

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



# Ensanchamiento de Sommerfeld y Aniquilación de Materia Oscura

Dante Adán Cárcamo Zapatel

Profesor Guía:  
Dr. Jorge Felipe Gamboa Ríos

Tesis para optar al grado de  
Doctorado en Ciencia con Mención en Física

Santiago, Chile

2018

© Dante Adán Cárcamo Zapatel

Licencia Creative Commons Atribución No-Comercial Chile

## Ensanchamiento de Sommerfeld y Aniquilacion de Materia Oscura

Este trabajo de graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Jorge Gamboa Ríos, del Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile, y ha sido aprobado por los miembros de la comisión examinadora.

Dr. Jorge Gamboa	.....
Dr. Paola Arias	.....
Dr. Mikhail Plyushchay	.....
Dr. Marcelo Loewe	.....
Dr. Benjamin Koch	.....

.....

Director del Departamento de Física

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi profesor guía Dr. J. Gamboa, mi co-tutor Dr. F. Méndez, y además a todas las personas que trabajaron conmigo en los artículos que dieron la base para la realización de este trabajo.

También al Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile por el apoyo académico y económico brindado durante mi estancia.

Finalmente, agradecer a CONICYT por el soporte económico realizado durante el periodo del doctorado mediante la beca de doctorado nacional 21140036.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>v</b>
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	VIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Detección indirecta de materia oscura</b>	<b>4</b>
<b>3. Universo temprano</b>	<b>9</b>
3.1. Definiciones básicas . . . . .	9
3.2. Expansión del Universo . . . . .	11
3.3. Entropía . . . . .	13
3.4. Distribuciones en equilibrio . . . . .	14
3.4.1. Límite ultrarelativista . . . . .	15
3.4.2. Límite no-relativista . . . . .	16
<b>4. Ecuación de Boltzmann</b>	<b>17</b>
4.1. Ecuación de Boltzmann . . . . .	18
4.1.1. Solución de la ecuación de Boltzmann . . . . .	22
4.2. Densidad de reliquia . . . . .	24
4.3. Incluyendo el ensanchamiento de Sommerfeld . . . . .	24
<b>5. Elementos de teoría de scattering</b>	<b>26</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
5.1. Sección eficaz . . . . .	26
5.2. Cálculo de la sección eficaz . . . . .	28
5.3. Forma asintótica de estados de scattering estacionarios. Amplitud de scattering . . . . .	28
5.4. Relación entre $\sigma(\theta, \phi)$ y $f(\theta, \phi)$ . . . . .	29
5.5. Ondas parciales . . . . .	30
5.5.1. Sección eficaz a partir del phase shift . . . . .	31
5.6. Forma integral de la ecuación de Schrödinger . . . . .	32
<b>6. Ensanchamiento de Sommerfeld</b>	<b>34</b>
6.0.1. Saturación . . . . .	36
6.0.2. Contribución radiativa . . . . .	36
6.0.3. SE en el Universo temprano . . . . .	38
<b>7. Potenciales nucleares</b>	<b>39</b>
7.1. Características . . . . .	40
7.1.1. Observación experimental . . . . .	40
7.1.2. Consideraciones teóricas . . . . .	41
7.2. Potenciales nucleares y materia oscura . . . . .	41
<b>8. Potencial no-relativista</b>	<b>43</b>
8.1. Intercambio de partículas virtuales . . . . .	43
8.2. Construcción de potenciales . . . . .	44
8.2.1. Fermiones pesados y bosones masivos . . . . .	45
8.2.2. Fermiones livianos y bosones masivos . . . . .	50
<b>9. Ejemplos de ensanchamiento de Sommerfeld</b>	<b>53</b>
9.1. Potencial Coulomb . . . . .	54
9.1.1. Densidad de reliquia del potencial Coulomb . . . . .	55
9.2. Potencial Yukawa . . . . .	56
9.2.1. Comparación con el universo temprano . . . . .	60
9.3. Interacción espín-espín . . . . .	61

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
9.4. Potencial exponencial . . . . .	62
9.4.1. Estados ligados . . . . .	64
9.5. El potencial $\delta$ tri-dimensional y el neutrino como materia oscura .	65
9.5.1. Solución de scattering . . . . .	67
9.5.2. Estados ligados . . . . .	69
<b>10. Restricción mediante densidad de reliquia</b>	<b>71</b>
10.1. Modelo simple . . . . .	71
10.2. Boost factor . . . . .	72
<b>11. Conclusión</b>	<b>76</b>
<b>12. Apéndice</b>	<b>78</b>
12.1. Código en Mathematica del gráfico ensanchamiento de Sommerfeld para el potencial Yukawa atractivo . . . . .	78
12.2. Regularización de integrales . . . . .	79
12.2.1. Regularización por cut-off . . . . .	79
12.2.2. Regularización dimensional . . . . .	79
12.3. Sistema de dos partículas . . . . .	80
12.3.1. Sistema clásico . . . . .	80
12.3.2. Sistema cuántico . . . . .	81

# Índice de figuras

2.1. Diferentes mecanismos de detección de materia oscura. . . . .	5
2.3. Experimento EGRET. . . . .	6
2.4. WMAP Haze: Componente de microondas de origen desconocido. . . . .	7
5.1. Esquema general del scattering. . . . .	27
5.2. Definición de sección eficaz. . . . .	29
6.1. Potencial central $V(r)$ añadido a una interacción puntual. . . . .	34
6.2. Diagrama de aniquilación de materia oscura mediante un boson $\phi$ . . . . .	37
8.1. Scattering fermión-fermión. . . . .	46
8.2. Interacción de contacto a tree-level. . . . .	50
9.1. Ensanchamiento $S$ en función de $v/c$ . . . . .	55
9.2. Gráfico $\alpha$ vs $m_\chi$ que reproducen $\Omega_\chi = 0,26$ . . . . .	56
9.3. Ensanchamiento $S$ en función de la masa (TeV) a distintas velocidades. . . . .	58
9.4. Ensanchamiento $S$ en función de la masa (TeV), con un rango de masa: 1 GeV-100 TeV . . . . .	58
9.5. Contornos de ensanchamiento $S$ del potencial Yukawa. . . . .	59
9.6. Contornos de ensanchamiento $S$ del potencial Yukawa de la fracción $m_\phi/M_\chi$ vs acoplamiento $\alpha$ . . . . .	60
9.7. SE para una velocidad $10km/s$ . . . . .	61
9.8. Ensanchamiento $S$ en función de la masa (TeV). . . . .	65

9.9. Ensanchamiento de Sommerfeld (SE) del potencial delta en función de la velocidad. . . . .	68
10.1. Esquema del modelo de aniquilación de materia oscura. . . . .	72
10.2. Acoplamiento en la aniquilación de materia oscura restringido por la densidad de reliquia térmica. . . . .	74
10.3. Boost factor vs masa $m_\chi$ junto a las regiones permitidas en el ajuste a experimentos AMS-02 y Fermi-LAT. . . . .	75
10.4. Boost factor vs masa $m_\chi$ junto a las regiones permitidas en el ajuste a experimentos AMS-02 y Fermi-LAT. . . . .	75

# Resumen

La existencia de un exceso de positrones en los rayos cósmicos provenientes del centro galáctico fue reportado por PAMELA en el rango de energías 10-100 GeV, para posteriormente ser confirmado por Fermi-LAT y extendido el rango de energía a 200 GeV. Recientemente se ha vuelto a confirmar con mayor precisión por AMS. La interpretación de este fenómeno como aniquilación de materia oscura parece ser muy convincente. El hecho que la aniquilación dependa de la velocidad de dispersión de las partículas motiva la existencia del mecanismo ensanchamiento de Sommerfeld, que además explica que el efecto relevante se lleva a cabo durante el tiempo presente. Derivamos potenciales no relativistas para materia oscura fermiónica, para luego postularlos como interacción de materia oscura, sea pesada y liviana, calculamos el factor de ensanchamiento, para luego estudiar su efecto en la densidad de reliquia térmica de materia oscura.

# Abstract

The existence of an excess of positrons in the cosmic rays from the galactic center was reported by PAMELA in the energy range 10-100 GeV, subsequently be confirmed by Fermi-LAT and extended the energy range to 200 GeV. Recently it has been confirmed again with greater precision by AMS. The interpretation of this phenomenon as an annihilation of dark matter seems to be very convincing. The fact that the annihilation depends on the speed of dispersion of the particles motivates the existence of the mechanism Sommerfeld enhancement, which also explains that the relevant effect is carried out during the present time. We derive non-relativistic potentials for fermionic dark matter, then postulate them as dark matter interaction, be heavy and light, we calculate the enhancement factor, to then study its effect on the thermal relic density of dark matter.

# Capítulo 1

## Introducción

Las observaciones astronómicas indican que existe más materia de la que puede ser asociada con la parte luminosa de galaxias. Este problema abre una puerta hacia una física más allá del modelo estándar [1]-[4], la materia oscura.

Dentro de las motivaciones en el estudio de la materia oscura se encuentra la amplia evidencia de ésta: desde las curvas de rotación de galaxias, los lentes gravitacionales como también a la observación, mediante distintos detectores satelitales, de fenómenos provenientes del centro galáctico de: 1) radiación gamma de alta energía que no puede ser atribuida a explosiones de supernova o a colisiones de rayos cósmicos [5], 2) el exceso de pares electrón-positrón en rayos cósmicos que supera lo esperado [6]-[9], y 3) la observación de una componente de radiación de microondas no atribuibles a los diferentes mecanismos conocidos [10].

Una explicación natural al origen de este fenómeno (aunque no definitiva) es que básicamente ocurre una gran producción de pares electrón-positrón en el centro galáctico [11], los cuales pueden ser atribuidos a la aniquilación de materia oscura [12]-[14] a través de procesos que van más allá del modelo estándar [11, 17].

Datos obtenidos de detectores de rayos cósmicos PAMELA, ATIC requiere la presencia de WIMP con masas  $M \sim 500 - 800$  GeV que se aniquilen para finalmente exista una producción de leptones. Por ello se hace necesario una búsqueda de nuevas fuerzas, de largo alcance, en el sector oscuro que permita un

incremento en la aniquilación de materia oscura. Si la materia oscura se aniquila en el portador de la fuerza, además siendo liviano, éste puede decaer a leptones, a través de algún acoplamiento con el modelo estándar.

Una consecuencia de la introducción de una nueva fuerza es que la sección eficaz de aniquilación sea aumentada de un modo consistente con las observaciones. Un mecanismo ha sido propuesto por Arkani-Hamed y otros [18]-[21] y es consecuencia del llamado ensanchamiento de Sommerfeld ( $S$ ), donde la densidad de probabilidad de la función de onda en  $\mathbf{x} = 0$  es ensanchada debido a la presencia de un potencial [22].

Como la materia oscura es esencialmente no bariónica e interactúa a bajas energías, se puede observar analogías con física nuclear, que pueden ser válidas al menos como teorías efectivas [23]. En este contexto potenciales fenomenológicos de física nuclear podrían ser útiles en la descripción dinámica de materia oscura fría.

Por otro lado, aún no se conoce el tipo de partícula que domina la materia oscura y cuales son los mecanismos de producción o aniquilación de ellas.

Actualmente sabemos que los neutrinos (presente en su mayor parte como neutrinos del fondo cósmicos (CNB)<sup>1</sup> tienen masa [24, 25], sin embargo ésta es muy pequeña y muy restringida por datos astrofísicos [26, 27], por lo tanto se puede considerar el CNB como una pequeña proporción de la materia oscura, los cuales estando en su mayoría a bajas energías, los vuelve muy difícil de detectar [28]-[30].

En este trabajo se estudia el mecanismo de ensanchamiento de Sommerfeld para materia oscura fría, estudiando potenciales no relativistas en el contexto de mecánica cuántica, calculamos los factores de ensanchamiento y estados ligados para cada caso, esta sección está basada en los artículos:

- D. Cárcamo, A. Riveros and J. Gamboa, *Analogies between nuclear physics and Dark Matter*, Mod.Phys.Lett. A **29**, 39 (2014), 1450209 [arXiv:1411.1309 [hep-ph] [31].

---

<sup>1</sup>En ingles: cosmic neutrino background.

- D. Cárcamo, J. Gamboa and M. Pino, *Higgs Model Coupled to Dark Photons*, Mod.Phys.Lett. A **30**, 07 (2015), 1550030 [arXiv:1409.3590 [hep-ph] [32].

También estudiamos el scattering de neutrinos del CNB, explorando una posible interacción sujeta a los requerimientos: i) una interacción de contacto y ii) se ve las posibilidades sean repulsiva o atractiva. Si la interacción es atractiva, se estudia la posibilidad de estados ligados, esta sección está basada en el artículo:

- D. Cárcamo, J. Gamboa, F. Méndez, A. Das and A. Polychronakos, *Cosmic Four-Fermion Neutrino Secret Interactions, Enhancement and Total Cross Section*, Phys. Rev. D **91**, 065028 (2015) [arXiv:1410.8089 [hep-ph]] [33].

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: Se comienza con una motivación, indicando las mediciones relevantes que justifican la introducción de un nuevo mecanismo de aniquilación de materia oscura. Después se hace un repaso de conceptos de reliquia térmica y teoría de scattering. Posteriormente se hace una derivación de potenciales no relativistas y estudiamos el ensanchamiento de Sommerfeld de algunos potenciales aplicado a materia oscura fermiónica. Finalmente se muestra un método que restringe el ensanchamiento de Sommerfeld mediante la densidad de reliquia.

## Capítulo 2

# Detección indirecta de materia oscura

Los experimentos que buscan detectar materia oscura están dirigidos básicamente hacia cualquiera de los tres mecanismos diferentes: 1) Detección directa: Experimentos de scattering, tales como Xenon1T, LUX, y PandaX intentan detectar un intercambio de momentum entre partículas del modelo estándar (Xenon nuclei) y materia oscura. 2) Detección indirecta: Detectores satelitales que buscan detectar materia oscura indirectamente examinando rayos gamma o rayos cósmicos de alta energía que tengan un origen desconocido, tales rayos podrían ser causa de procesos de materia oscura, particularmente aniquilación. 3) La producción de materia oscura podría ocurrir en experimentos de colisionador, tales como LHC. Siempre que se produzca materia oscura en un colisionador, se esperaría ver un defecto de energía, ya que la materia oscura habrá dejado el colisionador sin interactuar. La energía y el momentum faltante se pueden usar para determinar la masa de la partícula de materia oscura producida.

Un esquema grafico de los diferentes mecanismos se muestra en la Fig. 2.1.

Este trabajo está motivado por ciertos experimentos de detección indirecta, es por esto que nos detendremos para explicarlos. Básicamente son detectores satelitales de rayos gamma y rayos cósmicos que encuentran señales, provenientes del centro galáctico, que no son atribuibles a fenómenos conocidos. Los experimentos

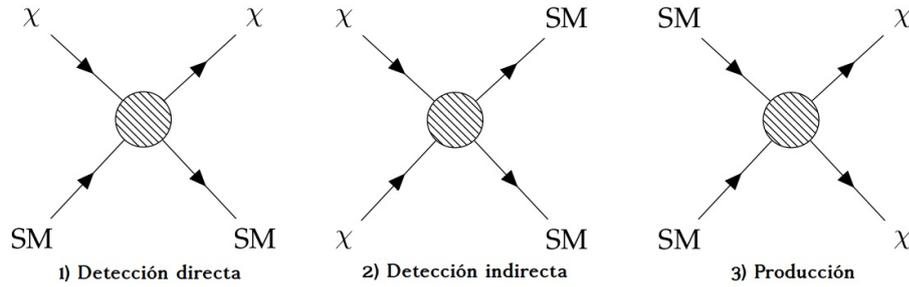


Figura 2.1: Diferentes mecanismos de detección de materia oscura.

son:

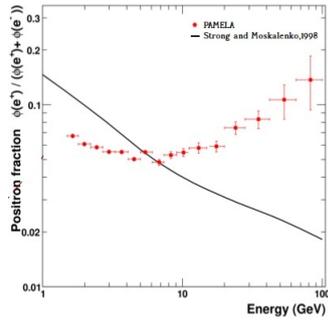
PAMELA (The Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics)

Es un detector de rayos cósmicos, que puede detectar partículas y antipartículas, hasta energías del orden TeV, mediante un campo magnético interno. Se ha reportado una fracción de concentración de positrones, en el rango de energía 10-100 GeV, en rayos cósmicos interactuando con el medio interestelar [6], muy por sobre lo esperado en modelos de composición de rayos cósmicos [34, 35]. La fig. 2.2a muestra la fracción de positrones medida (en puntos) sobre los modelos esperados (curva continua). Una posible explicación para este fenómeno es la aniquilación de materia oscura en pares  $e^+$ ,  $e^-$ , pero esto requiere una sección eficaz grande.

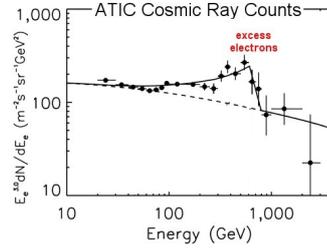
ATIC (The Advance Thin Ionization Calorimeter)

Es un detector de rayos cósmicos que estudia electrones y positrones hasta energías del orden TeV. Los electrones en general pierden rápidamente energía a través de radiación de sincrotrón y procesos Compton inverso, decayendo en intensidad rápidamente. Se ha reportado un exceso de electrones a energías  $\sim 300 - 800$  GeV [7]. La fig. 2.2b muestra la intensidad (flujo por la energía) de electrones en función de la energía, se observa el rango de energía en que electrones son mas energéticos de lo esperado. Lo cual podría ser un objeto astrofísico que acelere electrones a aquellas energías o que estos electrones surjan mediante la aniquilación de materia oscura.

AMS (Alpha Magnetic Spectrometer)



(a) Experimento PAMELA.



(b) Experimento ATIC.

También detector satelital de rayos cósmicos ha medido recientemente la fracción de positrones basado en recolección de alrededor de  $6 \times 10^6$  eventos con una precisión mucho mayor a los experimentos anteriores [9].

EGRET (Energetic Gamma Ray Experiment Telescope)

Detector de rayos gamma altamente energéticos. Mide radiación provenientes de distintas direcciones de la galaxia. Ejemplo de fuentes conocidas de rayos gamma son Supernova, Pulsares, Quasar, etc. En particular, mediciones de rayos gamma provenientes desde el centro galáctico muestra una radiación de origen desconocido en un rango de energías de 10 – 50 GeV [5]. La Fig. 2.3 muestra el número de detecciones de rayos gamma en direcciones latitud y longitud del sistema coordinado galáctico en el rango de energía GeV. Una explicación sería que los rayos gamma surgen de scattering Compton inverso de electrones y positrones de alta energía y la radiación de microondas (CMB). A su vez estos electrones pueden surgir mediante la aniquilación de materia oscura, o que la aniquilación de materia oscura pueda producir directamente rayos gamma.

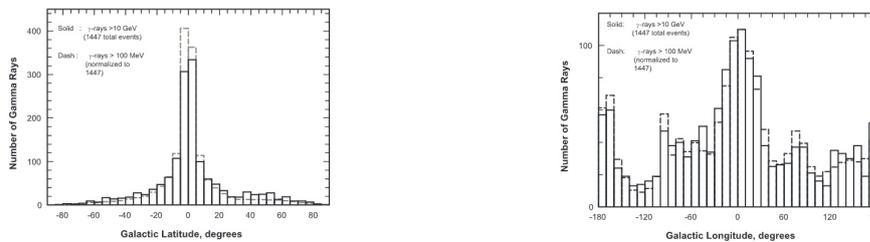


Figura 2.3: Experimento EGRET.

WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)

En el estudio de emisión de microondas, se encuentra una fuerte componente desde el centro galáctico no asociada a los otros mecanismos conocidos [10]: tales como emisión free-free (o radiación de frenado o Bremsstrahlung), emisión de sincrotrón, emisión polvo estelar y por último el fondo de microondas CMB. La fig. 2.4 muestra ésta componente de microondas (es decir: se restan las otras componentes mencionadas del total de microondas observadas) en el rango de energía 2 – 5 GeV.

