

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Física



Efecto de las propiedades reológicas en el flujo de fluidos no-Newtonianos en geometrías tipo T e Y: Método de elementos finitos estabilizado.

Carolina Alexandra Denisse Abugattas Chacoff

Profesor Guía:

Ernesto Castillo Del Barrio.

Tesis para optar al Título Profesional de Ingeniero Físico.

Santiago – Chile

2018.

©Carolina Alexandra Denisse Abugattas Chacoff, 2019.

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial- SinDerivadas Chile 3.0

Efecto de las propiedades reológicas en el flujo de fluidos no-Newtonianos en geometrías tipo T e Y: Método de elementos finitos estabilizado.

Carolina Alexandra Denisse Abugattas Chacoff

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Ernesto Castillo, del Departamento de Ingeniería Civil Mecánica y bajo el patrocinio del profesor Dr. Francisco Vivanco, del Departamento de Física y ha sido aprobado por miembros de la Comisión Calificadora del candidato.

.....
Dr. Ernesto Castillo
Profesor Guía.

.....
Dra. Marcela Cruchaga.

.....
Dr. Belfor Galaz.

.....
Roberto Bernal.
Director.

.....
Dr. Guillaume Lagubeau.

.....
Dr. Francisco Vivanco
Profesor Patrocinador.

Resumen

Las simulaciones numéricas son una herramienta relevante en la actualidad. Uno de los métodos numéricos más utilizados es el Método de Elementos Finitos, sin embargo, éste puede sufrir inestabilidades numéricas, es por esto que para eliminar el efecto de inestabilidad en la solución se trabajará con un Método de Elementos Finitos Estabilizado.

Primero, se realizó la validación del Método de Elementos Finitos Estabilizado utilizado, el cual corresponde a un de tipo VMS (Variational multiscale), referido en este trabajo como *Total Residual*. Se resolvió numéricamente el problema de Navier-Stokes de dos campos, estacionario, para fluido Newtoniano y no-Newtoniano, para una geometría T bidimensional en el plano xy . Los resultados de las simulaciones de fluidos no-Newtonianos se compararon con resultados obtenidos analíticamente y con resultados experimentales del trabajo *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation* (D. Liepsch, S. Moravec, A.K. Rastogi, N.S. Vlachos, 1982). Se halló que los perfiles de velocidad obtenidos numéricamente se solapan con las curvas analíticas y con los resultados experimentales del trabajo mencionado.

El paso siguiente fue la caracterización numérica del flujo de fluidos no-Newtonianos en una geometría bidimensional T, utilizando el modelo Ostwald- de Waele (John Francis Richardson, R. P. Chhabra, 2008), para un rango de número de Reynolds [50:1000], donde para cada número de Reynolds se varió el índice de potencia n , desde 0.25 hasta 1.75. Se halló que el comportamiento que adquiere un fluido no-Newtoniano depende fuertemente de la relación de los perfiles de velocidad y de viscosidad: En la salida del brazo principal, en fluidos pseudoplásticos, a medida que se incrementa el número de Reynolds, el gradiente de velocidad aumenta, reflejando el carácter pseudoplástico en una disminución en el perfil de la viscosidad. En cambio, para fluidos dilatantes, a medida que se aumenta el número de Reynolds, el gradiente de velocidad aumenta en la salida principal de la T, lo que se refleja en un aumento del perfil de viscosidad debido a su carácter reológico.

Posteriormente, se realizaron simulaciones del flujo sanguíneo en la arteria Carótida tridimensional y bidimensional, sana y con 60% de Estenosis. Debido al carácter no-Newtoniano de la sangre se utilizaron dos modelos: Ostwald- de Waele y Carreau-Yasuda. Se concluyó que, cuando hay Estenosis, el caudal volumétrico disminuye en la arteria Carótida Interna, con respecto a la arteria sana, en los siguientes porcentajes: 14.6%,11.0%,10.3%,10.3%,8.8% y 10.2%, para los números de Reynolds 400, 536,800, 925,1200 y 1241, respectivamente. Además, se halló que cuando hay un aumento de 20° en el ángulo de bifurcación de la arteria Carótida sana, patología común en pacientes desde los 65 años aproximadamente, el caudal en la arteria Carótida Interna presenta una pequeña disminución.

El trabajo de tesis se encuentra enmarcado en el proyecto FONDECYT 11160160 "*Efficiency optimization in heat transfer processes using non-Newtonian fluids in laminar and turbulent regimes via numerical simulation*"

Palabras claves: *Método de Elementos Finitos Estabilizado, Total Residual, fluido no-Newtoniano, pseudoplástico, dilatante, modelo Ostwald-de Waele, modelo Carreau-Yasuda*

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer al proyecto al proyecto FONDECYT 11160160 *“Efficiency optimization in heat transfer processes using non-Newtonian fluids in laminar and turbulent regimes via numerical simulation”*, ya que este trabajo de tesis se encuentra dentro de dicho proyecto.

Me gustaría agradecer al profesor Ernesto Castillo por darme la confianza y apoyo para integrarme a su grupo de trabajo y por las enseñanzas entregadas durante todo el proceso de tesis. También, me gustaría agradecer al profesor Francisco Vivanco por la paciencia y conocimientos entregados.

Agradezco a mi familia por el apoyo y paciencia, en especial a mi mamá Ana, a mi tía Mercedes, a mi prima Daniela. A mi primo Jaime por introducirme en el camino de la física. Agradezco a mi pololo, Pedro, por el constante apoyo, cariño y consejos brindados durante todo momento.

Agradezco a las personas y amigos que he conocido durante el período de la carrera y de tesis, que, me brindaron un montón de veces consejos, apoyo y ayuda, y que hicieron más ameno el tiempo de estudio.

Por supuesto, agradecer a los profesores del departamento de Física, por los conocimientos y herramientas entregadas durante todo este tiempo.

