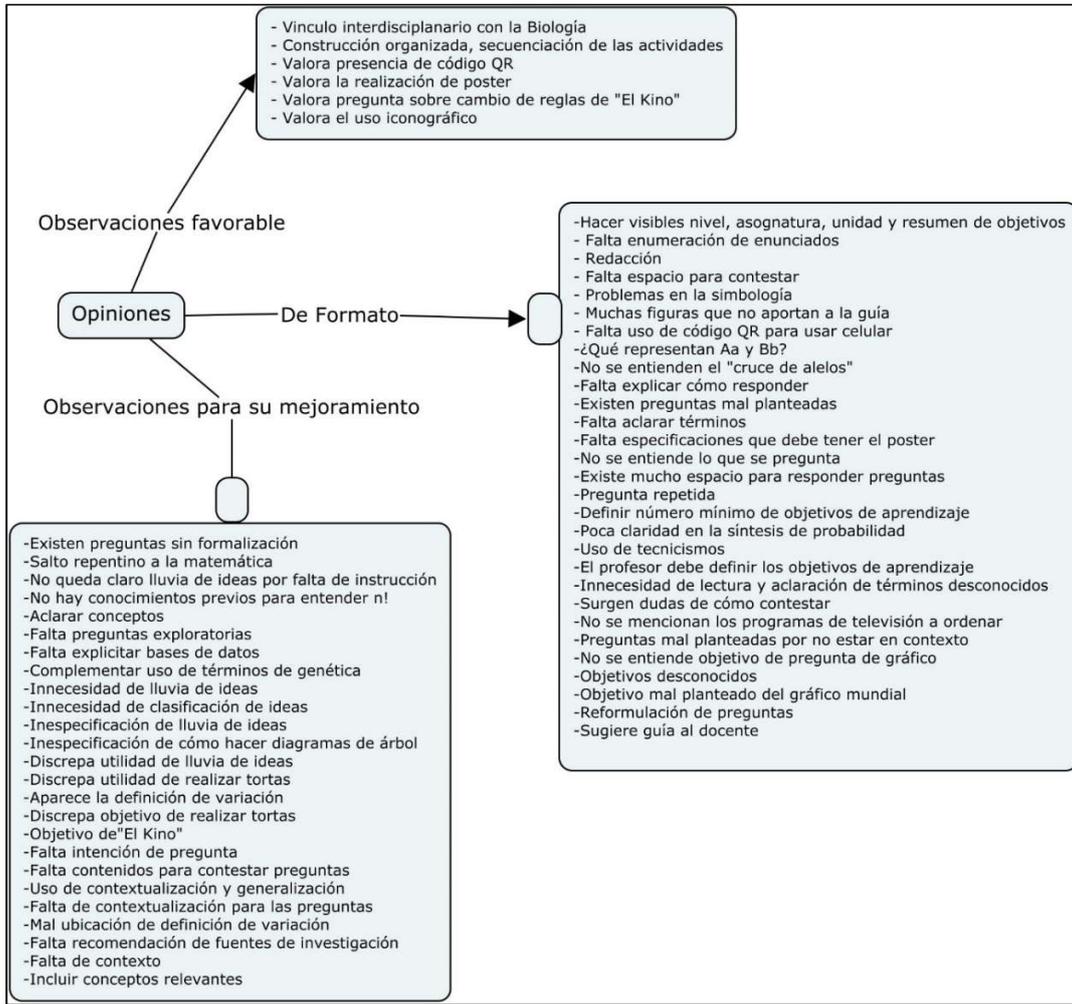


Figura 5 Opiniones de los expertos validadores a la propuesta inicial

Por tanto, las *valoraciones favorables* que destacan el conjunto de los expertos a la propuesta educativa son las siguientes:

- a) Interdisciplinariedad de la propuesta.
- b) Contextualización y extrapolación a situaciones de mayor envergadura.
- c) Uso de recursos TIC.
- d) Desarrollo de competencias como el trabajo colaborativo, la comunicación oral de sus resultados a sus pares.

Las sugerencias de estos expertos para el mejoramiento del conjunto de la propuesta educativa se refieren, principalmente, a los siguientes aspectos:

- a) Asegurar los conocimientos previos necesarios de la propuesta educativa.
- b) Formalizar, en lenguaje matemático, conceptos claves.
- c) La metodología ABp no es del todo coherente con las actividades propuestas.
- d) Incorporar algunas preguntas de carácter exploratorio.
- e) Algunas actividades requieren mayor contextualización además de declarar el nivel, objetivos, unidad de enseñanza media seleccionada.
- f) Mejorar la redacción de ellas para aclarar las preguntas.
- g) Mejorar la simbología (íconos excesivos).
- h) Mejorar y agregar más recursos digitales como códigos QR, links y otros.
- i) Cuidar el tiempo de la propuesta educativa.

4.2.2. Optimización de la secuencia de actividades

A la luz de la opinión de los expertos, los cambios realizados para optimizar la secuencia de actividades son los siguientes:

Opinión de expertos recogidas	Cambio realizado	Razón del cambio
<i>Cuidar el tiempo de la propuesta educativa.</i>	Disminución de cinco a tres Guías.	Se eliminó la Guía N° 0 con los conocimientos previos de biología (genética) ya que, según las BBCC de MINEDUC (2015), se veían simultáneamente con los de estadística y probabilidad. Por tanto, para no correr este riesgo que detectaron los expertos, se cambió el tema de genética a análisis de grupos de sangre, donde los conocimientos de biología se integraron a la nueva actividad de la Guía N°1: La sangre.
<i>Incluir conceptos relevantes</i>	Adición y reubicación de contenidos del eje "Probabilidad y Estadística".	Se reubicaron los contenidos en función a las temáticas de cada sesión
<i>La metodología Abp no es del todo</i>	Revisión del enfoque	Se ajustó el marco metodológico recogiendo esta observación de los expertos, lo que implicó revisar el conjunto de las guías y de ahí se concluyó que su

<i>coherente con las actividades propuestas.</i>	metodológico de las guías.	paradigma y enfoque era coherente con injerto CTSA apoyado con ABp (aprendizaje basado en problemas). Esto significó cambios de varias actividades en las guías.
--	----------------------------	--

Tabla 4 Cambios a las sesiones según los resultados de la validación de expertos

Además, se corrigió la numeración de las actividades, se mejoró tanto el formato (eliminando íconos) como la redacción y se declararon los objetivos en cada sesión. Por otra parte, para ser consistente con el enfoque CTSA y la educación en valores se eliminó la actividad con juegos de azar como la del problema del Kino.

A continuación, se especifican los cambios en cada sesión:

Sesión 1: “La sangre”

- Cambio de tópico interdisciplinario: de genética a tipos de sangre.
- Se agregó principio multiplicativo y permutación.
- Disminución de su extensión.
- Adición de QR para invitar a familiares de alumnos a donar sangre.
- Se sustituyeron dos actividades por una que muestra la compatibilidad de los distintos tipos de sangre y otra que induce a ordenar alimentos para formar diversos menús.
- Se analizó la coherencia con enfoque CTSA y educación STEM integrada.

Sesión 2: “El orden de las cosas”

- Se cambiaron a temas interdisciplinarios como son formación de PPU (placa patente única) para vehículos
- Actividad coherente con enfoque CTSA

Sesión 3 “Efecto de la radiación en La Tierra”

- Se agregó el cálculo de probabilidades.
- Se sustituyó por un tema interdisciplinario el cambio climático
- Se agregaron códigos QR para acceder a textos claves de la Guía que tratan el cambio climático.
- Se solicita a los alumnos una reflexión sobre el cambio climático.
- Actividad coherente con enfoque CTSA.

4.3 Propuesta educativa optimizada con orientaciones al docente

A continuación, se presentan las guías corregidas con las orientaciones al o la docente.

Sesión 1: La Sangre
Integrantes:



Objetivo: Al finalizar la sesión aplicaran el principio multiplicativo, la regla de Laplace, probabilidad y variables aleatoria para resolver y reflexionar sobre problemas vinculados con la sociedad cívica y social.



La sangre es un tejido vivo líquido que recorre nuestro cuerpo a través de arterias, venas y vasos capilares. Está compuesto por dos fases: sólida que incluyen a los glóbulos rojos (eritrocitos), glóbulos blancos (leucocitos) y las plaquetas; y la fase líquida formada por el plasma sanguíneo.

Sus funciones son varias como el transporte de nutrientes, oxígeno, hormonas, enzimas, desechos y dióxido de carbono. Además, la sangre participa en la defensa ante infecciones, en la coagulación y cicatrización.

En casos de urgencia, como una operación quirúrgica, puede ser necesario una transfusión de sangre, pero hay de distintos tipos, además, no todos los tipos de sangre son compatibles entre sí, debido a la presencia de anticuerpos específicos que los diferencian, algunos con mayor frecuencia que otros. Por ende, se hacen campañas de recolección de sangre para aumentar su stock y así salvar vidas. Solo con la donación de 450 mL se puede llegar a salvar hasta tres personas.

En los hospitales, se clasifican los pacientes de acuerdo con su tipo de sangre.

El tipo de sangre está formado por un grupo o, también llamado antígeno, y un factor. Los grupos o antígenos de sangre pueden ser: (O) que no presenta antígenos, la presencia de un antígeno (A) o (B) o la presencia de ambos (AB). Si agregamos el factor de sangre éste puede ser positivo (+) o negativo (-).

Un factor importante por considerar de nuestro estado de salud es la presión arterial, que se define como la fuerza que ejerce sobre las paredes al empujar las arterias y vasos sanguíneos. Se cuantifica utilizando dos números, como por ejemplo 115/77 mmHg. La primera cifra denominada sistólica corresponde cuando el corazón late, y el segundo número se llama diastólica es cuando el corazón descansa entre latidos.

CATEGORÍA DE LA PRESIÓN ARTERIAL	SISTÓLICA mm Hg (número de arriba)		DIÁSTÓLICA mm Hg (número de abajo)
NORMAL	MENOS DE 120	y	MENOS DE 80
ELEVADA	120-129	y	MENOS DE 80
PRESIÓN ARTERIAL ALTA (HIPERTENSIÓN) NIVEL 1	130-139	o	80-89
PRESIÓN ARTERIAL ALTA (HIPERTENSIÓN) NIVEL 2	140 O MÁS ALTA	o	90 O MÁS ALTA
CRISIS DE HIPERTENSIÓN (consulte a su médico de inmediato)	MÁS ALTA DE 180	y/o	MÁS ALTA DE 120

La hipertensión es una enfermedad silenciosa porque no presenta síntomas, por eso es importante controlarse. A continuación, se adjunta una tabla que muestra los distintos estados de la presión arterial. Es importante controlarse si tiene parientes con presión alta, diabetes, obesidad, colesterol alto, sedentarismo o tabaquismo. Estadísticas chilenas mencionan que el 44% de la población adulta entre 45 y 64 años son hipertensos, al igual que el 75% de población mayor de 65 años.

Fuente: [¿Qué es la presión arterial alta? \(heart.org\)](http://heart.org)

Por la creación de un sistema informático de salud, se vincula un estado de salud un número que cuantifica la gravedad que tiene el paciente cuando va a un centro asistencial.

Por la creación de un sistema informático de salud, se vincula un estado de salud un número que cuantifica la gravedad que tiene el paciente cuando va a un centro asistencial.

Estado de Salud	Cuantificador de Emergencia
Normal	0
Elevada	1
Hipertensión nivel 1	2
Hipertensión nivel 2	3
Crisis de Hipertensión	4

Actividad 1

¿Qué plan de trabajo utilizarían para determinar cuáles son los posibles resultados al combinar estas dos informaciones?

Realicen su plan de trabajo

¿Qué les permitió hacer la técnica utilizada? ¿Y qué no?

Se puede calcular cuántas pares posibles considerando una de cada característica

¿Permitió simplificar los cálculos el uso de multiplicación para calcular el número de opciones?

Si se identifica el grupo de sangre y el cuantificador de emergencia, ¿Qué valores puede tomar esta última variable?

¿Qué rango de presión arterial posee un paciente con grado de emergencia 2?

Actividad 2.

Responda las preguntas que van a continuación.

Si poseo las siguientes presiones, a qué grupo de riesgo pertenecen los pacientes y su cuantificador de emergencia

- a) 123/79
- b) 132/84
- c) 111/78
- d) 142/91

Desde el punto de vista médico, averigüen algunos de los síntomas que muestra la hipertensión

¿Cuáles son los factores de riesgo para la hipertensión?

Sabiendo que 2.160.000 personas son mayores de 65 años, ¿cuántos poseen hipertensión? Puede ser útil recordar el procedimiento de la regla de tres para calcular el dado pedido.

$$\frac{X\%}{100\%} = \frac{N^\circ \text{ de personas que tienen la condición}}{\text{Total de personas}}$$

¿Qué indicaciones se deben tomar para evitar la hipertensión arterial?



Si desea informar a sus parientes sobre la donación de sangre, escaneen el siguiente código QR.

Actividades de toma de decisiones

Al aumentar la edad, aumenta la probabilidad de padecer hipertensión. ¿Qué puedes hacer para bajar esa probabilidad? Justifica tu respuesta.

¿Cómo incentivarías la donación de sangre? ¿Qué consecuencias traería? ¿Qué políticas públicas se pueden tomar?

Sesión 2: El orden de las cosas.

Integrantes:



Objetivo: Al finalizar la sesión aplicaran los conceptos de permutación y combinatoria para resolver y reflexionar sobre problemas vinculados con la sociedad cívica y social.

El crecimiento explosivo del parque automotriz en Chile ha aumentado considerablemente. Cerca de 421 mil vehículos se sumaron al año 2018. Si se mantiene el ritmo ¿Cuándo se deberá cambiar el criterio para formar las placas patentes únicas (PPU)?



Actualmente, el formato de las patentes es LLLL- NM, en donde las L representan letras del siguiente conjunto: B, C, D, F, G, H, J, K, L, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z. El motivo por los cuales no se utilizan otras letras son: confusión de letras como por ejemplo N y Ñ, la vocal O y el cero 0. En los números N toma valor entre 1 y 9; en cambio M puede tomar, además, el cero.

En el caso de las motocicletas, utilizan el patrón LLL-NM, utilizando las mismas letras y números tal como se menciona en el caso de los automóviles. Cabe recordar que estos vehículos solamente utilizan patente trasera.



Actividad 1: Se sugiere que primero analicen posibles estrategias para conocer cuándo se deberá cambiar el criterio señalado para formar las PPU.

A continuación, pueden apoyarse siguiendo las siguientes preguntas.

¿Qué plan de trabajo decidieron realizar? Describan las fases para cada caso.

¿Cuántas PPU para motos y vehículos motorizados se pueden formar?