Esta fuente de radiación extra podría ser explicada como radiación de sincrotrón de electrones y positrones altamente energético surgidos de aniquilación de materia oscura en el centro galáctico [36].

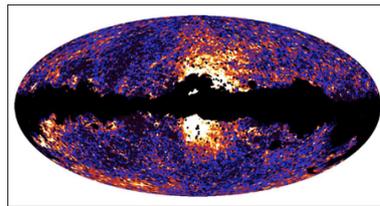


Figura 2.4: WMAP Haze: Componente de microondas de origen desconocido.

## INTEGRAL

La señal de fotones de 511 keV de energía, proveniente desde el centro galáctico, encontrada hace 40 años fue confirmada por el satélite INTEGRAL en 2002. La aniquilación de pares  $e^+, e^-$  no-relativistas es la idea mas aceptada. Existen ideas recientes para explicar la abundancia de estos pares ejemplo que surjan directamente de la aniquilación de materia oscura liviana, o también de de aniquilación de materia oscura excitada, y que la diferencia de energía lleve a esta emisión [11], este tema va mas allá de este trabajo.

Una posible explicación de la combinación de estos experimentos se encuentra en teorías mas allá del modelo estándar, y es que la abundancia de los pares  $e^+, e^-$  se debe a la aniquilación de materia oscura.

Dentro del marco de búsqueda de materia oscura, un ingrediente muy interesante es la presencia de un bosón mediador, el cual puede ser escalar, pseudoescalar o vector, de una nueva fuerza para la interacción de materia oscura. Esto

debido a que puede modificar la sección eficaz de aniquilación de partículas de materia oscura, ensanchandola, mediante el mecanismo llamado ensanchamiento de Sommerfeld y por otro lado se abre la posibilidad del decaimiento de materia oscura a este bosón mediador, el cual siendo mas liviano puede ser estable.

Si además consideramos un acoplamiento de este mediador con el modelo estándar, muy pequeño, éste puede decaer a partículas del modelo estándar. Concretando de esta forma la explicación a los experimentos anteriormente señalados.

En la actualidad, se han propuesto distintos modelos que acoplan partículas de materia oscura con modelo estándar. Si es vector ( $X^\mu$ ), éste puede interactuar con bosones de gauge del modelo estándar mediante el acoplamiento  $\kappa F_{\mu\nu}(X)F(A)^{\mu\nu}$ , llamado kinetic mixing. Si es escalar ( $\phi$ ), éste puede comunicarse con el Higgs del modelo estándar mediante el acoplamiento  $\lambda_\kappa \phi^2 h^2$ , llamado acoplamiento portal. En cualquier caso el valor de  $\kappa$  debe ser muy pequeño en comparación a algún acoplamiento similar del modelo estándar.

# Capítulo 3

## Universo temprano

El objetivo más importante de la cosmología en la actualidad es la determinación del valor y la composición de la densidad de energía del universo [1]-[4]. Ha sido evidente durante décadas que la componente dominante es “oscura”, es decir, no está en formas, como estrellas o gas, que absorben y emiten radiación electromagnética.

En las últimas décadas, con el advenimiento de una teoría precisa de la nucleosíntesis (BBN) de los elementos ligeros, se ha vuelto cada vez más claro que la mayoría de esta densidad de energía oscura no es bariónica [2]. En las últimas dos décadas, se ha argumentado que la mayor componente de esta densidad de energía puede no estar en forma de materia, sino en una densidad de energía de vacío o campo escalar omnipresente. Aunque esta “energía oscura” puede ser la componente mayoritaria en la evolución del universo, los argumentos a favor de una fuerte participación minoritaria por parte de la materia oscura no bariónica también se han fortalecido. La identidad de esta componente sigue siendo una interrogante sin resolver.

### 3.1. Definiciones básicas

Cuando se estudia la evolución del Universo, se debe definir parámetros claves, los cuales se enumeran a continuación:

- La constante de Hubble  $H_0$  describe la expansión del Universo<sup>1</sup>. Dos objetos en cualquier parte en el Universo se mueven lejos del otro con una velocidad proporcional a su distancia, ésta es la llamada ley de Hubble:

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} = 67,4 \frac{km}{sMpc}. \quad (3.1)$$

Generalmente, es más cómodo trabajar en función de un parámetro adimensional, de este modo, se define

$$h = \frac{H_0}{100 \frac{km}{sMpc}}. \quad (3.2)$$

- La constante cosmológica  $\Lambda$ , describe la mayor parte del contenido de energía del Universo,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (3.3)$$

- El contenido de materia del Universo, el cual cambia en el tiempo, está definido en función de la densidad de masa  $\rho_m$  y la densidad crítica  $\rho_c$ .

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}. \quad (3.4)$$

Si se estudia el universo temprano, se necesita considerar la suma de contenido de materia relativista o radiación  $\Omega_r$  y materia no-relativista  $\Omega_m$ .

Actualmente, podemos separar el contenido bariónico<sup>2</sup>  $\Omega_b$  de materia no-relativista del Universo. El contenido restante de materia es materia oscura  $\Omega_\chi$

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_c}, \quad \Omega_\chi = \Omega_m - \Omega_b. \quad (3.5)$$

En complemento, debemos definir la densidad crítica  $\rho_c$ , es la densidad de la materia en el Universo necesaria para detener la expansión del mismo en un

---

<sup>1</sup>La constante de Hubble es el valor actual del parámetro de Hubble, el cual depende del tiempo del Universo.

<sup>2</sup>Este contenido de materia está presente principalmente en forma de átomos y moléculas constituyendo estrellas, planetas y otros objetos astrofísicos.

tiempo infinito. Ésta se puede estimar clásicamente, mediante la velocidad de escape  $v_{esc}$  de una partícula de masa  $m$  en un campo gravitacional

$$\frac{mv_{esc}^2}{2} = \frac{GmM}{r} = \frac{Gm\frac{4\pi r^3}{3}\rho_c}{\frac{v_{esc}}{H_0}} = \frac{\frac{mr^3}{6M_{Pl}^2}\rho_c}{\frac{v_{esc}}{H_0}}, \quad (3.6)$$

donde se utiliza la ley de Hubble, la masa de Planck  $M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$  y además ocupamos la densidad de una esfera  $M = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_c$ . Despejando  $v_{esc}$  y usando nuevamente la ley de Hubble

$$(H_0 r)^3 = v_{esc}^3 = \frac{H_0 \rho_c}{3M_{Pl}^2} r^3,$$

del cual obtenemos la densidad crítica

$$\rho_c = 3M_{Pl}^2 H_0^2. \quad (3.7)$$

De acuerdo a reportes de materia oscura[16]  $\Omega_\chi h^2 = 0,1198$ , los cuales también reportan  $H_0 = 67,8 \frac{km}{sMpc}$ , con lo cual obtenemos  $\Omega_\chi = 0,26$ . Y además podemos calcular la densidad crítica  $\rho_c \approx 4,9 \times 10^{-6} \text{ GeV}/cm^3$ .

## 3.2. Expansión del Universo

El Universo siempre ha estado expandiéndose desde el Big Bang. La expansión puede ser descrita por el factor de escala cósmica  $a(t)$ , el cual describe como la distancia entre puntos en reposo con respecto al otro evoluciona en el tiempo debido a la expansión del Universo. De este modo se define el parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (3.8)$$

A tiempos tempranos, el universo era homogéneo e isotrópico, así la métrica es Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (3.9)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica FLRW,  $k$  es 0,1 o -1, para un espacio Euclídeo, esférico e hiperbólico respectivamente.

La materia en un universo así se asemeja a un fluido perfecto<sup>3</sup>, y se puede modelar como tal. Incluso hoy, esta sigue siendo una aproximación válida para cálculos a escala cosmológica. El tensor energía y momentum de un fluido perfecto es

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

donde  $u^\mu$  es la velocidad del fluido.

Para el caso  $k = 0$ , la métrica FLRW se puede escribir como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.11)$$

entonces el tensor métrico está dado por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t)). \quad (3.12)$$

En el sistema de referencia del fluido  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ , entonces tenemos

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p). \quad (3.13)$$

La conservación del tensor energía y momentum ( $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ ) da la ecuación de continuidad de  $\rho$  para un Universo en expansión.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.14)$$

La evidencia que se tiene actualmente indica que los cuatro constituyentes principales del universo son: energía oscura representada por la constante cosmológica, materia oscura, radiación, neutrinos y bariones. La ecuación de estado

---

<sup>3</sup>Fluido de viscosidad nula, incompresible y deformable cuando es sometido a tensiones cortantes por muy pequeñas que éstas sean.

para estas cantidades es una ecuación del tipo

$$p = w\rho, \quad (3.15)$$

donde  $w = -1, 1/3, 1/3, 0$  para la energía oscura, radiación, neutrinos y bariones respectivamente.

### 3.3. Entropía

De la primera ley de la termodinámica tenemos para un sistema

$$U(S, V, N) = TS - pV + \mu N, \quad (3.16)$$

donde  $U$  es la energía interna,  $V$  el volumen,  $T$  la temperatura,  $p$  la presión,  $N$  número de partículas, y  $\mu$  potencial químico del sistema. Donde  $S, V, N$  son cantidades extensivas<sup>4</sup>, mientras que  $T, p, \mu$  son cantidades intensivas.

La densidad de entropía  $s = S/V$

$$s = \frac{\rho + p - \sum_i \mu_i n_i}{T}, \quad (3.17)$$

donde la suma es sobre cada partícula  $i$  presente en el sistema.

Para determinar el cambio en la entropía en el tiempo consideramos la segunda ley de la termodinámica. La cual básicamente establece que un sistema, en un estado en equilibrio termodinámico, evolucionará hacia un estado que maximice su entropía.

Dado que nuestro universo solo se ha enfriado desde el Big Bang, la temperatura  $T$ , que es una función decreciente del tiempo  $t$ , y por lo tanto, se puede usar como un parámetro de evolución gobernante. Cuando la segunda ley es aplicado

---

<sup>4</sup>Si se escala tal cantidad entonces la energía también se escala en la misma cantidad:  $U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N)$ .

a un elemento de volumen comóvil en equilibrio térmico, dicta que

$$dS = \frac{1}{T}(d(\rho V) + p dV), \quad (3.18)$$

la cual puede escribirse como

$$dS = \frac{1}{T}(d((\rho + p)V) - V dp).$$

Por lo tanto,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \left( \frac{d((\rho + p)V)}{dt} - V \frac{dp}{dt} \right) = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho + p}{T} \frac{dV}{dt} = \frac{V}{T} (\dot{\rho} + 3H(\rho + p)) = 0, \quad (3.19)$$

por lo tanto, para un fluido perfecto la entropía es conservada.

### 3.4. Distribuciones en equilibrio

Si las partículas intercambian energía y momentum eficientemente, el sistema está en equilibrio cinético. Si las partículas están en equilibrio químico, entonces para un proceso  $a+b \leftrightarrow c+d$ , los potenciales químicos satisfacen  $\mu_a + \mu_b \leftrightarrow \mu_c + \mu_d$ .

El equilibrio térmico<sup>5</sup> es alcanzado cuando se tiene simultáneamente equilibrio cinético y químico.

La densidad numérica  $n_i$  de una partícula relativista  $i$  con energía  $E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$  está dada por

$$n_i = g_i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_i(\mathbf{p}), \quad (3.20)$$

donde la función de distribución, en equilibrio térmico, puede ser Fermi-Dirac (FD) o Bose-Einstein (BE) dependiendo de la naturaleza estadística de la partícula  $i$ , y está dada por

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\frac{E_i(\mathbf{p}) - \mu_i}{T_i}} \pm 1}, \quad (3.21)$$

---

<sup>5</sup>Macroscópicamente: es el estado en el cual se igualan las temperaturas de dos cuerpos, las cuales inicialmente eran diferentes, suspendiéndose el flujo de calor. No implica que haya contacto entre los cuerpos como queda establecido en la ley cero de la termodinámica.

donde  $g_i$  número de grados de libertad interno de la partícula,  $\mu_i$  el potencial químico, (+) corresponde a la estadística FD y (-) a la estadística BE.

En el límite clásico las distribuciones se aproximan a la distribución Maxwell-Boltmann (MB)

$$f_i(\mathbf{p}) = e^{-\frac{E_i(\mathbf{p}) - \mu_i}{T_i}}. \quad (3.22)$$

Podemos observar que tomando el límite  $T \rightarrow 0$  las estadísticas FD y BE tienden a la estadística MB.

La densidad de energía y presión de la partícula están dados por

$$\rho = g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) \quad (3.23)$$

$$p = g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E} f(\mathbf{p}). \quad (3.24)$$

### 3.4.1. Límite ultrarelativista

En el caso ultrarelativista tenemos que  $T_i \gg m, \mu$ . Y básicamente podemos hacer la aproximación  $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \approx |\mathbf{p}|$ . Con ayuda de las integrales

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x - 1} = \zeta(n+1)\Gamma(n+1), \quad (3.25)$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n}{e^x + 1} = (1 - 2^{-n})\zeta(n+1)\Gamma(n+1). \quad (3.26)$$

Aplicando estas fórmulas para la densidad numérica, densidad de energía y presión,

$$n_i = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T_i^3 \times \begin{cases} 1, & \text{si } BE, \\ 0, & \text{si } FD, \\ \frac{1}{\zeta(3)}, & \text{si } MB. \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\rho_i = \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 \times \begin{cases} 1, & \text{si } BE, \\ \frac{7}{8}, & \text{si } FD, \\ \frac{1}{\zeta(4)}, & \text{si } MB. \end{cases} \quad (3.28)$$

$$p_i = \frac{\pi^2}{90} g_i T_i^4 \times \begin{cases} 1, & \text{si } BE, \\ \frac{7}{8}, & \text{si } FD, \\ \frac{1}{\zeta(4)}, & \text{si } MB. \end{cases} \quad (3.29)$$

Sumando todas las especies relativistas y permitiendo la posibilidad de que algunos especies puedan tener una temperatura cinética  $T_i$ , que difiere de la temperatura  $T$  de las especies que permanecen en equilibrio térmico.

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (3.30)$$

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad (3.31)$$

donde

$$g_*(T) = \sum_B g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_F g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4, \quad (3.32)$$

$$g_{*s}(T) = \sum_B g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_F g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3, \quad (3.33)$$

donde la suma es sobre todas las especies relativistas de bosones (B) y fermiones (F).

### 3.4.2. Límite no-relativista

En el caso no-relativista, tenemos que  $T_i \ll m$ .

Aproximando la densidad numérica

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 e^{-\frac{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}{T_i}} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 e^{-\frac{m}{T_i}} e^{-\frac{|\mathbf{p}|^2}{2mT_i}} \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} e^{-\frac{m}{T_i}} (2mT_i)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2} = \frac{g_i}{2\pi^2} (2mT_i)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T_i}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= g_i \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T_i}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

# Capítulo 4

## Ecuación de Boltzmann

En este trabajo suponemos que la materia oscura es un WIMP <sup>1</sup> termal, es decir, una especie que estaba en equilibrio térmico antes del freeze-out, para posteriormente dejar una densidad de reliquia. Esto significa que el freeze-out se produce cuando las especies WIMP están cercanamente al reposo. El material en esta sección sigue a los textos [2, 3].

La ecuación de Boltzmann conecta la física de partículas de la materia oscura con la cosmología. La idea principal es que en el universo primitivo, las partículas estaban en equilibrio térmico. Esto significa que la tasa de producción de partículas del baño térmico es equivalente a la tasa de aniquilación,  $\Gamma$ . Si la temperatura del Universo baja adiabáticamente por debajo de la masa de DM, entonces la abundancia de DM se congelaría a un valor que es suprimido térmicamente por  $e^{-m/T}$ . Sin embargo, sabemos que el universo se está expandiendo a un ritmo dado por el parámetro de Hubble  $H(t)$ . Debido a esto, el freeze-out se produce cuando la tasa de expansión alcanza la tasa de aniquilación,  $H \simeq \Gamma$ .

El equilibrio entre los procesos de aniquilación y creación dura hasta poco después del Big Bang, con el tiempo los canales se desequilibran y las partículas de materia oscura comienzan a decaer a partículas del modelo estándar. En tiempos posteriores, sin embargo, cuando el universo está frío y dilatado, la materia oscura permanece como una reliquia térmica. Es acá donde podemos tener ensan-

---

<sup>1</sup>En inglés: weakly interacting massive particles.

chamiento de Sommerfeld sobre el proceso de aniquilación de estas partículas. La aniquilación de la materia oscura para producir materia conocida, se puede dar directamente o mediante una aniquilación produciendo el bosón mediador para posteriormente éste decaer a partículas del modelo estándar.

## 4.1. Ecuación de Boltzmann

La ecuación de Boltzmann describe la evolución de la distribución de densidad de un sistema termodinámico que no está en equilibrio. En el cual no se considera la evolución de una partícula mediante su posición y momentum, sino que las partículas yacen en un punto del espacio de fase, descrito por su función de distribución. La evolución de esta distribución está dada por transporte, fuerzas externas y procesos que afectan las partículas. La Ec. de Boltzmann para la especie  $\chi$  es típicamente separada en dos partes:

$$\hat{L}[f_\chi] = \hat{C}[f_\chi], \quad (4.1)$$

donde  $\hat{L}$  es el operador de Liouville y  $\hat{C}$  el operador de colisión.

El operador de Liouville describe la evolución en el volumen en el espacio de fase. En su forma covariante se escribe como

$$\hat{L}[f_\chi] = E \frac{\partial f_\chi}{\partial t} - H |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f_\chi}{\partial E}, \quad (4.2)$$

para el caso donde la función de distribución  $f$  es homogénea e isotrópica. Integrando sobre el momentum

$$\begin{aligned} g \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\hat{L}[f]}{E} &= \dot{n} - Hg \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} = \dot{n} - \frac{Hg}{2\pi^2} \int d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^4}{E} \frac{\partial |\mathbf{p}|}{\partial E} \frac{\partial f}{\partial |\mathbf{p}|} \\ &= \dot{n} - \frac{Hg}{2\pi^2} \int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^3 \frac{\partial f}{\partial |\mathbf{p}|} = \dot{n} + 3Hn. \end{aligned} \quad (4.3)$$

El operador de colisión describe la tasa a la cual la densidad de energía cambia debido a procesos de interacción. Cuando conocemos el estado inicial de partícula

las, la tasa de cambio sería simplemente  $\Gamma = \sigma v n$ , donde  $\sigma$  es la sección eficaz, la cantidad  $\sigma v$  sería el volumen que cubre una partícula por unidad de tiempo, cuando multiplicamos por  $n$ ; el promedio de partículas por unidad de volumen, entonces se obtiene el promedio de partículas encontradas por unidad de tiempo. Si las partículas se aniquilan cuando se tocan,  $\Gamma$  es la tasa de aniquilación de la especie. Se conoce la distribución de la especie, y por lo tanto debemos promediar sobre todo el espacio de fase.

La tasa de transición en términos de amplitudes invariantes de Feynman

$$g \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\hat{C}[f]}{E} = - \int d\Pi_\chi d\Pi_a d\Pi_b \cdots d\Pi_i d\Pi_j \cdots (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi + p_a + p_b + \cdots - p_i - p_j + \cdots) \\ (|\mathcal{M}|_{\chi+a+b+\cdots \rightarrow i+j+\cdots}^2 f_\chi f_a f_b \cdots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots \\ - |\mathcal{M}|_{i+j+\cdots \rightarrow \chi+a+b+\cdots}^2 f_i f_j \cdots (1 \pm f_\chi)(1 \pm f_a)(1 \pm f_b) \cdots), \quad (4.4)$$

donde por simplicidad denotamos solo dos canales de interacción, el proceso  $\chi + a + b + \cdots \rightarrow i + j + \cdots$  y su proceso inverso. El diferencial  $d\Pi_i = \frac{g d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E}$  denota una integral sobre el espacio de fase invariante de Lorentz. Los factores  $(1 \pm f)$  corresponden a Bose-Enhancement (+) y Pauli-blocking (-), que pueden ser despreciados en este caso, pues en la mayor parte de la evolución del Universo, este es frío ( $T \rightarrow 0$ ) entonces  $f \ll 1$ . Los factores Bose-enhancement y Pauli-blocking sólo son relevantes justo después del Big Bang, cuando las temperaturas son todavía altas.