Tabla de Contenido

Introducción	1
<i>Motivación</i>	<i>1</i>
<i>Objetivos</i>	<i>3</i>
Objetivo General	3
Objetivos Específicos.	3
<i>Estructura del Informe.....</i>	<i>4</i>
Capítulo 1: Formulación de modelos y método numérico.	5
1.1 Fluidos Newtonianos	5
1.2 Fluidos no-Newtoniano	7
1.3 Flujo de Poiseuille para Fluido Newtoniano.....	10
1.4 Flujo de Poiseuille con modelo de Ostwald-de Waele:	12
1.6. Método de Elementos Finitos Estabilizado	14
Capítulo 2: Validación de Método de Elementos Finitos Estabilizado.....	19
2.1 Comparación con solución analítica	19
2.2 Comparación con resultados experimentales	21
2.2.1 Geometría	23
2.2.2 Características del problema	24
2.2.3 Condiciones de borde.....	24
2.2.4 Mallado	26
2.2.5 Resultados	27
2.3 Conclusión.....	29
Capítulo 3: Caracterización de flujo de fluidos no-Newtonianos en salidas de geometría	
T.....	30
3.1 Geometría.....	30
3.2 Características del problema.....	31
3.3 Condiciones de contorno.....	32
3.4 Mallado.....	32
3.5 Resultados.....	33
3.6 Conclusión.....	44

Capítulo 4: Flujo sanguíneo en Arteria Carótida	45
4.1 Arteria Carótida.....	45
4.2 Sangre.....	49
4.2.1 Parámetros de modelo Ostwald-de Waele	49
4.2.2 Parámetros de modelo Carreau-Yasuda	49
4.3 Características del problema.....	50
4.4 Mallado.....	53
4.5 Resultados.....	56
4.5.1 Comparación con modelo experimental tridimensional.....	56
4.5.2 Comparación con Espectrograma en arteria Carótida Común.....	58
4.5.3 Resultados.....	59
4.5.3 Comparación de flujos de salida en Arteria Carótida /flujo de entrada	88
4.5.4 Efecto de cambio de ángulo en el flujo sanguíneo de la arteria Carótida sana.....	92
4.6 Conclusión.....	94
Conclusiones	96
Referencias bibliográficas	98
Anexo.....	101

Índice de Tablas.

Tabla 1. Parámetros estudiados en el trabajo de Liepsch, Rastogi y Vlachos.	22
Tabla 2. Viscosidad dinámica calculada para cada número de Reynolds.....	24
Tabla 3. Valores de $Q_{salida\ brazo\ secundario}$ $Q_{entrada}$ y de velocidad máxima u_o	25
Tabla 4. Valores de $Q_{salida\ brazo\ principal}$ $Q_{entrada}$ calculados..	26
Tabla 5. Tamaño de elementos de mallas estructuradas utilizadas junto con el número total de elementos.	26
Tabla 6. Perfiles de velocidad graficados con sus respectivas coordenadas del plano xy. ...	33
Tabla 7. Flujo volumétrico calculado en la salida del brazo principal de la T y en la salida del brazo secundario para $Re=50$	34
Tabla 8. Flujo volumétrico calculado en la salida del brazo principal de la T y en la salida del brazo secundario para $Re=500$	34
Tabla 9. Flujo volumétrico calculado en la salida del brazo principal de la T y en la salida del brazo secundario para $Re=1000$	34
Tabla 10. Valores de velocidad máxima calculados para cada modelo utilizado, según el número de Reynolds.	51
Tabla 11. Valores de velocidad máxima impuesta como condición de entrada para modelo Carreau-Yasuda, con sus respectivos números de Reynolds calculados.	52
Tabla 12. Diferencias porcentuales de caudales volumétricos en diástole de los modelos utilizados con las mediciones publicadas, en arteria Carótida Común.....	58
Tabla 13. Diferencias porcentuales de caudales volumétricos en diástole de los modelos utilizados con las mediciones publicadas, en arteria Carótida Común.....	58
Tabla 14. Caudal volumétrico en la entrada de la Arteria Carótida Común correspondiente a cada número de Reynolds utilizado en el modelo Ostwald-de Waele.....	89
Tabla 15. Porcentaje de caudal volumétrico en las salidas de la arteria Carótida Interna y Externa, para la arteria Carótida sana, utilizando modelo Ostwald- de Waele y modelo Carreau-Yasuda.	90
Tabla 16. Porcentaje de caudal volumétrico en las salidas de la arteria Carótida Interna y Externa	93

Índice de Figuras.

Figura 1. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ a través del cual está circulando un fluido.....	6
Figura 2. Resumen de modelos No-Newtonianos en estado estacionario. Se indica el modelo Newtoniano con fines comparativos con los demás modelos.	8
Figura 3. Flujo de Poiseuille Newtoniano desarrollado.	11
Figura 4. Geometría canal bidimensional utilizado en las simulaciones.	19
Figura 5. Comparación de perfiles de velocidad analítica con perfiles de velocidad numérica para el modelo Ostwald-de Waele.....	21
Figura 6. Geometría T bidimensional en el plano xy.....	23
Figura 7. Geometría T con condiciones de contorno.	26
Figura 8. Comparación de perfiles de velocidad normalizada de resultados experimentales Exp con resultados numéricos M1 y M2	27
Figura 9. Comparación de perfiles de velocidad normalizada de resultados experimentales Exp con resultados numéricos M1 y M2.	28
Figura 10. Geometría T bidimensional mallada con 96.339 elementos estructurados.	32
Figura 11. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=100$ e índice de potencia $n=0.25$	35
Figura 12. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal y brazo secundario para $Re=100$ e índice de potencia $n=0.25$	36
Figura 13. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=100$ e índice de potencia $n=1.75$	37
Figura 14. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal y brazo secundario para $Re=100$ e índice de potencia $n=1.75$	37
Figura 15. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=500$ e índice de potencia $n=0.25$	39
Figura 16. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal y brazo secundario para $Re=500$ e índice de potencia $n=0.25$	39
Figura 17. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=500$ e índice de potencia $n=1.75$	40
Figura 18. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal y brazo secundario para $Re=500$ e índice de potencia $n=1.75$	41
Figura 19. Gráfico $Q_{salida\ brazo\ principal} / Q_{salida\ brazo\ secundario} / Q_{entrada}$ versus Número de Reynolds.	42
Figura 20. Partes de la arteria Carótida.....	46
Figura 21. Imagen de Irrigación de arteria Carótida.....	46
Figura 22. Geometría tridimensional de Arteria Carótida Sana, con sus respectivas dimensiones.....	47

