

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**MODELO LINEAL DE UN TRANSDUCTOR ULTRASÓNICO DE
POTENCIA UTILIZANDO CIRCUITOS EQUIVALENTES**

Alejandro Esteban Fuentes Briceño

Santiago – Chile
2013

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**MODELO LINEAL DE UN TRANSDUCTOR ULTRASÓNICO DE
POTENCIA UTILIZANDO CIRCUITOS EQUIVALENTES**

Alejandro Esteban Fuentes Briceño

Profesor Guía Dra. Yolanda Vargas
Hernández

Trabajo de titulación presentado a la
Facultad de Ciencia, en cumplimiento
parcial de los requisitos exigidos para
optar al título de Ingeniero Físico.

Santiago – Chile
2013

MODELO LINEAL DE UN TRANSDUCTOR ULTRASÓNICO DE POTENCIA UTILIZANDO CIRCUITOS EQUIVALENTES

Alejandro Esteban Fuentes Briceño

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión de la profesora guía Dra. Yolanda Vargas Hernández, del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora del candidato, profesor Jorge Ferrer Meli y profesor Luis Gaete Garretón.

.....
Jorge Ferrer M.

.....
Luis Gaete G.

.....
Profesora Guía

.....
Directora Yolanda Vargas Hernández

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia por haberme dado la educación que tengo, a los profesores Luis Gaete y Yolanda Vargas por sus consejos y apoyo, al profesor Francisco Gómez por su gentileza y amabilidad en ayudarme en el entendimiento de placas rectangulares, a mis compañeros de laboratorio por su incondicional ayuda en mis dudas y mediciones experimentales y a mis compañeros de carrera con los cuales pase momentos inolvidables.

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto FONDEF D09I1235, CONICYT.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	viii
INTRODUCCIÓN	1
PIEZOELECTRICIDAD	3
1.1 Fundamentos de la piezoelectricidad	3
1.2 Formulación matemática del efecto piezoeléctrico	6
1.3 Relaciones piezoeléctricas y sus unidades físicas.	11
CIRCUITOS EQUIVALENTES.....	13
2.1 Circuito equivalente de Mason	13
2.2 Modelo de transductor ultrasónico de potencia con una placa vibrante. .	22
TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS DELGADAS.....	33
3.1 Cálculo de masa equivalente de una placa circular.....	33
3.2 Cálculo de la Complianza equivalente de una placa circular	41
3.3 Impedancia de radiación de una placa circular.....	42
MÉTODO EXPERIMENTAL	44
4.1 Introducción	44
4.2 Descripción experimental	44
4.3 Montaje Experimental	47
4.4 Datos experimentales	48
4.4.1 Caracterización de los transductores ultrasónicos	48
4.3.2 Amplitud de desplazamiento de la placa y modos de vibración.	49
4.3.3 Velocidad de vibración de la placa	51
4.5 Análisis de resultados	54
4.5.1 Modos de vibración de las placas	54
4.4.2 Velocidad de vibración de las placas.....	60
CONCLUSIONES	64
Bibliografía.....	65

ANEXO	66
A1: Solución de la ecuación diferencial de la placa circular delgada.....	66

INDICE DE FIGURAS

Fig 1 : Modelo simple de una molécula a la que se le aplica una fuerza externa [1]. a) Molécula eléctricamente neutra. b) Molécula a la que se le aplica una fuerza externa. c) Material polarizado en sus caras.....	4
Fig 2 : a) Un flujo de carga libre circula desde un electrodo a otro. b) Material eléctricamente neutro ya que no hay fuerzas externas que produzcan una polarización en el material [1].	5
Fig 3: Diagrama esquemático que explica los diferentes desplazamientos eléctricos asociados con un material piezoeléctrico y dieléctrico [1].....	11
Fig 4 : Cerámica piezoeléctrica [3].....	14
Fig 5 : Transductor acústico como caja negra de 3 puertas [3].	14
Fig 6 : Parámetros físicos de la caja negra que representa una red de 3 puertas [3]......	15
Fig 7: Circuito equivalente de Mason que representa un sándwich de cerámicas piezoeléctricas.	20
Fig 8: Transductor ultrasónico de potencia con placa circular y su representación en un circuito equivalente.....	23
Fig 9: Circuito equivalente de una capa de adaptación que representa una masa frontal del transductor. Z es la impedancia en la entrada de la capa de adaptación en donde $Z = \frac{F_1}{U_2}$	24
Fig 10: Circuito equivalente reducido en donde se representa un sándwich de cerámicas piezoeléctricas unido a una contramasa trasera.	25
Fig 11: Circuito equivalente de la masa frontal, amplificador mecánico y placa. El transformador representa el cambio en el diámetro de la masa frontal y el amplificador mecánico.	28
Fig 12: Masa frontal, amplificador mecánico y sus diámetros.....	29
Fig 13: Diseño de Transductor ultrasónico a utilizar en los experimentos.	45
Fig 14: Transductor ultrasónico de potencia utilizado en las mediciones.	46
Fig 15: Esquema del montaje experimental.....	48

Fig 16: Amplitud de desplazamiento de la placa con modo de vibración n=2...	50
Fig 17: Amplitud de desplazamiento de la placa con modo de vibración n=3...	51
Fig 18: Velocidad de Vibración de la placa n=2 vs corriente de alimentación del transductor. Se observa la relación lineal entre ambas variables y su respectiva ecuación de la recta.	52
Fig 19: Simulación en COMSOL de un transductor ultrasónico con placa vibrando en su segundo modo.....	55
Fig 20: Simulación en COMSOL de un transductor ultrasónico con placa vibrando en su tercer modo.	56
Fig 21: Gráfico Velocidad de vibración vs Corriente de alimentación del transductor con placa vibrando en su segundo modo. La corriente de alimentación medida está en RMS.	61
Fig 22: Gráfico Velocidad de vibración vs Corriente de alimentación del transductor con placa vibrando en su tercer modo. La corriente de alimentación medida son valores RMS.....	62

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Constantes piezoeléctricas.	12
Tabla 2: Diferentes modos de vibración y sus respectivos valores $(k_n a)^2$ [4].	37
Tabla 3: Algunas características del transductor ultrasónico de potencia a utilizar.	47
Tabla 4: Datos obtenidos del puente de impedancia.	49
Tabla 5: Datos utilizados para calcular la frecuencia a la que vibran las placas.	54
Tabla 6: Tabla con errores relativos porcentuales entre los datos teóricos y experimentales de las frecuencias de resonancia del transductor.....	58
Tabla 7: Resumen del análisis de las frecuencias de vibración de las placas. .	59

RESUMEN

El modelo de circuitos equivalentes de Mason es ampliamente usado para representar el comportamiento electromecánico de un transductor ultrasónico de potencia con placa vibrante. El problema de este modelo es que no entrega información sobre el modo de vibración de la placa.

La realidad no es esa, la placa tiene modos de vibración específicos que dependen de: las dimensiones de ésta, como está constituida y de la frecuencia de vibración del transductor ultrasónico a la que está sujeta. Por lo tanto, los valores de impedancia mecánica de la placa propuesta por el modelo de Mason no son las correctas.

En este trabajo se desarrolló un modelo lineal de un transductor ultrasónico de potencia con placa circular radiante que está basado en el circuito equivalente de Mason. En este trabajo se propone un modelo que entrega información sobre el modo de vibración de la placa además de predecir en forma precisa la velocidad de vibración del centro de la placa en función de la corriente de alimentación del transductor. Los modos de vibración de la placa fueron deducidos mediante el uso de la teoría de placas delgadas. Esta teoría también se utilizó para calcular la masa y complianza equivalente de la placa, conceptos que son necesarios para unir la teoría de placas delgadas con el circuito equivalente de Mason.

Los valores obtenidos de la impedancia mecánica de la placa van a depender de la frecuencia a la que la placa vibre y no son constantes como es el caso del circuito equivalente de Mason.

Se corroboró el modelo propuesto con 2 placas circulares de duraluminio de diferentes diámetros que vibran en modos de vibración distintos. Se usó el software COMSOL para simular los transductores en conjunto con las 2 placas y comparar las frecuencias de vibración de las placas con las que se obtienen experimentalmente. El estudio consistió en medir la velocidad de vibración en el centro de las 2 placas y la corriente de alimentación del transductor para obtener la relación empírica entre éstas variables y comparar con los resultados del modelo teórico (velocidad de vibración y corriente). Los resultados experimentales obtenidos están en concordancia con el modelo con diferencias entre ambos menores al 5,5%. Esto válido para la velocidad y frecuencia de vibración de ambas placas.

INTRODUCCIÓN

Los circuitos equivalentes electromecánicos son una forma analítica de modelar un transductor ultrasónico de potencia vibrando en espesor. Uno de los circuitos equivalentes más ampliamente usados es el de Mason, un modelo lineal en el que emplea ecuaciones piezoeléctricas para modelar el comportamiento electromecánico de las cerámicas que componen el sándwich del transductor. Se impone condiciones de borde en las caras de las cerámicas y se restringe sólo a desplazamientos unidimensionales de las partículas que componen el transductor, permitiendo obtener un modelo lineal fiable que se aproxima al comportamiento real del transductor salvo para corrientes altas (más de 1.5 [A]) en donde la velocidad de desplazamiento en la cara radiante del transductor se satura, un fenómeno no lineal, que el modelo de Mason no puede predecir. Si el transductor ultrasónico de potencia tiene una placa vibrante radiante, el modelo de Mason al no incluir el modo de vibración de la placa ni amplificadores mecánicos, no puede dar valores precisos de impedancia mecánica y velocidad de vibración ya que la placa vibrante tiene una dependencia de la frecuencia que define su modo de vibración y el transductor tiene un factor de amplificador mecánico que aumenta la amplitud de desplazamiento en la superficie de la placa. Entonces para transductores ultrasónicos de potencia con placa vibrando en modos altos de vibración se requiere complementar el modelo de Mason. Este trabajo propone un circuito equivalente que sí considera el modo de vibración de la placa introduciendo la teoría clásica de placas vibrantes y un amplificador mecánico, obteniendo así una impedancia mecánica y velocidades de vibración de la placa, más precisas que el modelo de Mason. Se consideraron en este trabajo placas radiantes circulares. Las placas vibran con sus bordes libres.

Para corroborar el modelo propuesto se midió las velocidades de vibración de las placas en función de la corriente de excitación del transductor en el antinodo más cercano a su centro. Por último se midió el desplazamiento perpendicular de la superficie de la placa en función del radio verificando que la placa esté en el modo de vibración predicho por el modelo.

En forma paralela se simuló el transductor con placa vibrante con el software COMSOL, obteniendo frecuencias y modos de vibración, que fueron comparados con los datos teóricos y experimentales.

El objetivo principal de este trabajo es:

- Validar el modelo de circuitos equivalentes propuesto en este trabajo.

Los objetivos específicos son:

- Medir la velocidad de vibración en la superficie de dos placas circulares distintas y comparar los datos obtenidos con el modelo propuesto.
- Medir la amplitud de desplazamiento de 2 placas circulares y corroborar empíricamente que las placas vibran en los modos de vibración calculados por la teoría.

CAPITULO 1

PIEZOELECTRICIDAD

1.1 Fundamentos de la piezoelectricidad

Piezoelectricidad es un fenómeno descubierto por los hermanos Pierre y Jacques Curie en el año 1880 y su nombre proviene del griego y significa “electricidad por presión”. Lo que observaron los hermanos Curie fue que al comprimir el cristal en diferentes direcciones previamente estudiadas y basados en su simetría, cargas positivas y negativas aparecían en las diferentes caras del cristal. En la figura 1 se muestra un modelo de molécula simple que permite visualizar la generación de un campo eléctrico como resultado de una fuerza externa comprimiendo el material. Antes de someter el material a una fuerza externa, las cargas positivas y negativas tienen el mismo centro de gravedad y los efectos de las cargas positivas y negativas son cancelados recíprocamente, por lo tanto, la molécula es eléctricamente neutra. Cuando al material se le aplica una fuerza externa como se muestra en la figura 1b, su estructura puede ser deformada causando la separación de los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas, se producen pequeños dipolos en la molécula. Las caras con cargas de igual signo de los dipolos se repelen y las de mismo signo se cancelan mutuamente formando en el material una superficie con carga positiva y otra con carga negativa, por lo tanto, el material está polarizado (fig1c). Esta polarización genera un campo eléctrico en el material que puede ser usado para transformar la energía mecánica usada en la deformación del material en energía eléctrica.

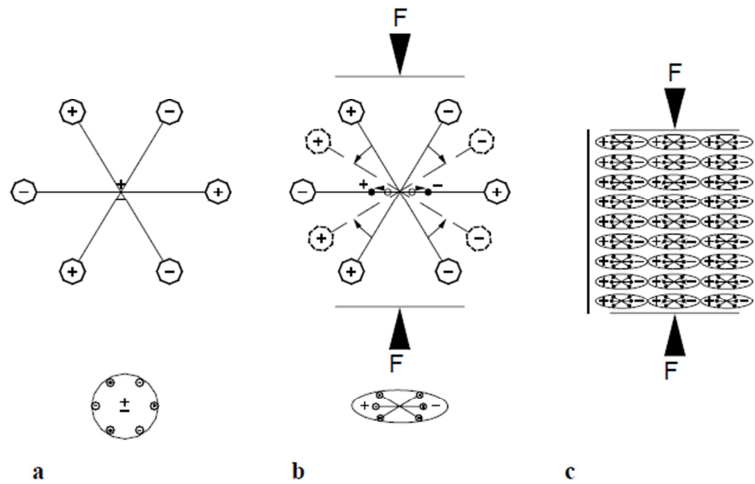


Fig 1 : Modelo simple de una molécula a la que se le aplica una fuerza externa [1]. a) Molécula eléctricamente neutra. b) Molécula a la que se le aplica una fuerza externa. c) Material polarizado en sus caras.