Pero en el equilibrio, todos los procesos se cancelan mutuamente, y así podemos pretender que el término de colisión es efectivamente cero de todos modos.

Podemos suponer que todas las especies bajo la integral cuyas estadísticas nos conciernen están en equilibrio térmico, esto pues dejan el equilibrio térmico mucho después que la materia oscura.

Cuando el universo es frío, su estadística es Maxwell-Boltzmann. Las amplitudes de Feynman  $|\mathcal{M}|$  incluye todos los factores estadísticos y los promedios sobre

los espines. Además, obedecen a la invariancia CP. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \dot{n}_\chi + 3Hn_\chi &= - \int d\Pi_{tot} (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j - \dots) \\ &|\mathcal{M}|_{\chi+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 (f_\chi f_a f_b \dots - f_i f_j \dots), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde por comodidad denotamos  $d\Pi_{tot} = d\Pi_\chi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j$ .

Podemos mejorar aún más esta ecuación al notar que el producto de todas las distribuciones de equilibrio  $f_i^{eq} f_i^{eq} \dots$  usando conservación de la energía es exactamente igual a  $f_\chi^{eq} f_a^{eq} f_b^{eq} \dots$  cuando la temperatura es baja.

Para un sistema donde sólo ocurren los procesos  $\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}$  y su proceso inverso, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{n}_\chi + 3Hn_\chi &= - \int d\Pi_{tot} (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \\ &|\mathcal{M}|_{\chi+\bar{\chi} \rightarrow X+\bar{X}}^2 (f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_X^{eq} f_{\bar{X}}^{eq}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Podemos escribir  $f_\chi = \frac{n_\chi}{n_\chi^{eq}} f_\chi^{eq}$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} \dot{n}_\chi + 3Hn_\chi &= - (n_\chi n_{\bar{\chi}} - n_\chi^{eq} n_{\bar{\chi}}^{eq}) \frac{1}{n_\chi^{eq} n_{\bar{\chi}}^{eq}} \int d\Pi_{tot} (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \\ &|\mathcal{M}|_{\chi+\bar{\chi} \rightarrow X+\bar{X}}^2 f_\chi^{eq} f_{\bar{\chi}}^{eq} = - (n_\chi n_{\bar{\chi}} - n_\chi^{eq} n_{\bar{\chi}}^{eq}) \langle \sigma_{\chi+\bar{\chi} \rightarrow X+\bar{X}} | \mathbf{v} | \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ahora debemos considerar la diferencia entre el escenario en el que la materia oscura es su propia antipartícula (es decir, cuando hablamos de escalares reales o fermiones de Majorana) y aquella en la que no lo es (es decir, escalares complejos o fermiones de Dirac).

Si una partícula y su antipartícula son componentes de materia oscura, entonces la ecuación de Boltzmann se resuelve tal como está. Sin embargo, al calcular la densidad de reliquia  $\Omega_{\chi\bar{\chi}}$  se debe tomar en cuenta la densidad de las antipartículas, pues éstas también cuentan como materia oscura (la densidad total  $n_{DM} = n_\chi + n_{\bar{\chi}}$ ).

Cuando solo tenemos un tipo de partícula de materia oscura, debemos agregar

un factor de 2 a la ecuación de Boltzmann para dar cuenta de la aniquilación / creación simultánea de dos partículas de materia oscura. Sin embargo, debido a la combinatoria, obtenemos un factor de simetría de  $1/2$  de nuestros diagramas de Feynman. Por lo general, este factor se absorbería en la constante de acoplamiento en el Lagrangiano y así hacer la combinatoria en diagramas de orden superior más fácil. Con esta prescripción, encontramos que las amplitudes de Feynman tienen un factor de  $1/2$  para cada vértice de interacción.

Ahora consideramos la materia oscura simétrica ( $n_\chi = n_{\bar{\chi}}$ ). Para mayor comodidad, podemos normalizar  $n$  con la densidad de entropía  $s = S/a^3$  para obtener un cantidad independiente del volumen comóvil  $Y = n/s$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} s\dot{Y}_\chi &= \frac{d}{dt}(sY_\chi) - \dot{s}Y_\chi = \dot{n}_\chi + 3HsY_\chi = \dot{n}_\chi + 3Hn_\chi \\ &= -\langle\sigma_{\chi+\bar{\chi}\rightarrow\chi+\bar{\chi}}|\mathbf{v}|\rangle(n_\chi^2 - (n_\chi^{eq})^2), \end{aligned}$$

y de esta forma obtener

$$\dot{Y}_\chi = -\langle\sigma|\mathbf{v}|\rangle(n_\chi^2 - (n_\chi^{eq})^2). \quad (4.8)$$

Es útil cambiar de variable a  $x = \frac{m_\chi}{T}$  donde  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{m_\chi}{T} \frac{3s}{t} (-3Hs) = Hx$ , reemplazando en la ecuación de Boltzmann, obtenemos

$$\frac{dY_\chi}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2}(Y_\chi^2 - (Y_\chi^{eq})^2), \quad (4.9)$$

donde la variable introducida está definida como

$$\lambda = \frac{s(m)}{H(m)} \langle\sigma|\mathbf{v}|\rangle, \quad (4.10)$$

mientras que

$$(\sigma|\mathbf{v}|)_0 = a + b|\mathbf{v}|^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^4), \quad (4.11)$$

donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes para las contribuciones de ondas-s y ondas-p.

En general, en la aproximación relativista se usa:

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad H = \frac{8\pi}{3} G \rho(T), \quad \rho_R(T) = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4. \quad (4.12)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  y  $\rho_R$  es la densidad de energía de especies relativistas, y  $8\pi G = \frac{1}{M_{Pl}^2}$ . Reemplazando

$$\lambda = \sqrt{\frac{8}{45}} \frac{g_{*s}}{\sqrt{g_*}} M_{Pl} m_\chi \langle \sigma | \mathbf{v} | \rangle \quad (4.13)$$

$$Y_\chi^{eq} = \frac{n_\chi^{eq}}{s} = \frac{45}{2\pi^4} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{g}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x} = a x^{3/2} e^{-x}, \quad (4.14)$$

donde es importante aclarar que  $g$  corresponde a los grados de libertad de la partícula y  $g_*$   $g_{*s}$  corresponde a los grados de libertad relativistas.

La Ec.(4.9) no tiene solución exacta, por lo tanto debe resolverse numéricamente o en forma aproximada.

#### 4.1.1. Solución de la ecuación de Boltzmann

Antes de continuar, la Ec.(4.9), que muestra como la cantidad de materia oscura evoluciona mediante el balance entre la tasa de aniquilación y la expansión del universo, el puede analizarse cualitativamente. Mientras la tasa de aniquilación  $\Gamma =$  es mucho mayor a la tasa de expansión  $H$ , la densidad  $Y$  permanece en equilibrio térmico y se aproxima a  $Y^{eq}$ , esto es porque  $\lambda$  es grande. Sin embargo,  $\lambda$  está disminuyendo, hasta que  $\Gamma \approx H$ , en algún tiempo  $x_f$ , el llamado freeze-out. En este tiempo  $dY/dx$  se vuelve pequeño, y  $Y$  ya no cambia a  $Y^{eq}$ . Por lo tanto  $Y(x) \approx Y(x_f)$  permanece aproximadamente constante, el número de partículas por volumen de comóvil se ha congelado. Significa que  $n$  y  $s$  cambian a la misma tasa, es decir, las partículas de materia oscura todavía pueden aniquilarse.

#### Solución aproximada

$$\frac{d\Delta_\chi}{dx} = -\frac{dY_\chi^{eq}}{dx} - \frac{\lambda}{x^2} (\Delta_\chi^2 + 2\Delta_\chi Y_\chi^{eq}) \quad (4.15)$$

Se puede encontrar una solución aproximada en diferentes límites:

- $1 \leq x \leq x_f$

En este periodo:  $Y \approx Y^{eq}$  entonces tenemos que  $\Delta, \frac{\Delta}{dx} \approx 0$ , la Ec. (4.15) queda:

$$\Delta_\chi(x) = \frac{x^2}{2\lambda}. \quad (4.16)$$

- $x_f \ll x$

En este periodo:  $Y^{eq} \approx 0$ , entonces la Ec.(4.15) queda:

$$\frac{d\Delta_\chi}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2}\Delta_\chi^2. \quad (4.17)$$

Integrando encontramos

$$\Delta_\chi(x) = \frac{1}{\frac{\lambda}{x_f} - \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{\Delta_\chi(x_f)}}. \quad (4.18)$$

Del cual obtenemos en el límite  $x \rightarrow \infty$

$$\Delta_\chi(x) = \frac{x_f^2}{\lambda(x_f + 2)}. \quad (4.19)$$

Después del freeze-out ( $x_f$ ),  $Y$  comienza a diverger de  $Y^{eq}$ . Se puede definir  $\Delta_{chi}(x_f) = cY_\chi^{eq}(x_f)$ , donde  $c$  es una constante de orden 1, elegido de tal forma que la ecuación aproximada se ajuste a la solución numérica.

$$\frac{x_f^2}{Y_\chi^{eq}(x_f)} = \lambda c(c + 2). \quad (4.20)$$

Reemplazando  $Y_\chi^{eq}(x) = ax^{3/2}e^{-x}$ ,  $c(c + 2) \approx 1$  obtenemos

$$x_f + \frac{1}{2} \ln x_f = \ln a\lambda, \quad (4.21)$$

donde obtenemos la primera aproximación a  $x_f$

$$x_f \approx \ln(a\lambda) - \frac{1}{2} \ln \ln(a\lambda). \quad (4.22)$$

## 4.2. Densidad de reliquia

El parámetro de densidad se calcula como la densidad dividida por la densidad crítica, es decir, la densidad para la cual el universo es plano. Esto efectivamente nos deja expresar los diferentes componentes de nuestro universo como una fracción del contenido total de energía, ya que se sabe que nuestro universo es casi plano.

$$\Omega_\chi = \frac{\rho_\chi}{\rho_c} = \frac{m_\chi s_0 Y_\infty}{\rho_c}, \quad (4.23)$$

donde  $s_0 \approx 2795/cm^3$  corresponde a la entropía actual del Universo.

## 4.3. Incluyendo el ensanchamiento de Sommerfeld

La ecuación de Boltzman en función de  $x$  Ec. (4.9) (o en función de la temperatura) requiere que se escriba la sección eficaz en función de estas variables, esto se llama el promedio térmico.

$$\langle \sigma|\mathbf{v}| \rangle \equiv \int (\sigma|\mathbf{v}|) f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2, \quad (4.24)$$

donde los subíndices son las variables denotadas para partículas 1 y 2. En la distribución de velocidad Maxwell-Boltzmann  $f(v) = \frac{x}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2}$ . Cambiando de variables a la velocidad relativa, con un poco de algebra llegamos a

$$\langle \sigma|\mathbf{v}| \rangle(x) = \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\sigma|\mathbf{v}|) |\mathbf{v}|^2 e^{-\frac{x}{4}|\mathbf{v}|^2} d|\mathbf{v}|. \quad (4.25)$$

Esta definición también define el promedio térmico de cualquier cantidad  $\langle A \rangle(x)$ , esto al reemplazar la cantidad  $A$  por el término  $\sigma|\mathbf{v}|$  en esta ecuación.

Entonces podemos decir en general si tenemos  $(\sigma v) = a + bv^2 + \mathcal{O}(v^4)$ , donde  $a$  y  $b$  son coeficientes correspondientes a las contribuciones de ondas  $s$  y  $p$

respectivamente, después de agregar el ensanchamiento de Sommerfeld tenemos

$$\langle \sigma v \rangle(x) = a \langle S_0(v) \rangle(x) + b \langle S_1(v) v^2 \rangle(x), \quad (4.26)$$

donde por comodidad en la notación hemos reemplazado la velocidad relativa  $|\mathbf{v}| = v$ , y los coeficientes  $S_{0,1}$  se refiere a los coeficientes de ensanchamiento obtenidos de las ondas  $s$  y  $p$  respectivamente.

# Capítulo 5

## Elementos de teoría de scattering

El material en esta sección tiene como objetivo definir los conceptos que utilizamos en este trabajo, para un tratamiento extensivo se debe buscar en textos clásicos de mecánica cuántica como por ejemplo [37]-[39], de los cuales está basada esta sección.

Una parte experimental esencial en un amplio rango de la física <sup>1</sup> consiste en dirigir un haz de partículas sobre un objetivo de partículas y estudiar las colisiones resultantes. Esto es posible ya que las partículas que constituyen el estado final del sistema (estado después de la colisión) son detectadas y sus características son medidas.

En mecánica cuántica, solo podemos hablar de probabilidades de los posibles estados después de la colisión. Entre las reacciones posibles en las condiciones dadas, las reacciones de scattering se definen como aquellas en que el estado final y el estado inicial están compuestos de las mismas partículas.

### 5.1. Sección eficaz

La sección eficaz se define como la tasa de scattering por objetivo por unidad de densidad de flujo entrante por ángulo sólido  $d\Omega$  de partículas deflectadas. Sin embargo, para tener un concepto mas claro es necesario definir varios conceptos.

---

<sup>1</sup>Ejemplos: física atómica, nuclear, física de altas energías y física del estado sólido.

Con respecto a la Fig. 5.1 la dirección  $Oz$  es la dirección del flujo de partículas incidentes  $j_i$ ; el cual es el número de partículas por unidad de tiempo, que cruza una superficie perpendicular al eje  $Oz$  en la región donde  $z$  toma valores negativos.

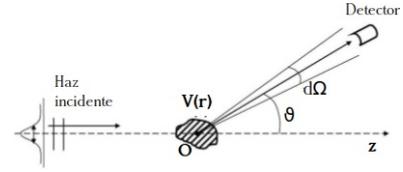


Figura 5.1: Esquema general del scattering.

Las partículas incidentes y del objetivo interactúan mediante un potencial  $V(r)$ , el cual está localizado alrededor del origen  $O$ .

Una vez se produce la colisión, hay un número  $dn$  de partículas scattereadas por unidad de tiempo en el ángulo sólido  $d\Omega$ , en la dirección  $(\theta, \phi)$ , donde  $\theta$  y  $\phi$  es la dependencia angular en coordenadas esféricas. El detector, que está situado a cierta distancia de  $O$ , grande comparada a la zona de influencia del potencial, es el que mide el número  $dn$  de partículas scattereadas por unidad de tiempo en un ángulo sólido  $d\Omega$ .

La fracción de partículas scattereadas debe ser proporcional al flujo de partículas incidentes, por lo tanto,  $\frac{dn}{d\Omega}$  es proporcional a  $j_i$ .

Entonces se tiene que

$$dn = j_i \sigma(\theta, \phi) d\Omega, \quad (5.1)$$

donde  $\sigma(\theta, \phi)$  es el coeficiente de proporcionalidad, y es la sección eficaz diferencial en la dirección  $(\theta, \phi)$ .

Donde las dimensiones son:

$$[dn] = T^{-1}, \quad [j_i] = (L^2 T)^{-1}, \quad [\sigma(\theta, \phi)] = L^2.$$

La sección eficaz total de scattering está dada por:

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega. \quad (5.2)$$

La unidad mas común usada en física de partículas es el barn ( $b$ ) donde

$$1b = 10^{-28} m^2 = 0,00257 MeV^{-2}.$$

## 5.2. Cálculo de la sección eficaz

En mecánica cuántica, para un potencial de rango finito la onda del scattering puede tratarse mediante la ecuación de Schrödinger, pues en principio, cualquier partícula debiera ser descrita como un paquete de ondas. Además, si el tiempo que se mantiene el haz es comparable con el tiempo de interacción del haz con el objetivo, entonces se puede asumir un estado estacionario, descrito por la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\right)\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}). \quad (5.3)$$

La función de onda  $\Psi$  corresponde al estado estacionario de la ecuación de Schrödinger, cuyo ansatz puede separarse en dos partes

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_i(\mathbf{x}) + \Psi_s(\mathbf{x}), \quad (5.4)$$

donde  $\Psi_i(\mathbf{x})$  es la onda incidente y  $\Psi_s(\mathbf{x})$  es la onda scattereada. A largas distancias ( $r \rightarrow \infty$ ), las partículas debieran comportarse como partículas libres.

Haciendo  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , podemos reescribir la ecuación de Schrödinger como

$$(\nabla^2 + k^2 - U(\mathbf{x}))\Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.5)$$

donde  $U(\mathbf{x}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{x})$ .

## 5.3. Forma asintótica de estados de scattering estacionarios. Amplitud de scattering

Estamos interesados en potenciales centrales, no importando la intensidad del potencial <sup>2</sup>, y además que haya una simetría rotacional alrededor del eje z, eje (convencional) de la trayectoria del scattering.

---

<sup>2</sup>Si la intensidad del potencial es mucho menor a la energía cinética de las partículas puede usarse la aproximación de Born para calcular sección eficaz.

En coordenadas esféricas, la onda plana puede expandirse como:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (5.6)$$

donde  $j_l$  son las funciones de Bessel. A partir de la forma asintótica de las funciones de Bessel se concluye que la parte scatterada tiene la forma

$$\Psi_s(\mathbf{x}) = f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r},$$

donde  $f(\theta, \phi)$  se la llama la amplitud de scattering.

Por lo tanto, la solución asintótica a la ecuación de Schrödinger, y por lo tanto la solución de scattering es

$$\Psi(\mathbf{x}) = e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

### 5.4. Relación entre $\sigma(\theta, \phi)$ y $f(\theta, \phi)$ .

Las funciones de onda incidente y scatterada son  $\Psi_i = Ae^{ikz}$  y  $\Psi_s = Af(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$  respectivamente.

La probabilidad que la partícula incidente, viajando a velocidad  $v$ , pase a través del área infinitesimal  $d\sigma$  en un tiempo  $dt$

$$dP = |\Psi_i|^2 dV = |A|^2 (vdt) d\sigma,$$

es igual a la probabilidad de que la partícula se disperse en el ángulo sólido correspondiente  $d\Omega$

$$dP = |\Psi_s|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (vdt) r^2 d\Omega.$$

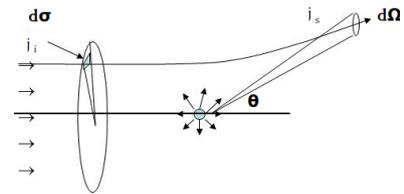


Figura 5.2: Definición de sección eficaz.

Por lo tanto, se tiene que

$$d\sigma = \sigma(\theta, \phi)d\Omega = |f|^2 d\Omega, \Rightarrow \sigma(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2. \quad (5.8)$$

La sección eficaz diferencial (que es lo que se mide) es igual al cuadrado absoluto de la amplitud de scattering (que es obtenida resolviendo la ec. de Schrödinger), es decir, la ecuación anterior relaciona la observación con la teoría.

Hay dos técnicas importantes para calcular la amplitud de scattering:

- Analisis de ondas parciales
- Serie de Born

## 5.5. Ondas parciales

En el estudio exclusivo de potenciales centrales, el momento angular se conserva antes y después del scattering, por lo tanto las autofunciones son comunes para los operadores  $H$ ,  $L^2$  y  $L_z$ , esto nos permite separar la parte angular de la radial de la ecuación de Schrödinger,

$$\Psi_{klm}(x) = \sum_{l,m} a_l R_{kl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.9)$$

donde mediante separación de variables en coordenadas esféricas se obtiene la ecuación radial

$$\left( \frac{d}{r^2 dr} (r^2 \frac{d}{dr} R_{kl}) - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) + k^2 \right) R_{kl}(r) = 0, \quad (5.10)$$

la cual si además incluimos la simetría rotacional alrededor del eje z, la solución es de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_{klm} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l Y_{lm}(\theta, \phi) R_{kl}(r) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l Y_{l0}(\theta, \phi) R_{kl}(r) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l R_{kl}(r) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Cada término de (5.11) es conocido como onda parcial.