Figura 23. Geometría tridimensional de Arteria Carótida con un 60% de Estenosis.....	48
Figura 24. Condiciones de borde de geometría tridimensional de arteria Carótida sana en el pre-procesador de GID.....	50
Figura 24. Condiciones de borde de geometría tridimensional de arteria Carótida con 60% de Estenosis en el pre-procesador de GID.	51
Figura 26. Malla en geometría bidimensional de la arteria Carótida sana.	53
Figura 27. Malla en geometría bidimensional de la arteria Carótida con 60% de Estenosis	54
Figura 28. Geometría tridimensional de la arteria Carótida sana.	55
Figura 29. Geometría tridimensional de la arteria Carótida con 60% de Estenosis	55
Figura 30. Ubicación de las secciones Si en la arteria Carótida Interna.	57
Figura 31. Comparación de velocidades axiales normalizadas de simulación con resultados experimentales para $Re=400$	57
Figura 32. Línea de contorno de la componente x de la velocidad.....	59
Figura 33. Línea de contorno de la componente x de la velocidad.....	61
Figura 34. Línea de contorno de la componente x de la velocidad.....	62
Figura 35. Línea de contorno de la componente z de la velocidad.....	63
Figura 36. Línea de contorno de la componente z de la velocidad.....	65
Figura 37. Línea de contorno de la componente z de la velocidad.....	66
Figura 38 . Secciones S1, S2 y S3 de la arteria Carótida sana.....	67
Figura 39. Secciones S1, S2 y S3 de la arteria Carótida con 60% de Estenosis.	67
Figura 40. Gráficos de velocidad axial en sección 1 para arteria tridimensional para arteria Carótida sana y con Estenosis	68
Figura 41. Gráficos de velocidad axial en S2para arteria tridimensional para arteria Carótida sana y con Estenosis.	70
Figura 42. Gráficos de velocidad axial en S3 para arteria tridimensional para arteria Carótida sana y con Estenosis utilizando modelos.....	72
Figura 43. Streamlines de la arteria Carótida sana obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele.....	74
Figura 44. Streamlines de la arteria Carótida con Estenosis obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele.....	76
Figura 45. Gráficos comparativos de Velocidad axial en sección 2 de arteria Carótida Interna bidimensional y tridimensional.	77
Figura 46. Líneas de contorno de la componente x de la velocidad.....	79
Figura 47. Líneas de contorno de la componente x de la velocidad.....	79
Figura 48. Perfiles de viscosidad dinámica con modelo Ostwald-de Waele en arteria Carótida tridimensional sana y con 60% de Estenosis.	80

Figura 49. Perfil de velocidad axial obtenidos con modelo Ostwald-de Waele para arteria Carótida sana y con 60% de Estenosis en sección S1.	80
Figura 50. Comportamiento de la sangre en la sección S2, para arteria sana y con Estenosis, utilizando el modelo Ostwald-de Waele	81
Figura 51. Comportamiento de la sangre en la sección S3, para arteria sana y con Estenosis, utilizando el modelo Ostwald-de Waele	82
Figura 52. Comportamiento de la sangre en las secciones S1,S2 y S3 en la arteria sana, utilizando el modelo Carreau-Yasuda	83
Figura 53. Comportamiento de la sangre en las secciones S1,S2 y S3 en la arteria con Estenosis, utilizando el modelo Carreau-Yasuda	84
Figura 54. Líneas de contorno de viscosidad para $Re=400$	86
Figura 55. Líneas de contorno de viscosidad para $Re=400$	87
Figura 56. Perfiles de velocidades axiales de la arteria Carótida Interna para la arteria Carótida Sana y Carótida con estenosis, para $Re=400$	88
Figura 57. Perfiles de velocidades axiales de la arteria Carótida Externa para la arteria Carótida Sana y Carótida con estenosis, para $Re=400$	89
Figura 58. Gráfico de barras de disminución de flujo sanguíneo en la salida de la arteria Carótida Interna.	91
Figura 59. Arteria Carótida con un ángulo de bifurcación de 70°	92
Figura 60. Gráfico de barras de disminución de flujo sanguíneo en la salida de la arteria Carótida Interna	94
Figura 61. Ecografía Doppler de la arteria Carótida Común.	101
Figura 62. Mallas de la técnica multigríd.	104

Introducción

Motivación

Las simulaciones numéricas constituyen una herramienta relevante para el diseño de nuevos dispositivos ingenieriles, para el estudio y comprensión de fenómenos físicos e incluso para entender el desarrollo y consecuencias de enfermedades humanas. Una buena simulación numérica podría incluso lograr una mejora en los diagnósticos hacia los pacientes, optimizando de este modo las terapias relacionadas con enfermedades.

Uno de los métodos numéricos más utilizados es el Método de Elementos Finitos, el cual podría llegar a aproximar cualquier problema definido por ecuaciones diferenciales parciales. De manera general, este método supone que el conjunto solución está compuesto por un número finito de subconjuntos interconectados; es decir, el sistema físico se divide en elementos que están conectados por un número discreto de puntos nodales y las variables nodales de cada elemento se combinan en matrices, quedando un conjunto de ecuaciones algebraicas las cuales pueden ser resueltas mediante algún método matricial (O. C. Zienkiewicz, 1994.).

Un punto clave que mantiene el desarrollo actual de diferentes formulaciones de método de elementos finitos aún, es que la solución que se obtiene de un problema mediante la aplicación del Método de Elementos Finitos directo (Galerkin) puede sufrir inestabilidades numéricas; ya sea por singularidades del problema o debido a que el método de elementos finitos no satisface la condición necesaria y suficiente para la estabilidad, es por esto que para eliminar el efecto de inestabilidad en la solución se trabajará con un Método de Elementos Finitos “estabilizado”, el cual se enmarca en lo que se conoce como Métodos Variacionales Multiescala. La idea básica de estos métodos es enriquecer y estabilizar la solución que proviene de aplicar directamente el método de Galerkin por medio de la adición de términos a la formulación variacional, los cuales en este trabajo se considerarán función del residuo de la aproximación de elementos finitos (R. Codina, S.Badia, J. Baige and J. Principe, 2004).

En este trabajo se estudiará la dinámica de flujo de fluidos Newtonianos y no-Newtonianos usando un Método de Elementos Finitos Estabilizado, para geometrías tipo T e Y. Se estudiarán las geometrías T debido a su uso común en la industria, donde fluidos o gases son transportados desde un lugar a otro. Este tipo geometrías se utilizan para la distribución de agua, sistema de riego, entre otros (Paritosh R. Vasava, 2007).

Como caso aplicado de fluido no-Newtoniano, se simulará el flujo de la sangre en la arteria Carótida. Esta arteria es la encargada del transporte de la sangre hacia el cerebro y de irrigar zonas de la cara y lengua (Laura Acosta Izquierdo, 2016). Para su simulación, la geometría de la arteria Carótida se obtuvo del estudio *Steady flow in a model of the human Carotid bifurcation*,

Part. II - Laser Doppler Anemometer measurement, cuyas dimensiones fueron un promedio de 124 angiogramas de personas (B.K. Bharadvaj, 1982).

El estudio de la dinámica de la sangre en la arteria Carótida genera un gran interés debido a las posibles mejoras de la evaluación de un paciente por parte de un médico, además, según estudios de la Organización Mundial de la Salud (OMS), en Enero del año 2015 las enfermedades Cardiovasculares fueron la principal causa de muerte de los países a nivel mundial. La OMS calculó que en el 2012 murieron por esta causa 17,5 millones de personas, lo cual representa un 31% de todas las muertes registradas en el mundo. De estas muertes, 7,4 millones se debieron a la cardiopatía coronaria, y 6,7 millones, a los Accidentes Vasculares Cerebrales (Organización Mundial de la salud., 2011).