¿Cómo lo has hecho? ¿Qué estrategias has usado?

¿Es posible representar esto en un diagrama de árbol? ¿Cuáles serían las ventajas y desventajas al recurrir a esta estrategia?

Si se mantiene el ritmo de crecimiento del parque automotriz, ¿cuánto tiempo durará este criterio de formación de patentes?

¿Qué consecuencias trae el aumento del parque automotriz?

Actividad 2 ¿Cuál creen ustedes que es el patrón o modelo que rige el ordenamiento de n elementos?

Se sugiere que decidan en grupo cuál es la estrategia que van a usar, por ejemplo, modelar con lápiz y papel partiendo de dos elementos cualquiera o con los recursos tangibles como las legumbres tal como se señala a continuación. Seleccionando ustedes mismos el número de legumbres que van a usar para obtener el patrón.

Se requiere disponer de la siguiente cantidad de legumbres por grupo, tales como:

- Un grano de arroz
- Una lenteja
- Un poroto
- Un garbanzo
- Una arveja

Consideren para esta experiencia, un grano de arroz y una lenteja y pregúntense por ejemplo lo siguiente:

Si se considera el orden, ¿de cuántas formas se pueden ordenar estos dos elementos?

Si se agrega un poroto, ¿cómo ordenarían los tres alimentos? Realicen un plan de trabajo. ¿Cuántas formas surgen al ordenar estos alimentos?, ¿cómo relacionarían el número obtenido con respecto al anterior?

Si se agrega un garbanzo, ¿Cómo ordenaría los cuatro alimentos? Realicen un plan de trabajo
¿Cuántas formas surgen al ordenar estos alimentos? ¿Cómo relacionaría el número obtenido con respecto al número anterior? Existe un patrón

Al ordenar los cinco elementos, ¿encontraron un patrón? ¿podrían calcularlo?

Lleguen a un consenso en su grupo

Formalicen sus conocimientos con ayuda del docente y comuníquenselo a sus pares

¿El uso de la notación factorial sirvió o no? Fundamenten su respuesta

En un grupo de siete personas formadas por 3 mujeres y 4 hombres se deben ordenar en una fila. ¿De cuantas personas se pueden ordenar si las mujeres tienen que estar juntas, al igual que los hombres?

¿Sirvió utilizar la notación factorial? ¿Qué facilitó y que dificultó en el proceso?

Existe una aproximación a $n!$ denominada aproximación de Stirling para factoriales que dice que para factoriales mayores la función $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$
Utilizando software como Excel o una calculadora científica y complete la siguiente tabla.

Factorial	Valor real	Valor obtenido por Aproximación por Stirling	Error porcentual
1!			
2!			
3!			
4!			
5!			
6!			
7!			
8!			
9!			
10!			
11!			
12!			
13!			
14!			
15!			
16!			
17!			
18!			
19!			
20!			

En un salón hay 6 docentes y cuatro sillas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

¿Se facilitó el cálculo mediante el uso de la notación factorial?

¿De cuantas maneras se pueden elegir 4 dulces de un total de 7?

Actividades de toma de decisiones

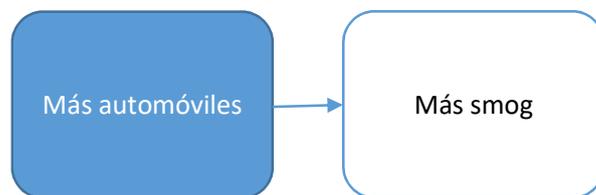
¿Qué pasaría con el aumento del parque automotriz con respecto a las patentes? Justifica tu respuesta

¿Qué hacer cuando se acaben las patentes?

¿Qué criterios usarías para generar nuevas patentes?

¿Qué me hace ser más responsable y solidaria cuando adquiera un nuevo vehículo?

Realice un diagrama de árbol que muestre cada consecuencia de cada acto. Te muestro un ejemplo.



Sesión 3: Efecto de la radiación en la Tierra

Integrantes:



Objetivo: Mediante el trabajo en equipo, los estudiantes consolidarán contenidos de probabilidad clásica, para tomar conciencia sobre los efectos del cambio climático y de algunas de sus consecuencias.

A continuación, se adjunta un cuestionario que tiene como objetivo conocer el estado actual de los conocimientos necesarios a tratar los temas en este documento.

Tabla Número 1: Determinación inicial de conocimientos para la sesión 3

	No lo sé	Creo que lo sé	Lo sé bien	Podría explicarlos a compañeros (as)
¿Conozco la diferencia entre tiempo y clima?				
¿Qué gases producen el efecto invernadero?				
¿Cómo se define el calentamiento global?				
¿Cómo ha contribuido el hombre al calentamiento global?				
¿Cuáles son las consecuencias del calentamiento global?				

Para acceder bibliografía en relación con los temas anteriormente consultados, acceda mediante la lectura del siguiente código QR



A continuación, se adjunta un extracto, que permitirá resolver las siguientes preguntas

El CO₂ que resulta de actividades humanas causa más del 65% del desbalance energético del planeta, por lo que es considerado el principal responsable del calentamiento global. El desbalance energético global ha aumentado más de 40% desde el año 1990, llegando a superar los 3 W/m²; el 80% de este incremento se debió al aumento de las emisiones de CO₂.

Actividad 3.1. Tomando conciencia del calentamiento global.

¿Cuál es la probabilidad de que el CO₂ haya incrementado el desbalance energético?

¿Cuál es la probabilidad que lo haya provocado otros gases?

¿Cuál es la probabilidad que el CO₂ que produce el efecto invernadero provenga del hombre?

Actividad 3.2. ¿Qué relación tiene la disminución del agujero de ozono, los gases efecto invernadero y la radiación UV en el cambio climático?

Se sugiere reflexionar en grupo acerca de la existencia o no de una relación entre las variables mencionadas y el aumento de cáncer de piel a partir de evidencias.

¿Qué juego debe cumplir la electricidad cuyo origen sea de fuentes limpias o renovables y no de fuentes contaminantes?

Actividad 3.3: Comunicar sus resultados

A continuación, deben exponer algunos de los conocimientos adquiridos mediante la elaboración de un poster, que formaran de una exposición ante los otros cursos con ayuda del docente de Artes Visuales. Para ello deberán asegurarse de que no coincidan con los temas. A continuación, se adjunta la rúbrica de evaluación del poster.

A continuación, se adjunta tabla para medir el avance del aprendizaje sobre el cambio climático.

Categoría	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Insatisfactorio	Puntaje
	4 puntos	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos	
Título	El título del poster es adecuado, sugerente y coherente con el tema		El título es adecuado y poco coherente con el tema.		No existe título	
Redacción y ortografía	No presenta errores de ortografía y redacción	Presenta un error ortográfico o de redacción	Presenta dos errores ortográficos o de redacción	Presenta tres errores ortográficos o de redacción	Presenta cuatro o más errores de redacción o de ortografía	
Contenido	La información es precisa y concisa usando palabras claves	La información presentada de forma precisa, pero no usa léxico adecuado	Presenta información relevante pero no es clara.	La información entregada es muy ambigua	No presenta contenidos	
Argumentación	Todos argumentos son conectados con el contenido y son convincentes	Argumentos más convincentes, pero falta algunas interrelaciones entre estos.	Presenta argumentos pocos coherentes e interrelacionados	Argumentación incompleta o poco persuasiva	No presenta argumentos convincentes	
Clima del equipo de trabajo en la exposición.	Favorece ambiente de respeto mutuo Escucha y respeta las opiniones de los integrantes en un ambiente calmo y constructivista	Se escuchan entre sí sus opiniones en un clima de aceptación y tranquilo pero sus ideas no están enlazadas.	Las opiniones son vagas y sin enlazar.	El equipo no considera las opiniones de sus integrantes	No se escuchan ni respetan las opiniones de otros. Los integrantes desarrollan conflictos entre sí y sin aportar soluciones a ello.	
Originalidad	Presenta un afiche creativo, único y poco convencional		Presenta novedades en la exposición del poster		No presenta novedades comparado con otros posters.	
Entrega a tiempo	Cumple con la fecha de entrega para elaborar la exposición		Entrega el poster en plena instalación de la exposición.		No entrega el afiche a la fecha pedida	
			Puntaje ideal	28	Puntaje obtenido	

Actividad de toma de decisiones.

Completa el diagrama según las consecuencias que trae cada tópico. Te muestro un ejemplo

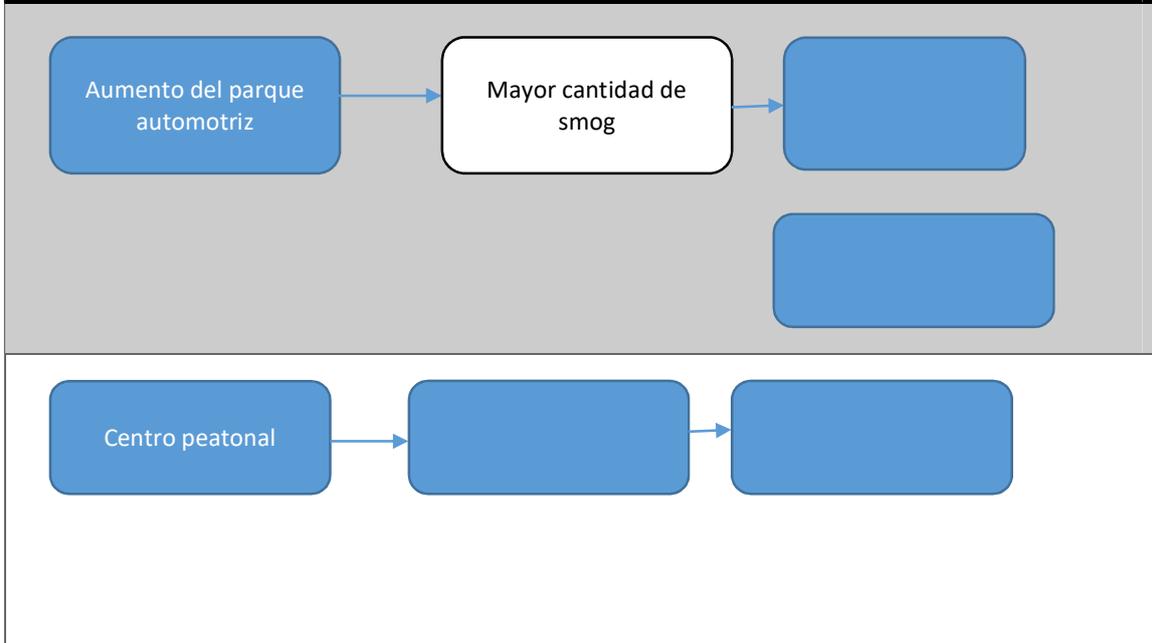


Tabla Número 2: Determinación inicial de conocimientos para la sesión 3

	No lo sé	Creo que lo sé	Lo sé bien	Podría explicarlos a compañeros (as)
¿Conozco la diferencia entre tiempo y clima?				
¿Qué gases producen el efecto invernadero?				
¿Cómo se define el calentamiento global?				
¿Cómo ha contribuido el hombre al calentamiento global?				
¿Cuáles son las consecuencias del calentamiento global?				

Sesión 3: Efecto de la radiación en la Tierra

Integrantes:



Objetivo: Mediante el trabajo en equipo, los estudiantes consolidarán contenidos de probabilidad clásica, para tomar conciencia sobre los efectos del cambio climático y de algunas de sus consecuencias.

A continuación, se adjunta un cuestionario que tiene como objetivo conocer el estado actual de los conocimientos necesarios a tratar los temas en este documento.

Tabla Número 1: Determinación inicial de conocimientos para la sesión 3

	No lo sé	Creo que lo sé	Lo sé bien	Podría explicarlos a compañeros (as)
¿Conozco la diferencia entre tiempo y clima?				
¿Qué gases producen el efecto invernadero?				
¿Cómo se define el calentamiento global?				
¿Cómo ha contribuido el hombre al calentamiento global?				
¿Cuáles son las consecuencias del calentamiento global?				

Para acceder bibliografía en relación con los temas anteriormente consultados, acceda mediante la lectura del siguiente código QR



A continuación, se adjunta un extracto, que permitirá resolver las siguientes preguntas

El CO₂ que resulta de actividades humanas causa más del 65% del desbalance energético del planeta, por lo que es considerado el principal responsable del calentamiento global. El desbalance energético global ha aumentado más de 40% desde el año 1990, llegando a superar los 3 W/m²; el 80% de este incremento se debió al aumento de las emisiones de CO₂.

Actividad 3.1. Tomando conciencia del calentamiento global.

¿Cuál es la probabilidad de que el CO₂ haya incrementado el desbalance energético?

¿Cuál es la probabilidad que lo haya provocado otros gases?

¿Cuál es la probabilidad que el CO₂ que produce el efecto invernadero provenga del hombre?

Actividad 3.2. ¿Qué relación tiene la disminución del agujero de ozono, los gases efecto invernadero y la radiación UV en el cambio climático?

Se sugiere reflexionar en grupo acerca de la existencia o no de una relación entre las variables mencionadas y el aumento de cáncer de piel a partir de evidencias.

¿Qué juego debe cumplir la electricidad cuyo origen sea de fuentes limpias o renovables y no de fuentes contaminantes?

Actividad 3.3: Comunicar sus resultados

A continuación, deben exponer algunos de los conocimientos adquiridos mediante la elaboración de un poster, que formaran de una exposición ante los otros cursos con ayuda del docente de Artes Visuales. Para ello deberán asegurarse de que no coincidan con los temas. A continuación, se adjunta la rúbrica de evaluación del poster.

A continuación, se adjunta tabla para medir el avance del aprendizaje sobre el cambio climático.

Categoría	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Insatisfactorio	Puntaje
	4 puntos	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos	
Título	El título del poster es adecuado, sugerente y coherente con el tema		El título es adecuado y poco coherente con el tema.		No existe título	
Redacción y ortografía	No presenta errores de ortografía y redacción	Presenta un error ortográfico o de redacción	Presenta dos errores ortográficos o de redacción	Presenta tres errores ortográficos o de redacción	Presenta cuatro o más errores de redacción o de ortografía	
Contenido	La información es precisa y concisa usando palabras claves	La información presentada de forma precisa, pero no usa léxico adecuado	Presenta información relevante pero no es clara.	La información entregada es muy ambigua	No presenta contenidos	
Argumentación	Todos argumentos son conectados con el contenido y son convincentes	Argumentos más convincentes, pero falta algunas interrelaciones entre estos.	Presenta argumentos pocos coherentes e interrelacionados	Argumentación incompleta o poco persuasiva	No presenta argumentos convincentes	
Clima del equipo de trabajo en la exposición.	Favorece ambiente de respeto mutuo Escucha y respeta las opiniones de los integrantes en un ambiente calmo y constructivista	Se escuchan entre sí sus opiniones en un clima de aceptación y tranquilo pero sus ideas no están enlazadas.	Las opiniones son vagas y sin enlazar.	El equipo no considera las opiniones de sus integrantes	No se escuchan ni respetan las opiniones de otros. Los integrantes desarrollan conflictos entre sí y sin aportar soluciones a ello.	
Originalidad	Presenta un afiche creativo, único y poco convencional		Presenta novedades en la exposición del poster		No presenta novedades comparado con otros posters.	
Entrega a tiempo	Cumple con la fecha de entrega para elaborar la exposición		Entrega el poster en plena instalación de la exposición.		No entrega el afiche a la fecha pedida	
			Puntaje ideal	28	Puntaje obtenido	

Actividad de toma de decisiones.