Ahora haciendo  $R = \frac{\chi}{r}$ , encontramos la ecuación

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right) \chi_{kl}(r) = 0, \quad (5.12)$$

la cual se conoce como la ecuación de Schrödinger 1D.

Al hacer  $U = 0$ , la Ec. (5.12) puede ser escrita como

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_{kl}(r) = 0,$$

donde  $\Psi_{klm}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{u_l(r)}{kr} P_l(\cos \theta)$ .

Las soluciones para el caso general  $r$  son complicadas, pero las soluciones asintóticas tienen la forma

$$\Psi_{klm}(x) = A_l \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} P_l(\cos \theta), \quad r \rightarrow \infty.$$

Ahora al incluir el potencial, es decir, la Ec. (5.12), la solución asintótica está dada

$$\Psi_{klm}(x) = B_l \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}{kr} P_l(\cos \theta), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.13)$$

donde  $\delta_l$  es el phase shift de la  $l$ -ésima onda parcial.

En la comparación de las Ecs. (5.7) y (5.13) obtenemos  $B_l$  y  $f(\theta)$

$$B_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l},$$

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta).$$

### 5.5.1. Sección eficaz a partir del phase shift

La sección eficaz diferencial está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2, \quad (5.14)$$

por lo tanto, la sección eficaz total

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (5.15)$$

donde  $\sigma_l$  se conoce como sección eficaz parcial, correspondiendo al scattering de las partículas en el estado  $l$ .

La sección eficaz (5.15) consiste en una superposición de términos con diferentes momentum angular.

Notamos que cuando  $V = 0$  entonces  $\delta_l = 0$  y la sección eficaz en Ecs. (5.14) y (5.15) son cero.

Puede también ser escrito haciendo  $\theta = 0$

$$f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\cos \delta_l + i \sin \delta_l) \sin \delta_l.$$

Tomando la parte imaginaria

$$\text{Im} f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Por lo tanto, se encuentra la relación

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \text{Im} f_k(0) \quad (5.16)$$

La relación anterior entre la sección eficaz total y la amplitud de scattering es llamado teorema óptico.

## 5.6. Forma integral de la ecuación de Schrödinger

Reescribiendo la ecuación de Schrödinger Ec. (5.5), en forma de la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{x}) = Q, \quad (5.17)$$

donde  $Q = U(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})$ .

Si  $G(\mathbf{x})$  es una función de Green, entonces satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (5.18)$$

Entonces  $\Psi$  puede expresarse en forma integral en términos de  $G$  mediante

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int d^3x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q(\mathbf{x}'). \quad (5.19)$$

Lo cual se prueba fácilmente con las dos ecuaciones anteriores, pues satisface

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{x}) = \int d^3x' (\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q(\mathbf{x}') = \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q(\mathbf{x}') = Q(\mathbf{x}).$$

Además, se puede añadir a  $G(\mathbf{x})$ , cualquier función que satisfaga la ecuación homogénea de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) G_0(\mathbf{x}) = 0,$$

tal que la nueva función  $G + G_0$  satisface la ecuación inicial Ec. (5.17), de esta forma, podemos postular una expresión más general para  $\Psi$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0(\mathbf{x}) + \int d^3x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q(\mathbf{x}'), \quad (5.20)$$

donde  $\Psi_0$  satisface la ecuación de Schrödinger libre. La ecuación Ec. (5.20) se le llama la ecuación integral de Schrödinger.

# Capítulo 6

## Ensanchamiento de Sommerfeld

El ensanchamiento de Sommerfeld (SE) es un efecto en mecánica cuántica norelativista. En el cual una sección eficaz de una interacción puntual (En el contexto de este trabajo la aniquilación de materia oscura [18]) es incrementada debido a la presencia de un potencial añadido. En la Fig. 6.1 representamos la interacción puntual desconocida por una pequeña esfera sólida negra y el potencial añadido, de mayor alcance, como una esfera gris.

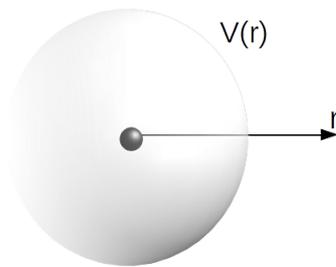


Figura 6.1: Potencial central  $V(r)$  añadido a una interacción puntual.

Con el fin de calcular este efecto necesitamos resolver la ecuación radial de Schrödinger, la cual para una partícula de masa  $m$  en presencia de un potencial central  $V(r)$ , está dada por la Ec. (5.10).

En el caso de una interacción puntual se puede encontrar una expresión para el ensanchamiento haciendo las siguientes suposiciones: la partícula incidente es libre  $\Psi_k^{(0)} = e^{ikz}$ , existe una interacción que es puntual y en el origen, el potencial añadido es central, y su efecto es cambiar el módulo de la función de onda en el

origen. La sección eficaz se ve aumentada

$$\sigma = \sigma_0 S_k, \quad (6.1)$$

donde  $\sigma_0$  es la sección eficaz del scattering con la interacción puntual y  $\sigma$  es la sección eficaz con el potencial añadido. Mientras que  $S_k$ , el factor de ensanchamiento [22], está dado por

$$S_k = \frac{|\Psi_k(0)|^2}{|\Psi_k^{(0)}(0)|^2}. \quad (6.2)$$

Considerando la solución de la ecuación de Schrödinger para invariancia rotacional alrededor del eje  $z$  Ec. (5.11), tenemos que  $R_{kl}(0) = 0$  para  $l \neq 0$ , por lo tanto podemos reescribir el factor  $S_k$  como

$$S_k = \left| \frac{R_{kl=0}(0)}{k} \right|^2. \quad (6.3)$$

Sin embargo, también podemos expresar en la sustitución  $R = \frac{\chi}{r}$  y haciendo  $l = 0$  en la ecuación radial 1D Ec. (5.12) nos queda

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) \right) \chi_{kl=0}(r) = 0. \quad (6.4)$$

$$R_{kl=0}(0) = cte \Rightarrow \chi_{kl=0}(0) \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

por esta razón aproximamos en serie de Taylor  $\chi_{kl=0}(r) = r \frac{d\chi_{kl=0}(r)}{dr}$  para  $r$  muy pequeño.

El ensanchamiento de Sommerfeld de la sección eficaz de scattering entonces es calculada mediante

$$S_k = \left| \frac{\frac{d\chi_k(0)}{dr}}{k} \right|^2. \quad (6.6)$$

Para el caso que la interacción inicial (Aniquilación este contexto) no es puntual, sino pequeño y finito  $a \ll 1$  el ensanchamiento de Sommerfeld es modificado

a

$$S_k = \frac{\int_0^a |\Psi_k(r)| dr}{\int_0^a |\Psi_k^{(0)}(r)| dr}. \quad (6.7)$$

### 6.0.1. Saturación

El término  $1/v$  en el ensanchamiento  $S$  podría llevarnos a pensar que  $S \rightarrow \infty$  cuando  $v \rightarrow 0$ , sin embargo, existe un límite que hay que considerar, que viene dado en términos de la longitud de onda De Broglie  $\lambda_B = \frac{\hbar}{Mv}$  y del alcance de la interacción  $r_0 = \frac{\hbar}{m_\phi c}$ , y la saturación ocurre cuando

$$\lambda_B \geq r_0 \Rightarrow m_\phi c \geq Mv. \quad (6.8)$$

Esta ecuación impone un límite inferior para  $v$ , y por lo tanto, también un límite superior para  $S$ .

Este límite es debido a la naturaleza ondulatoria de la partícula interactuante, esto es, al definirse completamente una onda en una región se puede asegurar que la partícula se encuentra en esta región (el rango de interacción).

### 6.0.2. Contribución radiativa

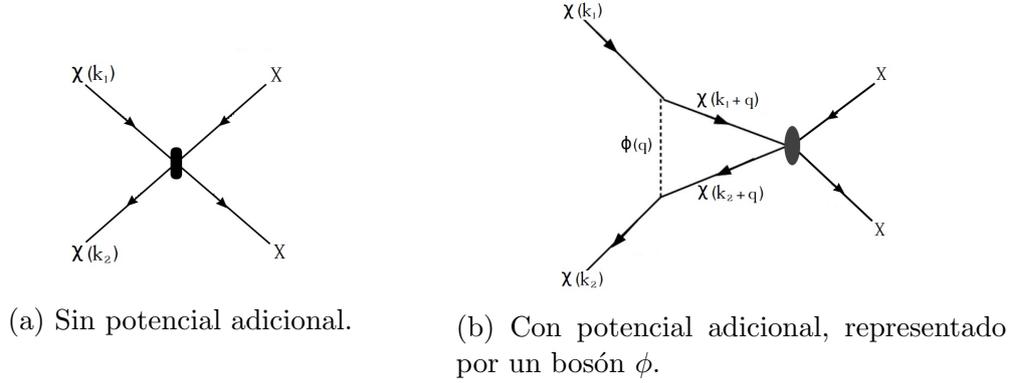
Con el fin de tener una visualización gráfica del ensanchamiento de Sommerfeld, estudiamos el caso de aniquilación de dos fermiones de materia oscura en el límite de velocidad muy pequeña de éstos. Estudiaremos el efecto que resulta al agregar este bosón a la interacción inicial (en este caso la aniquilación) de estos fermiones.

El diagrama de la Fig. 6.2 describe un diagrama de aniquilación entre dos fermiones oscuros masivos  $\chi$  a dos partículas del modelo estándar  $X$ , la figura b) muestra un potencial representado por un bosón de intercambio.

La contribución 1-loop está dada por

$$I = \int d^4q \frac{\not{q} + \not{k}_1 - m_\chi}{(q + k_1)^2 - m_\chi^2} \gamma^\mu \frac{1}{q^2 - m_\phi^2} \gamma^\mu \frac{\not{q} + \not{k}_2 - m_\chi}{(q + k_2)^2 - m_\chi^2}. \quad (6.9)$$

Tomando en cuenta que antes de la interacción, los dos fermiones oscuros


 Figura 6.2: Diagrama de aniquilación de materia oscura mediante un boson  $\phi$ .

están on-shell ( $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = m_\chi^2$ ), además las componentes espacial y temporal del cuadvivector  $|\mathbf{k}| = m_\chi |\mathbf{v}|$  entonces  $k_0 = m_\chi \sqrt{1 + \mathbf{v}^2} \simeq m_\chi (1 + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2})$ .

Además hacemos la suposición que en el estado  $k + q$  (es decir, dentro del loop) la velocidad de los fermiones no varía mucho de la inicial ( $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$ ), por lo tanto las componentes espacial y temporal del cuadvivector las podemos postular como:  $|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 = m_\chi^2 \mathbf{v}'^2$  y  $(k_0 + q_0)^2 = m_\chi^2 (1 + \mathbf{v}'^2)$ , resolviendo para  $|\mathbf{q}|$  y  $q_0$  encontramos:

$$|\mathbf{q}| = m_\chi |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|, \quad |q_0| \simeq \frac{1}{2} m_\chi |\mathbf{v}'^2 - \mathbf{v}^2|,$$

ahora por simplicidad trabajaremos con los ordenes de magnitud,  $|\mathbf{q}| \sim m_\chi |\mathbf{v}|$  y  $|q_0| \sim m_\chi |\mathbf{v}|^2$ .

Reemplazando estas aproximaciones en cada fracción de la integral Ec. (6.9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+q)^2 - m_\chi^2} &= \frac{1}{q^2 + 2q \cdot k} = \frac{1}{q_0^2 - \mathbf{q}^2 + 2(q_0 k_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k})} \sim \frac{1}{m_\chi^2 v^2 (1 - 2 \cos \theta) + \mathcal{O}(v^4)}, \\ \frac{1}{q^2 - m_\phi^2} &= \frac{1}{q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m_\phi^2} \sim -\frac{1}{m_\chi^2 v^2 + m_\phi^2 + \mathcal{O}(v^4)}. \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en Ec. (6.9) y tomando valores de  $\cos \theta = 0$  o  $\cos \theta = 1$ ,

$$I \sim m_\chi v^2 (m_\chi v)^3 \frac{m_\chi^2}{(m_\chi^2 v^2 (1 - 2 \cos \theta))(m_\chi^2 v^2 + m_\phi^2)(m_\chi^2 v^2 (1 - 2 \cos \theta))} \simeq \frac{v}{v^2 + \frac{m_\phi^2}{m_\chi^2} + \mathcal{O}(v^4)}. \quad (6.10)$$

Puede observarse que para  $m_\chi \gg m_\phi \Rightarrow I \rightarrow \frac{1}{v}$ . Esta es la contribución a la

amplitud de scattering al agregarse un bosón a la interacción inicial de los dos fermiones.

### 6.0.3. SE en el Universo temprano

Otra característica interesante del ensanchamiento de Sommerfeld es que no es relevante a tiempos tempranos [18], pues como es sabido la sección eficaz de aniquilación de materia oscura en la época actual es mucho mayor que en el Universo temprano, esto de modo de no afectar la nucleosíntesis (la cual es la teoría que debe estar contenida en cada nueva teoría que se proponga). De este modo tenemos que después que las partículas de materia oscura dejan el equilibrio el ensanchamiento es relevante.

El factor característico del ensanchamiento es  $1/v$ , de modo que sabiendo las velocidades medias de las partículas en cada tiempo podemos ver que tan relevante es el ensanchamiento. En el Universo temprano, la materia oscura se desacopla  $T \sim m_\chi/20$ , usando la relación de energía cinética promedio y temperatura  $\langle \frac{1}{2}m_\chi v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$  encontramos que  $v \sim 0,39c$ , por lo tanto el ensanchamiento de Sommerfeld es despreciable a esta temperatura del Universo.

# Capítulo 7

## Potenciales nucleares

Los nucleones, es decir, los protones y neutrones son los estados ligados de más baja energía de quarks y gluones. Éstos interactúan mediante la interacción fuerte y pueden formar los estados ligados mencionados. Sin embargo, si estamos interesados en una región de baja energía donde los nucleones son difícilmente excitados internamente, podemos considerar a los nucleones como inertes, es decir, partículas elementales, y estudiar las interacciones nucleón-nucleón [40]. Además, si los nucleones son no-relativistas su interacción puede ser descrita mediante un potencial.

La teoría fundamental que gobierna las interacciones de quark y gluones es QCD, lo cual implica que es válida para los nucleones y los potenciales interactuantes entre nucleones deberían ser derivados de esta teoría, sin embargo debido a la dificultad que presenta el cálculo en encontrarlos, a menudo se consideran potenciales fenomenológicos para hacer predicciones en sistemas de interacción nucleón-nucleón.

El estudio de los potenciales nucleares debe tener en cuenta las observaciones experimentales presentes junto con las consideraciones teóricas que deben satisfacer, a continuación se resumen ambos aspectos.

## 7.1. Características

### 7.1.1. Observación experimental

Las siguientes características del potencial de interacción nucleón-nucleón son observadas experimentalmente:

- Corto alcance

La fuerza nuclear debe ser mas pequeña que el tamaño del atomo.

- Atractivo a largo alcance

A largo alcance la fuerza es atractiva. Además, el phase-shift es positivo para la onda-s, que es la que domina a largo alcance.

- Repulsivo a corto alcance

Esto tiene que ser así para evitar el colapso de la materia nuclear. El phase-shift es negativo para la onda-s.

- Dependiente del espín

El phase-shift es diferente para los casos singlete y triplete, el triplete es un poco más atractivo que el singlete.

- Independiente de la carga

La fuerza nuclear no distingue entre protones y neutrones (no considerando la fuerza Coulomb). Los niveles de energia de Li (3 protones y 4 neutrones) y Be (4 protones y 3 neutrones), sustrayendo el efecto Coulomb, son casi idénticos .

- Fuerza espín-orbita

El momentum angular es considerado con respecto al objetivo. Se puede observar si el espín es paralelo o antiparelo la fuerza será repulsiva o atractiva respectivamente. De esta forma a partir de un haz no polarizado, después del scattering se tendrá partículas polarizadas.

- Fuerza tensorial

Esta depende de la distancia relativa entre las partículas y de su orientación con respecto al espín de las partículas.

### 7.1.2. Consideraciones teóricas

Las siguientes consideraciones teóricas debe satisfacer el potencial:

- Invariancia traslacional

El potencial debe depender de la distancia relativa entre las partículas.

- Invariancia Galileana

El potencial puede depender de los momentum  $p_1$  y  $p_2$  pero el término que los contenga sólo en el momentum relativo  $p_2 - p_1$ , pues la suma corresponde al momentum del centro de masa.

- Invariancia rotacional

El Hamiltoniano debe ser escalar respecto de las rotaciones de coordenadas y espín, por lo tanto, estos deben estar incluidos en un término de producto punto.

- Invariancia de paridad

- Hermiticidad

- Simétrico respecto del intercambio de partículas

- Independencia de carga

## 7.2. Potenciales nucleares y materia oscura

En el contexto de física nuclear, los nucleones interactúan mediante el intercambio de mesones [23]. Sabemos que la física nuclear, es una teoría efectiva de una teoría fundamental, esto es QCD.

En esta descripción efectiva, el potencial no relativista es fenomenológico y tiene la forma general

$$V = V_s(r) + \sum_i V_i(r)O_i, \quad (7.1)$$

donde  $V_s(r)$  es la parte del potencial que sólo depende de la distancia relativa  $r$  entre los nucleones interactuantes,  $O_i$  son los operadores para la contribución del espín y por lo tanto  $V_i(r)O_i$  son los términos del potencial que son obtenidos en la expansión a baja energía.

Tenemos en las coordenadas espaciales:

$$\begin{aligned} O_1 &= \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \\ O_2 &= (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{x}), \\ O_3 &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \\ O_4 &= (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^n, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  es el espín total y  $\mathbf{L}$  es el momento angular orbital (usamos  $\hbar = 1$ ).

Estos operadores  $O_i$  son conocidos como espín-espín, tensor, espín-órbita y espín-órbita de alto orden respectivamente y pueden ser escritos en términos del operador espín total  $\mathbf{S}$ . El término espín-espín es  $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = 2\mathbf{S}^2 - 3$ ; por lo tanto el término espín-órbita es  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)/2$ , donde  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  es el momento angular total. La interacción tensor está dada por  $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{x}) = 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{x})^2 - r^2$ .

La forma explícita de (7.1) no está derivada directamente pues no sabemos exactamente la naturaleza de la interacción efectiva (sin invocar QCD), por lo tanto solo considerando el carácter efectivo de esta descripción y usando algunas suposiciones razonables, podemos encontrar formas explícitas para (7.1). Aunque esta estrategia es usada comunmente en física nuclear, es particularmente interesante de explorar en detalle, pues permite estudiar nuevos efectos en la dinámica de materia oscura.

# Capítulo 8

## Potencial no-relativista

En la búsqueda de una nueva interacción para materia oscura, se ha mencionado que debemos tener un portador de esta fuerza liviano. Por lo tanto, hay básicamente tres candidatos: un pseudoescalar, un escalar y un vector.

Nos enfocaremos en el escalar y el vector. El escalar para que sea liviano, su masa puede surgir de una corrección radiativa, esto asegura que tiene una masa menor a la materia oscura. El campo gauge proveniente de una simetría de gauge oscura, su masa puede surgir de algún mecanismo distinto a la masa de materia oscura.

A continuación veremos los principios básicos de una partícula de intercambio, luego se deduce la forma del potencial dependiendo si la partícula de intercambio de escalar o vector, finalmente se estudia el caso límite cuando la masa de la partícula de intercambio es muy grande con respecto al fermión.