Los métodos diagnósticos actuales tienen poca capacidad para realizar determinaciones *in vivo* del flujo y las presiones en situaciones de esfuerzo. La adquisición de datos de presión durante un proceso de cateterismo, en conjunto con la obtención de imágenes angiográficas, exige la sedación del paciente, y estas determinaciones normalmente se realizan en reposo, por lo que las simulaciones computacionales proporcionan el método ideal para obtener información sobre las condiciones de flujo durante el esfuerzo, siendo no invasiva y complementaria a las técnicas actuales.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar el flujo de fluidos no-Newtonianos en bifurcaciones geométricas tipo T e Y, a través de simulaciones numéricas utilizando un método de elementos finitos estabilizado.

Objetivos Específicos.

- Validar un método de elementos finitos estabilizado en el problema de Navier-Stokes en geometría T con resultados analíticos y experimentales existentes en la bibliografía especializada.
- Estudiar la influencia del número de Reynolds en el proceso de bifurcación del flujo en geometrías tipo T en un fluido no-Newtoniano del tipo Ostwald-de Waele en fluidos pseudoplásticos y dilatantes.
- Estudiar la influencia del índice de potencias en el proceso de bifurcación del flujo en geometrías tipo T en un fluido no-Newtoniano del tipo Ostwald-de Waele en fluidos pseudoplásticos y dilatantes.
- Comparar los resultados obtenidos con dos modelos no-Newtonianos usados en la caracterización de la sangre humana: Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda, en el proceso de bifurcación del flujo en geometrías tipo Y, bidimensional y tridimensional.
- Evaluar numéricamente el efecto de una Estenosis tipo cosenoidal en la arteria Carótida.

Estructura del Informe

El primer capítulo consiste en una revisión de los fundamentos teóricos utilizados, comenzando por las definiciones y ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. Luego, se explicará en detalle el Método de Elementos Finitos Estabilizado que se utilizó, al cual nos referiremos como *Total Residual*.

En el segundo capítulo se realiza la validación del método numérico *Total Residual*; en donde se realiza una comparación de curvas de velocidad en una geometría T, obtenidas numéricamente con el modelo de fluido no-Newtoniano estacionario e incompresible, Ostwald-de Waele, con resultados obtenidos de manera analítica, para este caso específico. La segunda parte de este capítulo consiste en comparar los resultados obtenidos numéricamente para fluido Newtoniano en una geometría T bidimensional en el plano xy , con los resultados experimentales del trabajo *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation*.

El tercer capítulo consiste en realizar simulaciones numéricas en una geometría T bidimensional utilizando el modelo de fluidos no-Newtonianos Ostwald-de Waele. Las simulaciones de realizaron en un rango de índices de potencias $n = [0.25-1.75]$ para cada número de Reynolds que se encuentra en el rango: $Re = [50: 1000]$. Esto se realizó con el fin de estudiar la influencia de índices de potencias y de número de Reynolds en el proceso natural de bifurcación de fluidos no-Newtonianos en una geometría T.

El cuarto capítulo corresponde al estudio de un fluido no-Newtoniano específico, el cual será la sangre. Éste consistió en realizar simulaciones numéricas del flujo sanguíneo en la arteria Carótida tridimensional y bidimensional, sana y con 60% de Estenosis, utilizando el método *Total Residual*. Debido a que la sangre tiene un carácter pseudoplástico, se utilizarán dos modelos de fluidos no-Newtonianos: Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda. Se obtendrán los flujos de salidas en las dos ramas de la arteria Carótida sana y se compararán con los flujos obtenidos en las salidas de la arteria Carótida con 60% de Estenosis y con los flujos en las salidas cuando la arteria Carótida presente un aumento en el ángulo de bifurcación.

Capítulo 1: Formulación de modelos y método numérico.

En este capítulo se describirá el problema a resolver y las ecuaciones gobernantes, además de los modelos utilizados para describir el flujo de fluidos no-Newtoniano, isotérmico e incompresible.

En la última parte de este capítulo, se describirá el concepto de subescala, que corresponde a la idea central del método numérico de Elementos Finitos Estabilizado que se utilizó en este trabajo de tesis, al cual nos referimos como *Total Residual*. Posteriormente, se explicará la formulación estabilizada de subescala aplicada al problema de Navier-Stokes de dos campos.

1.1 Fluidos Newtonianos

No todos los fluidos muestran la misma relación entre el esfuerzo cortante τ y la rapidez de deformación ε' ¹. Un fluido se llama *Newtoniano*, si el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la rapidez de deformación, partiendo de esfuerzo cero y deformación cero. En estos casos, la constante de proporcionalidad es definida como la *viscosidad absoluta o dinámica* μ . Así, los fluidos Newtonianos tienen la propiedad de poseer una viscosidad dinámica independiente del movimiento al que está sometido el fluido (James W. Daily, Donald R.F. Harleman, 1975).

Para un fluido Newtoniano la relación entre el esfuerzo cortante τ y la rapidez de deformación del fluido es ε' está definida por (James W. Daily, Donald R.F. Harleman, 1975):

$$\tau = -\mu\varepsilon' \quad (1)$$

En esta ecuación, el factor μ representa la *viscosidad dinámica*, ya que la ecuación anterior es una relación dinámica entre la fuerza y el movimiento del fluido.

Para fluido Newtoniano, μ tiene un valor único que depende solamente del estado del fluido, y por lo tanto ésta es una de las propiedades del fluido² (John Francis Richardson, R. P. Chhabra, 2008).

Considérese un volumen de control diferencial Δx , Δy y Δz , como se ve en la **figura (1)**, en una región cuya densidad y velocidad son funciones de la posición y el tiempo.

¹ El tensor de deformación de velocidad ε' , en coordenadas cartesianas, se puede escribir:

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\nabla^s\vec{u} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

²Otras propiedades de los fluidos son: La temperatura, peso específico, entre otras.

Se puede obtener el flujo de masa por segundo que circula a través del volumen de control mediante la **Ecuación general de Continuidad** (Faber, 1995):

$$\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)) = 0 \quad (2)$$

La ecuación anterior representa la *Conservación de Masa para fluidos* y está representada en coordenadas Eulerianas ³, ya que la densidad está en función de la posición \vec{r} y del tiempo t .

Para condiciones de estado permanente, es decir $\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = 0$, donde la variación de densidad en el tiempo es nula, se dice que el *fluido incompresible*, luego la **ecuación (2)** se puede escribir como:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

Esta es la forma más común de la *Ecuación de Continuidad*. Para un fluido incompresible, cada término individual de la **ecuación (2)** es independientemente nulo (Faber, 1995).

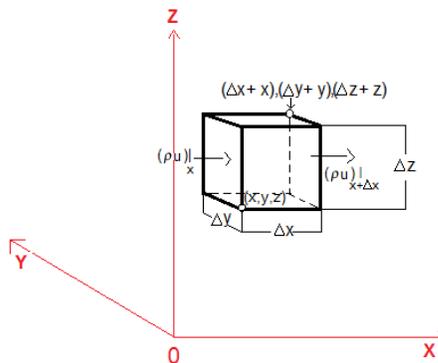


Figura 1. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ a través del cual está circulando un fluido.