En la figura 2a) se muestra el material piezoeléctrico al que se le aplicará una fuerza externa. Dos placas de metal son usadas como electrodos y son puestas en contacto a ambas superficies del material. Supongamos que estos 2 electrodos están cortocircuitados externamente por un cable que se le ha conectado un galvanómetro. Cuando una fuerza externa actúa sobre el material piezoeléctrico una densidad de carga aparece en las superficies del cristal que están en contacto con los electrodos. Esta polarización genera un campo eléctrico que produce un flujo de cargas libres en el conductor las que viajarán a la cara con carga de sentido opuesto a las cargas libres. Este flujo acabará cuando la carga libre neutralice el efecto de polarización. Cuando la fuerza externa desaparezca la polarización también desaparecerá, entonces se producirá un flujo de carga libre en sentido contrario al anterior retomando la condición inicial en que estaban (figura 2b)). Este proceso se reflejará en el galvanómetro mediante 2 peaks de diferente signo entre sí. Si se conecta una

resistencia al cable conector de los electrodos y se aplica una fuerza externa en el material piezoeléctrico, una corriente eléctrica fluirá a través de la resistencia y entonces la energía mecánica será transformada en energía eléctrica [1].

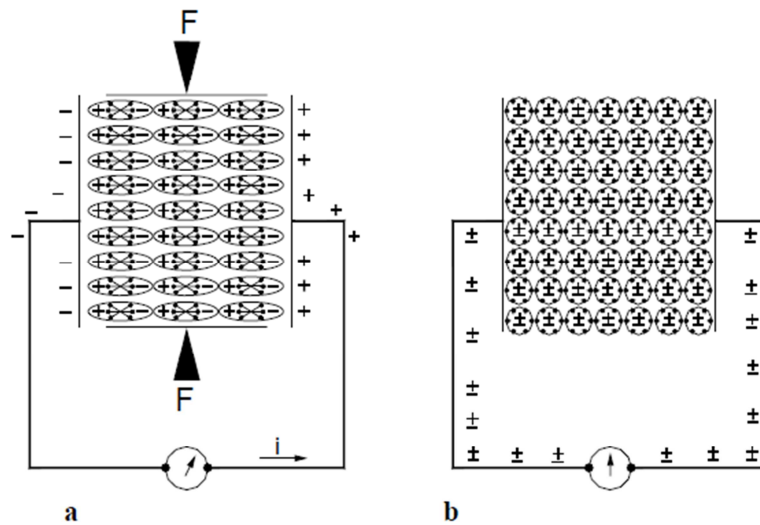


Fig 2 : a) Un flujo de carga libre circula desde un electrodo a otro. b) Material eléctricamente neutro ya que no hay fuerzas externas que produzcan una polarización en el material [1].

Los hermanos Curie verificaron un año después de su descubrimiento la existencia del proceso inverso llamado efecto piezoeléctrico inverso. Al aplicar un campo eléctrico sobre un material piezoeléctrico, éste se deformará. En este sentido la deformación mecánica podría ser producida al aplicar una diferencia de potencial en los electrodos del material piezoeléctrico.

1.2 Formulación matemática del efecto piezoeléctrico

La formulación matemática desarrollada en este capítulo corresponde a un modelo simplificado unidimensional del efecto piezoeléctrico.

Los experimentos realizados por los hermanos Curie demostraron que la densidad de carga en la superficie del material al aplicar una fuerza externa era proporcional a la tensión mecánica (stress) aplicada al material:

$$P_p = dT \quad (1.2.1)$$

En donde P_p es la vector de polarización a causa del efecto piezoeléctrico (subíndice) con magnitud igual a la densidad de carga en la superficie considerada, d es el coeficiente de deformación piezoeléctrica y T es la tensión a la que el material está sometido.

El efecto inverso que consiste en que el material se deforme a causa de un campo eléctrico puede ser expresado de la siguiente forma:

$$S_p = dE \quad (1.2.2)$$

En donde S_p es la deformación a causa del efecto piezoeléctrico y E es la magnitud del campo eléctrico aplicado al material.

Los efectos piezoeléctricos directos e inversos pueden ser definidos matemáticamente de diferentes formas empleando diferentes constantes y magnitudes físicas tomando en consideración las propiedades elásticas del material. Es así que se tiene:

$$P_p = dT = dcS = eS \quad (1.2.3)$$

$$T_p = cS_p = cdE = eE \quad (1.2.4)$$

En la ecuación (1.2.3) c es la constante elástica (módulo de Young), que relaciona la deformación S con la tensión o stress T . El inverso de la constante elástica es la complianza s que relaciona la deformación S de un material al aplicar sobre él una tensión T :

$$S = sT \quad (1.2.5)$$

En la ecuación (1.2.3) y (1.2.4) e es la constante de tensión piezoeléctrica.

El efecto piezoeléctrico causa en el material un incremento en su rigidez. Para comprender este efecto se supondrá que el material piezoeléctrico está sujeto a una deformación S . Esta deformación tendrá 2 efectos, por un lado una tensión elástica que será proporcional a la deformación mecánica:

$$T_e = cS \quad (1.2.6)$$

Y por el otro lado, generará una polarización debido al efecto piezoeléctrico y por ende un campo eléctrico dentro del material:

$$P_e = eS \quad (1.2.7)$$

El campo eléctrico generado por el efecto de la polarización del material tiene la siguiente expresión:

$$E_p = \frac{P_e}{\epsilon} = \frac{eS}{\epsilon} \quad (1.2.8)$$

En donde ϵ es la constante dieléctrica del material. Este campo eléctrico genera una fuerza contraria a la deformación de la estructura eléctrica del material creando una tensión:

$$T_p = eE_p \quad (1.2.9)$$

Esta tensión, al igual que la de origen elástico, está en contra de la deformación del material. Por lo tanto, la tensión generada en el material piezoeléctrico a causa de la deformación S es:

$$T = T_e + T_p = cS + \frac{e^2}{\epsilon} S = \left(c + \frac{e^2}{\epsilon} \right) S = \bar{c} S \quad (1.2.10)$$

La constante \bar{c} se llama constante de rigidez piezoeléctrica. Cuando un campo eléctrico es aplicado entre 2 electrodos en donde existe un material de constante dieléctrica ϵ , un desplazamiento eléctrico se produce hacia los electrodos creando una densidad superficial de carga $\sigma = \sigma_o + \sigma_p$ ⁽¹⁾ que tiene magnitud:

¹ La densidad de carga libre que aparece en los electrodos será la suma de la densidad de carga que aparece en el vacío más la que aparece inducida por el efecto dieléctrico.

$\sigma_o + \sigma_p = \epsilon_o E + \chi E = (\epsilon_o + \chi) E = \epsilon E$ en donde ϵ_o es la permitividad eléctrica del vacío y χ es la susceptibilidad dieléctrica del material

$$D = \epsilon E \quad (1.2.11)$$

Si el material es piezoeléctrico el campo eléctrico E produce una deformación que tiene como expresión:

$$S_p = dE \quad (1.2.12)$$

La deformación, de origen piezoeléctrico crea un incremento en la densidad de carga superficial debido a la polarización del material:

$$P_p = eS_p = edE \quad (1.2.13)$$

Debido a que el campo eléctrico se mantiene constante, la polarización piezoeléctrica incrementa el desplazamiento eléctrico de las cargas libres que se dirigen hacia los electrodos en la misma magnitud:

$$\sigma_p = P_p \quad (1.2.14)$$

Entonces el desplazamiento eléctrico total es:

$$D = \epsilon E + P_p = \epsilon E + edE = (\epsilon + ed)E = \bar{\epsilon} E \quad (1.2.15)$$

En donde $\bar{\epsilon}$ es la constante dieléctrica efectiva la que incluye la contribución piezoeléctrica.

Como se ha visto en el párrafo anterior el desplazamiento eléctrico producido cuando un campo eléctrico E es aplicado a un material piezoeléctrico y dieléctrico es

$$D = \varepsilon E + P_p = \varepsilon E + eS_p \quad (1.2.16)$$

Bajo las mismas circunstancias queremos obtener la tensión interna en el material. El razonamiento es el siguiente: al aplicar un campo eléctrico sobre el material piezoeléctrico causa una deformación en la estructura dado por:

$$S_p = dE \quad (1.2.17)$$

Esta deformación produce una tensión elástica que tiene magnitud:

$$T_e = cS_p \quad (1.2.18)$$

Por otro lado el campo eléctrico E produce una fuerza en la estructura interna del material generando una tensión dada por la expresión:

$$T_p = eE \quad (1.2.19)$$

Esta tensión es definitivamente la que produce la deformación y tiene signo opuesto a la tensión elástica que tiende a recobrar su estructura original. Por lo tanto, la tensión interna que experimenta el material será la resultante de ambas, esto es:

$$T = cS_p - eE \quad (1.2.20)$$

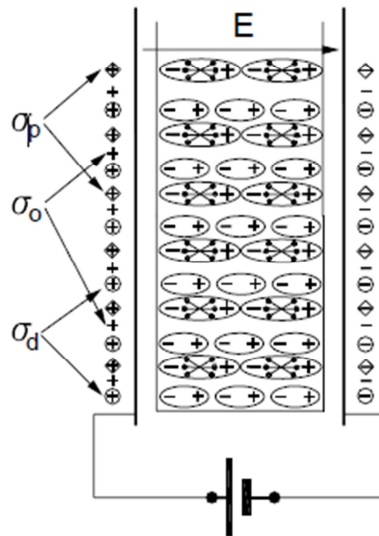


Fig 3: Diagrama esquemático que explica los diferentes desplazamientos eléctricos asociados con un material piezoeléctrico y dieléctrico [1].

Eventualmente ambas tensiones serán iguales dejando el material deformado y estático. Si una variable de campo es aplicada como es de costumbre, la deformación variará también produciendo desplazamientos dinámicos en las partículas del material. Este fenómeno electromecánico genera una perturbación en el medio en contacto con el material piezoeléctrico. Este efecto es usado en transductores, sensores y actuadores.

1.3 Relaciones piezoeléctricas y sus unidades físicas.

En la sección 1.2 se definieron variables y constantes físicas en un modelo unidimensional del efecto piezoeléctrico. A continuación se mostrará una tabla en la que estarán definidas las constantes antes mencionadas:

Símbolo	Nombre	Unidades	Comentario
c	Rigidez elástica	$[N / m^2]$	$c = 1 / s$
e	Tensión Piezoeléctrica	$[N / mV]$ o $[C / m^2]$	$e = 1 / g$
ϵ	Permitividad del Medio	$[F / m]$	$\epsilon = 1 / \beta$
d	Deformación Piezoeléctrica	$[C / N]$ o $[m / V]$	$d = 1 / h$
s	Compliance del Medio	$[m^2 / N]$	-
g	Voltaje Piezoeléctrico	$[Vm / N]$ o $[m^2 / C]$	-
h	Constante Piezoeléctrica	$[N / C]$ o $[V / m]$	-
β	Impermitividad del Medio*	$[m / F]$	-

Tabla 1: Constantes piezoeléctricas.

*La Impermitividad del medio en rigor no existe, se le da ese nombre porque es el inverso multiplicativo de la permitividad eléctrica del medio.

Capítulo 2

CIRCUITOS EQUIVALENTES

2.1 Circuito equivalente de Mason

El Modelo de Mason utiliza las ecuaciones piezoeléctricas constitutivas unidimensionales para describir el comportamiento electromecánico de un transductor. En este caso se utilizarán la deformación elástica y el desplazamiento eléctrico como variables independientes. Utilizando las ecuaciones definidas en la sección 1.2 y usando las relaciones entre constantes piezoeléctricas dadas en la tabla 1, se obtienen las siguientes ecuaciones piezoeléctricas:

$$T = cS - hD \quad (2.1.1)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} - hS \quad (2.1.2)$$

El transductor vibra en espesor por lo que una consideración geométrica para este modo es que $d \ll \sqrt{A}$. En la figura 4 se muestra los nombres de cada una de las variables que caracteriza a una cerámica piezoeléctrica.

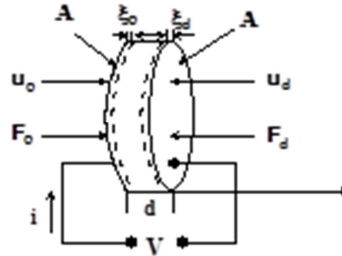


Fig 4 : Cerámica piezoeléctrica [3]

En la figura 4, F_o y F_d son las fuerzas externas que actúan sobre las caras de las cerámicas, U_o y U_d son las velocidades de vibración de las cerámicas, d es el espesor y ξ_o y ξ_d son los desplazamientos en ambas caras. La derivada espacial de los desplazamientos en ambas caras son las deformaciones de éstas. V es el voltaje suministrado a las cerámicas e I es la corriente.

Una forma de representar a un transductor es a través de la modelación de éste como una caja negra con 3 puertas [3]:

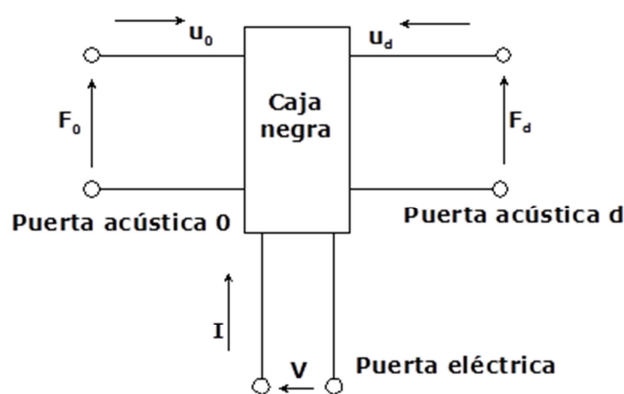


Fig 5 : Transductor acústico como caja negra de 3 puertas [3].

Se observa que a ambos lados de la caja negra existen velocidades representadas por U_0 y U_d que son las velocidades de vibración de ambas puertas acústicas. También existen fuerzas externas en ambas puertas acústicas representadas por F_0 y F_d .

Los parámetros físicos en las puertas son los siguientes

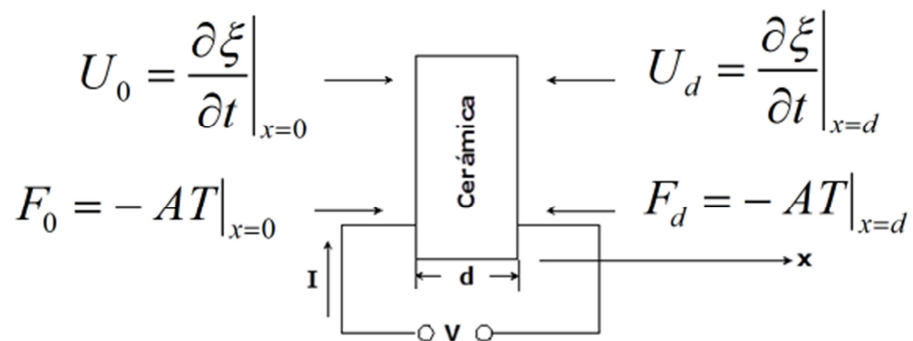


Fig 6 : Parámetros físicos de la caja negra que representa una red de 3 puertas [3].