### 8.1. Intercambio de partículas virtuales

Una característica base de las fuerzas fundamentales es su carácter de intercambio, es decir, que funcionan mediante una partícula virtual de intercambio que actúa como portadora de la fuerza, y es virtual en el sentido de que su existencia en el tiempo y su energía es consistente con el principio de incertidumbre de Heisenberg y no puede ser detectada experimentalmente.

El principio de incertidumbre nos dice

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (8.1)$$

Es decir, se puede violar la ley de conservación de la energía, si consideramos una emisión de partícula virtual, durante un tiempo  $\Delta t$ , ésta viaja una distancia aproximada  $r \sim c\Delta t \sim \frac{c\hbar}{\Delta E}$  (si su velocidad fuera la velocidad de la luz).

Si la partícula tiene masa  $m$ , el mínimo de su energía es su energía del reposo  $mc^2$ , por lo tanto el tiempo del intercambio es limitado

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{mc^2}, \quad (8.2)$$

y asu vez el rango de la interacción será

$$r \leq \frac{\hbar}{mc}. \quad (8.3)$$

Si la partícula virtual no tiene masa, en principio su rango de interacción es infinito.

Las partículas de intercambio para la interacción electromagnética es el fotón, para las interacciones débiles son los bosones  $W$  y  $Z$ , y para las interacción entre nucleones es el pión.

## 8.2. Construcción de potenciales

Se postula en este trabajo que los potenciales de interacción de materia oscura tienen una construcción similar a la de los potenciales nucleares, es decir, en el marco de la teoría del mesón.

Para explicar estos detalles primero mostramos el esquema general para la derivación de un potencial teórico mesón.

Se parte de los Lagrangianos teóricos de campo para el acoplamiento, que son esencialmente fijos por simetrías. Ejemplos típicos para tales Langrangianos son:

$$\mathcal{L}_{ps} = -g_{ps}\bar{\psi}i\gamma^5\psi\varphi^{(ps)}, \quad (8.4)$$

$$\mathcal{L}_s = -g_s\bar{\psi}\psi\varphi^{(s)}, \quad (8.5)$$

$$\mathcal{L}_v = -g_v\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\varphi_\mu^{(v)}. \quad (8.6)$$

donde  $ps$ ,  $s$ , y  $v$  denotan acoplamientos y campos pseudoscalar, escalar y vectorial, respectivamente.

Las contribuciones de más bajo orden a la fuerza de los Lagrangianos anteriores son los diagramas de Feynman de segundo orden que, en el sistema de referencia del centro de masa de los dos fermiones interactuantes, producen la amplitud

$$M_{fi} = \bar{u}'_1(p'_1)\Gamma_1^\alpha u_1(p_1)P_\alpha(q)\bar{u}'_2(p'_2)\Gamma_2^\alpha u_2(p_2), \quad q = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2, \quad (8.7)$$

donde  $\Gamma^\alpha$  son los vértices derivados de los Lagrangianos anteriores,  $u_1(p_1)$  son los espinores Dirac que representan los fermiones interactuantes.

Aproximando los términos al orden  $1/c^2$  en la expresión general de amplitud de scattering, se obtiene

$$M_{fi} = 2m_1 2m_2 w_1'^* w_2'^* U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) w_1 w_2, \quad (8.8)$$

donde  $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$  es el potencial de Breit de dos cuerpos [41].

Con el fin de obtener el potencial en coordenadas espaciales necesitamos realizar la transformada de Fourier a  $U(\mathbf{q})$

$$U(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} U(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (8.9)$$

### 8.2.1. Fermiones pesados y bosones masivos

Los procesos que envuelven materia oscura son de baja energía, y pueden deberse al intercambio de bosón escalar o vector. En esta descripción se consi-

dera materia oscura como fermiones pesados (tipo WIMP) mediada por bosones masivos. Es una teoría efectiva, por consiguiente no es renormalizable.

Consideremos la amplitud de scattering de dos partículas interactuando mediante un bosón vector masivo

$$M_{fi} = \bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1 D_{\mu\nu}(q) \bar{u}'_2 \gamma^\nu u_2, \quad q = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2, \quad (8.10)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices gamma.

El propagador para un bosón vector con masa  $Q_c$  ( $Q_c = Mc$ ) está dado por

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{q^2 - Q_c^2} \left( -\eta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q_c^2} \right). \quad (8.11)$$

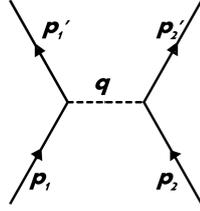


Figura 8.1: Scattering fermión-fermión.

La expresión anterior puede ser escrita en componentes como sigue

$$D_{00}(q) = \frac{1}{(\omega/c)^2 - \mathbf{q}^2 - Q_c^2} \left( -1 + \frac{(\omega/c)^2}{Q_c^2} \right), \quad D_{0i}(q) = \frac{1}{(\omega/c)^2 - \mathbf{q}^2 - Q_c^2} \left( \frac{\omega q_i/c}{Q_c^2} \right),$$

$$D_{ik}(q) = \frac{1}{(\omega/c)^2 - \mathbf{q}^2 - Q_c^2} \left( \delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{Q_c^2} \right), \quad (8.12)$$

donde usamos la convención  $\eta_{00} = 1$ .

Con el fin de obtener el límite de baja energía de la ecuación de Dirac, descomponemos biespinores en componentes espinores y en aproximación hasta el orden  $1/c^2$  [41], entonces:

$$u(\mathbf{p}) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} \left( 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2 c^2} \right) w \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc} w \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = u^* \gamma^0, \quad (8.13)$$

donde  $w$  es la amplitud de la onda plana Schrödinger.

De este modo, en esta aproximación, los términos  $\bar{u}\gamma^\mu u$  en las componentes temporal y espacial son

$$\begin{aligned}\bar{u}'_1\gamma^0 u_1 &= 2m_1 w_1'^* w_1 \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2 c^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{4m_1^2 c^2} \right), \\ \bar{u}'_1\gamma^i u_1 &= \frac{w_1'^* w_1}{c} (2p_1^i + q^i + i[\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q}]^i).\end{aligned}$$

Resolviendo  $u_2$  es similar pero haciendo el cambio  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ , pues  $\mathbf{q} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$ .

$$\begin{aligned}\bar{u}'_2\gamma^0 u_2 &= 2m_2 w_2'^* w_2 \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_2^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{4m_2^2 c^2} \right), \\ \bar{u}'_2\gamma^i u_2 &= \frac{w_2'^* w_2}{c} (2p_2^i - q^i - i[\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}]^i).\end{aligned}$$

Además, en esta aproximación, los propagadores pueden ser escritos como:

$$D_{00}(q) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2}, \quad D_{0i}(q) = 0, \quad D_{ik}(q) = \frac{-1}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} \left( \delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{Q_c^2} \right). \quad (8.14)$$

Con el fin de aclarar el cálculo, separamos cada término y entonces tomamos en cuenta sólo términos hasta orden  $1/c^2$ .

$$\begin{aligned}\bar{u}'_1\gamma^0 u_1 D_{00}(q) \bar{u}'_2\gamma^0 u_2 &= 2m_1 2m_2 w_1'^* w_1 w_2'^* w_2 \left[ \frac{1}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{8c^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{(2m_1 c)^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{i}{(2m_2 c)^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}'_1\gamma^i u_1 D_{ik}(q) \bar{u}'_2\gamma^k u_2 &= \\ &= -\frac{w_1'^* w_1 w_2'^* w_2}{c^2} \left[ \frac{4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \frac{2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q}^2}{Q_c^2} + \frac{2i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} \right],\end{aligned}$$

donde han sido usadas las siguientes identidades

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}) = (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{q}^2 - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (8.15)$$

Reemplazando estos términos en la expresión general de amplitud de scattering, obtenemos

$$M_{fi} = 2m_1 2m_2 w_1'^* w_2'^* U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) w_1 w_2, \quad (8.16)$$

donde  $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$  es el potencial de Breit de dos cuerpos,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = & \\ = & \left[ \frac{1}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{8c^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{m_1 m_2 c^2} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \right. \\ & + \frac{1}{2m_1 m_2 c^2} \frac{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q}^2}{Q_c^2} + \frac{i}{(2m_1 c)^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{i}{(2m_2 c)^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \\ & - \frac{i}{2m_1 m_2 c^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \frac{i}{2m_1 m_2 c^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{4m_1 m_2 c^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \\ & \left. + \frac{1}{4m_1 m_2 c^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} \right]. \end{aligned}$$

lo cual muestra que la interacción de más bajo orden está dada por el potencial Yukawa.

Vemos que si  $m_i \ll M$  (o lo mismo que  $|\mathbf{q}| \ll Q_c$ , materia oscura liviana) entonces tendremos a primer orden  $\frac{1}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} \simeq \frac{1}{Q_c^2}$ .

Con el fin de obtener el potencial en coordenadas espaciales necesitamos realizar la transformada de Fourier a  $U(\mathbf{q})$

$$U(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} U(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}. \quad (8.17)$$

Este resultado puede ser escrito en la forma de Ec. (7.1) como sigue:

$$U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{x}) = V_c(r) + V_1(r)O_1 + V_2(r)O_2 + V_3(r)O_3, \quad (8.18)$$

donde:

$$V_c(r) = \left[ 1 + \frac{Q_c^2}{8c^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right] \frac{e^{-Q_c r}}{4\pi r} - \frac{1}{8c^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{x}), \quad (8.19)$$

$$V_1(r)O_1 = \frac{1}{4m_1m_2c^2} \left[ \delta(\mathbf{x}) \left( -1 + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{e^{-Q_c r}}{4\pi r} \left( Q_c^2 + \frac{Q_c}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \quad (8.20)$$

$$V_2(r)O_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{4m_1m_2c^2} \frac{e^{-Q_c r}}{r^3} \left( Q_c^2 + \frac{3Q_c}{r} + \frac{3}{r^2} \right) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{x}), \quad (8.21)$$

y

$$V_3(r)O_3 = \frac{e^{-Q_c r}}{4\pi r^2} \left( Q_c + \frac{1}{r} \right) \left[ -\frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_1)}{(2m_1c)^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_2)}{(2m_2c)^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_2)}{2m_1m_2c^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_1)}{2m_1m_2c^2} \right]. \quad (8.22)$$

Hemos despreciado el término de orden  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$  en el comportamiento de baja energía.

El caso del intercambio de un bosón escalar masivo interactuando mediante  $\bar{\psi}\psi\phi$ , el cálculo del potencial de dos-cuerpos es similar al caso anterior, obteniendo

$$U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = \left[ \frac{1}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{8c^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{2m_1^2c^2} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{1}{2m_2^2c^2} \frac{\mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} - \frac{i}{(2m_1c)^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} + \frac{i}{(2m_2c)^2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{\mathbf{q}^2 + Q_c^2} \right]. \quad (8.23)$$

Notamos que también en este caso que a más bajo orden la interacción es del tipo Yukawa, sin embargo, no hay interacciones del tipo espín-espín o tensor.

La solución de scattering para potenciales encontrados se estudiará en una sección posterior, donde se usará como posible interacción de partículas pesadas de materia oscura.

### 8.2.2. Fermiones livianos y bosones masivos

Durante bastante tiempo la interacción (secreta) entre neutrinos [42, 43] ha sido considerada como una forma de incluir nueva clase de materia.

Como primera aproximación esta interacción es considerada como interacción de cuatro fermiones, esto es

$$-\frac{\alpha}{2M^2}(\bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_a)(\bar{\psi}_b\gamma_\mu\psi_b), \quad (8.24)$$

donde índices repetidos se entiende como una suma sobre las tres especies de neutrinos y  $\alpha = \pm 1$  correspondiendo a un potencial atractivo/repulsivo y  $M$  es una escala de masa. Esta interacción de contacto conduce a una amplitud de scattering Born para dos neutrinos distintos

$$\begin{aligned} M_{fi} &= -\frac{\alpha}{M^2}\bar{u}_1(p'_1)\gamma^\mu u_1(p_1)\bar{u}_2(p'_2)\gamma_\mu u_2(p_2), \\ &= \frac{\alpha}{M^2}\bar{w}_\alpha(p'_1)\bar{w}_\beta(p'_2)U_{\alpha\beta,\gamma\delta}w_\gamma(p_1)w_\delta(p_2), \end{aligned} \quad (8.25)$$

donde  $w$ 's denota espinores con energía positiva en el límite no-relativista y  $U_{\alpha\beta,\gamma\delta}$  es el potencial de dos-cuerpos descrito por la figura 8.2

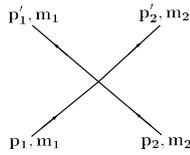


Figura 8.2: Interacción de contacto a tree-level.

Usamos la normalización

$$w_\alpha^*(p)w_\alpha(p) = 1,$$

De este modo, en la aproximación  $1/c^2$ , los términos  $\bar{u}\gamma^\mu u$  en las componentes temporal y espacial son

$$\begin{aligned}\bar{u}'_1\gamma^0 u_1 &= 2m_1 w_1'^* w_1 \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2 c^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{4m_1^2 c^2} \right), \\ \bar{u}'_1\gamma^i u_1 &= \frac{w_1'^* w_1}{c} (2p_1^i + q^i + i[\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{q}]^i).\end{aligned}\quad (8.26)$$

Resolviendo  $u_2$  es similar pero haciendo el cambio  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ , pues  $\mathbf{q} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$ .

$$\begin{aligned}\bar{u}'_2\gamma^0 u_2 &= 2m_2 w_2'^* w_2 \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_2^2 c^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{4m_2^2 c^2} \right), \\ \bar{u}'_2\gamma^i u_2 &= \frac{w_2'^* w_2}{c} (2p_2^i - q^i - i[\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{q}]^i).\end{aligned}\quad (8.27)$$

Usando la identidad

$$\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}),$$

la amplitud de scattering puede ser escrita como

$$M_{fi} = w_1^*(p'_1)w_2^*(p'_2)U(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)w_1(p_1)w_2(p_2), \quad (8.28)$$

donde el potencial de dos-cuerpos tiene la forma

$$\begin{aligned}U(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= -\frac{\alpha}{M^2} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right) + i \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)]}{4m_1^2} - i \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)]}{4m_2^2} \right. \\ &+ \frac{(\mathbf{q}^2 + 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) - 4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{4m_1 m_2} - i \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)]}{2m_1 m_2} + i \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)]}{2m_1 m_2} \\ &\left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{4m_1 m_2} - \frac{\mathbf{q}^2}{4m_1 m_2} (\boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}) \right].\end{aligned}\quad (8.29)$$

Esto demuestra que aunque las partículas son fermiones, en la aproximación la contribución dominante es un potencial de contacto dado por

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{M^2}\delta(\mathbf{x}), \quad (8.30)$$

donde  $\mathbf{x}$  es la coordenada relativa  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  y el potencial puede ser repulsivo o atractivo dependiendo del signo de  $\alpha$ .

La solución al scattering de este potencial se tratará en una sección posterior, donde se usará como posible interacción para neutrinos del fondo cósmico.

Importante aclarar que el resultado anterior está en unidades naturales, para obtener un resultado numérico hay que transformar a algún sistema de unidades, ejemplo a S.I hacemos el reemplazo  $\alpha \rightarrow \alpha\hbar c$  y  $\frac{1}{M^2} \rightarrow \frac{\hbar^2}{M^2 c^2}$ , de esta forma podemos ver que las unidades del potencial concuerdan con las unidades de energía

$$[U(\mathbf{x})] = [\alpha\hbar c \frac{\hbar^2}{M^2 c^2} \delta(\mathbf{x})] = \frac{ML^3}{T^2} L^2 \frac{1}{L^3} = \frac{ML^2}{T^2}, \quad (8.31)$$

donde las unidades de  $[\delta(\mathbf{x})] = \frac{1}{L^3}$  y las de la constante de Planck son  $[\hbar] = \frac{ML^2}{T}$ .

## Capítulo 9

# Ejemplos de ensanchamiento de Sommerfeld

Como ya vimos en el capítulo 6 el ensanchamiento de Sommerfeld es un efecto cuántico, que conduce a un incremento de la sección eficaz total de scattering. Con el fin de calcular este efecto necesitamos resolver la ecuación radial de Schrödinger, la cual para una partícula de masa  $\mu$  en presencia de un potencial central  $V(r)$ , está dada por

$$-\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \left(2\mu(V(r) - E) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi(r) = 0. \quad (9.1)$$

donde  $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$  es la parte radial de la función de onda. La función de onda satisface las condiciones de borde  $\chi(0) = 0$  y  $\chi(r) \rightarrow \sin(kr + \delta)$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

El ensanchamiento de Sommerfeld de la sección eficaz de scattering entonces es calculada mediante

$$S_k = \left| \frac{\frac{d\chi(0)}{dr}}{k} \right|^2. \quad (9.2)$$

A continuación estudiamos algunos ejemplos de ensanchamiento de Sommerfeld utilizando potenciales nucleares:

## 9.1. Potencial Coulomb

El potencial Coulomb repulsivo/attractivo en unidades SI

$$V(r) = \pm \frac{\alpha \hbar c}{r}, \quad (9.3)$$

donde  $\alpha = \frac{k_e q^2}{\hbar c}$  en unidades SI ( $k_e$  constante eléctrica y  $q$  denota la carga entre las partículas interactuantes).

Reemplazando en la Ec. (5.10)

$$\left( \frac{d}{r^2 dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} R_{kl} \right) + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \pm \frac{2m \alpha \hbar c}{\hbar^2 r} \right) R_{kl}(r) = 0.$$

Haciendo ahora el reemplazo  $\chi(r) = R(r)r$  y también el cambio de variables  $\rho = kr$  obtenemos

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \chi + \left( 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \mp \frac{2\eta}{\rho} \right) \chi = 0,$$

con  $\eta = \frac{\alpha c}{v}$ , y donde ahora  $\mp$  representan los casos repulsivo/attractivo respectivamente.

La solución de esta ecuación está dada en términos de la función hipergeométrica confluyente, presente en la literatura [44, 45]

$$\chi_{kl}(\rho) = \sqrt{\frac{2\pi\eta}{\pm(e^{\pm 2\pi\eta} - 1)}} \frac{(2\rho)^l \rho}{(2l+1)!} e^{i\rho} M(l+1 \pm i\eta, 2l+2, -2i\rho) \prod_{s=1}^l \sqrt{s^2 + \eta^2},$$

donde  $M(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)2!}z^2 + \dots$  es la función hipergeométrica confluyente 1F1 (función de Kummer) para los parámetros complejos  $a, b$  y variable compleja  $z$ . De la cual observamos que  $R(0) = 0$  para  $l \neq 0$ .

Reemplamos para  $l=0$ , obtenemos el ensanchamiento de Sommerfeld

$$S_k = |\Psi_{kl=0}(0)|^2 = \frac{2\pi\eta}{\pm(e^{\pm 2\pi\eta} - 1)}, \quad (9.4)$$

donde  $\pm$  corresponde a los casos repulsivo/attractivo respectivamente.

A continuación se grafica la expresión anterior.