Otra ley que obedecen los fluidos es la **Conservación del Momentum Lineal**, la cual, es representada en términos de la aceleración \vec{a}_i y del tensor de Esfuerzo de Cauchy σ_{ij} (Irgens, 2013.):

$$\rho \vec{a}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (4)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

³En la descripción de coordenadas Euleriana el sistema de ejes de referencia se desplaza con la partícula. Las coordenadas Eulerianas se utilizan en Mecánica de Fluidos, ya que, en general se busca encontrar la velocidad que lleva la partícula. El movimiento de la partícula se considera como dato.

Nota: Se omitirá la simbología de vector $\vec{\nabla}$ al operador nabla ∇ , ya que se da por hecho que este operador es un vector, por lo que sería redundante escribirlo con la simbología de vector.

Donde:

ρ representa la densidad volumétrica.

$\vec{a}_i = (a_1, a_2, a_3)$ representa la aceleración lineal con sus tres componentes.

$\sigma = (\sigma_{ij=1,2,3})$ representa el tensor de esfuerzo para fluidos Newtonianos.

$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ representa a las componentes vectoriales de fuerzas por unidad de volumen aplicadas sobre el fluido.

La aceleración lineal es posible escribirla:

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Donde $u_{i,j}$ son las componentes de la velocidad.

El tensor de esfuerzo en fluidos Newtonianos se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = (-p(\vec{r}, t) + \lambda \nabla \cdot \vec{u}) I + 2\mu \varepsilon' \quad (6)$$

Donde $p(\vec{r}, t)$ es la presión termodinámica de los fluidos, I es la matriz Identidad, λ es el segundo coeficiente de viscosidad, igual a $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ y ε' es el tensor de velocidad de deformación.

Reemplazando en la ecuación de Conservación de Momentum Lineal las ecuaciones (5) y (6), de aceleración lineal y de esfuerzo, se obtiene la siguiente ecuación en forma vectorial:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p + \vec{f} \quad (7)$$

Donde ∇^2 es el operador Laplaciano.

Cabe recalcar que estas ecuaciones describen el flujo de fluidos incompresibles, viscosos, homogéneos e isotérmico. El conjunto las **ecuaciones (3) y (7)** son las llamadas **ecuaciones de Navier-Stokes**.

1.2 Fluidos no-Newtoniano

Si al representar gráficamente τ frente a ε' para un fluido determinado la curva es una línea recta que pasa por el origen de las coordenadas, entonces el fluido es Newtoniano y la pendiente es la viscosidad dinámica del fluido a una cierta temperatura y presión.

Sin embargo, hay fluidos que no cumplen lo anterior. Los fluidos que poseen una proporcionalidad variable entre esfuerzo cortante y rapidez de deformación se conocen como **no-Newtonianos**.

El estudio de flujos no-Newtonianos es parte de la ciencia llamada *reología*, que significa “la ciencia del flujo y la deformación”. La reología se extiende desde la mecánica de fluidos Newtonianos hasta la elasticidad de Hooke. La región comprendida entre ellas corresponde a la deformación y flujo de materiales .

Hay numerosos modelos que tratan de describir la relación existente de fluidos no-Newtonianos, en estado estacionario, entre τ y $\dot{\epsilon}'$. En la **figura (2)** se muestra un gráfico con algunos modelos no-Newtonianos en estado estacionario.

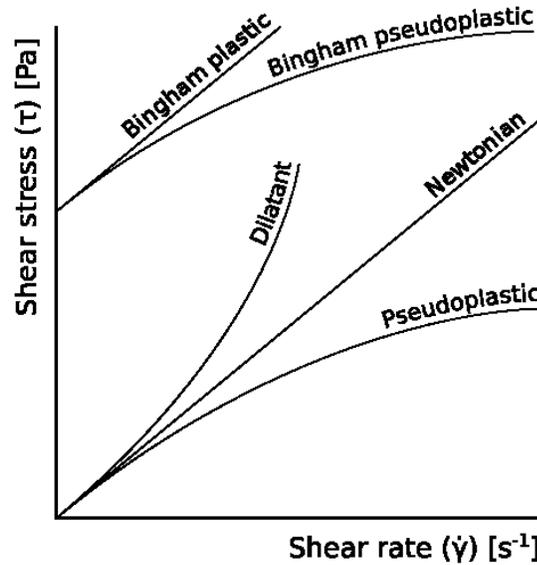


Figura 2. Resumen de modelos No-Newtonianos en estado estacionario. Se indica el modelo Newtoniano con fines comparativos con los demás modelos.

A continuación, se describirán dos modelos para fluidos No-Newtonianos en estado estacionario: Modelo de Ostwald-de Waele o Ley de Potencia y Modelo de Carreau-Yasuda; los cuales se utilizarán para el desarrollo de este trabajo de pregrado.

1.2.1 Modelo de Ostwald-de Waele

Para fluidos no-Newtonianos, el modelo más simple que permite una relación no-lineal entre la segunda invariante del tensor de deformación de velocidad ε' con la *viscosidad aparente* μ , es el modelo de Ostwald-de Waele o Ley de Potencia (Ernesto Castillo Del Barrio, 2016) :

$$\mu = m \left(\frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (8)$$

Dónde:

- $I_2 = 2(\varepsilon' : \varepsilon')$, es la doble contracción del tensor de velocidad de deformación ε'^4 .
- n es el índice de potencia.
- m es el índice de consistencia del fluido no-Newtoniano en $[Pa s^n]$.

La ecuación constitutiva para fluidos no-Newtonianos:

$$\tau = -\mu \varepsilon'$$

Reemplazando en la ecuación anterior la **ecuación (8)**:

$$\tau = -m \left(\frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon' \quad (9)$$

Si $n = 1$ entonces la ecuación anterior se transforma en la ley de viscosidad de Newton, siendo el índice de consistencia $m = \mu$, es decir, la viscosidad dinámica del fluido y ε' es el tensor de deformación de velocidad.

La desviación de n con respecto a la unidad, indica el grado de desviación del comportamiento Newtoniano del fluido:

- Si $0 < n < 1$, entonces el comportamiento es *pseudoplástico*⁵.
- Si $n > 1$, entonces se tiene un comportamiento *dilatante*⁶.

⁴ I_2 es un producto doble de dos tensores que produce un escalar:

$$I_2 = 2(\varepsilon' : \varepsilon') = 2[\varepsilon'_{11}\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{13}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{21}\varepsilon'_{21} + \varepsilon'_{22}\varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{23}\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{31}\varepsilon'_{31} + \varepsilon'_{32}\varepsilon'_{32} + \varepsilon'_{33}\varepsilon'_{33}]$$

⁵Un material presenta un comportamiento pseudoplástico si al aumentar el gradiente de velocidad, la viscosidad disminuye.