Entonces tenemos condiciones de borde asociadas a las 2 caras de las cerámicas:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= -AT \Big|_{x=0} & u_0 &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0} \\
 F_d &= -AT \Big|_{x=d} & u_d &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=d}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Estas condiciones de borde nos permitirán definir las velocidades y fuerzas en ambas caras de la cerámica.

Las ecuaciones piezoeléctricas quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T &= c \frac{\partial \xi}{\partial x} - hD \\ E &= -h \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{D}{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Las ecuaciones en (2.1.4) son el resultado de reemplazar la deformación S por $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ que es la variación unitaria de la longitud con respecto al eje x (deformación), ξ es el desplazamiento de las partículas de la cerámica.

Debido a que se trata de un estudio unidimensional, se considera que el único movimiento posible, que puede realizar la cerámica, es en la dirección del espesor x .

El desplazamiento de las partículas $\xi(x,t)$ de las cerámicas satisface una ecuación diferencial de ondas :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.1.5)$$

En donde ρ es la densidad del material de las cerámicas. Se le llama $v = \sqrt{c/\rho}$ a la velocidad de propagación de las ondas elásticas por el material.

La solución de la ecuación diferencial después de haber aplicado las condiciones de borde mostradas en (2.1.3) es:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{j\omega \text{sen}\gamma} \left[u_0 \text{sen}\gamma \left(1 - \frac{x}{d} \right) - u_d \text{sen}\gamma \frac{x}{d} \right] e^{j\omega t} \quad (2.1.6)$$

En donde γ es la frecuencia normalizada, $\gamma = (\omega d/v)$.

El teorema de Gauss para medios materiales permite encontrar la expresión:

$$D = \sigma = \frac{Q}{A} \quad (2.1.7)$$

Donde Q representa la carga libre total en contacto con el piezoeléctrico y A su área de sección transversal de la cerámica.

Si se supone que la carga en la superficie de las cerámicas varía sinusoidalmente con respecto al tiempo se tiene:

$$I = \dot{Q} = j\omega Q \quad (2.1.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.1.8) en la (2.1.7), resulta:

$$D = \frac{I}{j\omega A} \quad (2.1.9)$$

Expresión que reemplazada en el conjunto de ecuaciones (2.1.4) quedan como:

$$\begin{aligned} T &= c \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{hI}{j\omega A} \\ E &= -h \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{I}{j\omega A \epsilon} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Si las ecuaciones en (2.1.10) son sustituidas en (2.1.3) obteniendo:

$$\begin{aligned}
F_0 &= -TA|_{x=0} = -Ac \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x=0} + \frac{hI}{j\omega} \\
F_d &= -TA|_{x=d} = -Ac \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x=d} + \frac{hI}{j\omega}
\end{aligned}
\tag{2.1.11}$$

Tomando la derivada espacial de la solución de la ecuación diferencial (2.1.6) y reemplazándola en (2.1.11) se tienen 2 relaciones electromecánicas para el transductor ultrasónico:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{Z_m}{j} \left(\frac{u_0}{\text{tg}\gamma} + \frac{u_d}{\text{sen}\gamma} \right) + \frac{hI}{j\omega} \\
F_d &= \frac{Z_m}{j} \left(\frac{u_0}{\text{sen}\gamma} + \frac{u_d}{\text{tg}\gamma} \right) + \frac{hI}{j\omega}
\end{aligned}
\tag{2.1.12}$$

En donde Z_m es la impedancia mecánica del transductor: $Z_m = \frac{Ac}{v}$ (Ns/m). La tercera relación electromecánica se obtiene a partir del campo eléctrico E con el que es posible calcular la tensión V aplicada al transductor. Esto se logra integrando la segunda ecuación en (2.1.10):

$$\int_0^d dV = -\int_0^d E dx = h[\xi(d, t) - \xi(0, t)] - \frac{Id}{j\omega A\epsilon}$$

Evaluando ξ para (0, 0) y para (d, t) e insertando estos valores en la integral para calcular V, se encuentra:

$$V = \frac{h}{j\omega} (u_o + u_d) + \frac{I}{j\omega C_0}
\tag{2.1.13}$$

Las ecuaciones (2.1.12) y (2.1.13) al ordenarlas en forma matricial quedan de la forma:

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_d \\ V \end{bmatrix} = \frac{Z_m}{j} \begin{bmatrix} \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} & \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma} & \frac{h}{\omega Z_m} \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma} & \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} & \frac{h}{\omega Z_m} \\ \frac{h}{\omega Z_m} & \frac{h}{\omega Z_m} & \frac{1}{\omega Z_m C_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ I \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

La frecuencia de resonancia mecánica de la cerámica, en su primer modo espesor, es:

$$f_0 = \frac{v}{2d} \quad (2.1.15)$$

La expresión en (2.1.14) representa el comportamiento total del transductor vibrando en espesor. Lo siguiente es representar el transductor con un circuito equivalente que corresponde a un circuito de 3 puertos que representa el comportamiento total del transductor. Su caja negra debe corresponder exactamente a la obtenida en (2.1.14).

El circuito equivalente usado es el siguiente:

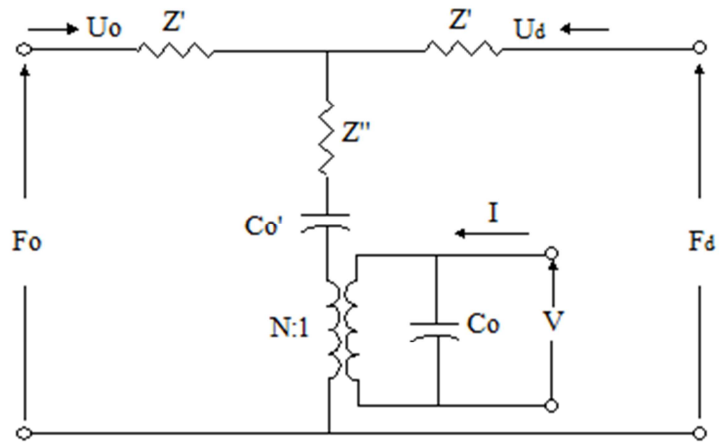


Fig 7: Circuito equivalente de Mason que representa un sándwich de cerámicas piezoeléctricas.

En el circuito equivalente se puede observar en la parte eléctrica un voltaje V con el que se alimenta el circuito, un condensador que representa la capacidad interelectródica del transductor debido a que entre sus caras plateadas existe carga eléctrica. El transformador convierte la energía eléctrica en mecánica en donde N es el factor de transformación electro-mecánico. Z' representa la impedancia del transductor en sus caras radiantes, Z'' representa la impedancia mecánica del material ahora dependiente de la frecuencia y C'_0 es la complianza del transductor.

Utilizando las leyes de Kirchhoff en el circuito mecánico se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
F_0 &= u_0 Z' + \left(Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} \right) (u_0 + u_d) + NV \\
F_d &= u_d Z' + \left(Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} \right) (u_0 + u_d) + NV \\
V &= \frac{N(u_0 + u_d)}{j\omega C_0} + \frac{I}{j\omega C_0}
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Escrito en forma matricial nos queda:

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_d \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z' + Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} + \frac{N^2}{j\omega C_0} & Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} + \frac{N^2}{j\omega C_0} & \frac{N}{j\omega C_0} \\ Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} + \frac{N^2}{j\omega C_0} & Z' + Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} + \frac{N^2}{j\omega C_0} & \frac{N}{j\omega C_0} \\ \frac{N}{j\omega C_0} & \frac{N}{j\omega C_0} & \frac{1}{j\omega C_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ I \end{bmatrix} \tag{2.1.17}$$

Igualando los términos de la primera fila de (2.1.17) con los de la primera fila de (2.1.14), se obtiene las siguientes igualdades:

$$Z' + Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} + \frac{N^2}{j\omega C_0} = \frac{1}{\text{tg}\gamma} \cdot \frac{Z_m}{j}$$

$$Z'' + \frac{1}{j\omega C_0'} + \frac{N^2}{j\omega C_0} = \frac{1}{\text{sen}\gamma} \cdot \frac{Z_m}{j}$$

$$\frac{N}{j\omega C_0} = \frac{h}{j\omega}$$

Así se obtiene los valores de N, Z', Z'' y C₀' :

$$N = hC_0 ; Z' = jZ_m \tan \gamma/2 ; Z'' = jZ_m \tan \gamma/2 ; Z''' = \frac{Z_m}{j \sin \gamma} ; C'_0 = -\frac{C_0}{N^2}$$

2.2 Modelo de transductor ultrasónico de potencia con una placa vibrante.

Para construir el modelo del transductor ultrasónico usando circuitos equivalentes, se debe ampliar el circuito descrito en la figura 7 que representa el sándwich de cerámicas piezoeléctricas. Al nuevo circuito equivalente se le deben agregar las impedancias de contramasa trasera y de la masa frontal. Las impedancias de la contramasa trasera representan la contramasa de acero que está unida a la cara anterior del sándwich. En la cara frontal del sándwich está la masa frontal a la que le sigue un amplificador mecánico que está representado por un transformador con razón 1: M y un arreglo de impedancias. Finalmente, la placa circular está representada por una masa equivalente M_n , una complianza equivalente C_n y una impedancia de radiación Z_r . Estos últimos 3 elementos del circuito equivalente se revisarán en el capítulo 3 de este trabajo. En la figura 8 se muestra el circuito equivalente que se acaba de describir junto a un diagrama de las componentes del transductor.

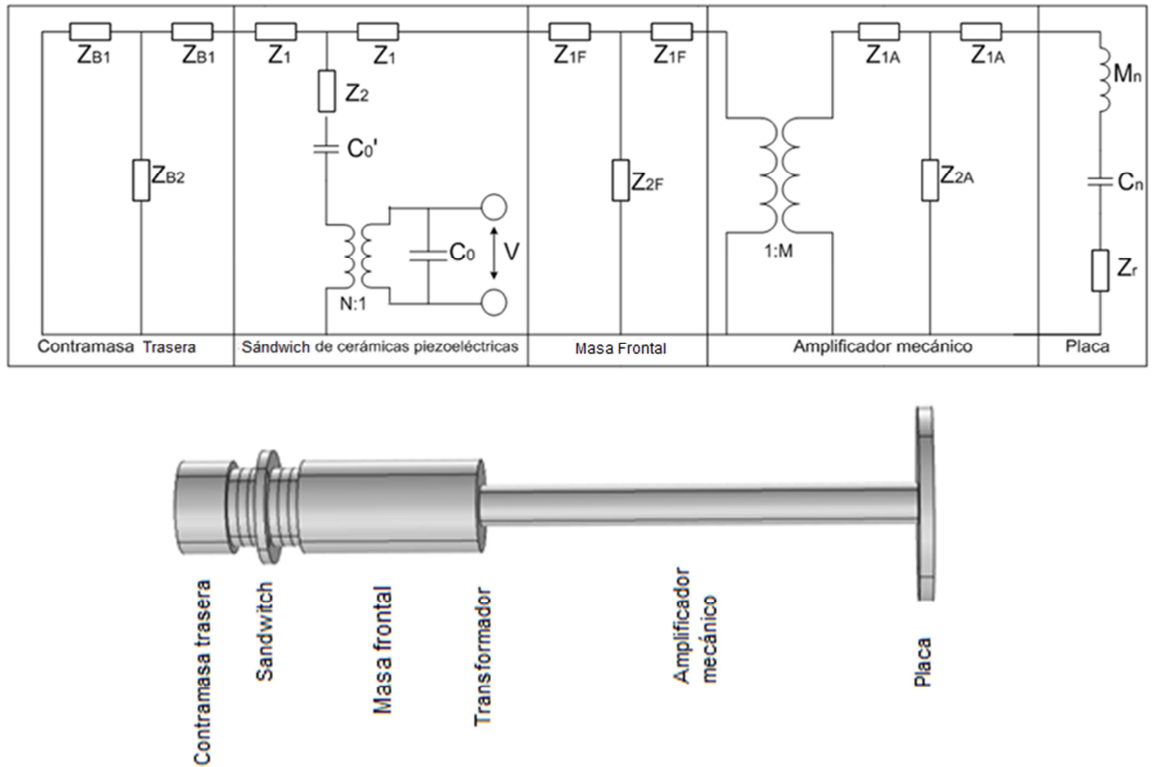


Fig 8: Transductor ultrasónico de potencia con placa circular y su representación en un circuito equivalente.

Los pares de impedancia que representan la contramasa trasera, masa frontal y amplificador mecánico pueden ser calculados al igual como se calculó el par de impedancias del sándwich de cerámicas Z' y Z'' . Analizando el circuito equivalente de una contramasa cualquiera se tiene el circuito mostrado en la figura 9.

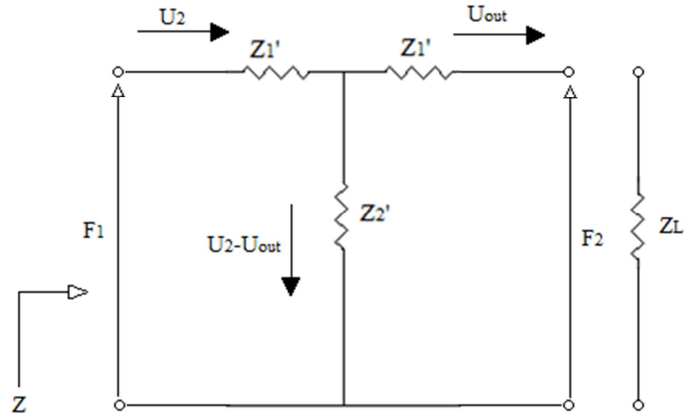


Fig 9: Circuito equivalente de una capa de adaptación que representa una masa frontal del transductor. Z es la impedancia en la entrada de la capa de adaptación en dónde $Z = \frac{F_1}{U_2}$.

$$Z = \frac{F_1}{U_2}$$

Las fuerzas F1 y F2 tendrán la misma forma que las ecuaciones en (2.1.12) salvo que $h=0$ ya que en las masas no existen efectos piezoeléctricos. Así obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{Z_m}{j} \begin{bmatrix} \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} & \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma} \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma} & \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_{\text{out}} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$$\text{Con } Z_1' = jZ_p \tan(\gamma'/2); Z_2' = j \frac{Z_p}{\sin(\gamma')} ; \gamma' = \frac{\omega d'}{V'} ; f_o = \frac{V'}{2d'}$$

V' = Velocidad de propagación del sonido por la masa frontal.

d' = longitud transversal contramasa.