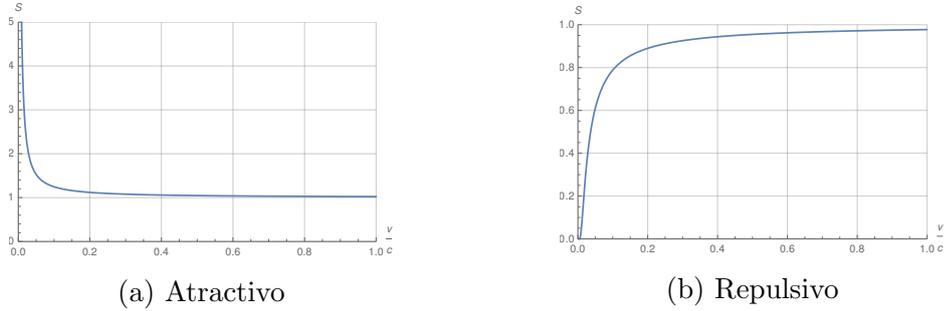


Figura 9.1: Ensanchamiento  $S$  en función de  $v/c$

Al estudiar los casos límites de la Ec. (9.4) encontramos:

Para el caso repulsivo:

$$v \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow 1,$$

$$v \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow 0.$$

Para el caso atractivo:

$$v \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow 1,$$

$$v \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow \frac{2\pi\alpha c}{v}.$$

En palabras, a altas velocidades no se produce ensanchamiento para ninguno de los casos, esto se debe a que no se genera scattering, pues la energía cinética de las partículas es mayor al potencial de interacción. En cambio a bajas velocidades el caso atractivo genera ensanchamiento, pues ocurre lo contrario y el potencial de las partículas genera el ensanchamiento, el caso repulsivo simplemente no se produce scattering, todo lo anterior se observa en la figura 9.1.

### 9.1.1. Densidad de reliquia del potencial Coulomb

Podemos calcular la densidad de reliquia usando el ensanchamiento de Sommerfeld encontrado para el potencial Coulomb.

A partir de la Ec.(4.9), para el caso de onda  $s$ , con una sección eficaz, podemos

calcular la ecuación de Boltzmann y observar el efecto del ensanchamiento de Sommerfeld la densidad de reliquia  $\Omega_\chi = 0,26$ .

$$\frac{dY_\chi}{dx} = -\frac{\lambda(x)}{x^2} (Y_\chi^2 - (Y_\chi^{eq})^2), \quad (9.5)$$

donde

$$\lambda(x) = \sqrt{\frac{8}{45}} \frac{g_{*s}}{\sqrt{g_*}} M_{Pl} m_\chi \langle \sigma | \mathbf{v} | \rangle (x). \quad (9.6)$$

Por comodidad analizamos la interacción mediante onda s, donde aproximamos  $\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{m_\chi^2}$ , entonces tenemos que  $\langle \sigma | \mathbf{v} | \rangle (x) = \sigma_0 \langle S_0 \rangle (x) = \frac{\pi\alpha^2}{m_\chi^2} \langle S_0 \rangle (x)$ .

En la Fig. 9.2 se grafica el acoplamiento vs masa que es capaz de reproducir la densidad de reliquia  $\Omega_\chi = 0,26$ . Para esto se resuelve numéricamente la ecuación de Boltzmann, el caso azul es sin incluir el ensanchamiento de Sommerfeld y en rojo es incluyéndolo, se observa que al incrementarse la sección eficaz el acoplamiento requerido para tener una densidad de reliquia  $\Omega_\chi = 0,26$  disminuye.

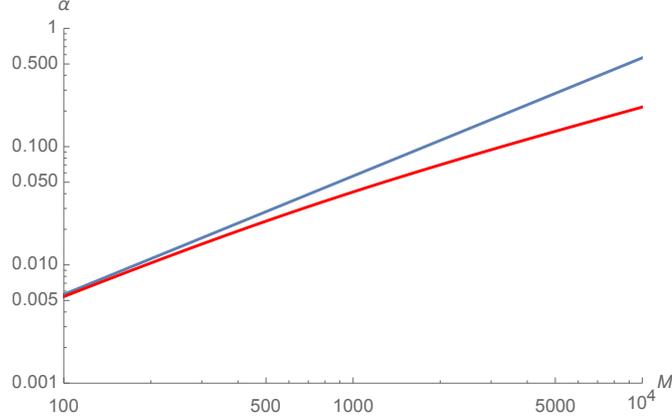


Figura 9.2: Gráfico  $\alpha$  vs  $m_\chi$  que reproducen  $\Omega_\chi = 0,26$ .

## 9.2. Potencial Yukawa

Otro caso interesante en la comprensión del concepto es el potencial Yukawa [19, 20]. El potencial Yukawa repulsivo/attractivo en unidades SI

$$V(r) = \pm \frac{\alpha \hbar c}{r} e^{-\frac{m_\phi c}{\hbar} r}, \quad (9.7)$$

donde  $m_\phi$  es la masa del bosón de intercambio.

Reemplazando en la Ec. (5.10)

$$\frac{d}{r^2 dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} R_{kl} \right) + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \pm \frac{2\mu \alpha \hbar c}{\hbar^2 r} e^{-\frac{m_\phi c}{\hbar} r} \right) R_{kl}(r) = 0.$$

También se puede escribir como

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R - \left( k^2 \mp \frac{2\mu \alpha \hbar c}{\hbar^2 r} e^{-\frac{m_\phi c}{\hbar} r} \right) R = 0.$$

No hay solución analítica para esta ecuación, pero puede resolverse numéricamente.

Analizamos el caso atractivo. Con el fin de obtener una expresión más simple para resolver hacemos el cambio de variables:

$$x = kr, \quad R(r) = N k x^l \Phi_l(x), \quad (9.8)$$

donde  $N$  es una constante de normalización de la función de onda.

Con ayuda de la regla de la cadena, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= k \frac{dR}{dx} = N k^2 (l x^{l-1} \Phi_l(x) + x^l \Phi_l'(x)), \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= k^2 \frac{d^2 R}{dx^2} = N k^3 (l(l-1) x^{l-2} \Phi_l(x) + 2l x^{l-1} \Phi_l'(x) + x^l \Phi_l''(x)). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables en la ecuación radial y reemplazando estos dos términos, con ayuda de un poco de álgebra encontramos

$$\Phi_l''(x) + \frac{2(l+1)}{x} \Phi_l'(x) + \left( 1 + 2a \frac{e^{-bx}}{x} \right) \Phi_l(x) = 0, \quad (9.9)$$

donde  $a = \alpha \frac{c}{v}$  y  $bx = \frac{m_\phi c}{\hbar} r$ .

La condición inicial puede obtenerse de esta ecuación, haciendo  $x = 0$ .

$$2(l+1)\Phi_l'(0) + 2a\Phi_l(0) = 0 \Rightarrow \Phi_l'(0) = -\frac{a}{l+1}\Phi_l(0). \quad (9.10)$$

CAPÍTULO 9. EJEMPLOS DE ENSANCHAMIENTO DE SOMMERFELD58

A continuación se grafica en la Fig. 9.3 el ensanchamiento de Sommerfeld en función de la masa de partícula incidente (TeV) para un potencial Yukawa atractivo, donde los parámetros son  $\alpha = 1/30$ ,  $m_\phi = 90\text{GeV}$ , el código en Mathematica se escribe en el apéndice Cap. 12.

Se observan resonancias que se acentúan a bajas velocidades, por ejemplo a velocidad  $v/c = 10^{-5}$  el ensanchamiento llega a  $S = 10^7$ . Además, la resonancias que se observan están dadas para masas de partículas muy altas, a partir del orden TeV, como se observa en Fig. 9.4.

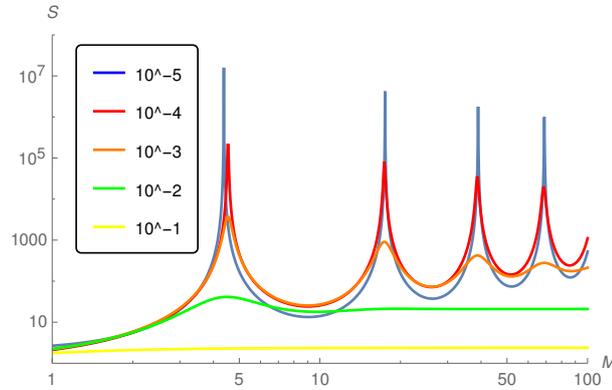


Figura 9.3: Ensanchamiento S en función de la masa (TeV) a distintas velocidades.

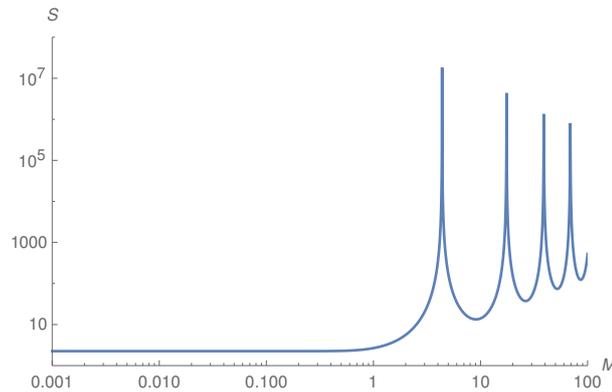
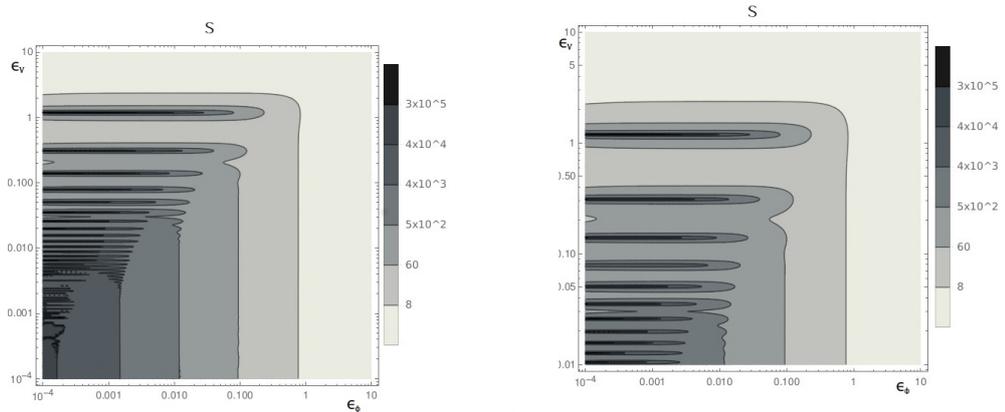


Figura 9.4: Ensanchamiento S en función de la masa (TeV), con un rango de masa: 1 GeV-100 TeV .

Podemos reescribir la Ec. (9.9) en términos de los parámetros

$$\epsilon_v = \frac{v}{\alpha c} \quad \epsilon_\phi = \frac{m_\phi}{\alpha M}, \quad (9.11)$$

o lo que es igual a hacer:  $a = \frac{1}{\epsilon_v}$  y  $b = \frac{\epsilon_\phi}{\epsilon_v}$ . Podemos observar que los contornos presentados en la Fig. 9.5 muestran que el ensanchamiento ocurre para una velocidad relativa baja, y que existen resonancias para combinaciones de la fracción  $m_\phi/M$ , y que además cuanto menor sea el valor de este parámetro más seguido será el patrón de resonancias, es decir, a mayor masa de la materia oscura es más probable que tengamos ensanchamiento de Sommerfeld.

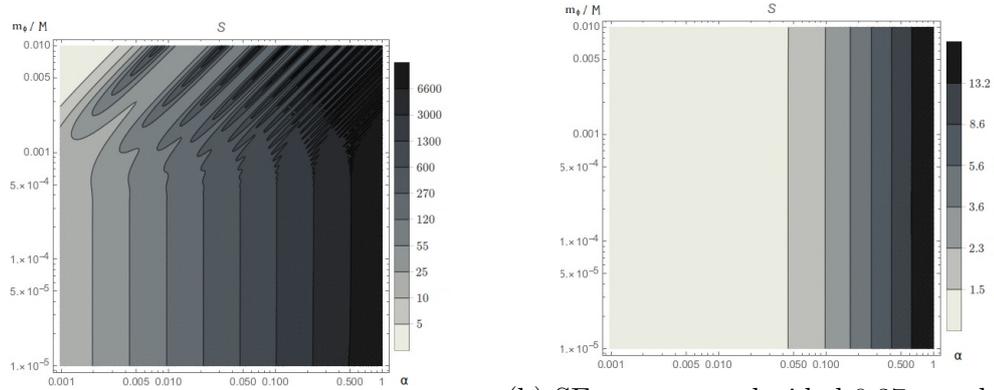


(a) SE en función de parámetros  $\epsilon_\phi$  y  $\epsilon_v$ . (b) Mismo gráfico aumentado para la resonancia superior.

Figura 9.5: Contornos de ensanchamiento  $S$  del potencial Yukawa.

### 9.2.1. Comparación con el universo temprano

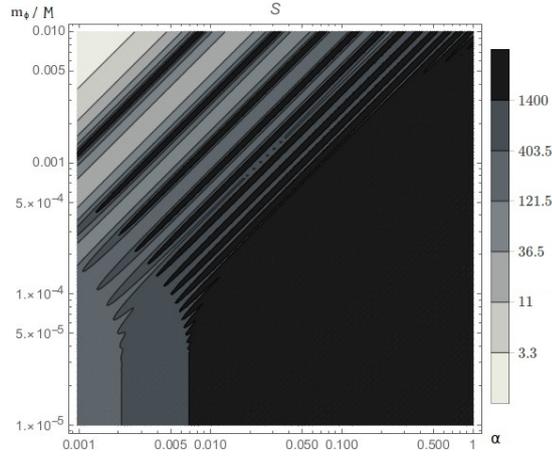
Como ya mencionamos en la sección 6.0.3 el ensanchamiento de Sommerfeld hoy es mucho mayor que en el Universo temprano, en la Fig. 9.6 se muestra contornos de acoplamiento versus la fracción entre las masas bosón y fermión  $m_\phi/M_\chi$ , el de la izquierda para una velocidad media a una temperatura actual y la derecha para una velocidad media a una temperatura del desacoplo. Vemos que en el Universo temprano el máximo ensanchamiento que se obtiene es del orden  $S \sim 10$  con el máximo acoplamiento  $\alpha \sim 1$ , en cambio a una temperatura actual es posible obtener un ensanchamiento del orden  $S \sim 10^4$  con un acoplamiento  $\alpha \sim 0,01$ . El ensanchamiento de Sommerfeld se caracteriza el factor  $1/v$ , este resultado es particularmente importante para subhalos del halo de Milky Way donde haya velocidades de  $10 \text{ km/s}$ , en la Fig. 9.7 mostramos el ensanchamiento para esta velocidad.



(a) SE para una velocidad  $150 \text{ km/s}$ .

(b) SE para una velocidad  $0,37c$ , es decir a una temperatura  $T = M_\chi/20$ .

Figura 9.6: Contornos de ensanchamiento  $S$  del potencial Yukawa de la fraccion  $m_\phi/M_\chi$  vs acoplamiento  $\alpha$ .


 Figura 9.7: SE para una velocidad  $10\text{km/s}$ .

### 9.3. Interacción espín-espín

En la ecuación de Breit para bosón vector masivo calculado anteriormente, consideramos solo mayores contribuciones del potencial (8.18). De esta forma, el primer término relevante para el ensanchamiento de Sommerfeld es la interacción espín-espín,

$$U(\mathbf{x}) = (a + b\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \frac{e^{-Qcr}}{r}. \quad (9.12)$$

Por lo tanto, tenemos un potencial bosónico ( $b = 0$ ) y en este caso la ecuación de Schrödinger es resuelta usando producto tensorial entre el espacio posición y espín.

Si trabajamos en la representación momentum, la parte no-diagonal del Hamiltoniano es la interacción espín-espín  $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ , que puede ser diagonalizada en la base común  $|s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle$ .

Después de esto, obtenemos dos ecuaciones, una para los estados tripletes  $\psi_t$  y una para el estado singlete  $\psi_s$ :

$$\left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + (a + b) \frac{e^{-Qcr}}{r} \right] \psi_t = E\psi_t \quad (9.13)$$

$$\left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + (a - 3b) \frac{e^{-Qcr}}{r} \right] \psi_s = E\psi_s \quad (9.14)$$

Por lo tanto, en este caso tenemos que resolver el problema conocido de una partícula en un potencial Yukawa de la forma  $\gamma e^{-Qe^r}/r$  con  $\gamma = a + b$  y  $\gamma = a - 3b$ , para los estados triplete y singlete, respectivamente. Es bien conocido que la sección eficaz total para este scattering nucleón está dada por  $\sigma = \frac{1}{4}\sigma_s + \frac{3}{4}\sigma_t$ , (see e.g. [23]). Donde  $\sigma_s$  y  $\sigma_t$  son las secciones eficaces para los estados singlete y triplete, respectivamente. Entonces podemos notar que el factor de ensanchamiento de Sommerfeld está dado por:

$$S = \frac{1}{4}S_s + \frac{3}{4}S_t, \quad (9.15)$$

donde  $S_t$  y  $S_s$  son los factores de ensanchamiento de la partícula en el potencial Yukawa con  $\gamma = a + b$  y  $\gamma = a - 3b$ , respectivamente. Finalmente podemos notar que para el caso de bosón escalar masivo no tenemos el término espín-espín ( $\gamma = a$ ).

## 9.4. Potencial exponencial

Como fue discutido anteriormente, la forma del potencial nucleón-nucleón no es conocida en forma exacta, algunas veces es necesario escoger un potencial fenomenológico con el fin de describir tal interacción. En este sentido, el potencial exponencial atractivo

$$V(r) = -V_0 e^{-\frac{m_\phi c}{\hbar} r}$$

puede ser usado como una aproximación de un potencial nucleón [46]. Igualmente, podría ser una forma de interacción de materia oscura, por esta razón investigamos si este potencial exhibe ensanchamiento de Sommerfeld.

En otras palabras, necesitamos calcular la función de onda que es solución de la ecuación radial de Schrödinger (9.1) y como estamos interesados en procesos de baja energía necesitamos solo ondas-s, es decir, soluciones con  $l = 0$ .

Con el fin de calcular  $\chi(r)$  realizamos el cambio estándar de variables

$$x = \alpha e^{-\beta r}, \quad (9.16)$$

CAPÍTULO 9. EJEMPLOS DE ENSANCHAMIENTO DE SOMMERFELD63

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes, y escogiendo estas constantes como

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2\mu V_0}}{m_\phi c}, \quad \beta = \frac{m_\phi c}{2\hbar}.$$

Podemos reescribir la Ec. (9.1) en la forma de una ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\chi(x)}{dx} + \left(1 - \frac{i^2\nu^2}{x^2}\right) \chi(x) = 0, \quad (9.17)$$

donde  $\nu = \frac{2\hbar k}{m_\phi c}$ , corresponde a estados con energía positiva  $E$ .

La solución general está dada por

$$\chi(x) = AJ_{i\nu}(x) + BN_{i\nu}(x),$$

con  $J_{i\nu}(x)$  y  $N_{i\nu}(x)$  son las funciones de Bessel y Newman respectivamente. Con el requerimiento que la función de onda es finita cuando  $r \rightarrow \infty$  concluimos que  $B = 0$ , y la solución general es de la forma

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} = \frac{1}{r} J_{i\nu} \left( \frac{\sqrt{8\mu V_0}}{m_\phi c} e^{-\frac{m_\phi c}{2\hbar} r} \right), \quad (9.18)$$

donde la condición de  $\chi(0) \rightarrow 0$  nos lleva a

$$J_{i\nu} \left( \frac{\sqrt{8\mu V_0}}{m_\phi c} \right) \rightarrow 0. \quad (9.19)$$

Es decir, la solución debe satisfacer la condición anterior, para la función de Bessel de orden  $i\nu$ .

Es difícil observar el comportamiento de la función de onda escrita en esta forma, pero al menos podemos analizar sus aproximaciones asintóticas.

Cuando  $r \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0$ , la expresión asintótica de  $J_{i\nu}(x)$  cuando  $x \rightarrow 0$  está dada por  $J_\rho(x) \simeq \frac{(x/2)^\rho}{\Gamma(1+\rho)}$ . Reemplazando en Ec. (9.18) obtenemos

$$R(r) \simeq \frac{1}{\Gamma(1+i\nu)} \left( \frac{\sqrt{2\mu V_0}}{m_\phi c} \right)^{i\nu} \frac{e^{-ikr}}{r},$$

la cual es efectivamente una solución asintótica de scattering.