⁶Un material que presenta un comportamiento dilatante si aumenta el gradiente de velocidad, también aumenta la viscosidad.

El número de Reynolds generalizado con el modelo Ostwald-de Waele, para caso estacionario y fluido incompresible se calcula con la siguiente ecuación (John Francis Richardson, R. P. Chhabra, 2008):

$$Re = \frac{\rho u^{2-n} L^n}{m 8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n} \quad (10)$$

Donde L es la longitud característica, ρ es la densidad y u es la velocidad promedio.

1.2.2 Modelo de Carreau-Yassuda

La ecuación constitutiva para fluidos no-Newtonianos, como se mencionó anteriormente es:

$$\tau = -\mu \varepsilon'$$

Donde la viscosidad μ con el modelo Carreau-Yasuda (John Francis Richardson, R. P. Chhabra, 2008):

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + (\lambda \varepsilon')^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (11)$$

Donde:

- μ_∞ es la viscosidad de corte infinita.
- μ_0 es la viscosidad de corte cero.
- λ es una constante de tiempo.
- a es un parámetro adimensional.
- n es el índice de potencia.

El número de Reynolds, usando el modelo Carreau-Yasuda, se puede calcular:

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu_\infty} \quad (12)$$

Donde u es la velocidad media y L es la longitud característica.

1.3 Flujo de Poiseuille para Fluido Newtoniano.

Consideraremos un flujo como el que se muestra en la **figura (3)**, donde un fluido viscoso en reposo entra a un tubo circular por un gradiente de presión ∇p .

La fricción de las paredes genera una capa viscosa, que comienza en la entrada y que su espesor crece a medida que la longitud del tubo aumenta. Las capas viscosas se juntarán a una distancia x_L con respecto a la entrada del tubo, así el tubo estará completamente influenciado de capas viscosas (Tritton, 1988).

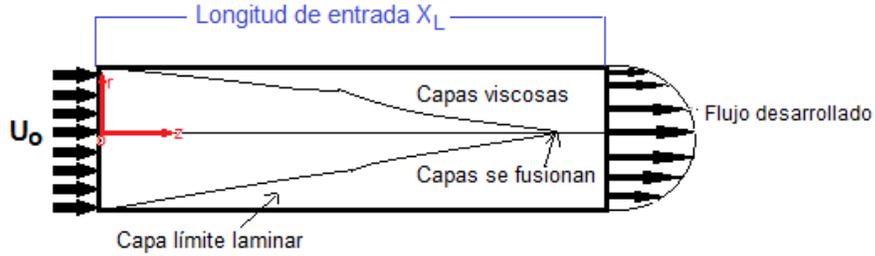


Figura 3. Flujo de Poiseuille Newtoniano desarrollado.

Dado que es un tubo circular de radio r , la obtención del perfil de velocidad del fluido se puede simplificar utilizando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Si se toma el eje z de forma tal que coincida con el eje del tubo, entonces u_θ y u_r serán cero en todas partes. La ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Por simetría de θ y por la ecuación de continuidad, u_z es independiente de θ y de z , es decir, u_z sólo es función de r :

$$u_z = u(r) \quad u_r = u_\theta = 0$$

La ecuación de conservación de Momentum por cada coordenada:

$$\hat{r}: \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\hat{\theta}: \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Integrando una vez, con respecto a la coordenada \hat{r} en la ecuación de la coordenada \hat{z} :

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{\mu r} \quad (13)$$

Integrando nuevamente con respecto \hat{r} la ecuación anterior, se obtiene:

$$u_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \quad (14)$$

Cuando $r = 0$, u_z es infinito, luego para evitar esto se restringe la constante $C_1 = 0$. En las paredes $r = r_0$ se impone la condición de no resbalamiento $u_z = 0$:

$$C_2 = -\frac{r_0^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Luego, la velocidad en la coordenada \hat{z} :

$$u_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r_o^2 - r^2)$$

Las demás coordenadas:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = 0$$

La velocidad máxima ocurre cuando $r = 0$:

$$u_o = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_o^2$$

Por lo tanto, el perfil de velocidad en la dirección \hat{z} : (Tritton, 1988)

$$u_z(r) = u_o \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad (15)$$

Se puede obtener el perfil volumétrico Q , el cual viene dado por:

$$dQ = u_z(r) \cdot dA = u_z(r) \cdot (2\pi r \cdot dr)$$

Integrando:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_o} r u_z(r) dr \quad (16)$$

Resolviendo la integral, el caudal volumétrico para fluido newtoniano en un cilindro con una sección transversal dA :

$$Q = \frac{u_o}{8} \pi r_o^2 \quad (17)$$

1.4 Flujo de Poiseuille con modelo de Ostwald-de Waele:

Los esfuerzos cortantes, para fluidos Newtonianos en un cilindro se puede escribir:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu \frac{du_z}{dr} \quad (18)$$

Usando el modelo de caracterización de fluidos no-Newtonianos Ostwald-de Waele, donde la viscosidad se puede escribir (John Francis Richardson, R. P. Chhabra, 2008):

$$\mu = m \left(\frac{du_z}{dr} \right)^{n-1} \quad (19)$$

Reemplazando la ecuación (19) de viscosidad en la ecuación (18):

$$\tau_{zr} = -m \left(\frac{du_z}{dr} \right)^{n-1} \frac{du_z}{dr} = -m \left(\frac{du_z}{dr} \right)^n$$

Luego, tomando la solución del perfil de velocidad de la ecuación de Navier-Stokes para fluido Newtoniano y derivando con respecto a r :

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_o^2 \left[\frac{2r}{r_o^2} \right]$$

Introduciendo en la ecuación anterior la viscosidad dada por el modelo Ostwald-de Waele:

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{1}{4m \left(\frac{du_z}{dr} \right)^{n-1}} \frac{dp}{dz} r_o^2 \left[\frac{2r}{r_o^2} \right]$$

Despejando $\frac{du_z}{dr}$:

$$\left(\frac{du_z}{dr} \right)^n = \frac{1}{4m} \frac{dp}{dz} r_o^2 \left[\frac{2r}{r_o^2} \right]$$

Queda:

$$\frac{du_z}{dr} = \left(-\frac{1}{4m} \frac{dp}{dz} r_o^2 \left[\frac{2r}{r_o^2} \right] \right)^{1/n}$$

Integrando con respecto a la coordenada r se obtiene el perfil de velocidad con el modelo Ostwald-de Waele, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$u_z(r) = \frac{2n+1}{n+1} u \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (20)$$

Donde $u = \left(\frac{1}{2m} \frac{dp}{dz} r_o \right)^{\frac{1}{n}} r_o$ que corresponde a la velocidad media y la velocidad máxima es $u_o = \frac{2n+1}{n+1} u$.