El objetivo del modelo es predecir la velocidad de la placa en su centro. Para ello se puede obtener tal velocidad resolviendo el circuito equivalente de la figura 8. Reduciendo las impedancias en la contramasa trasera a una única impedancia de equivalente y sin tomar en cuenta la masa frontal, amplificador mecánico ni placa se tiene el nuevo circuito equivalente de la figura 10.

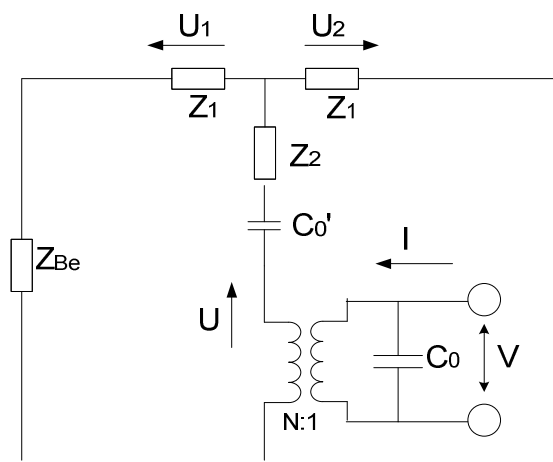


Fig 10: Circuito equivalente reducido en donde se representa un sándwich de cerámicas piezoeléctricas unido a una contramasa trasera.

Utilizando las leyes de Kirchhoff para el circuito equivalente de la figura 10 se obtiene las siguientes relaciones:

$$NV - U \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C_0'} \right) - U_1 (Z_{Be} + Z_1) = 0 \quad (2.2.2a)$$

$$NV - U_2 (Z_1) - U \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C_0'} \right) = 0 \quad (2.2.2b)$$

$$V = \frac{I + N(U_1 + U_2)}{j\omega C_0} \quad (2.2.2c)$$

$$U = U_1 + U_2 \quad (2.2.2d)$$

En el circuito equivalente de la figura 10 las fuerzas externas sobre la contramasa trasera y la última cerámica piezoeléctrica son nulas, por lo que las velocidades U_1 y U_2 tienen sentido contrario a las descritas en el circuito equivalente del sándwich de cerámicas piezoeléctricas (figura 7).

Restando (2.2.2a) y (2.2.2b) se obtiene:

$$U_1(Z_{Be} + Z_1) = U_2 Z_1 \quad (2.2.2e)$$

Despejando U_1 de esta expresión se obtiene:

$$U_1 = \frac{U_2 Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \quad (2.2.2f)$$

Sustituyendo (2.2.2d) en (2.2.2b) tenemos:

$$NV - U_2(Z_1) - (U_1 + U_2) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C'_0} \right) = 0$$

Sustituyendo (2.2.2f) se obtiene:

$$NV - U_2(Z_1) - \left(\frac{U_2 Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} + U_2 \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C'_0} \right) = 0$$

$$NV - U_2 \left[Z_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C'_0} \right) \right] = 0 \quad (2.2.2g)$$

Reemplazando (2.2.2c) en (2.2.2g) se obtiene:

$$N \left(\frac{I + N(U_1 + U_2)}{j\omega C_0} \right) - U_2 \left[Z_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C'_0} \right) \right] = 0 \quad (2.2.2h)$$

Reemplazando (2.2.2f) en (2.2.2h) y reordenando se obtiene:

$$\frac{N}{j\omega C_0} \left(I + N \left(\frac{U_2 Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} + U_2 \right) \right) - U_2 \left[Z_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C'_0} \right) \right] = 0$$

A partir de esta expresión se obtiene la siguiente relación para U2

$$U_2 = \frac{NI}{j\omega C_0} \left[Z_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C'_0} \right) + \frac{N^2}{j\omega C_0} \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \right]^{-1} \quad (2.2.2i)$$

La expresión (2.2.2i) es la velocidad de vibración de la cara opuesta de la cerámica que está en contacto con la contramasa trasera en función de la corriente de alimentación del transductor.

Para encontrar la velocidad de vibración de la placa, se analiza el circuito equivalente de la masa frontal, amplificador mecánico y placa, representado en la figura 11.

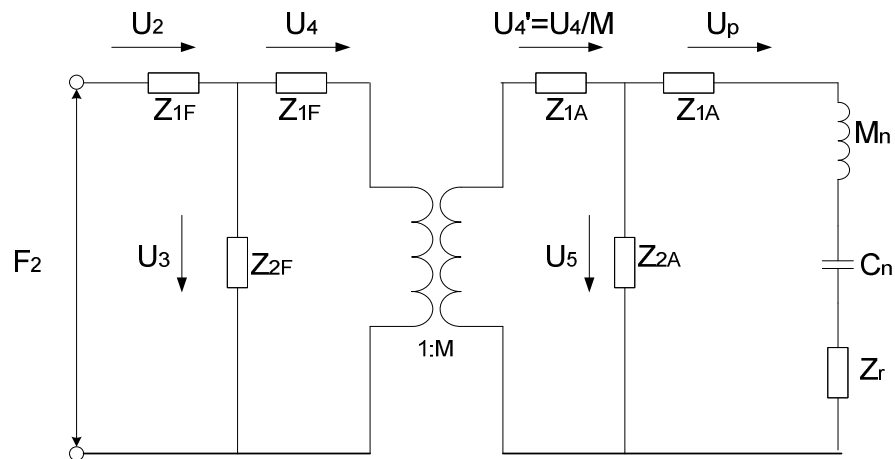


Fig 11: Circuito equivalente de la masa frontal, amplificador mecánico y placa. El transformador representa el cambio en el diámetro de la masa frontal y el amplificador mecánico.

Antes de resolver el circuito de la figura 11, se debe definir el factor de amplificación mecánico M .

Un amplificador mecánico tiene la función en el transductor de aumentar la amplitud de desplazamiento de la superficie de la placa. Logrando una amplificación en la amplitud de desplazamiento, también lo es en la velocidad de vibración de la placa. El factor de amplificación de la velocidad de vibración está dado por la razón al cuadrado entre los diámetros de la masa frontal y del amplificador mecánico:

$$G = \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad (2.2.3)$$

En donde D es el diámetro de la masa frontal y d es el diámetro del amplificador mecánico (ver figura 12)

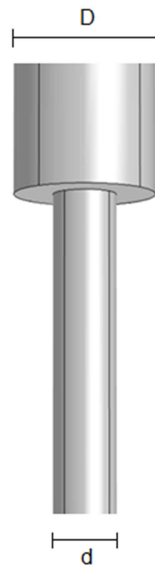


Fig 12: Masa frontal, amplificador mecánico y sus diámetros.

Como la relación entre U_4' y U_4 mediante las leyes de transformación de los transformadores eléctricos es $U_4' = \frac{U_4}{M}$ (ver figura 11), entonces resulta que la velocidad de vibración de la placa U_4' es menor que la velocidad U_4 si es que se elige $M = G$. Por lo tanto, se debe definir el factor de amplificación del transformador como: $M = \frac{1}{G}$. De esta forma se tiene que la velocidad U_4' es mayor que U_4 por un factor $\frac{1}{M} = G$, la ganancia del amplificador mecánico.

Una vez resuelto el problema de representar el amplificador mecánico en el circuito equivalente y utilizando las leyes de Kirchhoff se obtienen las siguientes expresiones:

$$F_2 - U_2 Z_{1F} - U_3 Z_{2F} = 0 \quad (2.2.4a)$$

$$F_2 - U_2 Z_{1F} - U_4 Z_{1F} - \frac{U_4}{M} Z_{1A} - U_5 Z_{2A} = 0 \quad (2.2.4b)$$

$$F_2 - U_2 Z_{1F} - U_4 Z_{1F} - \frac{U_4}{M} Z_{1A} - U_p (Z_{1A} + Z_n + Z_r) = 0 \quad (2.2.4c)$$

$$U_2 = U_3 + U_4 \quad (2.2.4d)$$

$$U_4 = M (U_5 + U_p) \quad (2.2.4e)$$

En la ecuación (2.2.4c), Z_n es la impedancia mecánica equivalente que se define como:

$$Z_n = jX_n = j \left(\omega_n M_n - \frac{1}{\omega_n C_n} \right)$$

Z_r es la impedancia de radiación de la placa.

La impedancia mecánica equivalente e impedancia de radiación de la placa serán definidas en el capítulo 3 de este trabajo.

Restando (2.2.4b) con (2.2.4c) se obtiene:

$$U_5 Z_{2A} = U_P (Z_{1A} + Z_n + Z_r)$$

$$U_5 = \frac{U_P (Z_{1A} + Z_n + Z_r)}{Z_{2A}} \quad (2.2.4f)$$

Reemplazando (2.2.4f) en (2.2.4e) se obtiene:

$$U_4 = MU_P \left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \quad (2.2.4g)$$

Restando (2.2.4a) y (2.2.4b) se obtiene

$$U_3 Z_{2F} = U_4 \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + U_5 Z_{2A}$$

$$U_3 = \frac{U_4 \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + U_5 Z_{2A}}{Z_{2F}} \quad (2.2.4h)$$

Reemplazando (2.2.4h) en (2.2.2d) se obtiene:

$$U_2 = \frac{U_4 \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + U_5 Z_{2A}}{Z_{2F}} + U_4 \quad (2.2.4i)$$

Reemplazando (2.2.4g) y (2.2.4f) en (2.2.4i) se obtiene:

$$U_2 = \frac{MU_P \left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + \frac{U_P (Z_{1A} + Z_n + Z_r)}{Z_{2A}} Z_{2A}}{Z_{2F}} + MU_P \left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \quad (2.2.4j)$$

Factorizando (2.2.4j) por U_p :

$$U_2 = U_p \left(\frac{M}{Z_{2F}} \left(\left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + (Z_{1A} + Z_n + Z_r) \right) + M \left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \right) \quad (2.2.4k)$$

Como U_2 está expresada en (2.2.2i) se tiene entonces una relación entre la velocidad de vibración de la placa U_p y la corriente de alimentación del transductor ultrasónico, esta relación es:

$$U_p = \frac{NI}{j\omega C_0} \left[Z_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C_0'} \right) + \frac{N^2}{j\omega C_0} \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \right]^{-1} \times \left[\frac{M}{Z_{2F}} \left(\left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + (Z_{1A} + Z_n + Z_r) \right) + M \left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \right]^{-1} \quad (2.2.5)$$

Así teniendo valores experimentales de la corriente de alimentación del transductor se podrá calcular la velocidad de vibración de la placa. Además esta velocidad de vibración dependerá de la impedancia de radiación e impedancia mecánica equivalente, las que a su vez dependen del modo de vibración de la placa.

CAPÍTULO 3

TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS DELGADAS

3.1 Cálculo de masa equivalente de una placa circular

La ecuación diferencial para el desplazamiento transversal de una placa delgada circular es de la forma [4]:

$$D\nabla^4 y + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.1)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, h =espesor de la placa, ν =coeficiente de Poisson, ρ es la densidad del material de la placa y E es módulo de Young. D es la rigidez flexural.

En coordenadas polares la solución de (3.1.1) es de la siguiente forma:

$$y_n(r, \theta, t) = [AJ_0(k_n r) + BY_0(k_n r) + CI_0(k_n r) + DK_0(k_n r)] \times \cos(m\theta + \phi) \exp(j\omega_n t) \quad (3.1.2)$$

En donde $J_0(k_n r)$ e $I_0(k_n r)$ son funciones de Bessel de primera especie y primera especie modificada, respectivamente, en tanto $Y_0(k_n r)$ y $K_0(k_n r)$ son funciones de Bessel de segunda especie y segunda especie modificada, n indica los diferentes modos de vibración de la placa. Estos modos de vibración son circulares y n toma valores desde 1 al infinito. En la ecuación (3.1.2) k es el número de onda, r es el radio de la placa y θ el ángulo en coordenadas polares.

En nuestro caso en $r = 0$ existen desplazamientos finitos, por lo tanto, las constantes B y D deben ser nulas ya que las funciones $Y_0(k_n r)$ y $K_0(k_n r)$ predicen desplazamientos infinitos para $r = 0$. Por presentar simetría axial, los desplazamientos transversales de la placa no dependen de la variable θ por lo que $m=0$. La ecuación (3.1.2) nos queda de la siguiente forma:

$$y_n(r,t) = [AJ_0(k_n r) + BI_0(k_n r)] \exp(j\omega_n t) \quad (3.1.3)$$

En donde la constante C es renombrada como B .

Dos relaciones importantes son las siguientes:

Número de onda de la placa:

$$k_n^4 = \rho \frac{\omega_n^2 h}{D} \quad (3.1.4)$$

Frecuencia de vibración de la placa:

$$f_n = \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho(1-\nu^2)}} \frac{\lambda^2}{2\pi a^2} \quad (3.1.5)$$

Con $\lambda = k_n a$, a es el radio de la placa.

Las condiciones de borde de una placa vibrante libre son que su momento flexional radial es nulo en $r=a$:

$$M_r(a) = 0$$

$$-D_r \left[\frac{\partial^2 y(a)}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y(a)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y(a)}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0$$

Pero y no depende de θ , entonces:

$$-D_r \left[\frac{\partial^2 y(a)}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y(a)}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (3.1.6)$$

Reemplazando (3.1.3) en (3.1.6) tenemos:

$$A \left[-k_n J_0(k_n a) + J_1(k_n a) \left(\frac{1-\nu}{a} \right) \right] = B \left[I_1(k_n a) \left(\frac{1-\nu}{a} \right) - k_n I_0(k_n a) \right] \quad (3.1.7)$$

Se usaron las siguientes relaciones recursivas de Bessel para el cálculo de la relación (3.1.6)

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \\ I_n'(x) &= \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x) \\ J_{n+2}(x) &= \frac{2}{x} (n+1) J_{n+1}(x) - J_n(x) \\ I_{n+2}(x) &= -\frac{2}{x} (n+1) I_{n+1}(x) + I_n(x) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

La otra condición de borde es que el efecto borde sea cero en $r=a$, esto es:

$$\begin{aligned} V_r(a) &= 0 \\ Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Q_r : Fuerza de cizalle longitudinal en el borde de la placa.