El ensanchamiento de Sommerfeld Ec. (9.2) encontrado es

$$S_k = \left| \frac{\sqrt{2\mu V_0}}{2\hbar k} J'_{i\nu} \left( \frac{\sqrt{8\mu V_0}}{m_\phi c} \right) \right|^2. \quad (9.20)$$

Como ya hemos mencionado, esta expresión es difícil de observar, pero podemos evaluar esta expresión usando la forma asintótica de la función de Bessel [44],  $x \gg 1$  y  $|x| \gg |\nu^2 - \frac{1}{4}|$ , en el límite de baja energía cinética (o equivalentemente  $V_0 \gg \frac{\mu v^2}{2}$ ), tenemos

$$J_{i\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cosh\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + i \sinh\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Recordando que para  $r \rightarrow 0$   $\chi(0) \rightarrow 0$ , pues  $R(0)$  tiene que ser finito, solo uno de los dos términos usamos.

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{m_\phi c}{\sqrt{8\mu V_0}}} e^{\frac{m_\phi c}{4\hbar} r} \sinh\left(\frac{2\mu v \pi}{m_\phi c 2}\right) \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\sqrt{8\mu V_0}}{m_\phi c} e^{-\frac{m_\phi c}{2\hbar} r} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (9.21)$$

Usando este último resultado y la Ec. (9.20) el factor de ensanchamiento de Sommerfeld encontrado es

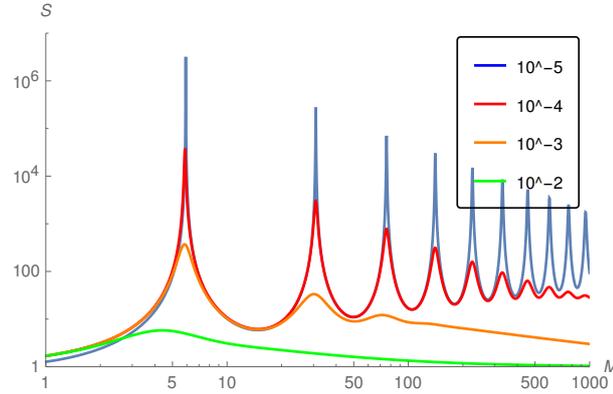
$$S_v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2V_0}{\mu v^2}} \frac{m_\phi c}{\mu v} \sinh^2\left(\frac{2\mu v \pi}{m_\phi c 2}\right) \cos^2\left(\frac{\sqrt{8\mu V_0}}{m_\phi c} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (9.22)$$

A continuación, se muestra el resultado numérico del gráfico del ensanchamiento vs masa incidente en la Fig. 9.8, el código es similar al del potencial Yukawa mostrado en el apéndice 12

### 9.4.1. Estados ligados

Podemos reescribir la Ec. (9.1) en la forma de una ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\chi(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \chi(x) = 0, \quad (9.23)$$


 Figura 9.8: Ensanchamiento  $S$  en función de la masa (TeV).

donde  $\nu^2 = \frac{2\mu E_B}{m_\phi^2 c^2}$ , corresponde a estados con energía de ligamiento  $E = -E_B$ .

Cuya solución, junto con la condición de borde que  $R(0)$  sea finito nos lleva a

$$R(r) = \frac{J_\nu(x)}{r}, \quad (9.24)$$

y se asegura la condición de estado ligado  $R(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

La condición de  $\chi(0) \rightarrow 0$  nos lleva a

$$J_\nu \left( \frac{\sqrt{8\mu V_0}}{m_\phi c} \right) = 0. \quad (9.25)$$

Con esta condición de cuantización se puede calcular la energía de los estados ligados.

## 9.5. El potencial $\delta$ tri-dimensional y el neutrino como materia oscura

En casi todos los estudios de neutrinos se asumen como relativistas o incluso ultrarelativistas, esto pues los neutrinos que pueden ser detectados<sup>1</sup> requieren ser energéticos para producir la reacción correspondiente y su posterior detección. Pero esto no significa que no existan los neutrinos no-relativistas en la naturaleza.

La temperatura actual del fondo cósmico de neutrinos CNB es  $T_\nu \sim 1,95K =$

<sup>1</sup>En detectores basados en: centelleadores, efecto Cherenkov o procesos radiativos.

$1,68 \times 10^{-4}$  eV. Para masas de neutrinos:  $\gtrsim 0,008\text{eV}$ ,  $\gtrsim 0,05\text{eV}$ ,  $\gtrsim 0,1\text{eV}$ , y  $\gtrsim \text{eV}$ , las velocidades medias son  $\lesssim 0,25c$ ,  $\lesssim 0,1c$ ,  $\lesssim 0,07c$ , y  $\lesssim 0,02c$ , respectivamente. Donde usamos la relación  $\langle \frac{1}{2}m_\chi v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$ . Esta estimación nos indica que las reliquias del CNB son no-relativistas.

Ahora discutiremos el potencial tri-dimensional  $\delta$  [47] como un modelo realista para el scattering de neutrino a bajas energías. Como ya vimos en la sección 8.2.2 este potencial emerge naturalmente en la aproximación  $1/c^2$  y por lo tanto debería explicar razonablemente la fenomenología a bajas energías.

El movimiento en el potencial delta Ec. (8.30) es descrito por la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{x}) = -\frac{2\alpha m_\nu}{M^2} \delta(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}), \quad (9.26)$$

donde  $k^2 = 2m_\nu E$  y  $m_\nu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  es la masa reducida de neutrinos. La ecuación integral de scattering, en este caso, es descrita por

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) - \frac{2\alpha m_\nu}{M^2} \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \\ &= \varphi(\mathbf{x}) - \frac{2\alpha m_\nu}{M^2} G(\mathbf{x}) \psi(0), \end{aligned} \quad (9.27)$$

donde  $\varphi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  representa la onda de plana incidente y la función de Green satisface

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (9.28)$$

Haciendo  $\mathbf{x} = 0$  en Ec. (9.27) encontramos

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha m_\nu}{M^2} G(0)}, \quad (9.29)$$

donde  $G(0)$  tiene la forma integral

$$G(0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2 - k^2}. \quad (9.30)$$

La integral Ec.(9.30) es divergente linealmente y puede ser evaluada regulari-

zando con un cutoff  $\Lambda$  como en [47, 48] y obtenemos

$$G(0) = \frac{\Lambda}{2\pi^2} - \frac{ik}{4\pi}. \quad (9.31)$$

Notamos aquí que este resultado también puede obtenerse mediante regularización dimensional como se muestra en el apéndice.

El infinito en  $G(0)$  nos indica que debe existir una renormalización tanto en la función de onda como en el acoplamiento.

### 9.5.1. Solución de scattering

Asumiendo que no existen estados ligados, la ecuación de scattering Ec. (9.27) es

$$\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})f(\theta), \quad (9.32)$$

donde  $f(\theta)$  denota la amplitud de scattering, en este caso, dado por  $f(\theta) = -\frac{2\alpha m_\nu}{M^2} \psi(0)$ . Podemos determinar la amplitud de scattering de las Ecs. (9.29) y (9.31)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{4\pi}{\frac{2\pi M^2}{\alpha m_\nu} + \frac{2\Lambda}{\pi} - ik} \\ &= -\frac{4\pi}{\frac{2\pi M_R^2}{\alpha m_\nu} - ik}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

donde

$$M_R^2 = M^2 + \frac{m_\nu \alpha \Lambda}{\pi^2}, \quad (9.34)$$

con  $1/M_R^2$  denotando la constante de acoplamiento renormalizada. Es importante mencionar que la renormalización se efectúa en la amplitud de scattering, pues es una cantidad medible y finita.

Ahora podemos renormalizar la función de onda  $\psi(0)$ . Reemplazando la Ec.

(9.31) en la Ec. (9.29)

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha m_\nu \Lambda}{\pi^2 M^2} - ik \frac{\alpha m_\nu}{2\pi M^2}} = \frac{1}{\frac{M_R^2}{M^2} - ik \frac{\alpha m_\nu}{2\pi M^2}} = \frac{M^2}{M_R^2} \frac{1}{1 - ik \frac{\alpha m_\nu}{2\pi M_R^2}} = Z \psi_R(0), \quad (9.35)$$

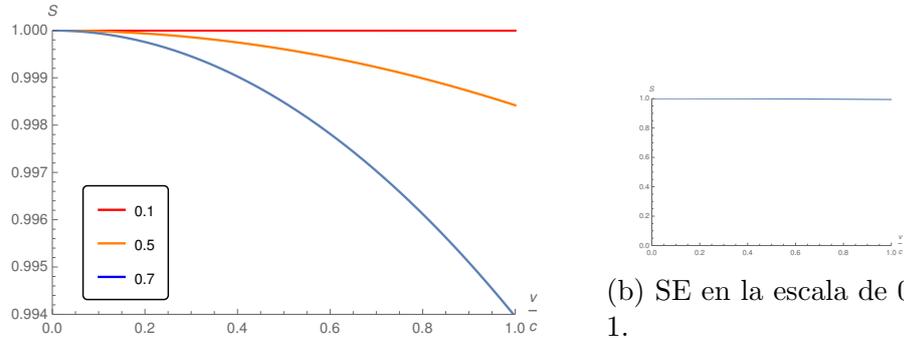
donde  $Z = \frac{M^2}{M_R^2}$  es constante de renormalización, y  $\psi_R(0)$  es la función de onda renormalizada.

Con este resultado calculamos el ensanchamiento de Sommerfeld

$$S_k = |\psi_R(0)|^2 = \frac{1}{1 + k^2 \left( \frac{m_\nu}{2\pi M_R^2} \right)^2}. \quad (9.36)$$

Podemos reescribir el SE en términos de la velocidad, considerando obviamente energía no-relativista (y cambiando de unidades naturales a S.I.)

$$S_v = \frac{1}{1 + \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \frac{m_\nu}{M_R} \right)^4 \left( \frac{v}{c} \right)^2}. \quad (9.37)$$



(a) SE para diferentes fracciones de masa neutrino/-masa boson.

Figura 9.9: Ensanchamiento de Sommerfeld (SE) del potencial delta en función de la velocidad.

Graficamos esta función en la Fig. 9.9 para diferentes fracciones del neutrino con el bosón  $m_\nu/M_R$ , vemos que la dependencia de la velocidad no es muy significativa y en general el factor  $S \rightarrow 1$ , aunque a altas velocidades disminuye levemente.

Por completitud podemos calcular la sección eficaz total en caso que este

potencial sea el único interactuante,

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \frac{64\pi^3}{\left(\frac{2\pi M_R^2}{m_\nu}\right)^2 + k^2}, \quad (9.38)$$

donde hemos usado el hecho que  $\alpha^2 = 1$  (pues  $\alpha = \pm 1$ ). Notamos que la sección eficaz total (a bajas energías) alcanza un máximo cuando  $k = 0$ ,

$$\sigma_{tot}^{\max} = 16\pi d_{\text{eff}}^2, \quad (9.39)$$

donde la longitud de scattering es definida como

$$d_{\text{eff}} = \frac{m_\nu}{M_R^2}. \quad (9.40)$$

Este resultado es independiente de  $\alpha$ , es decir, si el potencial es atractivo o repulsivo.

### 9.5.2. Estados ligados

Si el potencial es atractivo ( $\alpha = 1$ ) puede haber estados ligados para  $E = -|E_B|$  [47, 48]. En este caso, la ecuación de scattering es (ver (9.27))

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{2m_\nu}{M^2} G(\mathbf{x}) \psi(0). \quad (9.41)$$

La consistencia de (9.41) nos conduce a la condición

$$G(0) = -\frac{M^2}{2m_\nu}. \quad (9.42)$$

Por otro lado,  $G(0)$  puede ser calculado de (9.30) con  $k^2 \rightarrow -\kappa^2 = -2m_\nu|E_B|$  tal que (9.42) conduce a

$$\begin{aligned} -\frac{M^2}{2m_\nu} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + 2m_\nu|E_B|} \\ &= \frac{\Lambda}{2\pi^2} - \frac{\kappa}{4\pi}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

## CAPÍTULO 9. EJEMPLOS DE ENSANCHAMIENTO DE SOMMERFELD70

Este resultado nos permite determinar la energía del estado ligado

$$E = -|E_B| = -\frac{1}{2m_\nu} \left( \frac{2\pi M_R^2}{m_\nu} \right)^2. \quad (9.44)$$

De este modo, vemos que si hay estados ligados presentes, la sección eficaz total será

$$\sigma_{tot} = \frac{64\pi^3}{2m_\nu |E_B| + k^2}. \quad (9.45)$$

Notamos que si para  $k = 0$  en la Ec.(9.45) obtenemos la sección eficaz máxima. Que puede ser escrita como

$$\sigma_{tot}^{max} = 4\pi G_X^2 m_\nu^2, \quad (9.46)$$

donde  $m_\nu$  representa la masa reducida de dos neutrinos de igual masa. Este comportamiento es independiente de que el potencial sea atractivo o repulsivo.

La constante de acoplamiento es relevante y tiene un papel análogo a la constante de Fermi efectiva  $G_X$  en el scattering de de interacciones secretas para neutrinos. En principio, límites para esa constante se pueden encontrar en [42, 43],[49]-[53].

Vemos que aunque el ensanchamiento de Sommerfeld de este potencial no es relevante, podemos utilizar este potencial en el marco de interacciones secretas entre neutrinos.

# Capítulo 10

## Restricción mediante densidad de reliquia

Como ya hemos mencionado, la sección eficaz de aniquilación en el tiempo presente, con valores típicos  $\langle\sigma v\rangle \sim 10^{-24} \text{cm}^3/\text{s}$  [54], es mucho mayor a la del tiempo del freeze-out, datos experimentales sugieren  $\langle\sigma v\rangle_F \approx 3 \times 10^{-26} \text{cm}^3/\text{s}$ , el cual corresponde a la aniquilación de WIMP térmico [55], esto ha dado lugar a la postulación del ensanchamiento de Sommerfeld como una posible causa de lo anterior [56]. Si consideramos la materia oscura como reliquia térmica se puede postular como una restricción a la densidad de reliquia térmica de materia oscura.

### 10.1. Modelo simple

Un modelo sencillo de aplicar es que además de considerar la aniquilación de materia oscura en partículas del modelo estándar  $\bar{\chi}\chi \rightarrow XX$  ( $X$  partícula del modelo estándar, en este contexto leptones cargados) consideremos también la aniquilación en el portador de fuerza  $\bar{\chi}\chi \rightarrow \phi\phi$  ( $\phi$  bosón portador de fuerza). Un esquema es representado en la fig. 10.1.

La aniquilación en el portador de fuerza aumenta la sección eficaz de aniquilación en el freeze-out, y los parámetros relevantes son restringidos por la densidad de reliquia de materia oscura. Esto reduce los valores permitidos del factor de

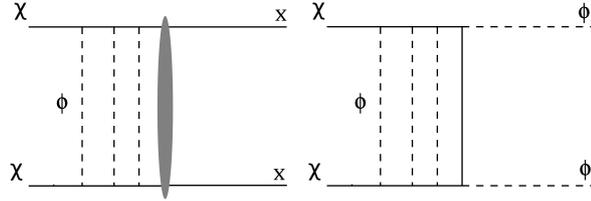


Figura 10.1: Esquema del modelo de aniquilación de materia oscura.

ensanchamiento a bajas temperaturas.

Hemos mencionado que el ensanchamiento de Sommerfeld se puede llevar a cabo mediante diferentes tipos de portadores de fuerza: vector, escalar o pseudoescalar [57, 58]. En la actualidad hay numerosos modelos de materia oscura que incorporan simetría de gauge oscura, el cual puede incorporar bosones vectores tanto pesados como livianos (o mas aún sin masa). También existen modelos multi-Higgs que incorporan escalares pesados y/o livianos. Y en bosones de Goldstone podemos encontrar un pseudoescalar.

Podemos encontrar diferentes efectos en el ensanchamiento de Sommerfeld y su restricción dependiendo de la naturaleza del portador de fuerza. En este trabajo analizaremos los portadores de fuerza vector y escalar.

La presencia del ensanchamiento de Sommerfeld modifica el cálculo de la densidad de reliquia térmica de materia oscura como vimos en la sección 9.1.1.

Los procesos  $\bar{\chi}\chi \rightarrow XX$  y  $\bar{\chi}\chi \rightarrow \phi\phi$  posponen la temperatura del freeze-out, de esta forma la densidad de reliquia disminuye. Con el fin de obtener la densidad de reliquia observada los parámetros relevantes como el acoplamiento deben ser lo suficientemente pequeños, lo que a su vez produce una reducción en el factor de ensanchamiento a bajas temperaturas.

## 10.2. Boost factor

En general el boost factor consiste de dos partes, uno relacionado a la distribución de materia oscura y el otro a la descripción de la dependencia de la tasa de aniquilación  $\sigma v$  en  $v$ , esto pues la velocidad de dispersión de materia oscura

es mayor en cúmulos de materia oscura (subhalos) que en el halo huésped <sup>1</sup>.

La expresión general para el boost factor tiene la forma [59]

$$B = B_{\Delta V} \times B_{\sigma v}, \quad (10.1)$$

donde el término  $B_{\Delta V}$  corresponde a la dependencia en la densidad de energía del subhalo con respecto al halo huésped, término va mas allá del alcance de este trabajo y no será considerado. Por comodidad llamaremos boost factor solo a la dependencia de la velocidad  $B_{\sigma v}$ .

En el modelo presentado la sección eficaz de aniquilación está dado por

$$(\sigma_{tot}v)_0 = (\sigma_{XX}v)_0 + (\sigma_{\phi\phi}v)_0. \quad (10.2)$$

El promedio térmico de la sección eficaz de aniquilación después de incluir el ensanchamiento de Sommerfeld de acuerdo a la sección 4.3 obtenemos

$$\langle \sigma_{tot}v \rangle(x) = \langle S_0(v) \rangle(x) (\sigma_{XX}v)_0 + \langle S(v) (\sigma_{\phi\phi}v)_0 \rangle(x), \quad (10.3)$$

donde  $S(v) = S_{0(1)}(v)$  si la aniquilación  $\bar{\chi}\chi \rightarrow \phi\phi$  se produce mediante una onda  $s(p)$ .

El boost factor puede cuantificarse

$$B_{\sigma v} \equiv \frac{\langle \sigma_{tot}v \rangle(x_n)}{\langle \sigma v \rangle_F}, \quad (10.4)$$

donde los subíndices “ $n$ ” y “ $F$ ” se refieren a los tiempos presente y freeze out respectivamente. Si no se considera una subestructura local de materia oscura entonces se asume  $\rho \approx \rho_0$  y se cumple  $B = B_{\sigma v}$ .

Si se parametriza en el freeze-out la aniquilación de materia oscura en partículas del modelo estándar como  $\langle S_0(v) \rangle(x_F) (\sigma_{XX}v)_0 \equiv \eta \langle \sigma v \rangle_F$ , es decir, una frac-

---

<sup>1</sup>Cuando un halo pequeño se fusiona con un halo significativamente más grande, se convierte en un subhalo que orbita dentro del pozo potencial del halo huésped.

ción del valor típico, podemos reescribir el boost factor como

$$B_{\sigma v} \approx \eta \frac{\langle S_0(v) \rangle(x_n)}{\langle S_0(v) \rangle(x_F)} + \frac{\langle S(v)(\sigma_{\phi\phi} v) \rangle(x_n)}{\langle \sigma v \rangle_F}. \quad (10.5)$$

La aniquilación mediante un canal-t se espera mediante una onda-s

$$(\sigma_{\phi\phi} v)_0 = \frac{\pi \alpha^2}{m_\chi^2}. \quad (10.6)$$

Incluyendo la Ec. (10.3) en la ecuación de Boltzmann se puede restringir los valores del acoplamiento  $\alpha$ . Para valores de  $\eta = 0, 0,25, 0,5$  obtenemos las curvas de la fig. 10.2. Vemos que a mayor valor de  $\eta$  menor será el valor de  $\alpha$ . Esto es porque al aumentar la sección eficaz de aniquilación, la tasa de aniquilación también aumenta, por lo tanto se necesita un menor valor de  $\alpha$  para obtener la densidad de reliquia deseada.