Completa el diagrama según las consecuencias que trae cada tópico. Te muestro un ejemplo

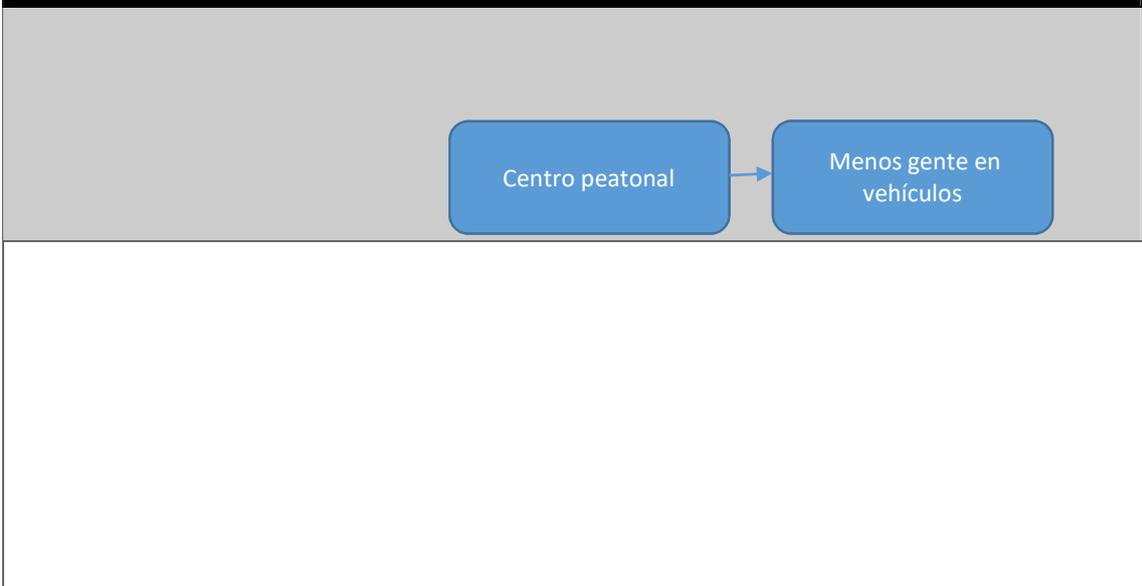


Tabla Número 2: Determinación inicial de conocimientos para la sesión 3

	No lo sé	Creo que lo sé	Lo sé bien	Podría explicarlos a compañeros (as)
¿Conozco la diferencia entre tiempo y clima?				
¿Qué gases producen el efecto invernadero?				
¿Cómo se define el calentamiento global?				
¿Cómo ha contribuido el hombre al calentamiento global?				
¿Cuáles son las consecuencias del calentamiento global?				

5. Reflexiones Finales

En primer lugar, los objetivos propuestos por este Seminario de Grado se cumplieron por el hecho que se crearon propuestas educativas relacionadas con estadística y probabilidad para segundo medio.

En segundo lugar, este Seminario de Grado se propuso desarrollar esta propuesta bajo el *enfoque CTSA y educación STEM integrada*. Para ello se integró conocimientos centrados en probabilidades y en base a resolución de problemas auténticos, relacionados con biología (grupos de sangre), salud (cáncer de piel), y otros.

La metodología de resolución de problemas, en base a *injertos CTSA*, permite trabajar con problemáticas auténticas con las/los estudiantes. Ello significa dedicar tiempo a la planificación docente, para pensar desafíos relevantes que motiven y logren el compromiso de los y las estudiantes por aprender, con el objeto de que sean ciudadanos informados con pensamiento crítico y sepan trabajar en equipos colaborativos.

Por lo anterior, este Seminario de Grado entrega herramientas al/la docente para el desarrollo del pensamiento crítico y trabajo colaborativo en sus estudiantes, a través de la unidad de probabilidad y combinatoria. Ello implica reconocer el valor de dedicarle tiempo a la planificación y la necesidad del trabajo colaborativo entre docentes (Domenech-Casal, Lope y Mora, 2019), que en este caso, se tradujo en un equipo docente conformado por los y las expertos/as, además de los profesores tutores y correctores.

En consecuencia, se plantean cuatro guías sobre Probabilidad, Combinatoria y Variable Aleatoria. Tópicos de Segundo Medio influido por la metodología del aprendizaje basado en problemas (Abp). Guías que fueron evaluadas por cuatro expertos, docentes con distintas trayectorias académicas con más de cinco años de experiencia docente, quienes revisaron los objetivos de las tres guías y su coherencia con el sustento teórico y metodológico, detectaron falencias y valoraciones que, en su mayor parte fueron acogidas, tal como se señala en el apartado 4.3.1.

Haber sometido esta propuesta educativa a la opinión de expertos permitió mejorarla y, a nuestro juicio, fomentar además una cultura que permita cambiar la clase tradicional expositiva con estudiantes receptivos donde se privilegia la memoria a innovar a clases donde los y las estudiantes desarrollan el pensamiento crítico, trabajan colaborativamente y argumentan en base a evidencias. Además, la propuesta deja abierta la posibilidad de fomentar el aprendizaje en base actividades sobre toma de decisiones. Este tipo de actividades, como por ejemplo el impacto de la donación de sangre, favorecen la adquisición de competencias clave para la solución de retos que involucra a la comunidad del alumnado. De esta forma el aula de matemáticas, en el ámbito de las probabilidades y estadística, puede promover el aprendizaje situado (López y otros, 2021) de forma concreta y explícita. Juicio que se sugiere ser sometido a investigación en otro Seminario de Grado.

Finalmente, futuros Seminarios de Grado en esta área podrían analizar nuevamente técnicas de conteo (permutación, variación o combinación), que permitan profundizar su estudio, integrando otras disciplinas del área STEM.

6 Bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación (2019). PISA 2018 Entrega de Resultados: Competencia Lectora, Matemática y Científica en estudiantes de 15 años en Chile
- Alsina, A. (2010). La pirámide de la educación matemática': una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. © *Aula de innovación educativa*, 2010, núm. 189, p. 12-16.
- Araneda, A., del Pino, G., Estrella, S., Icaza, G., y San Martín, E. (2011). Recomendaciones para el currículum escolar del eje Datos y Probabilidad. *Recuperado de <http://www.soche.cl/archivos/Recomendaciones.pdf>.*
- Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. En G. Bachelard, *La formación del espíritu científico*. México: siglo XXI.
- Batanero, C. (1997). Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. Investigación en el aula de matemáticas. *Estadística y Azar*, 1-17.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas interamericanas de enseñanza de la estadística*, 5-7.
- Cerezo, J. A. L. (1998). Ciencia, Tecnología y Sociedad: el estado de la cuestión en Europa y Estados Unidos. *Revista iberoamericana de educación*, 18, 41-68.
- Corbalán, F., y Sanz, G. (2011). *La conquista del azar. La teoría de probabilidades*. España: RBA Coleccionables, S.A.
- Couso, D. (2017). ¿Por qué estamos en STEM? Un intento de definir la alfabetización STEM para todo el mundo y con valores. *Ciències: revista del professorat de ciències de Primària i Secundària*, (34), 22-28.
- Del Puerto, S., y Seminara, S. (2010). Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la geometría analítica. *Premisa*, 44, 24-35.
- De Moivre, A. (1718). *The Doctrine of Chances; or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*.
- Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana (PEL)*, 49(1), 53-64.

- Domènech-Casal, J., Lope, S., y Mora, L. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos. *Revista Eureka Sobre Enseñanza Y Divulgación De Las Ciencias*, 16(2), 2203.
https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203
- Estrella, S., y Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. *Educación Estadística en América Latina*.
- Fernández, F., Soler, N., y Sarmiento, B. (2007). Alfabetización estadística y competencia estadística.
- Friedman, T.L. (2005). *The world is flat: A brief history of the twenty-first century*. New York, NY: Farrar, Straus, & Giroux
- Fischbein, H. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.
- Garrote, P. R., y del Carmen Rojas, M. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija de lingüística aplicada a la enseñanza de lenguas*, (18), 124-139.
- García Palacios, E.M, J.C. González G., J.A. López Cerezo, J. L. Luján, M, Martín Gordillo, C. Osorio y C. Valdés. (2001). *Ciencia, Tecnología y Sociedad: una aproximación conceptual*. Madrid: OEI.
- Guardiola, E. (2010). 11. El póster científico. *Quaderns de la Fundació Dr. Antoni Esteve*, 85-102.
- López Cerezo, Jose Antonio. (1998) *Ciencia, Tecnología y Sociedad: el estado de la cuestión en Europa y Estados Unidos*. Revista Iberoamericana de educación N°18
- Holmes, P. (2002). Some lessons to be learned from curriculum developments in statistics. In *Sixth International Conference on Teaching Statistics, CapeTown, South Africa*.
- López, L. F. Á., Llano, M. E., y Rojas, A. L. D. (2021). Práctica pedagógica y motivación desde el aprendizaje situado. Tesis psicológica: *Revista de la Facultad de Psicología*, 16(1), 9
- Martínez-Rojas, J. G. (2008). Las rúbricas en la evaluación escolar: su construcción y su uso. *Avances en medición*, 6(129), 38
- Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F.J., Vilchez-González, J.M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, 2019, 1-24.
<https://doi.org/10.1002/sce.21522>
- Ministerio de Educación. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en Educación Media*.

- Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación. (2019). *Proyecto STEM- Curriculum Nacional. Mineduc. Chile*. Obtenido de <https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-article-70749.html>
- Ministerio de Educación. (2021a) Marco de la Buena Enseñanza (MBE). <https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wpcontent/uploads/2021/08/MBE-2.pdf>.
- Ministerio de Educación. (2021b) Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática. <https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- Ossandón B (2007) *Reconstrucción de una experiencia curricular integradora de la enseñanza de la ciencia física*. Tesis para optar al grado de magister en educación UAHC. Santiago. Chile
- Osborne, J. (2014). Teaching scientific practices: Meeting the challenge of change. *Journal of Science Teacher Education*, 25(2), 177-196.
- Palm, T. (2008): "Impact of authenticity on sense making in word problem solving". *Educational Studies in Mathematics*, 67, 37–58
- Restrepo, L. F., y González, J. (2003). La historia de la probabilidad. *Revista Colombiana de Ciencias*
- Zollman, A. (2012). Learning for STEM Literacy: Stem literacy for learning. *School Science and Mathematics*, 112(1), 12-19.

ANEXO A GUÍAS DE TRABAJO ANTES DE LA OPTIMIZACIÓN

Guía de Matemática
Probabilidad y Genética **Tiempo: 90 minutos**

 Registren los integrantes del grupo: (mínimo 3 y máximo 5)

				
Este ícono muestra que deben trabajar en equipo	1.- Corresponde a la presentación de problemas	2.- Los estudiantes deben leer y aclarar las dudas que surgen tras la lectura de los problemas	3.- Los integrantes deben realizar una lluvia de ideas en busca de una solución a los problemas	4.- Clasifiquen sus preguntas según su pertinencia
				
5.- Definición de objetivos de aprendizaje	6.- Deben investigar para obtener información extra que les permitan resolver los problemas	7.- Registran los resultados obtenido por el grupo.	Recuerden trabajar en equipo, privilegiando un ambiente de respeto y de trabajo colaborativo para que cada uno aporte ideas y plasmén, en la guía, conclusiones grupales. Registren un coordinador que procurará de la participación de los integrantes y un relator que registrará los productos que surgirán de esta guía.	

PROBABILIDAD APLICADA EN LA GENÉTICA

Mendel realizó los primeros estudios genéticos en plantas.

El ADN de las células haploides de los padres es combinado en el proceso de meiosis produciendo la combinación genética (genotipo) que da origen a la expresión de los alelos de cada gen (fenotipo)

La combinación genética es representada en los cuadros de Punnett ¿Qué significa esto? Corresponde a una matriz que representa las distintas combinaciones genéticas que surgen tras separarse y combinarse los alelos de los padres.

En la genética clásica, la expresión de los caracteres, como, por ejemplo, del color de los ojos se clasifica, en dominantes y recesivo, es decir, si existe uno o los dos alelos dominantes, se reflejará esta característica. En ausencia de alelos dominantes, dicho de otra manera, la presencia de alelos recesivos implicará la expresión de un fenotipo recesivo.



Consideren el caso de padres heterocigotos, en relación al tamaño de sus dientes. Si se denota "T" a dientes grandes que es de tipo dominante y la notación "t" muestra dientes pequeños, el carácter recesivo. Si se reproducen teniendo hijos.

A continuación, se responderán, a modo de ejemplo, las siguientes preguntas

1.- ¿Cuál es la representación de un par de alelos que simboliza a padres heterocigotos en el tamaño de los dientes?

a) TT b) Tt c) tt

2.- ¿Qué genotipo produce como fenotipo dientes pequeños?

a) TT b) Tt c) tt

Guía de Matemática
Permutaciones Tiempo: 90 minutos



Registren los integrantes del grupo: (mínimo 3 y máximo 5)

<p>Este ícono muestra que deben trabajar en equipo</p>	<p>1.- Corresponde a la presentación de problemas</p>	<p>2.- Los estudiantes deben leer y aclarar las dudas que surgen tras la lectura de los problemas</p>	<p>3.- Los integrantes deben realizar una lluvia de ideas en busca de una solución a los problemas</p>	<p>4.- Clasifiquen sus preguntas según su pertinencia</p>
<p>5.- Definición de objetivos de aprendizaje</p>	<p>6.- Deben investigar para obtener información extra que les permitan resolver los problemas</p>	<p>7.- Registran los resultados obtenido por el grupo.</p>	<p>Recuerden trabajar en equipo, privilegiando un ambiente de respeto y de trabajo colaborativo para que cada uno aporte ideas y plasmen, en la guía, conclusiones grupales. Registren un coordinador que procurará de la participación de los integrantes y un relator que registrará los productos que surgirán de esta guía.</p>	



Cada grupo debe exponer sus resultados en una exposición de 5 minutos, exponiendo las distintas ordenaciones de programas y su método de organización.