$M_{r\theta}$: Momento torsional en el borde de la placa.

Con:

$$Q_r = - \left[D_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) \right) + D_{r\theta} r \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$M_{r\theta} = -2D_k \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$$

(3.1.10)

En donde:

$$D_{r\theta} = D_r \nu + 2D_k$$

$$D_k = \frac{Gh^3}{12}$$

$$D_r = D_\theta = D$$

$$\nu_r = \nu_\theta = \nu$$

(3.1.11)

Como el desplazamiento y no depende de θ las expresiones en (3.1.10) se reducen bastante:

$$V_r(a) = Q_r(a) = - \left[D_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 y(a)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y(a)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial y(a)}{\partial r} \right) \right] = 0$$

(3.1.12)

Sustituyendo (3.1.3) en (3.1.12) y usando las relaciones de Bessel de (3.1.8) obtenemos la siguiente expresión:

$$AJ_1(k_n a) = -BI_1(k_n a)$$

(3.1.13)

Dividiendo (3.1.13) por (3.1.7) resulta la siguiente relación:

$$\frac{J_1(k_n a)}{-k_n J_0(k_n a) + \left(\frac{1-\nu}{a}\right) J_1(k_n a)} = \frac{-I_1(k_n a)}{-k_n I_0(k_n a) + \left(\frac{1-\nu}{a}\right) I_1(k_n a)} \quad (3.1.14)$$

Lo que lleva a:

$$J_1(k_n a) I_0(k_n a) + I_1(k_n a) J_0(k_n a) = \frac{2(1-\nu) I_1(k_n a) J_1(k_n a)}{k_n a} \quad (3.1.15)$$

Las raíces de la ecuación (3.1.15) son de la forma:

$$k_n a = R(n)$$

En donde n es un entero positivo. Diferentes valores de $k_n a$ van a definir diferentes modos de vibración de la placa.

Modo de vibración n	Valores de $(k_n a)^2$
1	9,084
2	38,55
3	87,8
4	157
5	245,9
6	354,6
7	483,1
8	631
9	798,6
10	986

Tabla 2: Diferentes modos de vibración y sus respectivos valores $(k_n a)^2$ [4].

El objetivo es obtener una masa equivalente de la placa que dependa del modo de vibración de ésta. Para determinarla primero se calcula la energía cinética sobre toda la placa, luego se propone que si toda la masa de la placa está concentrada en su centro (masa equivalente), la energía cinética en el centro debe ser igual a la energía cinética calculada. De esta igualdad se determina la masa equivalente. Con la masa equivalente y la Complianza equivalente podemos obtener una impedancia mecánica equivalente.

La energía cinética de la placa se determina elevando al cuadrado la derivada temporal de la ecuación (3.1.3) (velocidad) e integrar la energía cinética sobre toda la superficie de la placa:

$$K_n = -\frac{1}{2} \rho h \omega_n^2 \exp(2j\omega_n t) \int_0^a \int_0^{2\pi} [A^2 J_0^2(k_n r) + B^2 I_0^2(k_n r) + 2AB J_0(k_n r) I_0(k_n r)] r d\theta dr$$

(3.1.16)

Desarrollando (3.1.16):

$$K_n = -\pi \rho h \omega_n^2 \exp(2j\omega_n t) \int_0^a [A^2 J_0^2(k_n r) + B^2 I_0^2(k_n r) + 2AB J_0(k_n r) I_0(k_n r)] r dr$$

(3.1.17)

Usando las relaciones integrales de Bessel tenemos:

$$A^2 \int_0^a J_0^2 r dr = A^2 \frac{a^2}{2} [J_0^2 + J_1^2]$$

$$B^2 \int_0^a I_0^2 r dr = B^2 \frac{a^2}{2} [I_0^2 - I_1^2]$$

$$2AB \int_0^a J_0 I_0 r dr = \frac{AB}{k_n a} [J_0 I_1 + J_1 I_0]$$

Y con la relación obtenida en (3.1.15) el valor de la integral en (3.1.17) es:

$$I = \frac{A^2 a^2}{2} \left[\left(J_0^2 + J_1^2 + J_1^2 \frac{(I_0^2 - I_1^2)}{I_1^2} \right) - \frac{4J_1}{k_n a I_1} \left(\frac{(1-\nu) J_1 I_1}{a k_n} \right) \right]$$

$$I = \frac{A^2 a^2}{2} \left[\left(J_0^2 + J_1^2 - J_1^2 + \frac{J_1^2 I_0^2}{I_1^2} \right) - \frac{4J_1}{k_n a I_1} \left(\frac{(1-\nu) J_1 I_1}{a k_n} \right) \right] \quad (3.1.18)$$

$$I = \frac{A^2 a^2}{2} \left[J_0^2 + J_1^2 \left(\frac{I_0^2}{I_1^2} - \frac{4(1-\nu)}{a^2 k_n^2} \right) \right]$$

La energía cinética resulta:

$$K_n = -\pi a^2 \rho h \omega_n^2 \exp(2j\omega_n t) \frac{A^2}{2} \left[J_0^2 + J_1^2 \left(\frac{I_0^2}{I_1^2} - \frac{4(1-\nu)}{a^2 k_n^2} \right) \right] \quad (3.1.19)$$

Si elegimos que toda la energía cinética de la placa esté concentrada en el centro de la placa, la energía cinética equivalente en el centro de la placa será:

$$K_n^* = -\frac{1}{2} M_n (A^2 + B^2) \omega_n^2 \exp(2j\omega_n t) \quad (3.1.20)$$

M_n : Masa equivalente de la placa.

Esta suposición nos permite tener una velocidad de vibración unidimensional que es lo que se necesita para incluir la placa en el circuito equivalente.

Como la energía cinética de la placa está concentrada en su centro también lo es su masa (masa equivalente). Igualamos (3.1.19) y (3.1.20) obteniendo la masa equivalente:

$$M_n = \frac{mA^2}{(A^2 + B^2)} \left(J_0^2 + J_1^2 \left(\frac{I_0^2}{I_1^2} - \frac{4(1-\nu)}{(k_n a)^2} \right) \right) \quad (3.1.21)$$

En donde $m = \pi a^2 \rho h$ es la masa de la placa.

El término $\frac{A^2}{(A^2 + B^2)}$ con ayuda de la segunda condición de borde

$AJ_1(k_n a) = -BI_1(k_n a)$ es:

$$\frac{A^2}{(A^2 + B^2)} = \frac{I_1^2}{(I_1 - J_1)^2}$$

Por lo tanto, la masa equivalente de la placa es:

$$M_n = m \frac{I_1(k_n a)^2}{(I_1(k_n a) - J_1(k_n a))^2} \left[J_0(k_n a)^2 + J_1(k_n a)^2 \left(\frac{I_0(k_n a)^2}{I_1(k_n a)^2} - \frac{4(1-\nu)}{k_n^2 a^2} \right) \right] \quad (3.1.22)$$

Como se observa en la relación (3.1.22), la masa equivalente es un factor de la masa de la placa y depende del modo de vibración de la placa.

3.2 Cálculo de la Complianza equivalente de una placa circular

La Complianza equivalente de una placa circular puede ser calculada considerando la energía de deformación de la placa. Esta energía es la que acumula la placa al ser deformada por una fuerza externa. La energía de deformación de la placa se define como [4]:

$$U_n = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial y_n}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right] \right\} r d\theta dr \quad (3.2.1)$$

D es la rigidez flexural: de la placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Ya que y_n no depende de θ e integrando con respecto a θ la integral en (3.2.1) se reduce a:

$$U_n = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial y_n}{\partial r} \frac{\partial^2 y_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial y_n}{\partial r} \right)^2 \right) r dr \quad (3.2.2)$$

Al igual que el cálculo de la masa equivalente, si tomamos como punto de referencia el centro de la placa suponemos que toda la energía potencial elástica de la placa está concentrada ahí (U'_n). Por lo tanto, igualamos U_n con U'_n para así poder despejar la Complianza equivalente:

$$U'_n = \frac{1}{2C_n} y_n^2(r=0) = U_n$$

Por lo tanto, la Complianza equivalente es:

$$C_n = \frac{y_n^2}{2U_n} \quad (3.2.3)$$

El resultado de la integral en (3.2.2) no tiene una expresión analítica ya que su integrando es complejo de resolver, por lo tanto, se calculará en forma numérica.

Con la masa y la complianza equivalente obtenidas se puede determinar la impedancia mecánica equivalente de la placa dependiente del modo de vibración:

$$Z_n = jX_n = j \left(\omega_n M_n - \frac{1}{\omega_n C_n} \right) \quad (3.2.4)$$

Como se observa en (3.2.4) no están presentes las pérdidas mecánicas de la placa. Para este modelo de transductor ultrasónico no se considerarán pérdidas mecánicas en la placa.

3.3 Impedancia de radiación de una placa circular

En este trabajo se considerará la impedancia de radiación como si la placa fuese un pistón. Esta suposición es cercana a la realidad en el primer modo de vibración, para modos altos de vibración la impedancia de radiación será diferente, porque la impedancia de radiación también depende de la frecuencia de vibración de la placa. Por lo tanto para cada modo de vibración se tendrá una impedancia de radiación distinta. En teoría a mayor modo de

vibración de la placa menor será la impedancia de radiación, la cantidad de nodos y antinodos crecerá y tanto la resistencia y reactancia de radiación (parte real e imaginaria de la impedancia de radiación respectivamente) tenderán a decrecer debido al fenómeno de cancelación de fase en la placa y la menor área radiante de ésta.

Por lo tanto la expresión que define la impedancia de radiación es:

$$Z_r = S \rho c \quad (3.3.1)$$

En donde:

S = Área de la superficie de la placa [m^2].

ρ = Densidad del medio a irradiar $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$.

c = Velocidad de propagación del sonido en el medio a irradiar $\left[\frac{m}{s} \right]$.

Capítulo 4

MÉTODO EXPERIMENTAL

4.1 Introducción

En este capítulo se describe de qué forma fueron realizadas las mediciones, que instrumentos se utilizaron y los resultados obtenidos. Primero en la sección 4.2 se explica las partes del transductor y que tipo de mediciones se realizarán para corroborar el modelo. En la sección 4.3 se explica el montaje experimental, los instrumentos utilizados en la medición y la estrategia utilizada para medir. La sección 4.4 muestra los resultados obtenidos, gráficos y tablas. En la sección 4.5 se analizan los datos experimentales, comparándolos con la teoría y con la simulación en COMSOL para así corroborar el modelo de circuitos equivalentes.

4.2 Descripción experimental

Para corroborar la teoría de circuitos equivalentes propuesta en este trabajo se utilizó un transductor ultrasónico de potencia, al que se le acoplaron 2 placas circulares de distinto diámetro. La placa de menor diámetro se mueve en su segundo modo de vibración y la de mayor diámetro en su tercer modo de vibración. El transductor tiene electrodos de cobre, uno central y 6 de menor espesor entre cerámicas piezoeléctricas conformando lo que se denomina sándwich de cerámicas, lo que se conoce como sándwich Langevin [5]. El transductor tiene 6 cerámicas piezoeléctricas, una contramasa trasera, una masa frontal unida con un amplificador mecánico y una placa circular (ver figura

14). La contramasa frontal, masa frontal y amplificador mecánico son de acero y las placas son de duraluminio

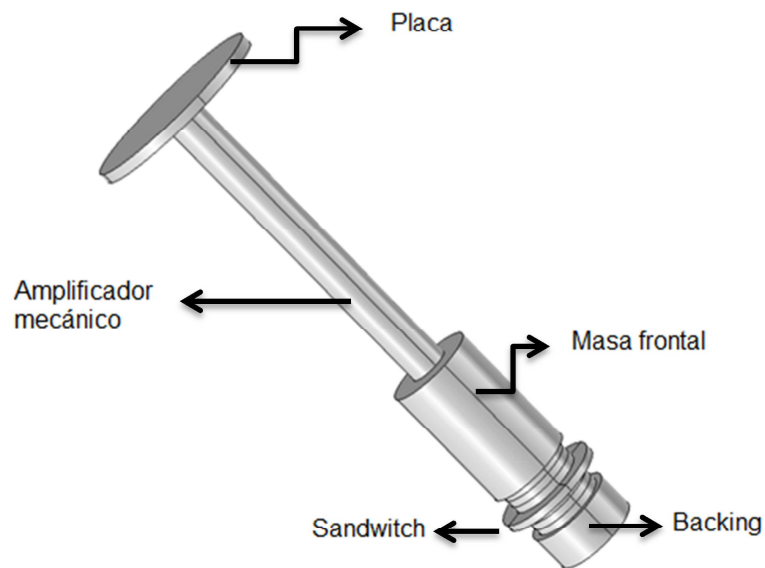


Fig 13: Diseño de Transductor ultrasónico a utilizar en los experimentos.

Mediante las mediciones experimentales se encontró la relación entre la velocidad de vibración de la placa en su superficie y la corriente de alimentación del transductor esta relación se comparó con la que propone el modelo de circuitos equivalentes. Por otro lado se verificó experimentalmente el modo de vibración de las placas y se comparó con el modo de vibración propuesto por el modelo.

Para encontrar la relación entre la corriente de alimentación y la velocidad de vibración de la placa se utilizó el vibrómetro láser en conjunto con

una sonda de corriente eléctrica. La corriente de alimentación fue aumentada hasta no más de 1.3 [A].

Para verificar en qué modo de vibración se encuentra la placa se midió la amplitud de desplazamiento de la placa a lo largo de su radio con un vibrómetro láser. Al realizar el barrido del láser sobre la superficie de la placa, la corriente eléctrica de alimentación del transductor fue constante aplicándose sobre éste una potencia de 5[W].