Reemplazando $u_z(r)$ en la ecuación de caudal volumétrico:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_o} r u_z(r) dr = 2\pi u \int_0^{r_o} \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] dr \quad (21)$$

Integrando la expresión anterior se obtiene la expresión del caudal volumétrico para fluido No-Newtonianos con el modelo de Ley de Potencia:

$$Q = u \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right) \frac{\pi r_o^2}{4} \quad (22)$$

1.6. Método de Elementos Finitos Estabilizado

En este trabajo se resuelve el problema de Navier-Stokes del flujo de fluidos no-Newtonianos asociado a geometrías tipo T e Y para diferentes valores de número de Reynolds en el rango laminar, con algunos casos de tipo convectivo dominantes. El problema se resuelve en 2 campos (\vec{u}, p) utilizando un método de elementos finitos estabilizado que permite igual interpolación entre la velocidad y la presión. La utilización de este método se hace necesaria ya que la estabilidad del método de Galerkin estándar no está garantizada, debido a inestabilidades generadas por la aparición de capas límites espurias asociadas al control inexistente del término convectivo y a requisitos de compatibilidad de espacios entre la velocidad y la presión, lo cual es un problema típico de aproximación numérica de problemas mixtos (R. Codina, S.Badia, J. Baige and J. Principe, 2004).

En esta sección se hará una revisión del método de Elementos Finitos, para luego, explicar el método de Multiescala Variacional al problema de Navier-Stokes y el método de estabilización utilizado en este trabajo de tesis.

1.6.1 Método de Elementos Finitos

El método de Elementos finitos es un método de aproximación de problemas continuos de forma tal que el continuo se divide en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados **nodos**.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo también regirán el del elemento. De esta forma, se consigue pasar de un sistema continuo, de infinitos grados de libertad, que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito, cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no (Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu, 2002).

La idea básica del Método de Elementos Finitos consiste en aproximar espacios de Hilbert por algunos espacios apropiados de dimensión finita H_h , con h un parámetro positivo, de modo que se cumplan las siguientes condiciones (Dietrich Braess, 2007):

(a) $H_h \subseteq H$,

(b) En H_h se puede formular y resolver fácilmente el problema variacional, y de esta forma es posible encontrar una solución $u_h \in H_h$.

(c) Cuando $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$, u con la solución débil del problema variacional en el espacio H y u_h la solución "discreta" del problema variacional en H_h .

La denominación de formulación débil se debe a que ésta permite soluciones con un grado más bajo, por lo que sólo se requiere continuidad de la función misma (C_0).

1.6.2 Método Variacional Multiescala

La solución de un problema numérico mediante el método de elementos finitos puede sufrir inestabilidades, las cuales ya fueron mencionadas. Es por esto que, para eliminar esas inestabilidades, se presentará una formulación estabilizada para el problema de dos campos de Navier-Stokes (\vec{u}, p) , las cuales se basan en el método Variacional Multiescala.

Sea Ω un dominio en R^d , con condición de borde $\Gamma = \partial\Omega$ y dada una función $f: \Omega \rightarrow R^n$, el problema consiste en encontrar una función $u: \Omega \rightarrow R^n$, tal que (R. Codina, S.Badia, J. Baige and J. Principe, 2004):

$$L(u) = f \text{ en } \Omega$$

$$Du = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

Donde L es un operador lineal diferencial (en espacio) y D es un operador adecuado para el problema para el problema que representa la condición de borde necesaria.

Introduciendo una función bilineal $B(u, v)$ sobre $\omega \subset \Omega$ (R. Codina, S.Badia, J. Baige and J. Principe, 2004):

$$B_w(u, v) := \langle \partial_i v, K_{ij} \partial_j v \rangle_w + \langle v, A_{c,i} \partial_i u \rangle_w - \langle \partial_i (A_{f,i}^T v), u \rangle_w + \langle v, S u \rangle_w \quad (24)$$

Donde $K_{ij}, A_{c,i}, A_{f,i}^T$ y S son matrices $n \times n$, ∂_i es la diferenciación con respecto a la coordenada Cartesiana x_i , i y j son índices que van desde 1 a d .

Usando la definición de producto interno de dos funciones en L_2 , la función bilineal $B_w(u, v)$ se puede expresar como:

$$B(u, v) = \langle Lu, v \rangle = L(v) \text{ en } w = \Omega \quad (25)$$

Para todas las funciones test v tal que $Dv = 0$ sobre Γ .

Una vez establecida la aproximación de elementos finitos, la aproximación de Galerkin al problema (25), consiste en encontrar una solución $u_h \in X_h$ tal que:

$$B(u_h, v_h) = L(v_h) \text{ para todo } v_h \in X_h \quad (26)$$

Donde $B(u_h, v_h) = \sum_K B_K(u_h, v_h)$ en todo el dominio de elementos finitos K . Notar que por medio de esta notación se podría escribir cualquier problema de manera compacta.

1.6.2.1 Concepto de Subescala

La idea principal del método Variacional Multiescala es dividir la incógnita u como (Ernesto Castillo Del Barrio, 2016):

$$u = u_h + u' \quad (27)$$

Donde u_h representa la incógnita asociada al problema de Galerkin que pertenece al espacio de elementos finitos X_h y u' es el complemento para llegar a u , el cual por definición es de dimensión infinita y que se considerará pertenece a otro espacio X' denominado espacio de la sub-escala, de modo que el espacio total al cual pertenece la incógnita u sea $X = X_h + X'$.

Dividiendo (27) se obtiene una ecuación para la solución desconocida del problema u y otra para las funciones tests v , es decir:

$$u = u_h + u' \quad (28)$$

$$v = v_h + v' \quad (29)$$

Donde u_h y $v_h \in X_h$; u' y $v' \in X'$.

1.6.2.2 Aproximación general de formulación estabilizada de subescala

Consideremos la siguiente ecuación diferencial (Ernesto Castillo Del Barrio, 2016):

$$M(u) \frac{\partial u}{\partial t} + L(u, u) = \vec{f} \quad (30)$$

Donde $M(u)$ es la matriz de masa, $L(u, \cdot)$ es el operador no lineal asociado al problema específico y \vec{f} es un vector fuerza.

Escribiendo la ecuación diferencial anterior en su forma débil:

$$\left(M(u) \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \langle L(u, u), v \rangle = \langle \vec{f}, v \rangle \quad (31)$$

Donde v es una *función test*.