Guía de Matemática
Variaciones Tiempo: 90 minutos



Registren los integrantes del grupo: (mínimo 3 y máximo 5)

<p>Este ícono muestra que deben trabajar en equipo</p>	<p>1.- Corresponde a la presentación de problemas</p>	<p>2.- Los estudiantes deben leer y aclarar las dudas que surgen tras la lectura de los problemas</p>	<p>3.- Los integrantes deben realizar una lluvia de ideas en busca de una solución a los problemas</p>	<p>4.- Clasifiquen sus preguntas según su pertinencia</p>
<p>5.- Definición de objetivos de aprendizaje</p>	<p>6.- Deben investigar para obtener información extra que les permitan resolver los problemas</p>	<p>7.- Registran los resultados obtenido por el grupo.</p>	<p>Recuerden trabajar en equipo, privilegiando un ambiente de respeto y de trabajo colaborativo para que cada uno aporte ideas y plasmen, en la guía, conclusiones grupales. Registren un coordinador que procurará de la participación de los integrantes y un relator que registrará los productos que surgirán de esta guía.</p>	



La variación consiste en agrupar elementos, considerando que no se elegirán todos, sin repetirse y respetando el orden.



Averigüen el concepto de variación y su ecuación respectiva en Internet



Mediante el uso de plastilina, simulen algunas recetas de tortas.

Guía de Matemática
Combinaciones. Tiempo 90 minutos



Registren los integrantes del grupo: (mínimo 3 y máximo 5)

<p>Este ícono muestra que deben trabajar en equipo</p>	<p>1.- Corresponde a la presentación de problemas</p>	<p>2.- Los estudiantes deben leer y aclarar las dudas que surgen tras la lectura de los problemas</p>	<p>3.- Los integrantes deben realizar una lluvia de ideas en busca de una solución a los problemas</p>	<p>4.- Clasifiquen sus preguntas según su pertinencia</p>
<p>5.- Definición de objetivos de aprendizaje</p>	<p>6.- Deben investigar para obtener información extra que les permitan resolver los problemas</p>	<p>7.- Registran los resultados obtenido por el grupo.</p>	<p>Recuerden trabajar en equipo, privilegiando un ambiente de respeto y de trabajo colaborativo para que cada uno aporte ideas y plasmen, en la guía, conclusiones grupales. Registren un coordinador que procurará de la participación de los integrantes y un relator que registrará los productos que surgirán de esta guía.</p>	

Guía de Matemática
Analizando la probabilidad. Tiempo 90 minutos

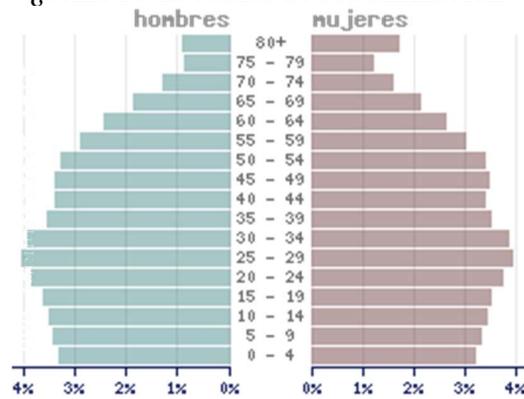


Registren los integrantes del grupo: (mínimo 3 y máximo 5)

<p>Este ícono muestra que deben trabajar en equipo</p>	<p>1.- Corresponde a la presentación de problemas</p>	<p>2.- Los estudiantes deben leer y aclarar las dudas que surgen tras la lectura de los problemas</p>	<p>3.- Los integrantes deben realizar una lluvia de ideas en busca de una solución a los problemas</p>	<p>4.- Clasifiquen sus preguntas según su pertinencia</p>
<p>5.- Definición de objetivos de aprendizaje</p>	<p>6.- Deben investigar para obtener información extra que les permitan resolver los problemas</p>	<p>7.- Registran los resultados obtenido por el grupo.</p>	<p>Recuerden trabajar en equipo, privilegiando un ambiente de respeto y de trabajo colaborativo para que cada uno aporte ideas y plasmen, en la guía, conclusiones grupales. Registren un coordinador que procurará de la participación de los integrantes y un relator que registrará los productos que surgirán de esta guía.</p>	



En Chile, se tiene que la población está envejeciendo,
¿cómo se da cuenta de esa afirmación?



Fuente:

<https://www.datosmundial.com/america/chile/index.php>

¿Cuál es la probabilidad de encontrar una persona varón
entre los 25 y 29 años?

¿Cuál es la probabilidad de encontrar una mujer entre los
55y 59 años?



Hagan una lectura de los problemas expuestos anteriormente y
aclaren los términos que desconozcan

ANEXO B: VALORACIONES DE LOS EXPERTOS A LAS GUÍAS DE TRABAJO

Fortalezas

Guía	Contexto	Opiniones de Expertos	Sugerencias entregadas por Expertos
G1:	En la lectura sugerida para los estudiantes titulada: "Probabilidad aplicada en la Genética"	"El vínculo interdisciplinario con biología está excelente. Además, presentas una breve contextualización"	"Es recomendable para el diseño instruccional, colocar el número de la actividad en la parte superior, junto a una breve instrucción. En este caso, al ser la primera actividad, podría ser por ejemplo "Actividad n°1: Junto a sus compañeros, lean el siguiente enunciado. Luego respondan las preguntas seleccionando una de las alternativas".
G1	Ante las preguntas de selección múltiple: ¿Cuál es la representación de un par de alelos que simboliza a padres heterocigotos en el tamaño de los dientes? Y las siguientes	"Es un ejemplo bien contextualizado, eso es muy bueno"	"Antes de plantear las preguntas 1, 2, 3, 4 y 5, sería conveniente presentar un ejemplo similar al planteado en dichas preguntas para que los estudiantes se orienten sobre la representación gráfica de los cuadros de Punnett. Este ejemplo podría ir en el cuadro superior naranja para no perder continuidad con la contextualización"
G1	Ante las preguntas de genética de respuesta abierta con respecto a los cuadros de Punnett.	"Hay una construcción organizada y secuenciación en las actividades"	"Tal vez sea demasiada la dependencia entre actividades. Si un grupo de estudiantes realiza mal la tabla 1 o 2, todo lo demás estará mal hecho. Puede que sea mejor separar las actividades y colocar una nueva tabla ya hecha para responder a las preguntas 1 y 2."
G1	Ante el problema de los 100 hijos de padres heterocigotos con relación al tamaño de los dientes	"Muy buen ejercicio, se podría extrapolar para 1000, 10000, etc personas."	"Se podría extrapolar para 1000, 10000, etc personas."
G1	Presencia de código QR en la etapa de investigación para acceder a una presentación.	"Es muy adecuado utilizar los códigos QR para complementar las guías de trabajo"	"Colocar debajo del código QR un link al enlace en caso de que el código falle o que quieran buscar con sus computadores"
G1	En la etapa de resultados si pide a los alumnos la elaboración de un poster con las ideas más relevantes de la guía.	"El uso del póster me parece una instancia innovadora y que los ayuda a incorporar elementos corporales y de desplante comunicacional. Muy bien con ello"	"Sugerencia 1: Entregar indicaciones más precisas sobre la construcción del póster, junto con formatos de ejemplo. Sugerencia 2: No necesariamente presentar las ideas de la guía, sino más bien, aplicarlas a otro caso en el que ellos deban movilizar lo aprendido, para luego exponerlo en su póster. Si no, todos los grupos hablando sobre lo mismo, y se perderá la atención"
G2: Guía 2	En la etapa de resultados se pide a los alumnos la realización de una exposición de 5 minutos exponiendo las distintas ordenaciones de programas de televisión y su método de organización	"Muy buena iniciativa"	"Previo a la exposición incorporaría unos cuántos problemas más ya que son muy pocas actividades. Prueba apelando a la creatividad de ellos, para que extrapolen el modelo a nuevas situaciones (aplicación)."
G3:	Se pide a los alumnos que investiguen el concepto de variación y su ecuación en la Web	"Muy buena iniciativa para complementar la guía con el uso de las TIC."	"Sugerencia 1: Mejorar la redacción y orientar hacia dos búsquedas separadas: 1° El concepto de variación aplicado a las combinatorias. 2° El modelo matemático asociado a las variaciones matemáticas. Sugerencia 2: Explicitar de dónde obtienen la fuente de información. Orientar hacia el uso de fuentes de información confiables."
G4: Guía 4	Pregunta sobre qué les pareció el cambio de reglas de El Kino	"Muy buen ejercicio"	"Mejorar redacción de las preguntas."
G1, G2, G3, G4 y G5	El Uso iconográfico utilizado en la simbología	"Presentar el uso iconográfico es una excelente propuesta para activar al estudiante en lo que debe hacer"	"Sugerencias: Reducir el número de iconos a un máximo de 7, de preferencia 5. Esto es porque los estudios de diseño gráfico demuestran que las personas no retienen más de 7 conceptos presentados por primera vez. Cambiar los iconos por otros que tengan mejor visibilidad. Te adjuntaré algunos ejemplos que te pueden servir. Lo importante es priorizar por iconos que al momento de imprimirse puedan mantenerse visibles pese a su tamaño, y en formato blanco y negro."

Recomendaciones

G1, G2, G3, G4 y G5.	Formato de simbología de cada una de las Guías de Trabajo	"Sugerencias previas para la validación: -Hacer visibles en un enunciado previo el nivel, la asignatura y la unidad que se está trabajando"	"Sugerencias previas para la validación: -Hacer visibles en un enunciado previo el nivel, la asignatura y la unidad que se está trabajando"
G1, G2, G3, G4 y G5	No aparecen en cada Guía de Trabajo el objetivo de la propuesta.	"Antes de comenzar con los contenidos y actividades es recomendable colocar un resumen del objetivo de la propuesta para que el estudiante sea consciente de a dónde pretenden llegar"	No Aplica (N.A)
G1	En las preguntas de selección múltiple sobre el caso de padres heterocigotos en relación al tamaño de los dientes	"En el caso de las preguntas planteadas, la instrucción para responderlas debe explicitar una expresión similar a "seleccionar una de las alternativas".	N.A.
G1	En la actividad de rellenar los dos cuadros de Punnett.	"Continuar con la numeración, o sino, cambiar a otra actividad y con otra instrucción. Ejemplo "Actividad n°2: Junto a sus compañeros completen las tablas 1 y 2. Luego, respondan las preguntas".	"Ejemplo "Actividad n°2: Junto a sus compañeros completen las tablas 1 y 2. Luego, respondan las preguntas".

G1	Posterior a las preguntas de rellenar los cuadros de Punnett	"Las preguntas están un poco desordenadas".	"Sería bueno establecer un orden claro y por niveles"
G1	Ante las preguntas abiertas de Genética que surgen posteriormente de llenado de los cuadros de Punnett	"El salto a la matemática es un poco repentino cuando se pregunta por la probabilidad de seleccionar un hijo que tenga como genotipo homocigoto dominante."	"Quizás debería haber una conexión previa entre la probabilidad y el análisis genético de las tablas de Punnett. Podrías presentar un ejemplo contextualizado de manera similar donde se determine el cálculo de una probabilidad"
G1	En la pregunta que se les pide contestar: "¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un hijo que tenga fenotipo el carácter recesivo?"	"¿Ellos ya tienen los conocimientos previos necesarios para responder sobre probabilidad? Si no es así, sería prudente proponer una formalización previa."	N.A.
G1	En la etapa de lectura y aclaración de términos desconocidos.	"¿Esta formalización sobre los términos la aclaran ellos mismos? ¿deben escribir los términos desconocidos? ¿cómo saber qué términos desconocen?"	"Lo ideal es trabajar en base a evidencias que ellos expliciten"
G1	En la sección de lluvia de ideas de genética	"No queda claro sobre qué es la lluvia de ideas ¿sigue siendo parte de la actividad anterior?"	"Sugerencia: Enumerar las actividades y colocar una instrucción breve."
G1	En la sección de lluvia de ideas de genética	N.A.	"Sugerencia: Exigir que los estudiantes aporten con al menos 2 ideas cada uno"
G1	En la etapa de definición de objetivos de aprendizaje	N.A.	"Sugerencia: Exigir un número mínimo de objetivos de aprendizaje"
G3	En la presentación de problemas de formación de parrillas programáticas	"¿ya tienen estos conocimientos previos desarrollados para entender el factorial?"	N.A.
G3	Bajo el contexto lectura y aclaración de términos desconocidos	"¿Esta formalización sobre los términos la aclaran ellos mismos? ¿Deben escribir los términos desconocidos? ¿Cómo saber qué términos desconocen?"	"Lo ideal es trabajar en base a evidencias que ellos expliciten"
G4	En el planteamiento del problema de El Kino, cuando se menciona el cambio de reglas.	N.A.	"Hacer preguntas en plural."
G4	El espacio de respuesta para el problema de El Kino, cuando se menciona el cambio de reglas.	N.A.	"Agregar un poco más de espacio"
G5	Cuando se expone la pirámide poblacional de Chile, se plantean preguntas en fase del planteamiento del problema	N.A.	"Partir por preguntas más exploratorias que les permitan a los estudiantes entender el gráfico. Por ejemplo ¿qué representan las barras horizontales?"
G5	En la pregunta en que se compara la población chilena y argentina	"La pregunta está poco focalizada."	"Redireccionarla hacia una comparación estadística"
G5	Pregunta posterior a la comparación entre pirámides poblacionales	N.A.	"Explicar mejor a qué se refiere con investigar genéticamente".
G5	Se anexa un link para que los alumnos puedan acceder a información por medio de Internet	N.A.	"Colocar código QR"
G5	Se anexa un link para que los alumnos puedan acceder a información por medio de Internet	N.A.	"Ofrecer más de una base de datos con estadísticos representativos"
		NPLI	
G1, G2, G3, G4 y G5	En la simbología de cada guía, el uso de formas de cada figura impide una vista limpia de cada imagen.	"Los cuadros verdes son innecesarios: ocupan mucho espacio y distraen la atención del símbolo que se quiere explicar. Con un borde negro bastaría"	N.A.
G1, G2, G3, G4 y G5	La presencia de una instrucción en la simbología hace más difícil la lectura	"Esto debería ir en la instrucción general, no en la simbología"	N.A.
G1	Probabilidad aplicada a la genética	Queda poco claro para que es esta parte de la guía ¿es la introducción? Hay que simplificarla bastante, usar términos menos complicados o quizás incluso hacer un glosario como conexión con biología.	Hay que simplificarla bastante, usar términos menos complicados o quizás incluso hacer un glosario como conexión con biología.
G1, G2, G3, G4 y G5	Uso iconográfico en las Guías de Trabajo	Hay demasiadas figuras que no aportan nada a la guía. Si se quiere imprimir y multicopiar, probablemente no se verá bien la información.	N.A.
G1	Preguntas que incluyen términos de genotipo y fenotipo	¿Genotipo? ¿fenotipo? Se usan palabras que no se han explicado. ¿Seguro que las conocen de otra materia?	N.A.
G1	En las preguntas de selección múltiple sobre el caso de padres heterocigotos en relación al tamaño de los dientes	-Si es un ejemplo, ¿no deberían estar resueltos explicando cómo llegó a ese resultado?	N.A.
G1	Preguntas sobre cuadros de Punnett	¿Qué características representan "Aa" y "Bb"?	N.A.