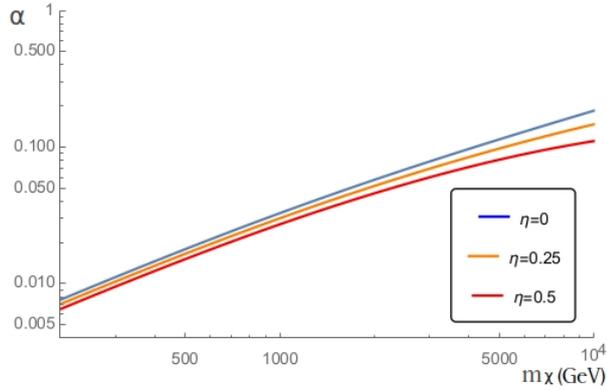
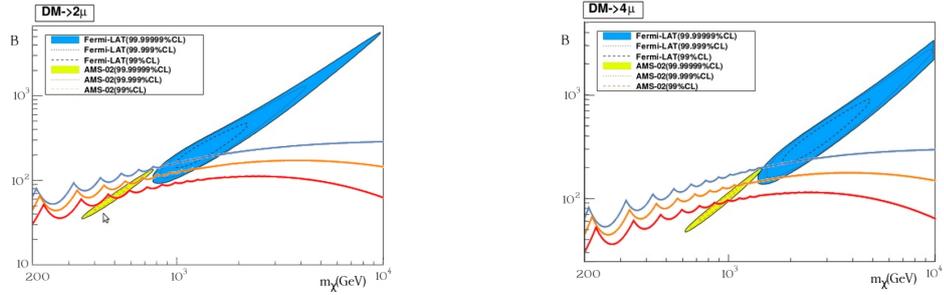


Figura 10.2: Acoplamiento en la aniquilación de materia oscura restringido por la densidad de reliquia térmica.

Los contornos de las figuras 10.3 y 10.4, corresponden a la regiones permitidas en el ajuste de curvas para la fracción de positrón sobre el total y flujo total de electrones y positrones de los datos medidos de los experimentos AMS-02 y Fermi-LAT, cuyos ajustes provienen de modelos de propagación de rayos cósmicos incluyendo la aniquilación de materia oscura en leptones cargados (estados intermedios) que decaen a electrones y positrones [54]. Aunque hay ajustes para estados finales de los leptones cargados  $X = e, \mu, \tau$  no están presentes los esta-

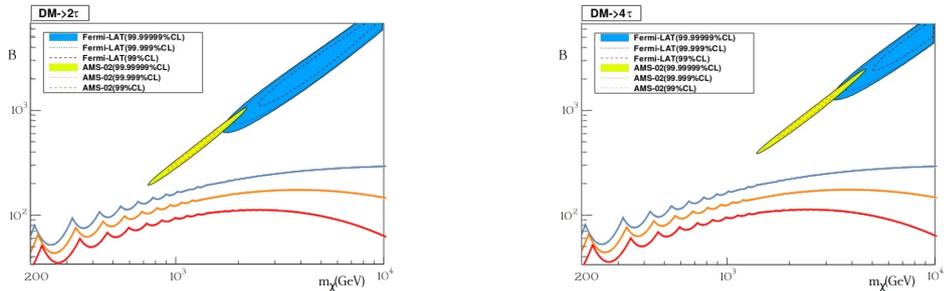
dos finales  $X = 2e$  y  $X = 4e$  pues sus regiones permitidas son contornos muy pequeños (y delgados) comparados con los contornos de los otros leptones.

Al resolver los acoplamientos de la fig. 10.2 podemos encontrar el boost factor entre el tiempo actual y el freeze-out de la aniquilación de materia oscura Ec. (10.5) mediante los procesos  $\bar{\chi}\chi \rightarrow XX$  y  $\bar{\chi}\chi \rightarrow \phi\phi$ , cuya sección eficaz de aniquilación Ec. (10.2). Encontramos las curvas superpuestas en las figuras 10.3 y 10.4. Las figuras muestran que el ensanchamiento de Sommerfeld puede explicar datos de AMS-02 y Fermi-LAT sólo en la aniquilación de materia oscura a estados finales  $X = 2\mu$  y  $X = 4\mu$ . También vemos, en general, que se restringe boost factor, a mayor valor de  $\eta$  esto es porque vimos que el acoplamiento  $\alpha$  disminuye.



(a) Aniquilación de materia oscura a  $2\mu$ . (b) Aniquilación de materia oscura a  $4\mu$ .

Figura 10.3: Boost factor vs masa  $m_\chi$  junto a las regiones permitidas en el ajuste a experimentos AMS-02 y Fermi-LAT.



(a) Aniquilación de materia oscura a  $2\tau$ . (b) Aniquilación de materia oscura a  $4\tau$ .

Figura 10.4: Boost factor vs masa  $m_\chi$  junto a las regiones permitidas en el ajuste a experimentos AMS-02 y Fermi-LAT.

# Capítulo 11

## Conclusión

El ensanchamiento de Sommerfeld es un efecto elemental en mecánica cuántica no-relativista, el cual explica el efecto de un potencial en la sección eficaz de interacción. Para calcular este ensanchamiento de Sommerfeld, utilizamos mecánica cuántica no-relativista, que en esencia el problema consiste en encontrar la función de onda en el punto donde la interacción toma lugar, usando la ecuación de Schrödinger.

Se ha derivado potenciales de dos cuerpos, usando una expansión de la amplitud de scattering en ordenes  $(1/c)$ , para interacciones mediadas por bosones vector y escalar, con el objeto de aplicarlo como una posible interacción de materia oscura fermiónica.

En el caso de materia oscura pesada estudiamos los potenciales Yukawa y exponencial, se obtiene que exhiben ensanchamiento de Sommerfeld, por esta razón pueden ser usados en modelos como posible interacción de materia oscura.

En el caso de materia oscura liviana, se estudia el problema de scattering de neutrinos del CNB, en el régimen de bajas energías, suponiendo que la interacción entre los neutrinos es de corto alcance estudiamos el potencial delta. Este potencial surge a partir de un término efectivo, es necesario renormalizar la función de onda en la divergencia. Al calcular el ensanchamiento de Sommerfeld, vemos que el factor es aproximadamente uno, por lo que no es posible tratarlo como ensanchamiento, pero si puede tratarse como una posible interacción secreta.

Finalmente vimos que una restricción estricta surge de la densidad de reliquia térmica de materia oscura, esto debido a la aniquilación de partículas de materia oscura en los portadores de fuerza introducidos por el mecanismo de ensanchamiento de Sommerfeld.

# Capítulo 12

## Apéndice

### 12.1. Código en Mathematica del gráfico ensanchamiento de Sommerfeld para el potencial Yukawa atractivo

A continuación se muestra el código en mathematica para la solución de la ecuación de Schrödinger con potencial Yukawa atractivo y posterior gráfico del ensanchamiento de Sommerfeld vs masa de partícula incidente en unidades TeV. Para obtener la Fig. 9.3 hay que cambiar el parámetro  $v$ .

```
v = 10^-5;
a = 1/(30*v);
b[M0_] := 90/(1000*0.5*M0*v);

ode4[M_?NumericQ] := Block[{t},
  ode4[M] = First@NDSolve[{
    y''[t] + (2/t)*y'[t] + (1 + (2*a/t)*Exp[-b[M]*t])*
      y[t] == 0,
    y[0.0001] == 1, y'[0.0001] == -a}, y, {t, 0.0001, 100},
    AccuracyGoal -> 12, PrecisionGoal -> 8];
  S[M] = 1/((y[90]*90)^2 + (y[90] + 90*y'[90])^2) /. ode4[M];
```

```
ode4 [M]
];
```

```
S [M0_?NumericQ] := (ode4 [M0]; S [M0]);
```

```
LogLogPlot [S [M], {M, 1, 100},
  PlotRange -> {{1, 100}, {1, 10^8}}, MaxRecursion -> 7,
  AxesLabel -> {M, S} ]
```

## 12.2. Regularización de integrales

$$I_n(z) = \int \frac{d^n \mathbf{p}}{(2\pi)^n} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + z}. \quad (12.1)$$

### 12.2.1. Regularización por cut-off

El caso 3-dim, la integral diverge linealmente, se puede introducir el cutoff, denotamos por  $|\mathbf{p}| = p$ ,

$$\begin{aligned} I_3(z) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + z} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{p^2 + z} = \frac{1}{2\pi^2} \left( p - \sqrt{z} \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{z}}\right) \right) \Big|_0^\Lambda \\ &= \frac{\Lambda}{2\pi^2} - \frac{\sqrt{z}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

EL resultado nos queda en función del parámetro  $\Lambda$ .

### 12.2.2. Regularización dimensional

Usamos la integral general para n dimensiones [60]

$$I_n = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2k \cdot p - M^2)^\alpha} = i \frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n} \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{(p^2 + M^2)^{\alpha - n/2}}. \quad (12.3)$$

Para la integral  $p = 0$ ,  $-M^2 = z$ ,  $n = 3$  y  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} I_3(z) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + z} = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^1 \Gamma(1 - \frac{3}{2})}{\Gamma(1) (-z)^{1-3/2}} \\ &= -\frac{\sqrt{z}}{4\pi}, \end{aligned} \quad (12.4)$$

donde hemos usado  $\Gamma(1) = 1$  y  $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ .

Regularización dimensional separa los términos finito e infinito en el resultado, en este caso obtenemos directamente el resultado finito.

## 12.3. Sistema de dos partículas

El cambio de coordenadas de dos partículas a la del centro de masa y relativa es básico en mecánica clásica, pero es necesario mostrarlo pues se usa en varios capítulos de este trabajo sin mencionarlo.

### 12.3.1. Sistema clásico

Un Hamiltoniano para dos partículas puntuales de masas  $m_1$  y  $m_2$  que interactúan mediante un potencial  $V$  está descrito por

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (12.5)$$

Haciendo el cambio de coordenadas a la del centro de masa y relativa

$$\mathbf{x}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad (12.6)$$

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (12.7)$$

Combinando estas ecuaciones encontramos el nuevo momentum para ambas

coordenadas

$$\mathbf{p}_{\text{CM}} = M\dot{\mathbf{x}}_{\text{CM}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (12.8)$$

$$\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{x}} = \frac{m_2}{M}\mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M}\mathbf{p}_2. \quad (12.9)$$

De las Ecs. (12.6)-(12.9) se encuentra:

$$m_1m_2 = \mu M, \quad (12.10)$$

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \frac{\mathbf{p}_{\text{CM}}^2}{2M} \quad (12.11)$$

$$m_1\mathbf{x}_1^2 + m_2\mathbf{x}_2^2 = \mu\mathbf{x}^2 + M\mathbf{x}_{\text{CM}}^2, \quad (12.12)$$

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}_{\text{CM}} \cdot \mathbf{x}_{\text{CM}} \quad (12.13)$$

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{L} + \mathbf{L}_{\text{CM}}, \quad (12.14)$$

las ultimas dos ecuaciones son iguales, pero usamos la definición de momentum angular.

Debido a lo anterior podemos reescribir el Hamiltoniano como

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{\mathbf{p}_{\text{CM}}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{x}). \quad (12.15)$$

### 12.3.2. Sistema cuántico

En mecánica cuántica los observables pasan a ser promovidos a operadores y aplicando la regla de conmutación

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (12.16)$$

$$H = H_R + H_r, \quad (12.17)$$

donde  $H_R = \frac{\mathbf{p}_{\text{CM}}^2}{2M}$  y  $H_r = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{x})$ .

Los autovectores de  $H_R$  y  $H_r$ , haciendo el producto tensorial, corresponden a los autovectores de  $H$ .

Así podemos escribir la función de onda general como

$$\Psi(\mathbf{x}_{\text{CM}}, \mathbf{x}) = \Psi_R(\mathbf{x}_{\text{CM}})\Psi_r(\mathbf{x}), \quad (12.18)$$

donde las funciones de onda se pueden encontrar de las Ecs. de Sch.

$$H_R\Psi_R(\mathbf{x}_{\text{CM}}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2\right)\Psi_R(\mathbf{x}_{\text{CM}}), \quad (12.19)$$

$$H_r\Psi_r(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 + V(\mathbf{x})\right)\Psi_r(\mathbf{x}). \quad (12.20)$$

De esta forma, el problema a resolver corresponde a la coordenada relativa, lo cual viene implícito en este trabajo en el tratamiento de scattering.

# Bibliografía

- [1] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press (1993).
- [2] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early universe*, Front. Phys. Vol. 69 (1990).
- [3] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic press (2003).
- [4] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge university press (1999).
- [5] D. J. Thompson, D. L. Bertsch and R. H. O'Neal, *Astrophys. J. Supp.***157**, 324 (2005) [Arxiv: astro-ph/0412376].
- [6] O. Adriani et al.[PAMELA collaboration], An anomalous positron abundance in cosmic ray with energies 1.5-100 GeV. *Nature* **458**, 607-609 (2009).
- [7] J. Chang et al.[ATIC collaboration], An excess of cosmic ray electrons at energies of 300-800 GeV. *Nature* **456**, 362-365 (2008).
- [8] A. A. Abdo et. al. [The Fermi LAT Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **102**, 181101 (2009) [arXiv:0905.0025].
- [9] M. Aguilar et al. (AMS-02), *Phys. Rev. Lett.* **110**, 14 (2013) 141102.
- [10] D. P Finkbeiner, *Astrophys. J.* **614**, 168 (2004), astro-ph/0311547.
- [11] D. P. Finkbeiner and N. Weiner, *Phys. Rev. D* **76**, 083519 (2007), [Arxiv:astro-ph/0702587].

- [12] A.W. Strong, R. Diehl, H. Halloin, V. Schonfelder, L. Bouchet, P. Mandrou, F. Lebrun, and R. Terrier, *Astron. Astrophys.* **444**, 495 (2005), [astro-ph/0509290](#).
- [13] M. Aguilar et al. (AMS-01), *Phys. Lett. B* **646**, 145 (2007), [astro-ph/0703154](#).
- [14] G. Dobler and D. P Finkbeiner, *Astrophys. J.* **680**, 1222 (2008), [0712.1038](#).
- [15] W. N. Johnson, F. R. Harnden, R. C. Haymes, *ApJ.* **172**, L1+ (1972).
- [16] P. A. R. Ade et al. *Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters.* (2015). [[arXiv: 1502.01589v3](#)].
- [17] I. Cholis, G. Dobler, D. P Finkbeiner, L. Goodenough, and N. Weiner, (2008), [0811.3641](#).
- [18] N. Arkani-Hamed, D. P. Finkbeiner, T. R. Slatyer and N. Weiner, *Phys. Rev. D* **79**, 015014 (2009).
- [19] R. Iengo, *JHEP* **0905**, 024 (2009) [[arXiv:0902.0688 \[hep-ph\]](#)].
- [20] R. Iengo, [[arXiv:0903.0317 \[hep-ph\]](#)] (2009)
- [21] A. Hryczuk, R. Iengo and P. Ullio, *JHEP* **1103**, 069 (2011) [[arXiv:1010.2172 \[hep-ph\]](#)].
- [22] A. Sommerfeld, *Annalen der Physik*, **403**, 257 (1931).
- [23] C. A. Bertulani, *Nuclear Physics in a Nutshell*, Princeton University Press (2007).
- [24] J. Lesgourgues and S. Pastor, *Phys. Rept.* **429**, 307 (2006) [[astro-ph/0603494](#)].
- [25] A. D. Dolgov, *Phys. Rept.* **370**, 333 (2002) [[hep-ph/0202122](#)].
- [26] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009).

- [27] K. Hirano, arXiv:1212.6423 [astro-ph.CO].
- [28] T. J. Weiler, *Astropart. Phys.* **11**, 303 (1999) [hep-ph/9710431].
- [29] A. Strumia and F. Vissani, hep-ph/0606054.
- [30] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltoni, *Phys. Rept.* **460**, 1 (2008) [arXiv:0704.1800 [hep-ph]].
- [31] D. Cárcamo, A. Riveros and J. Gamboa, *Mod.Phys.Lett. A* **29**, 39 (2014), 1450209 [arXiv:1411.1309 [hep-ph]].
- [32] D. Cárcamo, J. Gamboa and M. Pino, *Mod.Phys.Lett. A* **30**, 07 (2015), 1550030 [arXiv:1409.3590 [hep-ph]].
- [33] D. Cárcamo, J. Gamboa, F. Mendez, A. Das and A. Polychronakos, *Phys. Rev. D* **91**, 065028 (2015) [arXiv:1410.8089 [hep-ph]].
- [34] A. W. Strong and I. V. Moskalenko, *Astrophys. J* **509**, (1998) 212 [Arxiv: astro-ph/9807150].
- [35] A. W. Strong, I. V. Moskalenko and O. Reimer, *Astron. Astrophys.* **338**, L75 (1998) [Arxiv: astro-ph/9808084].
- [36] D. Hooper, D. P. Finkbeiner, and G. Dobler, *Phys. Rev. D* **76**, 083012 (2007), [Arxiv:0705.3655] .
- [37] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics, 2nd edition*, John Wiley, New York (1970).
- [38] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics, Rev. ed.*, Addison Wesley (1994).
- [39] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics, 2nd edition*, Plenum Press, New York (1994).
- [40] R. Machleidt, I. Slaus, *J. Phys. G* **27** (2001) R 69. [ arXiv:nucl-th/0101056] .
- [41] V. B. Beretetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory, Part IV*, Pergamon (1971).

- [42] M. S. Bilenky and A. Santamaria, hep-ph/9908272.
- [43] E. W. Kolb and M. S. Turner, Phys. Rev. D **36**, 2895 (1987) .
- [44] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, U.S. Government printing office (1972).
- [45] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press (1980).
- [46] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics* (translated by D. ter Haar), Addison Wesley (1965).
- [47] R. Jackiw, *Delta-function potentials in two-and three-dimensional quantum mechanics*, in M. A. B. Beq Memorial Volume, A. Ali and P. Hoodbhoy, eds. (World Scientific, Singapore, 25-42, 1991)
- [48] C. Thorn, *Phys. Rev.* **D19**, 639 (1979).
- [49] A. Manohar, Phys. Lett. B **192**, 217 (1987).
- [50] D. A. Dicus, S. Nussinov, P. B. Pal and V. L. Teplitz, Phys. Lett. B **218**, 84 (1989).
- [51] M. S. Bilenky, S. M. Bilenky and A. Santamaria, Phys. Lett. B **301**, 287 (1993).
- [52] M. S. Bilenky and A. Santamaria, Phys. Lett. B **336**, 91 (1994) [hep-ph/9405427].
- [53] E. Massó and R. Toldrá, Phys. Lett. B **333**, 132 (1994) [hep-ph/9404339].
- [54] H. B. Jin, Y. L. Wu, and Y.F. Zhou, JCAP **2013** (2013) 026, [arXiv:1304.1997].
- [55] G. Steigman, B. Dasgupta, and J. F. Beacom, Phys. Rev. D **86**, 023506 (2012), [arXiv:1204.3622 [hep-ph]].

- [56] M. Lattanzi, J. I. Silk, Phys. Rev. D **79**, 083523 (2009) [arXiv:0812.0360 [astro-ph]]
- [57] Z. P. Liu, Y. L. Wu and Y. F. Zhou, Phys. Rev. D **88**, 096008 (2013) [arXiv:1305.5438 [hep-ph]].
- [58] J. Chen and Y. F. Zhou, JCAP 1304 (2013) 017 [arXiv:1301.5778 [hep-ph]].
- [59] G. Bertone (editor), *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*, Cambridge Univ. Press (2010).
- [60] A. Das, *Lectures on quantum field theory*, World Scientific (2008).