A continuación se muestra el transductor con las placas utilizadas en la medición:



Fig 14: Transductor ultrasónico de potencia utilizado en las mediciones.

En la figura 16, a la izquierda el transductor tiene acoplado una placa que vibra en su segundo modo de vibración y es más pequeña que la placa de la derecha la cual vibra en su tercer modo de vibración.

Algunas características del transductor son:

Elementos Transductor	Densidad[kg/m ³]	Cte piezoeléctrica h[N/C]	Velocidad del sonido en el material[m/s]	Radio externo[m]	Radio interno[m]
Cerámicas piezoeléctricas	7600	44.4e8	3940	0,038	0,013
Backing	8000	-	5752	0,04515	0,01045
Contramasa frontal	8000	-	5752	0,04535	-
Amplificador mecánico	8000	-	5752	0,02	-

Tabla 3: Algunas características del transductor ultrasónico de potencia a utilizar.

4.3 Montaje Experimental

Para medir la velocidad de vibración de la placa y la amplitud de desplazamiento en la superficie de la placa se usó el montaje experimental que se muestra en la Figura 17.

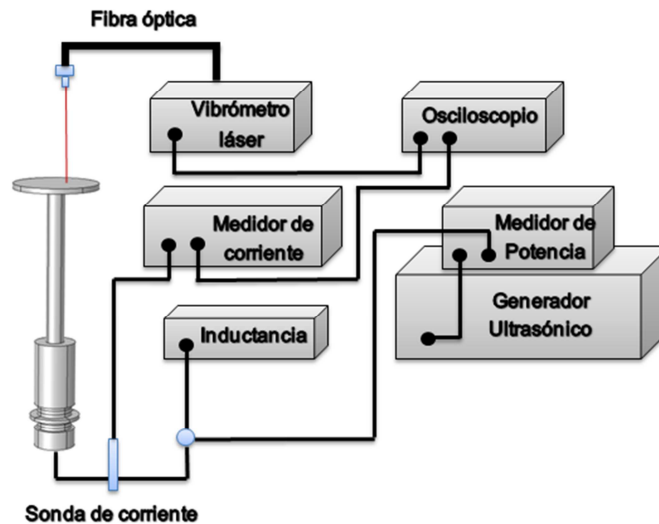


Fig 15: Esquema del montaje experimental

Como se observa en la figura 17, se conecta una inductancia en paralelo para así tener la máxima corriente ingresando hacia el transductor. Se mide con una sonda de efecto hall la corriente de entrada al transductor y la medida de corriente es desplegada en el osciloscopio. De igual forma el vibrómetro laser es conectado al osciloscopio en donde se observa la velocidad de vibración de la placa. Tanto la corriente medida por la sonda como la velocidad de vibración de la placa tienen factores de conversión que permiten leer en el osciloscopio las corrientes y velocidades correctas

4.4 Datos experimentales

4.4.1 Caracterización de los transductores ultrasónicos

El puente de impedancia da para el transductor los siguientes resultados:

	Placa n=2	Placa n=3
Frecuencia de Resonancia [kHz]	21,8196	22,1784
Impedancia(módulo) [Ω]	16,8483	22,0500
Capacitancia equivalente(C_0) [nF]	10,2764	9,0510
Inductancia equivalente (L_0) [mH]	5,1773	5,4200

Tabla 4: Datos obtenidos del puente de impedancia.

A partir de los datos obtenidos en el puente de impedancia se calcula la inductancia equivalente en la frecuencia de resonancia que va a ser conectada en paralelo al transductor:

4.3.2 Amplitud de desplazamiento de la placa y modos de vibración.

Las placas utilizadas para la medición son de duraluminio y tienen un orificio en su centro de 6 mm de diámetro para así fijarlas al amplificador mecánico. Los radios de las placas fueron elegidos para que al vibrar a la frecuencia de resonancia del transductor éstas presenten el modo de vibración deseado. La placa más pequeña que vibra en modo $n=2$ tiene un radio de 0,04725[m] y la otra que vibra en modo $n=3$ un radio de 0,0703[m].

Los datos de amplitud de desplazamiento obtenidos para ambas placas son los mostrados en las figuras 20 y 21.

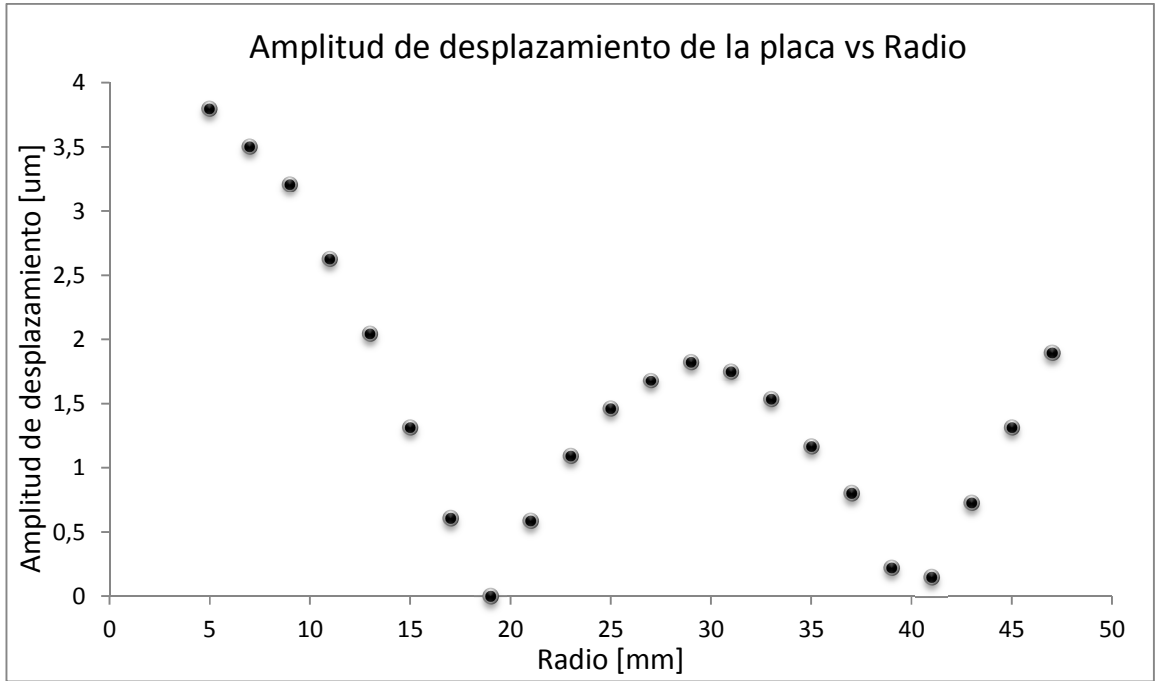


Fig 16: Amplitud de desplazamiento de la placa con modo de vibración $n=2$.

Se observa que la placa presenta 2 nodos, uno cerca de los 20mm y otro cercano a los 40mm de radio.

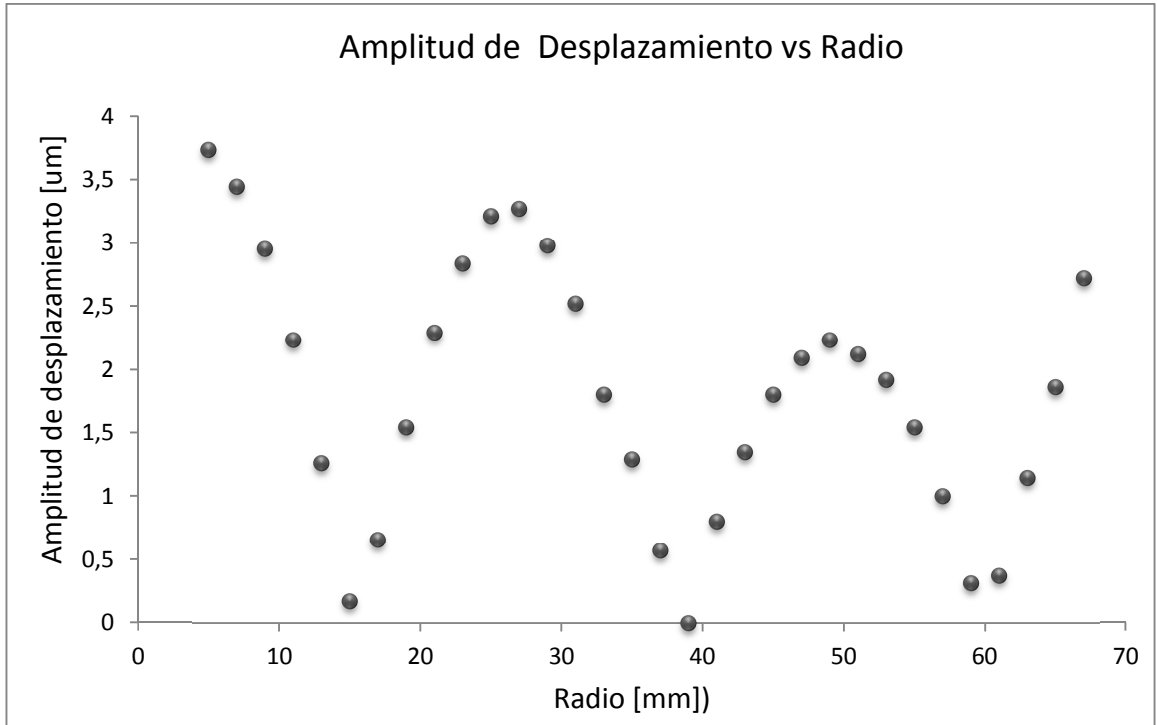


Fig 17: Amplitud de desplazamiento de la placa con modo de vibración $n=3$.

Se observa que la placa presenta 3 nodos, uno cerca de los 15mm, otro cercano a los 40mm de radio y el tercero a 60mm del centro de la placa.

4.3.3 Velocidad de vibración de la placa

Los datos obtenidos de la velocidad de vibración de las placas en función de la corriente de alimentación del transductor se muestran en los gráficos de las figuras 22 y 23. Como se observa, la relación entre la corriente de alimentación y la velocidad de vibración es lineal.

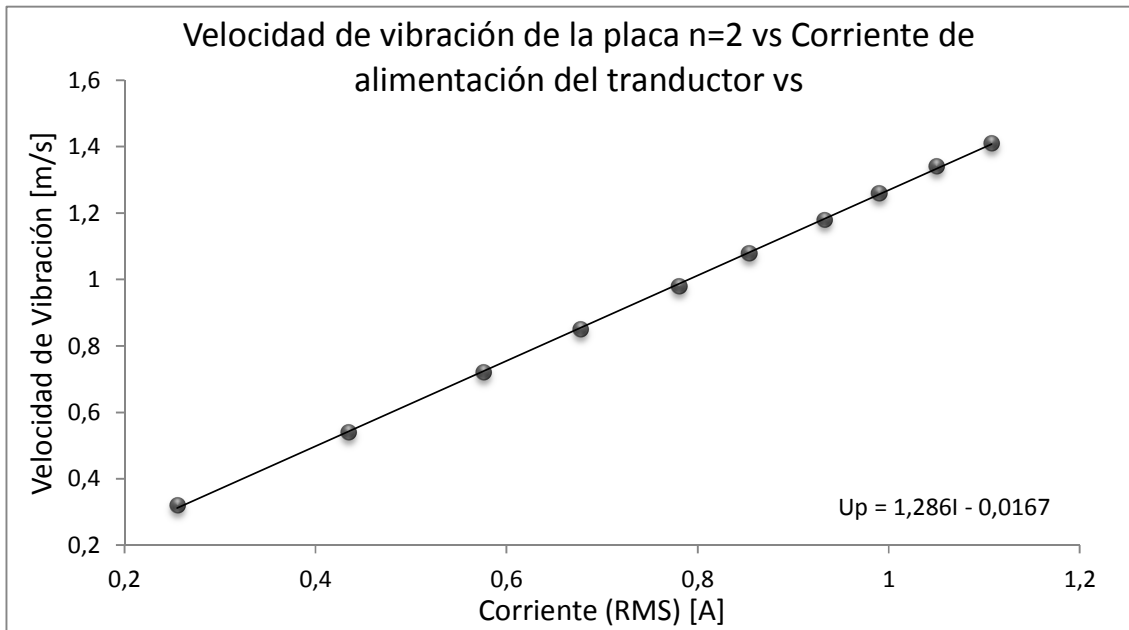


Fig 18: Velocidad de Vibración de la placa n=2 vs corriente de alimentación del transductor. Se observa la relación lineal entre ambas variables y su respectiva ecuación de la recta.

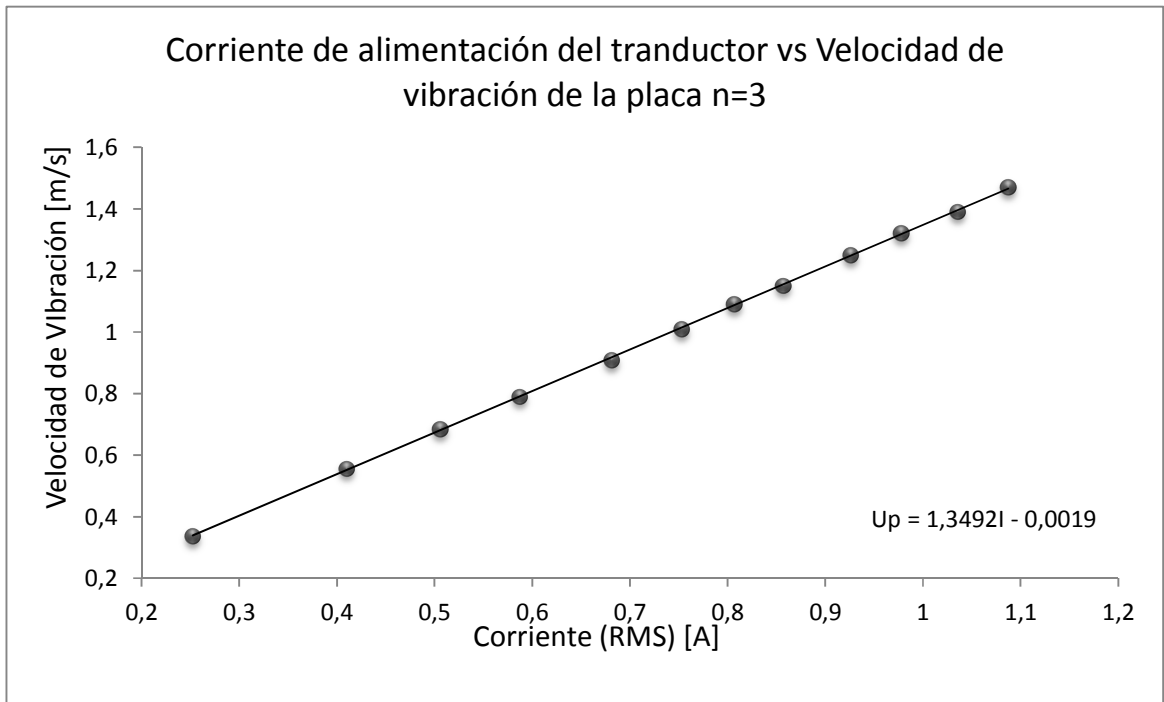


Fig20: Velocidad de Vibración de la placa n=3 vs corriente de alimentación del transductor Se observa la relación lineal entre ambas variables y su respectiva ecuación de la recta.