G1	Posteriormente de rellenar los cuadros de Punnett, se consulta por la cantidad de cruces de alelos	¿a qué se refieren con "cruces de alelos"? explicar bien esa parte.	N.A.
G1	Ambigüedad de cómo contestar las preguntas abiertas después de haber llenado los cuadros de Punnett	¿Cómo se va a especificar? ¿Escribiendo? ¿Pintando ¿o encerrando?	N.A.
G1	Ambigüedad de cómo contestar las preguntas abiertas después de haber llenado los cuadros de Punnett en el espacio indicado	¿Por qué el espacio para resolver es de cuadros pequeños?	N.A.
G1	Ante las preguntas de probabilidad que surgen tras el análisis genético sin formalismo probabilístico	Nunca se ha explicado como calcular la probabilidad de ninguna cosa	N.A.
G1	Formato del espacio para responder las preguntas abiertas	¿Por qué el espacio para responder tiene tantos recuadros? Es mejor poner líneas o un recuadro grande	N.A.
G1	Preguntas con uso de términos como homocigoto y heterocigoto	Complementar "homocigoto dominante" y "heterocigoto" con la característica, por ejemplo "dientes grandes" (TT) o (Tt)	N.A.
G1	Preguntas sobre las 100 personas de padres heterocigotos	¿Esas 100 personas se tienen hijos entre ellos? No entiendo que aporta la cantidad de gente al problema.	N.A.
G1	En la etapa de lectura y aclaración de términos, surge después de los problemas genéticos y probabilísticos.	Personalemente pondría esto al principio y escribiría los términos más complicados como "genotipo", "fenotipo" "homocigoto" y "heterocigoto", y les pediría que los definieran antes de empezar a resolver los problemas. Si se espera hasta el final, los estudiantes pasarán mucho tiempo intentando hacer algo sin entender que es.	Personalemente pondría esto al principio y escribiría los términos más complicados como "genotipo", "fenotipo" "homocigoto" y "heterocigoto", y les pediría que los definieran antes de empezar a resolver los problemas. Si se espera hasta el final, los estudiantes pasarán mucho tiempo intentando hacer algo sin entender que es.
G1	Posteriormente de la aclaración de términos, surge la lluvia de ideas sin especificar instrucciones.	¿una lluvia de ideas respecto de que tema?	N.A.
G1	En la sección de clasificación de ideas	No se entiende esta instrucción, ¿es algo como juntar la idea que salió en la lluvia de ideas con los problemas vistos anteriormente? ¿Cómo sabes que saldrá una idea para cada problema? ¿y si ninguna de las ideas que aparece en la lluvia se relaciona con los problemas?	N.A.
G1	En la etapa de definición de objetivos de aprendizaje	"¿Cómo los estudiantes van a saber o definir los objetivos de aprendizaje? "	Sugiero que el objetivo de aprendizaje aparezca en la guía, que el profesor lo formule.
G1	Presencia de código QR que direcciona a una presentación del tema	-Si el objetivo es estudiar probabilidades, no veo la relevancia de poner esto acá. Quizás al principio ¿Qué quieres que respondan acá? ¿Algo de biología o de matemática?	N.A.
G1	En la etapa de cierre y resultados se pide a los alumnos la realización de un poster.	¿Qué ideas quieres que aparezcan en el afiche?	N.A.
G2	Pregunta inicial de sobre la formación de parrillas programáticas de un canal de televisión	Aclarar la pregunta	N.A.
G2	Posteriormente de la pregunta que se agrega un programa más, surge el ítem de lectura y aclaración de términos	Esto es innecesario, ¿Qué cosas no podrían entender?	N.A.
G2	En la etapa de lluvia de ideas sobre cómo ordenar los programas	¿Respecto a que deben hacer la lluvia de ideas?	N.A.
G2	Ante la pregunta ¿cómo ordenar los programas sin equivocarse?	¿a qué te refieres con "sin equivocarse"?	N.A.
G2	En la etapa de definición de objetivos.	El objetivo no deberían construirlo los estudiantes, si no el profesor	N.A.
G2	Para ordenarlos los programas de televisión se pide que lo realicen en un diagrama de árbol	¿Cómo sabrán los alumnos que es un "diagrama de árbol" y que forma tiene?	N.A.
G3	En la pregunta ¿Por qué no resulta aplicando ene factorial?	No se ha explicado que es "n!", ¿eso lo deberían haber aprendido en la guía anterior?	N.A.
G3	En la pregunta ¿Por qué no resulta aplicando ene factorial?	No queda claro en la guía anterior	N.A.
G3	Ante la pregunta ¿Qué hace falta para obtener ese número?	¿Qué número quieres obtener? No se entiende esta pregunta	N.A.
G3	En la sección de lectura y aclaración de términos	¿Qué términos podrían desconocer?	N.A.
G3	En la sección de lluvia de ideas	¿Respecto de que tema van a hacer la "lluvia de ideas"	N.A.

G3	En la etapa de síntesis, se les pide a los alumnos que realicen algunas tortas	¿Qué ideas? No se entiende lo de "Prueben organizando algunas tortas según sus gustos"	N.A.
G3	Se formaliza la definición del concepto de variación	Primera definición que aparece en todas las guías. ¿para que hay tanto espacio después de la definición?	N.A.
G3	Se pide a los alumnos que elaboren con plastilina distintas	¿Cuál es el objetivo de esta pregunta?	N.A.
G1, G2, G3, G4 y G5	En la simbología, común al comienzo de todas las guías, utiliza mucho espacio	Todo esto ocupa demasiado espacio en cada guía	N.A.
G4	En un problema no se enuncian algunos datos de este, como son los distintos programas por ordenar	-Sería bueno volver a mencionar las opciones de programas, ya que es muy probable que los alumnos pierdan las guías	N.A.
G4	En la etapa de lectura y aclaración de conceptos claves	¿Qué términos podrían resultarles desconocidos?	N.A.
G4	En la sección de la realización de lluvias de ideas	¿respecto de que tema harán la lluvia de ideas?	N.A.
G4	En la etapa de clasificación de las ideas claves	¿Qué se espera que respondan aca? No se entienden estas preguntas	N.A.
G4	Ante la pregunta: "Importa el orden de como salen los números del Kino?"	Quizás esto va inmediatamente después de la pregunta relacionada con el Kino	N.A.
G4	En la etapa de finalización, se pide la realización de un debate	¿Cuál es el objetivo de esta discusión? No te va a alcanzar el tiempo para hacer todo esto	N.A.
G5	En la etapa de lectura y aclaración de términos	Esto no debería ir	N.A.
G5	En la etapa de lluvia de ideas	Respecto de que tema harán la lluvia de ideas	N.A.
G5	En la imagen del gráfico poblacional de Argentina	Aclarar de que país es este grafico	N.A.
G5	Se pide a los estudiantes que justifiquen con argumentos de genética	¿Qué relevancia tiene la investigación genética?	N.A.
G5	Se adjunta link de sitio web para realizar mapa poblacional	¿Con que objetivo?	N.A.
G5	Sitio web de mapa poblacional	No se entiende la pregunta	N.A.
G5	Realización de un gráfico del mundo con los datos proporcionados en la web	¿o de cada continente? ¿Con que objetivo?	N.A.
G1, G2, G3, G4 y G5	En la presentación de cada guía se adjunta la simbología	No se distinguen bien iconos de la simbología, preferir objetos simples para representar acciones	N.A.
G1	En la simbología aparece una instrucción.	no entiendo si esta es una instrucción para el desarrollo de la guía o una explicación del símbolo	N.A.
G1	Ante la pregunta: ¿Cruce de alelos en los cuadros de Punnett?	se refiere a las tablas o celdas? debe usar el mismo nombre. Mucho espacio para responder algo corto, sin razonamiento.	N.A.
G1	Ante la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un hijo que tenga como genotipo homocigoto dominante? ¿y heterocigoto?	Podría cambiar redacción y decir, usando la información de la tabla 2.La segunda pregunta no se entiende, mejor dejar una si responde en mismo espacio.	N.A.
G1	Pregunta sin enumerar	Falta numerar esta pregunta	N.A.
G1	En la sección de que se haga una lluvia de ideas	¿Con qué propósito? falta el para qué	N.A.
G1	En la etapa de clasificación de ideas	entiendo que este es un enfoque metacognitivo, pero necesito saber con qué criterio clasificar o para qué pues se me pierde foco investigativo.	N.A.
G1	En la etapa de definición de aprendizaje	esto sería con el profesor o es una necesidad de aprendizaje surgida del trabajo anterior?	N.A.
G1	Se adjunta código QR para acceder a una presentación	aquí suponemos que todos tienen celular? no pude acceder, por permisos, debería ser abierto.	N.A.
G2	Ante la pregunta, ¿cuántos ordenes de programas son posibles?	la pregunta puede ser: ¿Cuántas posibilidades de parrillas programáticas tiene? ¿Qué orden tendría cada una? Para que no responda solo con números.	N.A.
G2	Si se suma un programa humorístico, haciendo cambiar parrilla programática	Esta pregunta es difícil de responder sin indicar que se refiere a las combinaciones	N.A.
G2	Si se suma un programa humorístico, haciendo cambiar parrilla programática	Falta alguna pregunta que lo lleve a generalizar la idea de combinatoria y que diga la fórmula general del producto para n programas, por ejemplo.	N.A.
G2	Ante la consulta ¿Cómo ordenarían los programas?	¿qué método o estrategia usarías..?	N.A.

G2	En la etapa de definición objetivos de aprendizaje	me da aun la sensación que éstos están predefinidos.	N.A.
G3	Ante la pregunta de ordenar los programas televisivos en grupos de dos	Debiese listar las posibles combinaciones, no solo la cantidad, para ello la pregunta debe ser diferente, por ej. ¿Cuáles son los posibles pares de programas que puede elegir? Esto para saber que técnica de conteo usa.	N.A.
G3	Ante la pregunta: ¿Por qué no resulta aplicando n!?	No me parece adecuada estas dos preguntas pues no sabemos si llegó a generalizar en la anterior. Es más relevante conocer las estrategias que usó y el tipo de pensamiento.	N.A.
G3	Bajo el contexto de cuantas tortas son posibles de realizar con tres de seis bizcochos y dos de diez salsas.	Totalmente descontextualizado a lo anterior. No hay un paso que una estas situaciones	N.A.
G3	Formalización del concepto de variación	De dónde surge este concepto si no se ha tratado antes. Debe usted hacerlo o hacer que lo use antes el estudiante, por ejemplo, pedir que varíen grupos	N.A.
G3	Solicitud de investigación de variación	Si es un curso de e básica mejor dar un sitio para que revisen.	N.A.
G3	Creación de tortas	Creo es buena idea que hagan algo práctico con las combinaciones como collares o estas tortas, pero debe guiar más la actividad dando algunos requisitos para la tarea y que luego la presenten usando los conceptos, podría ser	N.A.
G4	Ordenar de a dos los cinco programas de la parrilla programática	Me parece pregunta repetida.	N.A.
G4	Contexto del cambio de condiciones del Kino	esto está mucho mejor. Empezaría aquí con este	N.A.
G4	Orden de cómo salen los números del Kino	¿se refiere al sorteo?	N.A.
G4	Se solicita a los alumnos que investiguen matemáticamente	¿cuál de los dos?	N.A.
G1, G2, G3, G4 y G5	Problema del Kino	cómo va a averiguar esto y dónde? esto es de respuesta corta. no da para cajita.	N.A.
G1, G2, G3, G4 y G5	N.A.	N.A.	Se sugiere realizar una guía para entregar indicaciones al docente, de cómo llevar las actividades y los objetivos claramente establecidos para cada una de las clases, ya que el tiempo destinado a cada una de ellas es demasiado general y si no explica los momentos en cada una de ellas, puede que la clase queda corta en tiempo o que sobre demasiado
G1, G2, G3, G4 y G5	N.A.	Debe mejorar las redacciones de las instrucciones y si está considerado que el trabajo es en equipo debe redactar en función de ello	N.A.
G1, G2, G3, G4 y G5	N.A.	Debe incluir algunos conceptos relevantes dentro de las guías o agregar algún apartado donde se presenten, ya que no se logra entender el contexto del trabajo, o sea donde deben realizar estas guías según la materia que se está tratando en clase.	N.A.

ANEXO C: GUÍAS CON LAS INDICACIONES AL DOCENTE

Sesión 1: La Sangre

Integrantes:

Objetivo: Al finalizar la sesión aplicarán el principio multiplicativo, la regla de Laplace, probabilidad y variables aleatoria para resolver y reflexionar sobre problemas vinculados con la sociedad.

Orientación:

Aplicar el principio multiplicativo, la regla de Laplace, probabilidad y variables aleatoria por medio de un problema contextualizado demostrando un trabajo sistemático

Orientaciones al docente:

Se plantea los objetivos de la sesión 1 para saber qué enseñara el profesor y qué aprenderán los alumnos de ella. Está explícito al inicio de cada guía.

En primera instancia se presenta un texto descriptivo respecto de la función que cumple la sangre, la utilidad que tiene para la vida humana y su relación con la presión sanguínea. Posteriormente, se entrega información respecto a una de las patologías más prevalente que afectan a las personas a nivel mundial, como lo es la hipertensión arterial.

Para realizar la actividad, se adjunta un cuadro informativo, que ofrece información sobre los niveles de presión arterial, su respectiva clasificación y riesgo para la salud. En primer lugar, el docente debe solicitar a los alumnos, buscar información respecto a esta patología: datos epidemiológicos, enfermedades asociadas y consecuencias.

Los elementos anteriores serán la base para introducir el concepto de variable aleatoria, junto a la elaboración de un diagrama de árbol que mostrará las combinaciones entre cuantificador de emergencia y el tipo de sangre. Además se pedirá clasificar las personas según su presión arterial, utilizando como recurso intervalos de números enteros (reales) y se obtendrá una aproximación de las personas que son afectadas con esta patología, incluyendo síntomas y recomendaciones para tratarla.



La sangre es un tejido vivo líquido que recorre nuestro cuerpo a través de arterias, venas y vasos capilares. Está compuesto por dos fases: sólida que incluyen a los glóbulos rojos (eritrocitos), glóbulos blancos (leucocitos) y las plaquetas; y la fase líquida formada por el plasma sanguíneo.

Sus funciones son varias como el transporte de nutrientes, oxígeno, hormonas, enzimas, desechos y dióxido de carbono. Además, la sangre participa en la defensa ante infecciones, en la coagulación y cicatrización.

En casos de urgencia, como una operación quirúrgica, puede ser necesario una transfusión de sangre, pero hay de distintos tipos, además, no todos los tipos de sangre son compatibles entre sí, debido a la presencia de anticuerpos específicos que los diferencian, algunos con mayor frecuencia que otros. Por ende, se hacen campañas de recolección de sangre para aumentar su stock y así salvar vidas. Solo con la donación de 450 mL se puede llegar a salvar hasta tres personas.

En los hospitales, se clasifican los pacientes de acuerdo con su tipo de sangre.

El tipo de sangre está formado por un grupo o, también llamado antígeno, y un factor. Los grupos o antígenos de sangre pueden ser: (O) que no presenta antígenos, la presencia de un antígeno (A) o (B) o la presencia de ambos (AB). Si agregamos el factor de sangre éste puede ser positivo (+) o negativo (-).

Un factor importante por considerar de nuestro estado de salud es la presión arterial, que se define como la fuerza que ejerce sobre las paredes al empujar las arterias y vasos sanguíneos. Se cuantifica utilizando dos números, como por ejemplo 115/77 mmHg. La primera cifra denominada sistólica corresponde cuando el corazón late, y el segundo número se llama diastólica es cuando el corazón descansa entre latidos.

La hipertensión es una enfermedad silenciosa porque no presenta síntomas, por eso es importante controlarse.

La hipertensión arterial ha mostrado estar relacionada con un conjunto de factores, entre ellos el tipo de sangre.

CATEGORÍA DE LA PRESIÓN ARTERIAL	SISTÓLICA mm Hg (número de arriba)		DIASTÓLICA mm Hg (número de abajo)
NORMAL	MENOS DE 120	y	MENOS DE 80
ELEVADA	120-129	y	MENOS DE 80
PRESIÓN ARTERIAL ALTA (HIPERTENSIÓN) NIVEL 1	130-139	o	80-89
PRESIÓN ARTERIAL ALTA (HIPERTENSIÓN) NIVEL 2	140 O MÁS ALTA	o	90 O MÁS ALTA
CRISIS DE HIPERTENSIÓN (consulte a su médico de inmediato)	MÁS ALTA DE 180	y/o	MÁS ALTA DE 120

A continuación, se adjunta una tabla que muestra los distintos estados de la presión arterial. Es importante controlarse si tiene parientes con presión alta, diabetes, obesidad, colesterol alto, sedentarismo o tabaquismo. Estadísticas chilenas mencionan que el 44% de la población adulta entre 45 y 64 años son hipertensos, al igual que el 75% de población mayor de 65 años.

Fuente: [¿Qué es la presión arterial alta? \(heart.org\)](http://heart.org)

Indicaciones al docente:

En la primera sección de la guía, se describen los aspectos más importantes de la sangre como su composición, utilidad, tipos de sangre y algunos síntomas de la presión arterial alta, llegando incluso a desarrollar hipertensión. Para saber qué estado tiene cada uno de presión arterial adjunta un cuadro de los límites de esta enfermedad y su categoría.

EL docente debe asignar un tiempo aproximado de cuatro o cinco minutos destinada a la lectura para posteriormente iniciar una puesta en común sobre el tema, sin desvirtuarse del tema, por lo tanto el o la profesor(a) debe controlar los tiempos y controlar el grupo curso.

Por la creación de un sistema informático de salud, se vincula un estado de salud un número que cuantifica la gravedad que tiene el paciente cuando va a un centro asistencial.

Estado de Salud	Cuantificador de Emergencia
Normal	0
Elevada	1
Hipertensión nivel 1	2
Hipertensión nivel 2	3

Indicaciones al docente:

Se incluye esta tabla para señalar, de alguna forma, un cuantificador de emergencia según la presión arterial con la intención posterior de vincular el concepto de variable aleatoria discreta según este ejemplo.

Cabe mencionar que la variable aleatoria es una función que asigna a cada experimento un número. En este caso, la función es relacionar un estado de salud un cuantificador de emergencia (un número entero entre 0 y 4). Según las necesidades, es probable que se puedan asignar otros números, pero eso lo asignaría quién lo necesite.

Actividad 1

¿Qué plan de trabajo utilizarían para determinar cuáles son los posibles resultados al combinar estas dos informaciones?

Indicaciones al docente

Se espera que los alumnos, en forma grupal, trabajen con el diagrama de árbol, ubicando en la raíz los grupos de sangre y, luego, los cuantificadores de emergencia de hipertensión. Por ello deben describir su forma de trabajo con sus propias palabras.

Pero también pueden ubicar el número de cuantificadores de emergencia primero y luego los grupos de sangre. De cualquier modo, el total coinciden debe coincidir. (40 casos posibles)

Realicen su plan de trabajo

Indicaciones al docente

En este espacio deben plasmar el plan de trabajo. Se espera que utilicen el diagrama de árbol. El número de ramas es el número de combinaciones posibles.

De las posibles formas se puede partir la elaboración del diagrama de árbol, debe elegir cualquiera como inicio, para continuar con la otra después, lo importante del principio multiplicativo los factores de los casos posibles son números enteros y puede conmutarse, por ende no importa el orden. Lo importante es ser consecuente y seguir el patrón.

¿Qué les permitió hacer la técnica utilizada? ¿Y qué no?

Indicaciones al docente

El uso de tabla de doble entrada es un caso particular de un diagrama de árbol influyendo que solo se puede utilizar cuando hay solamente dos atributos a considerar.

El diagrama de árbol es válido para cualquier número de atributos a clasificar, siendo el número de ramas posibles la cantidad de combinaciones posibles, para su uso general.

Se puede calcular cuántas combinaciones posibles son considerando una de cada característica

Indicaciones al docente

Sí, como existen cuatro grupos de sangre, dos factores y 5 posibilidades de estado de salud, se obtienen 40 opciones distintas, mismo número de ramas de árbol.

También se puede partir desde el tronco con las posibles estado de salud, los cuatro grupos de sangre y su factor totalizando siempre 40 opciones.

¿Permitió simplificar los cálculos el uso de multiplicación para calcular el número de opciones?

Indicaciones al docente

Sí, ya que hace innecesario el uso del árbol, siempre y cuando no cambie el número de atributos.

La respuesta esperada es que el uso del diagrama de árbol es una muestra gráfica y ordenada de los casos. En cada rama sale igual número de bifurcaciones según cada atributo se puede utilizar el principio multiplicativo. Como esta dicho en este caso, la multiplicación de los casos posibles es conmutativo el orden no importa.

Si se identifica el grupo de sangre y el cuantificador de emergencia, ¿Qué valores puede tomar esta última variable?

Indicaciones al docente

Según cada caso, es el número que puede tomar cierta variable. En este situación particular se usan los números cardinales entre 0 y 4, ambos inclusive, es decir; 0, 1, 2, 3 y 4.

Bajo otro contexto, esos números pueden cambiar los números según las necesidades del usuario.

¿Qué rango de presión arterial posee un paciente con grado de emergencia 2?

Indicaciones al docente

Una persona con grado de emergencia 2 tiene una presión:

Sistólica: 130-139 mmHg

Diastólica: 80-89 mmHg

Esta información la obtiene leyendo la primera página. Si es necesario, hay que rescatar ideas previas de intervalos o desigualdades consultando al profesor de matemática si es necesario.

La presión sistólica es la presión arterial cuando el corazón late y bombea la sangre a través de las arterias de tu cuerpo, en cambio, es la presión arterial entre latidos cardíacos, es decir, cuando el corazón no está bombeando sangre.

Hay que destacar que existen variables aleatorias continuas, es decir, que puede tomar valores dentro del conjunto de los números reales, siempre bajo el contexto del uso de la situación, ya que se puede tomar siempre un valor intermedio entre dos resultados, caracterizado por la densidad de los números reales.

En este caso particular, la presión arterial que mide las maquinas que toman la presión arterial utilizan la unidad de mmHg (milímetro de Mercurio) como medida los números enteros, iniciando desde cero hasta la tensión que tiene el paciente. Se define como milímetro de Mercurio como una unidad de presión que ejerce una columna del metal de Mercurio a 273 Kelvin ($=0^{\circ}$ Celsius) y a una aceleración de gravedad de $9,8 \text{ [m/s}^2\text{]}$

Actividad 2.

Responda las preguntas que van a continuación.

Si poseo las siguientes presiones, a qué grupo de riesgo pertenecen los pacientes y su cuantificador de emergencia

- e) 123/79
- f) 132/84
- g) 111/78
- h) 142/91

Indicaciones al docente

Los resultados esperados son:

- a) 123/79 (Elevada) y su cuantificador de emergencia es 1 debido a que la presión sistólica esta ente 120 mm Hg y 129 mm Hg, sin importar la presión diastólica.
- b) 132/84 (Presión alta nivel 1) y su cuantificador de emergencia es 2. La presión arterial sistólica esta entre 130 y 139 mm Hg y la diastólica entre 80 y 89 mm Hg.
- c) 111/78 (Presión normal) y su cuantificador de emergencia es 0. Está dentro de los parámetros normales, ya que están bajo de los 120 mm Hg y 80 mm Hg respectivamente.
- d) 142/91 (Presión alta nivel 2) y su cuantificador de emergencia es 3. La presión sistólica está sobre los 140 mm Hg y la diastólica sobre 90 mm Hg.

Desde el punto de vista médico, averigüen algunos de los síntomas que muestra la hipertensión

Indicaciones al docente

De diversas fuentes se obtuvieron los siguientes síntomas:

- Dolor de cabeza,
- presión en el pecho,
- sangrado nasal

¿Cuáles son los factores de riesgo para la hipertensión?

Indicaciones al docente

Existen factores de riesgo como, por ejemplo:

- Edad (mayor de 65 años)
- Antecedentes familiares
- Tener sobrepeso u obesidad
- Sedentarismo
- Consumo de sal común

Puede ser útil recurrir al docente de Biología o de Educación Física y Salud para corroborar la información y obtener más datos a través de ellos, así se puede ganar tiempo e invertirlo en las dudas del estudiantado.

Sabiendo que 2.160.000 personas son mayores de 65 años, ¿cuántos poseen hipertensión?

Puede ser útil recordar el procedimiento de la regla de tres para calcular el dato pedido.

$$\frac{X\%}{100\%} = \frac{N^{\circ} \text{ de personas que tienen la condición}}{\text{Total de personas}}$$

Indicaciones al docente

El resultado puede obtenerse de varias maneras, los principales son:

- Regla de tres, debido que mantiene la proporción entre propensos a padecer hipertensión y la población mayor. Esto se cumple debido a la ley de los grandes números. El uso de la regla de tres simple, recordando que se cumple el “producto cruzado entre variables, ya que son directamente proporcionales entre sí.”
- Multiplicar 0,75 por el total de mayores de 65 años que son 2.160.000. Esto surge al uso de la regla de tres en el trabajo de porcentajes.
- Sustraer del total el 25% que corresponde a la población sana.

Es una variante del método anterior, sacando el 100% de la población el 25% que es sana.

¿Qué indicaciones se deben tomar para evitar la hipertensión arterial?

Indicaciones al docente

Puede ser útil recurrir a los profesores de Biología, o de Educación Física y Salud, y a scholar.google.cl.

En la asignatura de Educación Física en el unidad 4 denominada como “Promoviendo una vida activa” permite la interdisciplinar entre ambas. AL desarrollar una rutina de ejercicios de forma periódica permite mejorar un estado de salud mejor para cada estudiante.

Tipo de respuesta *“Tomar medidas como mantener una alimentación saludable, evitar el consumo de sal, consumiendo máximo 6 gramos de sal; realizar ejercicios físicos para mantener una masa saludable, disminuir los momentos estresantes y dejar de fumar.”*



Si desea informar a sus parientes sobre la donación de sangre, escaneen el siguiente código QR.

Indicaciones al docente

Recordar que solamente mayores de 18 años pueden donar sangre.

Actividades de toma de decisiones

Al aumentar la edad, aumenta la probabilidad de padecer hipertensión. ¿Qué puedes hacer para bajar esa probabilidad? Justifica tu respuesta.

¿Cómo incentivarías la donación de sangre? ¿Qué consecuencias traería? ¿Qué políticas públicas se pueden tomar?

Indicaciones al docente

Los factores como el consumo de sal y una vida sedentaria aumentan las probabilidades de padecer hipertensión.

Campañas que promuevan la donación de sangre a jóvenes mayores de edad en universidades, centro de formación técnica o publicidad en radios y televisores podrían convencer con argumentos que ellos también pueden necesitar.

Sesión 2: El orden de las cosas.

Integrantes:

Objetivo: Al finalizar la sesión aplicarán los conceptos de permutación y combinatoria para resolver y reflexionar sobre problemas vinculados con la sociedad.

Orientaciones al docente:

Aplicar los conceptos de permutación y combinatoria a través de un problema contextualizado, demostrando pensamiento crítico a lo largo de la sesión.

Orientaciones al docente:

Se plantea los objetivos de la sesión 2 para saber qué enseñara el profesor y qué aprenderán los alumnos de ella. Está explícito al inicio de cada guía.

En esta sesión se abordará la explosiva cantidad de las placas patentes únicas debido al aumento del parque vehicular en Chile, que utilizando el principio multiplicativo se podrá calcular el número máximo de aquellas patentes y las consecuencias que trae en el ámbito CTSA.

En segunda instancia, se calculará la cantidad de permutaciones posibles utilizando cosas tangibles como son las legumbres (usando arroz, lenteja, poroto, garbanzo y arveja) para la búsqueda de un patrón que vincula la permutación con la definición de ene factorial, la aplicación de la fórmula de Stirling para factorial de n mediante Excel o calculadora científica y calcular qué tan válido es la fórmula.

Definido el factorial de n se plantea un problema que necesita combinatoria y se introduce el concepto de variación.

El crecimiento explosivo del parque automotriz en Chile ha aumentado considerablemente. Cerca de 421 mil vehículos se sumaron al año 2018. Si se mantiene el ritmo ¿Cuándo se deberá cambiar el criterio para formar las placas patentes únicas (PPU)?