4.5 Análisis de resultados

4.5.1 Modos de vibración de las placas

Para calcular los modos de vibración de la placa se utilizaron los siguientes datos:

	Placa n=2	Placa n=3
Densidad [kg / m^3]	3250	3250
Módulo de Young [GPa]	70	70
Espesor [m]	5,6e-3	5,6e-3
Radio [m]	0,04725	0,0703
Coefficiente de Poisson	0,33	0,33
$(ka)^2$	38,55	87,8

Tabla 5: Datos utilizados para calcular la frecuencia a la que vibran las placas.

Los radios y espesor de las placas mostradas en la tabla 3 fueron calculados mediante el software COMSOL en donde se simuló diferentes radios de la placa a un espesor fijo entre frecuencias de 21[kHz] y 23[kHz]. Obteniendo los radios óptimos de las placas según la frecuencia que se deseaba, las que están en torno a los 22[kHz], se obtienen las figuras 23 y 24.

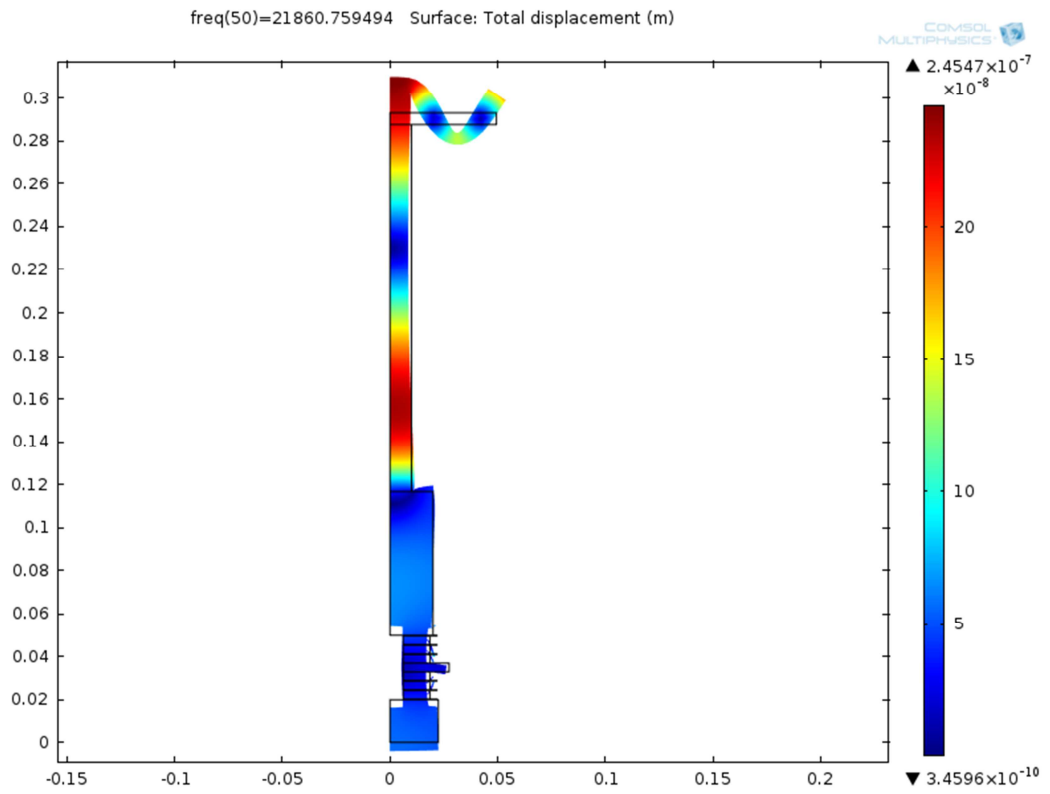


Fig 19: Simulación en COMSOL de un transductor ultrasónico con placa vibrando en su segundo modo.

En la figura 23 la placa está vibrando en el modo $n=2$. El transductor presenta simetría axial por lo que en las figuras 23 y 24 se observa un solo lado de éste. Se puede observar en la figura 23 que la frecuencia en la que la placa vibra es 21,861[kHz]. La placa presenta 2 nodos representados por las zonas de color azul y 3 antinodos representados por los colores rojo (centro), verde (segundo antinodo) y rojo (en el borde). La placa tiene las dimensiones especificadas en la tabla 3. Los colores representan los desplazamientos a los que está sujeto el transductor y tienen unidades de metro [m].

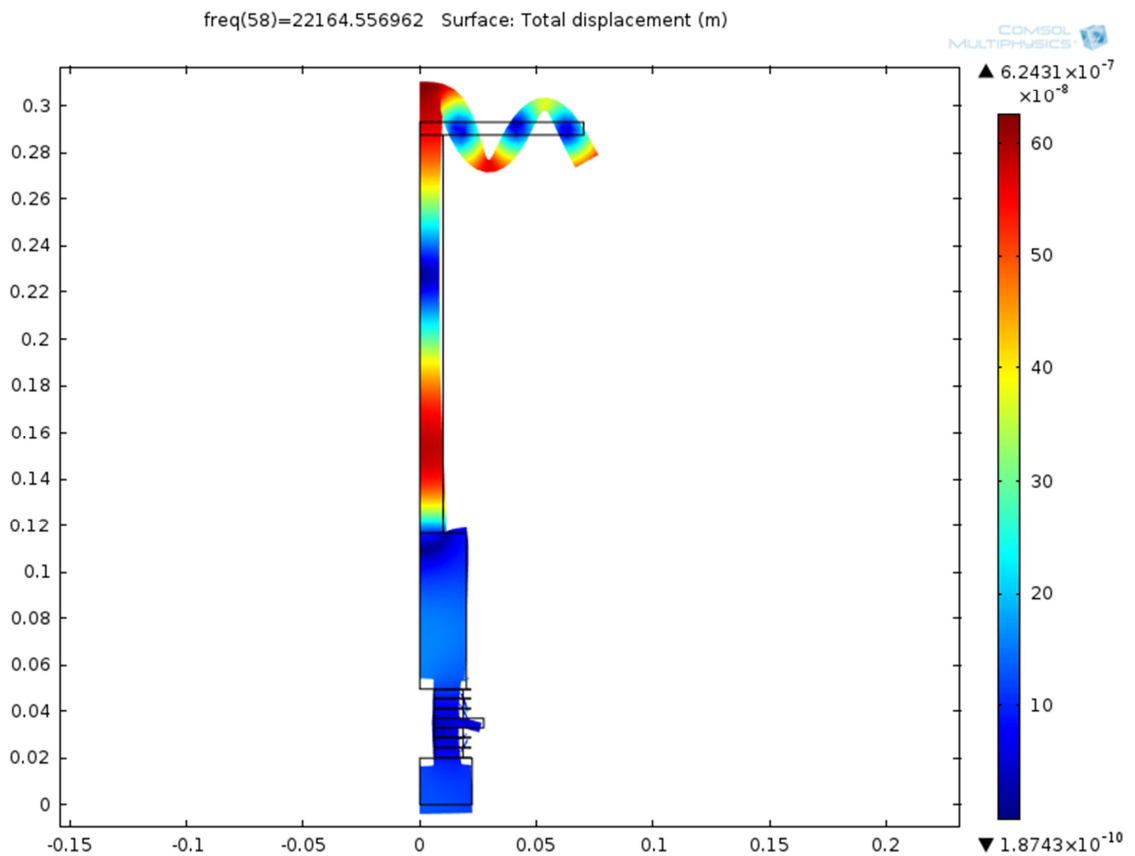


Fig 20: Simulación en COMSOL de un transductor ultrasónico con placa vibrando en su tercer modo.

El transductor de la figura 24 vibra a una frecuencia de 22,165[kHz] y la placa presenta 3 nodos y 4 antinodos.

Posterior a esto, se utilizaron las dimensiones de las 2 placas simuladas y se construyeron 2 placas de duraluminio las que fueron apernadas al transductor para su posterior uso en la toma de datos. Utilizando la relación (3.1.5) con los radios obtenidos en la simulación y los datos de la tabla 3 la frecuencia de vibración de las placas de modo n=2 y n=3 respectivamente son:

$$f_2 = 21,841[kHz]; f_3 = 22,472[kHz]$$

Las frecuencias obtenidas de la relación (3.1.5) son cercanas a las frecuencias medidas experimentalmente y a las mostradas por la simulación en COMSOL. Por lo tanto la relación (3.1.5) es bastante útil a la hora de calcular que dimensiones debe tener una placa circular para vibrar a la frecuencia y modo de deseado.

A continuación una tabla con los errores porcentuales entre las frecuencias las frecuencias mencionadas anteriormente:

Modo de vibración	Errores relativos porcentual respecto de la frecuencia de resonancia experimental		
	Simulación COMSOL	Teoria de placas delgadas	Impedancia mecánica equivalente
Placa n=2	0,19%	0,10%	0,04
Placa n=3	0,06%	1,3%	1,3%

Tabla 6: Tabla con errores relativos porcentuales entre los datos teóricos y experimentales de las frecuencias de resonancia del transductor.

Podemos chequear si los valores de la masa y la complianza equivalente son los correctos evaluando estos valores para calcular la frecuencia de los modos n=2 y n=3 usando la relación:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_n M_n}$$

Los valores obtenidos para ambos modos n=2 y n=3 son:

$$f_2 = 21,829[kHz]; f_3 = 22,474[kHz]$$

Comparando las frecuencias de vibración teóricas de las placas con las experimentales de la tabla 2 podemos observar que son similares y que los radios de las placas fueron elegidos correctamente para que vibren al modo deseado según la frecuencia de vibración del transductor.

Todo lo dicho anteriormente sobre los modos de vibración de las placas puede ser resumido en la siguiente tabla:

	Frecuencia de vibración de las Placas[kHz]	
	n=2	n=3
Datos Experimentales	21,820	22,178
Simulación COMSOL	21,861	22,164
Teoría Clásica placas delgadas: $f_n = \sqrt{\frac{Eh^3}{12\rho(1-\nu^2)}} \frac{\lambda^2}{2\pi a^2}$	21,841	22,472
Impedancia mecánica equivalente: $\omega_n^2 = \frac{1}{C_n M_n}$	21,829	22,474

Tabla 7: Resumen del análisis de las frecuencias de vibración de las placas.

Los valores de masa, Complianza y masa equivalente de las placas de modo n=2 y n=3 utilizados fueron respectivamente:

$$m_2 = 0,1277[Kg]; C_2 = 4,1329 \cdot 10^{-9} \left[\frac{m^2}{N} \right]; M_2 = 0,0129[kg]$$

$$m_3 = 0,2826[Kg]; C_3 = 2,6253 \cdot 10^{-9} \left[\frac{m^2}{N} \right]; M_3 = 0,0191[Kg]$$

Como se puede observar, las masas equivalentes son menores que las masas de las placas. Esto es porque el transductor al vibrar “siente” que está desplazando una placa de masa menor ya que parte de ésta se mueve hacia arriba y otra hacia abajo. La masa equivalente es del orden de 10 veces menor que la masa de la placa, para ambos modos de vibración.

Las impedancias de radiación considerando la placa como un pistón son:

$$Z_{r2} = 2,8616 \left[\frac{\text{Ns}}{m} \right]; Z_{r3} = 6,3346 \left[\frac{\text{Ns}}{m} \right]$$

4.4.2 Velocidad de vibración de las placas

Con respecto a la velocidad de vibración de las placas y su relación con la corriente de alimentación del transductor se utilizó la ecuación (2.2.5) obtenida de la teoría de circuitos equivalentes para calcular las velocidades de vibración según los datos obtenidos de corriente:

$$U_{pm} = \frac{NI}{j\omega C_0} \left[Z_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \left(Z_2 + \frac{1}{j\omega C_0} \right) + \frac{N^2}{j\omega C_0} \left(1 + \frac{Z_1}{(Z_{Be} + Z_1)} \right) \right]^{-1} \times$$

$$\left[\frac{M}{Z_{2F}} \left(\left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \left(Z_{1F} + \frac{Z_{1A}}{M} \right) + (Z_{1A} + Z_n + Z_r) \right) + M \left(\frac{Z_{1A} + Z_n + Z_r}{Z_{2A}} + 1 \right) \right]^{-1}$$

Por lo tanto para cada valor de corriente medido, se evaluó tal valor en la relación (2.2.5) obteniendo los siguientes resultados:

Para la placa de modo de vibración n=2 se obtuvo el siguiente gráfico:

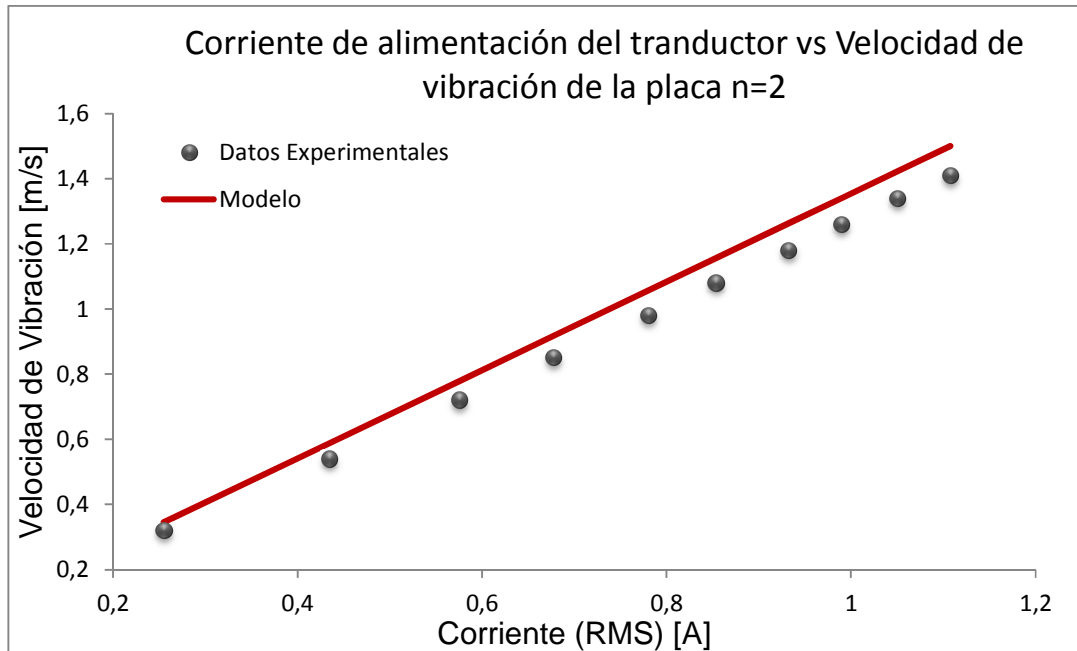


Fig 21: Gráfico Velocidad de vibración vs Corriente de alimentación del transductor con placa vibrando en su segundo modo. La corriente de alimentación medida está en RMS.

$$U_{pm} = 1,3543I$$

La pendiente de la recta $U_{pm} = 1,3543I$ representa un factor de conversión electromecánico propio del transductor y su placa vibrante.