Actualmente, el formato de las patentes es LLLL- NM, en donde las L representan letras del siguiente conjunto: B, C, D, F, G, H, J, K, L, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z. El motivo por los cuales no se utilizan otras letras son: confusión de letras como por ejemplo N y Ñ, la vocal O y el cero 0. En los números N toma valor entre 1 y 9; en cambio M puede tomar, además, el cero.

En el caso de las motocicletas, utilizan el patrón LLL-NM, utilizando las mismas letras y números tal como se menciona en el caso de los



automóviles. Cabe recordar que estos vehículos solamente utilizan patente trasera.

Indicaciones al docente

Se describe cómo se sintetiza una placa patente única para los vehículos y las motocicletas, destacando que letras se pueden utilizar y el por qué otras no. Es la base para introducir y usar el principio multiplicativo a lo largo de la sesión.

Actividad 1: Se sugiere que primero analicen posibles estrategias para conocer cuándo se deberá cambiar el criterio señalado para formar las PPU.

A continuación, pueden apoyarse siguiendo las siguientes preguntas.

¿Qué plan de trabajo decidieron realizar? Describan las fases para cada caso.

Indicaciones al docente

Los alumnos y alumnas deben pensar que pueden realizar un diagrama de árbol colocando, letra, letra, letra, letra y número y número dentro de los posibles para realizar las PPU de los automóviles. A este resultado hay que sumar las posibles patentes de las motocicletas, que se realiza de forma bastante similar, formándose con letra, letra, letra, número y número.

¿Cuántas PPU para motos y vehículos motorizados se pueden formar?

Indicaciones al docente

La cantidad de patentes que se pueden formar para vehículos motorizados es igual a $18^4 * 90 = 9.447.840$ cifra que se obtiene multiplicando cuatro veces y por 90 que corresponde a la cantidad de números que se pueden usar.

De forma similar, se multiplica la cantidad de letras tres veces por novena obteniendo la suma de Motocicletas: $18^3 * 90 = 534.880$

¿Cómo lo has hecho? ¿Qué estrategias has usado?

Indicaciones al docente

Se espera que los estudiantes utilicen el principio multiplicativo, teniendo en consideración que se permite la repetición de letra y el uso de otras no, y hay que considerar algunas exclusiones en letras y números. Lo interesante es saber cómo se arma el árbol, ya que realizarlo demoraría mucho tiempo y espacio, es decir entender la mecánica.

¿Es posible representar esto en un diagrama de árbol? ¿Cuáles serían las ventajas y desventajas al recurrir a esta estrategia?

Indicaciones al docente

Es posible realizarlo, pero se necesitaría espacio y tiempo muy grandes para colocar las 9.447.840 distintas combinaciones de patentes automovilistas y 534.880 de motocicletas. Es por eso que se recurren las técnicas de conteo.

Si se mantiene el ritmo de crecimiento del parque automotriz, ¿cuánto tiempo durará este criterio de formación de patentes?

Utilizando una regla de tres simple, se espera que este criterio dure veinte años aproximadamente.

$$\frac{1 \text{ Año}}{x \text{ años}} = \frac{\text{Número de patentes formadas en un año}}{\text{Total de patentes}}$$

$$\frac{1 \text{ Año}}{x \text{ años}} = \frac{421000 \text{ patentes}}{9447840 \text{ patentes}}$$

$$x = \frac{9447840}{421000} \text{ años}$$

$$x \sim 20 \text{ años}$$

Se sugiere revisar diferentes fuentes para revisar el crecimiento del parque automotriz en Chile. De esta forma se puede modelar el crecimiento y extrapolar mejor el resultado.

¿Qué consecuencias trae el aumento del parque automotriz?

Indicaciones al docente

Bajo investigación se espera que encuentre o reflexionen sobre el aumento del parque automotriz trayendo como consecuencias mayor contaminación acústica, contaminación ambiental debido a la emisión de gases invernadero, mayor congestión vehicular, mayor tiempo de traslado.

Además, los automóviles antiguos no son reciclados o reutilizados, por ende, se convierte en basura que perfectamente puede clasificarse y reciclarse o reutilizarse, así se mejora el medio ambiente.

Actividad 2 ¿Cuál creen ustedes que es el patrón o modelo que rige el ordenamiento de los elementos?

Se sugiere que decidan en grupo cuál es la estrategia que van a usar, por ejemplo, modelar con lápiz y papel partiendo de dos elementos cualquiera o con los recursos tangibles como las legumbres tal como se señala a continuación. Seleccionando ustedes mismos el número de legumbres que van a usar para obtener el patrón.

Se requiere disponer de la siguiente cantidad de legumbres por grupo, tales como:

- Un grano de arroz
- Una lenteja
- Un poroto
- Un garbanzo
- Una arveja

Consideren para esta experiencia, un grano de arroz y una lenteja y pregúntense por ejemplo lo siguiente:

Si se considera el orden, ¿de cuántas formas se pueden ordenar estos dos elementos?

Las posibles ordenaciones son:
arroz- lenteja y lenteja-arroz. Por lo tanto, se pueden ordenar de dos maneras.

Indicaciones al docente

Las posibles ordenaciones son:

arroz- lenteja y lenteja-arroz. Por lo tanto, se pueden ordenar de dos maneras.

Si se agrega un poroto, ¿cómo ordenarían los tres alimentos? Realicen un plan de trabajo. ¿Cuántas formas surgen al ordenar estos alimentos?, ¿cómo relacionarían el número obtenido con respecto al anterior?

Indicaciones al docente

Un plan de trabajo es tomar las ordenaciones del ítem anterior y pasar por cada posición el alimento poroto, es decir:

arroz-lenteja-poroto; arroz-poroto-lenteja; poroto-arroz-lenteja.

Lenteja-arroz-poroto; lenteja-poroto-arroz y poroto-lenteja-arroz

Formando así seis ordenaciones.

Se puede esperar dos resultados para obtener seis
a) sumar 1, 2, y 3 que da seis; pero al seguir utilizando este criterio, el alumno deberá darse cuenta de que este no es la secuencia correcta para resolver el problema.

b) Multiplicar 1, 2 y 3 el cual verificará después que coincide con los números que surgirán posteriormente.

Si se agrega un garbanzo, ¿Cómo ordenaría los cuatro alimentos? Realicen un plan de trabajo ¿Cuántas formas surgen al ordenar estos alimentos? ¿Cómo relacionaría el número obtenido con respecto al número anterior? Existe un patrón

Indicaciones al docente

Utilizando el mismo criterio anterior, a cada una de las ordenaciones anteriores se obtienen las siguientes:

arroz-lenteja-poroto-garbanzo; arroz-lenteja-garbanzo-poroto; arroz-garbanzo-lenteja-poroto; garbanzo-arroz-lenteja-poroto;

arroz-poroto-lenteja-garbanzo; arroz-poroto-garbanzo-lenteja, arroz-garbanzo-poroto-lenteja; garbanzo- arroz-poroto-lenteja; poroto-arroz-lenteja-garbanzo; poroto-arroz-garbanzo-lenteja; poroto-garbanzo-arroz-lenteja; garbanzo- poroto-arroz-lenteja
Lenteja-arroz-poroto-garbanzo; Lenteja-arroz-garbanzo-poroto; Lenteja-garbanzo-arroz-poroto; Garbanzo-lenteja-arroz-poroto;
lenteja-poroto-arroz-garbanzo; lenteja-poroto-garbanzo-arroz; lenteja-garbanzo-poroto-arroz
garbanzo- lenteja-poroto-arroz;
poroto-lenteja-arroz-garbanzo; poroto-lenteja-garbanzo-arroz; poroto-garbanzo-lenteja-arroz
garbanzo- poroto-lenteja-arroz

En total surgieron 24 ordenaciones posibles. Este número surge al multiplicar el número cuatro, número de elementos pedidos por seis, el número de combinaciones posibles de tres elementos; es decir, el número obtenido anteriormente y no 10 dentro de las otras posibilidades.

Al ordenar los cinco elementos, ¿encontraron un patrón? ¿podrían calcularlo?

Indicaciones al docente

Se espera que a 24 se multiplique por cinco, es decir que los y las estudiantes multipliquen 1, 2, 3, 4 y 5, lo que resultan 120 posibilidades.

Lleguen a un consenso en su grupo

Indicaciones al docente

Se espera que lleguen a un consenso de grupo que el número de permutaciones de n elementos es el producto de los primeros n números naturales. Es eso que plasmen en su escrito.

Formalicen sus conocimientos con ayuda del docente y comuníquenselo a sus pares

Indicaciones al docente

El docente presenta la notación factorial ($n!$), se define como el producto de los primeros n números naturales, es decir, $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$

Una propiedad importante es $(n+1) * n! = (n+1)!$, en palabras si un factorial se multiplica por su sucesor se obtiene el factorial del sucesor.

Se define con conveniencia que $0!=1$

¿El uso de la notación factorial sirvió o no? Fundamenten su respuesta

Indicaciones al docente

Se espera por parte de los alumnos una respuesta similar a esta idea: simplifica la notación, permite la simplificación y el cálculo de productos de n números consecutivos.

En un grupo de siete personas formadas por 3 mujeres y 4 hombres se deben ordenar en una fila. ¿De cuantas personas se pueden ordenar si las mujeres tienen que estar juntas, al igual que los hombres?

Indicaciones a docente

El cálculo se plasma en el siguiente párrafo.

Primero hay que ordenar los dos grupos, de hombre y mujeres, sabiendo que de cada clase deben estar juntos., es decir MMM-HHHH o HHHH-MMM,

Los grupos se pueden ordenar de $2!$ Igual a 2

La cantidad de formas de ordenar las mujeres es $3!$, lo que iguala a 6

El número de ordenaciones de hombres son $4!$ Es 24.

Por lo tanto, el número de ordenaciones posibles es $2!3!4!$, lo que equivale a 288 ordenaciones posibles.

¿Sirvió utilizar la notación factorial? ¿Qué facilitó y que dificultó en el proceso?

Indicaciones al docente

Se espera que los alumnos y alumnas utilicen notación factorial, tras entender el concepto de permutación y su relación con la notación factorial tras ser formalizado por el o la docente

**Existe una aproximación a $n!$ denominada aproximación de Stirling para factoriales que dice que para factoriales mayores la función $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$
Utilizando software como Excel o una calculadora científica y complete la siguiente tabla.**

Indicaciones al docente

Si se utiliza el software Excel, se sugiere dividir el cálculo en etapas.

- 1) Rellenar desde 1 a 20 una columna de Excel
- 2) calcular n^n . Para ello se selecciona la celda adyacente donde se utiliza el valor de n y se eleva al mismo número
- 3) Luego obtener el valor de e^{-n} . Para ello se escribe en la celda EXP(-n), donde n es el valor entero natural
- 4) Se debe calcular la raíz cuadrada del producto del doble de PI con el valor de n , se debe escribir RAIZ(2*PI()*de donde esta n)
- 5) Se realiza el producto de las cantidades anteriores
- 6) Se compara el resultado con el valor factorial, calculándolo con función de Excel "FACT(n)" con el obtenido por la aproximación con la ecuación

$$Error\ porcentual = \frac{|valor\ supuesto - valor\ real|}{valor\ real} * 100\%$$

- 7) Se compara el error y se nota que a medida que aumente n , el error porcentual es cada vez menor.

Factorial	Valor real	Valor obtenido por Aproximación por Stirling	Error porcentual
1!	1	0,92213701	7,78629911
2!	2	1,91900435	4,049782426
3!	6	5,83620959	2,729840144
4!	24	23,5061751	2,057603613
5!	120	118,019168	1,650693369
6!	720	710,078185	1,378029911
7!	5040	4980,39583	1,182622389
8!	40320	39902,3955	1,035725564
9!	362880	359536,873	0,921276223
10!	3628800	3598695,62	0,829596044
11!	39916800	39615625,1	0,754506748
12!	479001600	475687486	0,691879427
13!	6227020800	6187239475	0,638850039
14!	87178291200	8,6661E+10	0,593369579
15!	1,30767E+12	1,3004E+12	0,553933455
16!	2,09228E+13	2,0814E+13	0,519411959

17!	3,55687E+14	3,5395E+14	0,488940371
18!	6,40237E+15	6,3728E+15	0,461845573
19!	1,21645E+17	1,2111E+17	0,437595772
20!	2,4329E+18	2,4228E+18	0,415765262

En un salón hay 6 docentes y cuatro sillas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

En el primer asiento se puede sentar 6 personas, en el siguiente 5, el que sigue 4 y el último 3, dando como resultado 360.

Indicaciones al docente

Usando primero el principio multiplicativo, la primera silla puede ser ocupada por uno de los seis, luego un de los cinco restantes, cuatro y tres sucesivamente. Efectuando el producto se obtiene 360, lo que es equivalente a $\frac{6!}{2!}$.

¿Se facilitó el cálculo mediante el uso de la notación factorial?

Indicaciones al docente

En esta ocasión el docente debe introducir el concepto de variación definiéndolo como

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Así se permite simplificar la notación y el proceso de cálculo.

¿De cuántas maneras se pueden elegir 4 dulces de un total de 7?

En este caso, el docente debe introducir el concepto de combinación definiéndolo como

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

En este caso particular

$$C_4^7 = \frac{7!}{(7-4)! 4!} = \frac{7!}{3! 4!} = 35$$

Se tienen 35 opciones

Indicaciones al docente

En este caso, el docente debe introducir el concepto de combinación definiéndolo como

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

En este caso particular

$$C_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Se tienen 35 opciones.

Actividades de toma de decisiones

¿Qué pasaría con el aumento del parque automotriz con respecto a las patentes? Justifica tu respuesta

Indicaciones al docente:

Al aumentar el número de automóviles, es necesario aumentar el cantidad de patentes, por lo que en algún momento esta se acabarían. Aumenta la polución y mayor congestión.

¿Qué hacer cuando se acaben las patentes?

Indicaciones al docente:

Crear un nuevo modelo de patentes.

¿Qué criterios usarías para generar nuevas patentes?

Indicaciones al docente

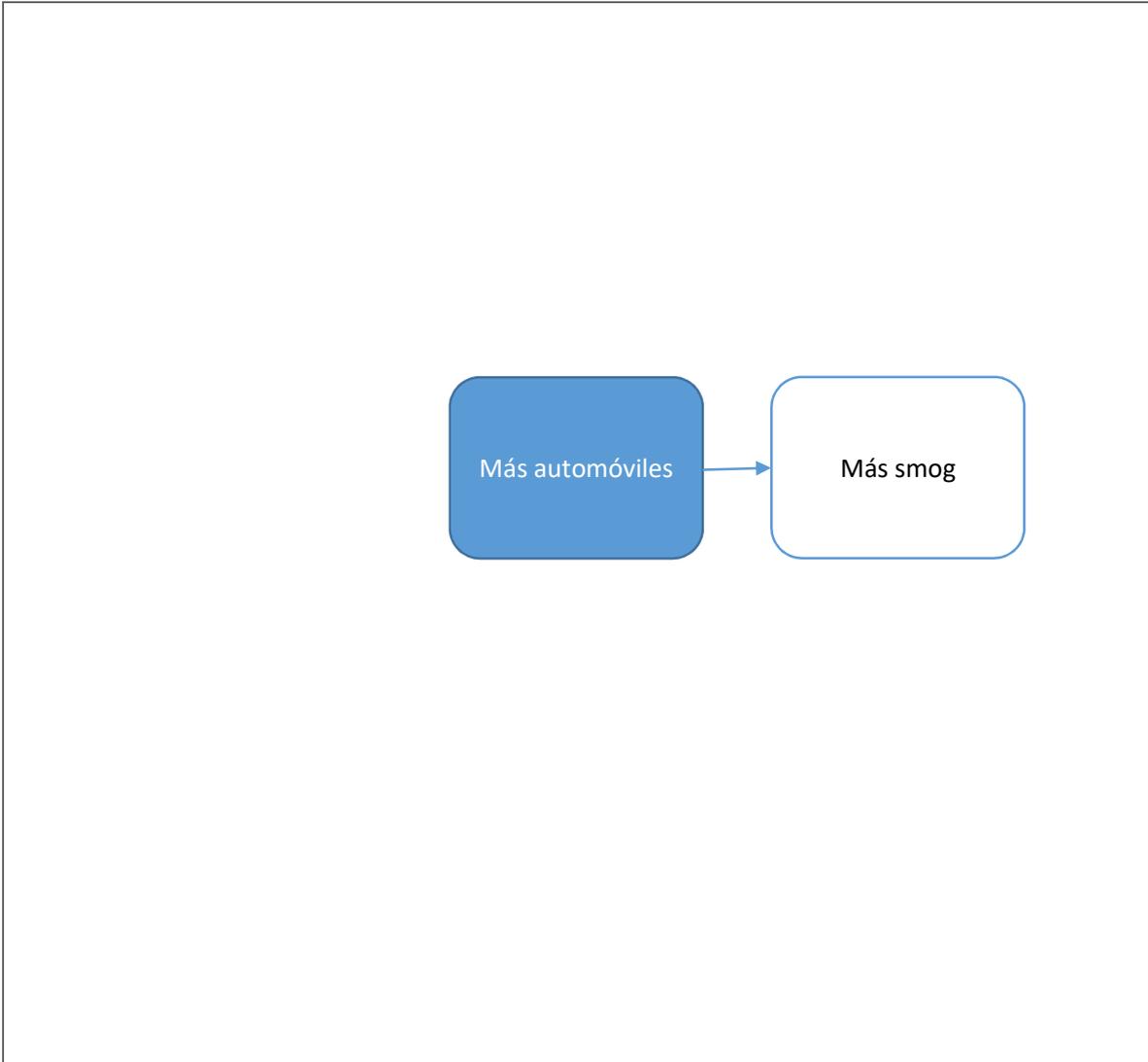
Crear un nuevo modelo. Puede crear a imaginación de los estudiantes y calcular cuantas se generan utilizando ese criterio

¿Qué me hace ser más responsable y solidaria cuando adquiera un nuevo vehículo?

Indicaciones al docente:

Adquirir vehículos eléctricos, compartir el vehículo con vecinos. Disminuir el tráfico.

Realice un diagrama de árbol que muestre cada consecuencia de cada acto. Te muestro un ejemplo.



Indicaciones al docente:

Se debe crear un mapa conceptual incluyendo factores, influyen en mayor contaminación, mayor congestión, mayor número de enfermos respiratorios, mayor congestión en cesfam y urgencias.

Sesión 3: Efecto de la radiación en la Tierra

Integrantes:

Objetivo: Mediante el trabajo en equipo, los estudiantes consolidarán contenidos de probabilidad clásica, para tomar conciencia sobre los efectos del cambio climático y de algunas de sus consecuencias.

Orientaciones al docente:

Se plantea los objetivos de la sesión 3 para saber qué enseñara el profesor y qué aprenderán los alumnos de ella. Está explícito al inicio de cada guía.

Se realiza una autoevaluación previa de los contenidos necesarios para el clima, que serán necesarios para realizar una lectura crítica mediante el escaneo de un código QR, de textos científicos para aplicar las propiedades de la probabilidad, y aplicarlos a la elaboración y expresión de un poster científico junto al docente de Artes Visuales para finalizarlos en una exposición a nivel de segundo medio.

A continuación se adjunta un cuestionario que tiene como objetivo conocer el estado actual de los conocimientos necesarios a tratar los temas en este documento.

Tabla Número 1: Determinación inicial de conocimientos para la sesión 3

	No lo sé	Creo que lo sé	Lo sé bien	Podría explicarlos a compañeros (as)
¿Conozco la diferencia entre tiempo y clima?				
¿Qué gases producen el efecto invernadero?				
¿Cómo se define el calentamiento global?				
¿Cómo ha contribuido el hombre al calentamiento global?				
¿Cuáles son las consecuencias del calentamiento global?				

Indicaciones al docente

Se adjunta una autoevaluación previa al inicio de sesión para ser que saben y lo que no. Se espera que sea una instancia de crecimiento intelectual y si es necesario se puede investigar sobre los temas accediendo a literatura científica leyendo con un teléfono el código QR.

Para acceder bibliografía en relación a los temas anteriormente consultados, acceda mediante la lectura del siguiente código QR



A continuación, se adjunta un extracto, que permitirá resolver las siguientes preguntas

El CO₂ que resulta de actividades humanas causa más del 65% del desbalance energético del planeta, por lo que es considerado el principal responsable del calentamiento global. El desbalance energético global ha aumentado más de 40% desde el año 1990, llegando a superar los 3 W/m²; el 80% de este incremento se debió al aumento de las emisiones de CO₂.

Actividad 3.1. Tomando conciencia del calentamiento global.

¿Cuál es la probabilidad de que el CO₂ haya incrementado el desbalance energético?

Corresponde al 0,8; lo que equivale al 80%

Recordar que la probabilidad de un evento cualquiera está comprendido entre 0 y 1. Esto dicho en porcentajes, este valor está comprendido entre 0% y 100%.

Para expresar un valor en porcentaje basta multiplicar el valor deseado por 100%

En cambio, para expresar un porcentaje en formato decimal, se debe dividir por 100 el número deseado.

¿Cuál es la probabilidad que lo haya provocado otros gases?

Como son mutuamente excluyentes, la suma de la probabilidad de que ocurra por medio del gas de CO₂ y otros gases deben sumar 1; lo que implica que la probabilidad que otros gases lo produzcan es

- a) 0,2, que equivale a (1 - 0,8)
- b) 20% equivalentemente 100% - 80%

¿Cuál es la probabilidad que el CO₂ que produce el efecto invernadero provenga del hombre?

Como ambos son eventos independientes, la probabilidad es igual al producto de las probabilidades $0,8 \cdot 0,65 = 0,52$;
Lo que equivale al 52%.

Indicaciones al docente

- a) Corresponde al 0,8; lo que equivale al 80%.
- b) Como son mutuamente excluyentes, la suma de la probabilidad de que ocurra por medio del gas de CO₂ y otros gases deben sumar 1; lo que implica que la probabilidad que otros gases lo produzcan es 0,2 o un 20%.
- c) Como ambos son eventos independientes, la probabilidad es $0,8 \cdot 0,65 = 0,52$; lo que equivale al 52%.

Actividad 3.2. ¿Qué relación tiene la disminución del agujero de ozono, los gases efecto invernadero y la radiación UV en el cambio climático?

Se sugiere reflexionar en grupo acerca de la existencia o no de una relación entre las variables mencionadas y el aumento de cáncer de piel a partir de evidencias.

¿Qué juego debe cumplir la electricidad cuyo origen sea de fuentes limpias o renovables y no de fuentes contaminantes?

Indicaciones al docente

Se invita a cada grupo una instancia de reflexión obteniendo algunas de las siguientes reflexiones: *El cambio climático provoca un aumento en la temperatura promedio del planeta, debido a la concentración de gases invernadero como el CO₂, aumentando el agujero de la capa de ozono de forma estacional (primavera) permitiendo el ingreso de radiación ultravioleta como UVA y UVB a la atmósfera, lo cual destruye células que permiten el desarrollo del cáncer a la piel.*

La energía eléctrica debe provenir de fuentes limpias o renovables para evitar la quema de combustibles fósiles ,y así la contaminación ambiental

Actividad 3.3: Comunicar sus resultados

A continuación, deben exponer algunos de los conocimientos adquiridos mediante la elaboración de un poster, que formaran de una exposición ante los otros cursos con ayuda del docente de Artes Visuales. Para ello deberán asegurarse que no coincidan con los temas.

Al final de la guía se adjunta se adjunta la rúbrica de evaluación del poster.

Indicaciones al docente

Se adjunta rubrica de evaluación para tener una evaluación más objetiva posible.

Categoría	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Insatisfactorio	Puntaje
	4 puntos	3 puntos	2 puntos	1 punto	0 puntos	
Título	El título del poster es adecuado, sugerente y coherente con el tema		El título es adecuado y poco coherente con el tema.		No existe título	
Redacción y ortografía	No presenta errores de ortografía y redacción	Presenta un error ortográfico o de redacción	Presenta dos errores ortográficos o de redacción	Presenta tres errores ortográficos o de redacción	Presenta cuatro o más errores de redacción o de ortografía	
Contenido	La información es precisa y concisa usando palabras claves	La información presentada de forma precisa, pero no usa léxico adecuado	Presenta información relevante pero no es clara.	La información entregada es muy ambigua	No presenta contenidos	
Argumentación	Todos argumentos son conectados con el contenido y son convincentes	Argumentos más convincentes, pero falta algunas interrelaciones entre estos.	Presenta argumentos pocos coherentes e interrelacionados	Argumentación incompleta o poco persuasiva	No presenta argumentos convincentes	
Clima del equipo de trabajo en la exposición.	Favorece ambiente de respeto mutuo Escucha y respeta las opiniones de los integrantes en un ambiente calmo y constructivista	Se escuchan entre sí sus opiniones en un clima de aceptación y tranquilo pero sus ideas no están enlazadas.	Las opiniones son vagas y sin enlazar.	El equipo no considera las opiniones de sus integrantes	No se escuchan ni respetan las opiniones de otros. Los integrantes desarrollan conflictos entre sí y sin aportar soluciones a ello.	
Originalidad	Presenta un afiche creativo, único y poco convencional		Presenta novedades en la exposición del poster		No presenta novedades comparado con otros posters.	
Entrega a tiempo	Cumple con la fecha de entrega para elaborar la exposición		Entrega el poster en plena instalación de la exposición.		No entrega el afiche a la fecha pedida	
			Puntaje ideal	28	Puntaje obtenido	

A continuación, se adjunta tabla para medir el avance del aprendizaje sobre el cambio climático.

Actividad de toma de decisiones.

Completa el diagrama según las consecuencias que trae cada tópico. Te muestro un ejemplo



Indicaciones al docente:

Centro peatonal implica se aumenta la cantidad de ejercicios a realizar, mayor caminata, se forma una bioda menos sedentarias, auemta la ocmpra de zapatillas, salen menor numero de vehiculosa la calle.

Tabla Número 2: Determinación inicial de conocimientos para la sesión 3

	No lo sé	Creo que lo sé	Lo sé bien	Podría explicarlos a compañeros (as)
¿Conozco la diferencia entre tiempo y clima?				
¿Qué gases producen el efecto invernadero?				
¿Cómo se define el calentamiento global?				
¿Cómo ha contribuido el hombre al calentamiento global?				
¿Cuáles son las consecuencias del calentamiento global?				

Indicaciones al docente

Se espera que al comparar la primera autoevaluación con esta última, haya un proceso de aprendizaje en esta sesión.

ANEXO D: GLOSARIO SOBRE DEFINICIONES EN EL ÁREA DE LAS PROBABILIDADES

La definición axiomática de la probabilidad considera la probabilidad como una función medible definida en un espacio probabilístico y acotada en el intervalo $[0, 1]$

La asignación de probabilidad a cada uno de los sucesos considerados debe ser coherentes con las operaciones lógicas entre los sucesos. Los axiomas de Kolmogorov establecen, en 1993, las reglas para ello.

Sean (Ω, \mathcal{A}) el espacio medible asociado a un experimento aleatorio. Se entenderá experimento aleatorio cualquier quehacer que cada vez que se realiza se obtiene un resultado entre varios posibles.

Todos los distintos resultados del experimento que se dan forman un conjunto denominado Espacio Muestral, denotado por Ω y cada uno de los subconjuntos de Ω se denominan evento o suceso.

Una función $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (medida de probabilidad) sobre (Ω, \mathcal{A}) si verifica:

- 1.- Axioma de no negatividad: $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
- 2.- Axioma del suceso seguro: $P(\Omega) = 1$
- 3.- Axioma sigma-aditividad: Si $A \cap B = \emptyset$. Entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propiedades que se deducen de los axiomas

- 1.- $P(\emptyset) = 0$ (suceso imposible)
- 2.- Para cualquier evento $P(A) \leq 1$
- 3.- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 4.- Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 5.- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Concepto clásico de probabilidad: $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$, donde la cardinalidad de A representa el número de casos posibles, o bien, los que satisfacen la condición A. En cambio, # representa la cardinalidad del espacio muestral.

Significado clásico: Regla de Laplace. Proporción entre casos favorables y casos posibles. Es necesaria equiprobabilidad y en el caso finito.

Significado frecuencial: Es el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetitividad del ensayo. (Este valor es aproximado y puede variar tras la experimentación)

Significado subjetivo: definido con grados de creencia subjetivos basados en el conocimiento y experiencia personal.

Técnicas de conteo

- a) Regla del producto: Si un suceso P puede ocurrir de **a** maneras y cada una de estas ocurre **b** maneras que puede ocurrir el suceso Q, entonces el evento P y Q ocurre **ab** maneras

- b) Permutaciones de **n** elementos: posibles ordenaciones de un conjunto de **n** elementos distintos seleccionándolos todos. $P_n = n!$
- c) Variaciones: muestras ordenadas de **r** elementos de un total de **n**. $V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$
- d) Combinaciones: cantidad de muestras que no considera orden de **r** elementos de un total de **n**.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Variable aleatoria

Se define variable aleatoria como una función con dominio el espacio muestral de un experimento aleatorio y con recorrido un subconjunto de los números reales.

Variable aleatoria discreta: es aquella con recorrido con cardinalidad finita o infinita numerable.