La ecuación de la recta de los datos experimentales es:

$$U_p = 1,286I + 0,0167$$

Las pendientes experimental y teórica son similares con un error porcentual entre ambas del 5,3%.

Para la placa con modo de vibración n=3 tenemos:

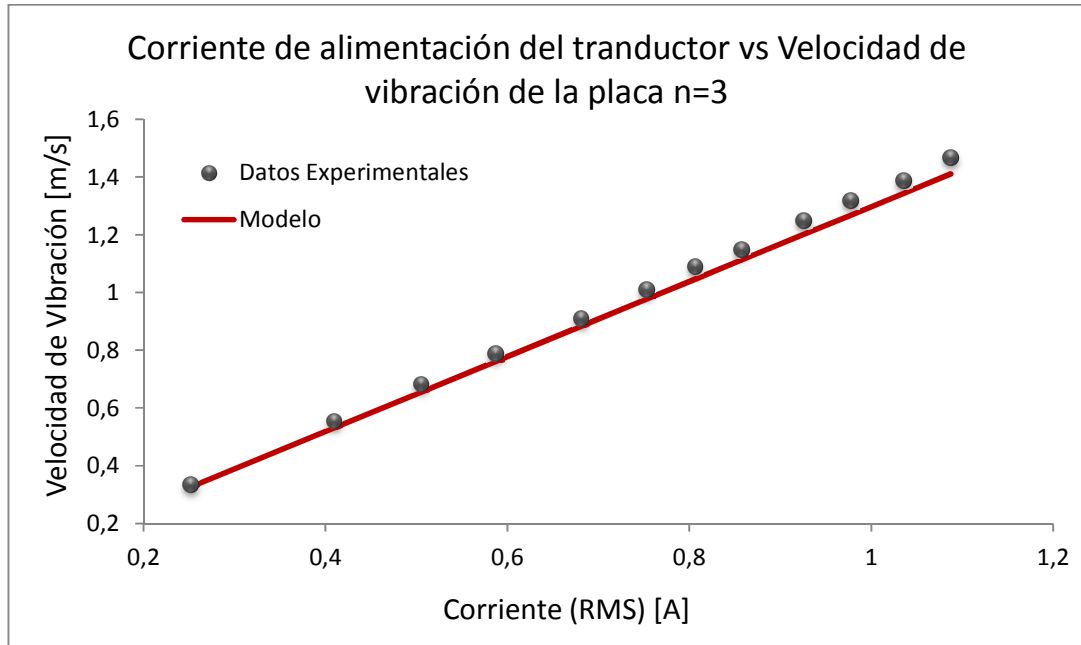


Fig 22: Gráfico Velocidad de vibración vs Corriente de alimentación del transductor con placa vibrando en su tercer modo. La corriente de alimentación medida son valores RMS.

La ecuación de la recta del modelo es:

$$U_{pm} = 1,297I$$

Recordando la ecuación de la recta de los datos experimentales:

$$U_p = 1,3492I + 0,0019$$

Tenemos que las pendientes experimental y teórica son similares con un error porcentual entre ambas del 3,9%.

Por lo tanto, podemos decir que el modelo basado en circuitos equivalentes predice en forma correcta la velocidad de vibración en el centro de ambas placas circulares.

CONCLUSIONES

Podemos concluir que:

- El modelo de circuitos equivalentes propuesto en este trabajo presenta resultados muy cercanos a los medidos por lo que el modelo funciona
- La relación entre la corriente de alimentación del transductor y la velocidad de vibración de la placa es lineal. Las ecuaciones de la recta del modelo y los datos experimentales son muy similares con un error porcentual entre sus pendientes menores al 5,3% esto indica que el modelo representa de forma correcta la relación entre corriente y velocidad de vibración.
- Los radios y espesor de las placas del transductor ultrasónico de potencia obtenidas mediante la simulación en COMSOL fueron evaluados en la relación (3.1.5) obteniendo frecuencias de vibración muy cercanas a la que mostraba la simulación. Luego al medir el transductor en el puente de impedancia con ambas placas, y obtener las frecuencias de resonancia se compararon éstas con las frecuencias de vibración de las placas obtenidas mediante la teoría. Los valores teóricos y experimentales son muy similares con errores porcentuales menores al 1,4%. Esto es muy importante ya que se requiere que el transductor vibre a una frecuencia igual a la frecuencia de vibración de la placa correspondiente.
- La frecuencia de vibración de las placas calculadas mediante la relación (3.2.4) es similar a las encontradas en la simulación en COMSOL y a las medidas experimentalmente. Esto significa que los valores de Compliance e impedancia mecánica equivalente son correctos.

Bibliografía

- [1]. **Vives, Antonio Arnau.** *Piezoelectric Transducers and Applications*. Berlín : Springer, 2008. pp. 2-7.
- [2]. **Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey.** *Fundamentals of Acustics*. United States Naval Postgraduated School Monterey, California : John Wiley & Sons Inc, 1962. pp. 100-104,177-181.
- [3]. **Oyarzún Reyes, Rolando.** *El circuito equivalente de Mason*. Contribuciones científicas y Tecnológicas” N° 98 , 1993. (versión revisada el 2009 por Luis Gaete Garretón).
- [4]. **Leissa, Arthur W.** *Vibration of Plates*. Ohio state University Columbus, Ohio : Scientific and technical information division, 1969. pp. 1-5,10-11,337-340.
- [5]. **Jordán, Pedro Carrero.** *Diseño de un sistema electro-mecánico para el secado de productos por ultrasonidos*. Madrid : s.n., 2010.
- [6]. **Lin, Shuyu.** *Radiation Impedance and Equivalent Circuit for Piezoelectric Ultrasonic Composite Transducers of Vibrational Mode-Conversion*. IEEE transactions on ultrasonics,ferroelectrics,and frecuency control,Vol 59,no.1 : s.n., 2012.

ANEXO

A1: Solución de la ecuación diferencial de la placa circular delgada

La ecuación diferencial que rige el comportamiento de una placa circular delgada está definida como:

$$D\nabla^4 y + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

En donde:

D : Rigidez flexural. [Nm]

ρ =Densidad de la placa [kg/m³]

La rigidez flexural está definida como: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Con:

E =Módulo de Young [Pa].

ν =Coeficiente de Poisson

h =Espesor de la Placa [m]

La ecuación (A1.1) tiene como solución:

$$y = Y \exp(i\omega t) \quad (\text{A1.2})$$

t =tiempo [s]

ω =Frecuencia angular [rad/s]

Y es una función dependiente de las coordenadas espaciales de la placa que en este caso al ser una placa circular, se adoptarán coordenadas cilíndricas.

Al sustituir (A1.2) en (A1.1) tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^4 Y - k^4 Y = 0 \quad (\text{A1.3})$$

La ecuación (A1.3) se puede factorizar de la siguiente forma:

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)Y = 0 \quad (\text{A1.4})$$

La solución a la ecuación (A1.4) es la superposición de las soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Y_1 + k^2 Y_1 &= 0 \\ \nabla^2 Y_2 - k^2 Y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

Considerando coordenadas cilíndricas y multiplicando ambas ecuaciones por r^2 , las ecuaciones (A1.6) resultan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial Y_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} + r^2 k^2 Y_1 &= 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial Y_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \theta^2} - r^2 k^2 Y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.6})$$

Al resolver las ecuaciones diferenciales de (A1.6) por el método de separación de variables tenemos que $Y_1 = R_1(r)\Theta_1(\theta)$ e $Y_2 = R_2(r)\Theta_2(\theta)$ con lo que las ecuaciones de (A1.6) quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{\partial^2 (R_1(r)\Theta_1(\theta))}{\partial r^2} + r \frac{\partial (R_1(r)\Theta_1(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial^2 (R_1(r)\Theta_1(\theta))}{\partial \theta^2} + r^2 k^2 R_1(r)\Theta_1(\theta) &= 0 \\
r^2 \frac{\partial^2 (R_2(r)\Theta_2(\theta))}{\partial r^2} + r \frac{\partial (R_2(r)\Theta_2(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial^2 (R_2(r)\Theta_2(\theta))}{\partial \theta^2} - r^2 k^2 R_2(r)\Theta_2(\theta) &= 0
\end{aligned}$$

(A1.7)

Dividiendo la primera ecuación diferencial por $R_1(r)\Theta_1(\theta)$ y la segunda por $R_2(r)\Theta_2(\theta)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{R_1(r)} \frac{\partial^2 R_1(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R_1(r)} \frac{\partial R_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{\Theta_1(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta_1(\theta)}{\partial \theta^2} + r^2 k^2 &= 0 \\
\frac{r^2}{R_2(r)} \frac{\partial^2 R_2(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R_2(r)} \frac{\partial R_2(r)}{\partial r} + \frac{1}{\Theta_2(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta_2(\theta)}{\partial \theta^2} - r^2 k^2 &= 0
\end{aligned}$$

(A1.8)

Separando los términos que depende de r y θ tenemos que la única forma de que la igualdad de (A1.9) sea válida es que sean iguales a una constante en común que denominaremos m^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{R_1(r)} \frac{\partial^2 R_1(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R_1(r)} \frac{\partial R_1(r)}{\partial r} + r^2 k^2 &= -\frac{1}{\Theta_1(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta_1(\theta)}{\partial \theta^2} = -m^2 \\
\frac{r^2}{R_2(r)} \frac{\partial^2 R_2(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R_2(r)} \frac{\partial R_2(r)}{\partial r} - r^2 k^2 &= -\frac{1}{\Theta_2(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta_2(\theta)}{\partial \theta^2} = -m^2
\end{aligned}$$

(A1.9)

Por lo tanto, tenemos para la primera ecuación diferencial de (A1.9) las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{R_1(r)} \frac{\partial^2 R_1(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R_1(r)} \frac{\partial R_1(r)}{\partial r} + r^2 k^2 + m^2 &= 0 \\
\frac{\partial^2 \Theta_1(\theta)}{\partial \theta^2} - \Theta_1(\theta) m^2 &= 0
\end{aligned}$$

(A1.10)

Multiplicando la primera ecuación por $R_1(r)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 R_1(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R_1(r)}{\partial r} + (r^2 k^2 + m^2) R_1(r) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Theta_2(\theta)}{\partial \theta^2} - \Theta_2(\theta) m^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

La primera ecuación de (A1.12) es la ecuación diferencial de Bessel y la segunda ecuación nos entregará una solución armónica:

$$\begin{aligned} R_1(r) &= A J_m(kr) + B Y_m(kr) \\ \Theta_1(\theta) = \Theta_2(\theta) &= \exp(jm\theta) \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

$J_m(kr)$ es la función de Bessel de primera especie e $Y_m(kr)$ es la función de Bessel de segunda especie.

Análogamente para la segunda ecuación diferencial de (A1.9) tenemos que

$$r^2 \frac{\partial^2 R_2(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R_2(r)}{\partial r} - (r^2 k^2 + m^2) R_2(r) = 0 \quad (\text{A1.13})$$

Esta ecuación diferencial tiene como solución:

$$R_2(r) = C I_m(kr) + D K_m(kr) \quad (\text{A1.14})$$

$I_m(kr)$ es la función de Bessel modificada de primera especie en tanto que $K_m(kr)$ es la función de Bessel modificada de segunda especie.

Por lo tanto, la solución completa de la ecuación (A1.1) es:

$$y(r, \theta, t) = (A_m(kr) + BY_m(kr) + CI_m(kr) + DK_m(kr)) \exp(jm\theta) \exp(j\omega t) \quad (\text{A1.15})$$

Las funciones de Bessel de segunda especie y segunda especie modificada $Y_m(kr)$ y $K_m(kr)$ son infinitas en $r = 0$, por lo que los coeficientes B y D deben ser nulos. Otro punto importante es que como θ es una variable multievaluada lo que significa que $y(r, \theta, t) = y(r, \theta + 2\pi, t)$, lo que nos restringe los valores que puede tomar m los que son: $m=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ etc. La constante m nos determinará cuantos nodos radiales tendrá la placa. Como la placa a estudiar en este trabajo no tiene nodos radiales $m=0$. Así la ecuación (A1.15) queda reducida a la siguiente forma (renombrando la constante D por B).

$$y(r, t) = (AJ_0(kr) + BI_0(kr)) \exp(j\omega t) \quad (\text{A1.16})$$