Descomponiendo en términos de elementos finitos y de subescalas al operador $L(u, \cdot)$:

$$L(u, u) = L(u, u_h + u') \quad (32)$$

Introduciendo este operador en la **ecuación (31)** realizando integración por partes y utilizando el operador adjunto ⁷, se obtiene:

$$\left(M(u) \frac{\partial u}{\partial t}, v_h \right) + \langle L(u, u_h), v_h \rangle + \langle u', L^*(u, v_h) \rangle = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in U_h \quad (33)$$

$$\left(M(u) \frac{\partial u}{\partial t}, v' \right) + \langle L(u, u_h), v' \rangle + \langle u', L^*(u, v') \rangle = \langle f, v' \rangle \quad \forall v' \in U' \quad (34)$$

La descomposición anterior nos permitirá, luego de algunas manipulaciones matemáticas y aproximaciones que incluyen integración por partes, escribir la sub-escala en función de la variable de elementos finitos, lo que nos dará como resultado un problema enriquecido finito que contenga sólo como incógnitas las del problema original discreto (Galerkin), como se muestra a continuación:

$$u' = P' \left[M(u) \frac{\partial u'}{\partial t} + L(u, u') \right] = P'[R_u]$$

Donde P' corresponde a un operador proyección que podría ser, por ejemplo, una proyección L_2 .

Se define R_u , que se denomina función residuo y que representa el residual de la aproximación por elementos finitos, como (R. Codina, S.Badia, J. Baige and J. Principe, 2004):

$$R_u = f - M(u) \frac{\partial u_h}{\partial t} - L(u, u_h)$$

Realizando la siguiente aproximación, conocida como aproximación algebraica de subescalas (Ernesto Castillo Del Barrio, 2016):

$$L(u, u') \approx \alpha^{-1}(u)u'$$

Donde α^{-1} es una matriz con términos estabilizadores.

Podemos llegar a escribir la incógnita de sub-escala en función de la variable de elementos finitos como se indica a continuación:

$$M(u_h + u') \frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha^{-1}(u_h + u')u' = P' \left[f - M(u_h + u') \frac{\partial u_h}{\partial t} - L(u_h + u', u_h) \right] \quad (35)$$

⁷ Operador adjunto se define de la siguiente forma:

$$\langle L(U, W), V \rangle = \langle W, L^*(U, V) \rangle$$

Tomando la matriz de la siguiente forma: $\alpha^{-1} = \text{diag}(\alpha_1 I_u, \alpha_2)$, donde I_u es la matriz de identidad de la velocidad, luego si la matriz de masa corresponde a la densidad ρ , entonces la ecuación (31):

$$\rho \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_1} u' = P'(R_u) \quad (36)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} p' = P'(R_p) \quad (37)$$

Dejando el problema de subescalas estático y tomando P' como una identidad I cuando se aplique al residual de elementos finitos (Ernesto Castillo Del Barrio, 2016), las ecuaciones (36) y (37) quedan:

$$u' = \alpha_1(R_u) \quad (38)$$

$$p' = \alpha_2(R_p) \quad (39)$$

Donde R_u corresponde al residuo de la ecuación de momentum y R_p al residuo de la ecuación de continuidad.

Considerando que la matriz de masa equivale a la densidad ρ , utilizando la **ecuación (26)** e incorporando los elementos estabilizadores a la **ecuación (33)**, se obtiene:

$$\left(M(u) \frac{\partial u}{\partial t}, v_h \right) + B(u, u_h) + \sum_K (L^*(u, v_h), \alpha R_u)_k = \langle f, v_h \rangle \quad (40)$$

Donde \sum_K es la suma de todos los elementos de la partición de elementos finitos, llevando este término al problema de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} & \sum_K (L^*(\mathbf{a}, v_h), \alpha R_u)_k \\ &= \int_K \begin{bmatrix} -\rho \mathbf{a} \cdot \nabla v_h - \mu \nabla^2 v_h - \nabla q_h \\ -\nabla \cdot v_h \end{bmatrix}^T \alpha \begin{bmatrix} f - (\rho \mathbf{a} \cdot \nabla u_h + \mu \nabla^2 u_h + \nabla p_h) \\ -\nabla \cdot u_h \end{bmatrix} dK \quad (41) \end{aligned}$$

Donde \mathbf{a} representa la velocidad de advección que ha sido introducida con la finalidad de linealizar el problema.

Para casos estacionario, la **ecuación (40)** queda de la siguiente forma:

$$B(u, u_h) + \sum_K (L^*(u, v_h), \alpha R_u)_k = \langle f, v_h \rangle$$

Capítulo 2: Validación de Método de Elementos Finitos Estabilizado

En este capítulo se realizará la validación del Método de Elementos Finitos Estabilizado que se utilizó en este trabajo, al cual nos referimos como Total Residual. Se realizaron simulaciones con el método descrito anteriormente en una geometría T bidimensional en el plano xy , cuyas dimensiones y condiciones de contorno utilizadas son las descritas en el trabajo *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation* de D. Liepsch, A.K. Rastogi, N.S.Vlachos (D. Liepsch, S. Moravec, A.K. Rastogi, N.S. Vlachos, 1982). En la primera parte de este capítulo se comparan las curvas de velocidad, obtenidas en las simulaciones, utilizando el modelo de fluido no-Newtoniano Ostwald-de Waele con las curvas de velocidad obtenidas analíticamente para este modelo. La segunda parte de este capítulo consiste en realizar simulaciones para tres números de Reynolds, los cuales son: 496, 515 y 1130, utilizando, para cada número de Reynolds dos mallas de diferentes tamaños; los resultados de las simulaciones se compararán con los resultados experimentales del trabajo *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation*.

2.1 Comparación con solución analítica

Para comprobar que los resultados de las simulaciones con el método descrito anteriormente aproximen la dinámica de fluidos Newtonianos y no-Newtonianos, se compararon curvas de velocidad obtenidas en las simulaciones utilizando el modelo de Ostwald-de Waele, en un canal bidimensional en el plano xy (**Figura 4**). Las dimensiones de esta geometría son las siguientes:

$$\text{Longitud brazo} = 0.15 \text{ (m)}$$

$$\text{Longitud característica } H = 0.01 \text{ (m)}$$

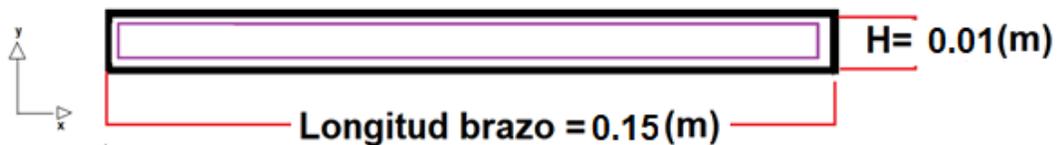


Figura 4. Geometría canal bidimensional utilizado en las simulaciones.

Como condición de borde, se impuso que las paredes estuvieran fijas y también se impuso que la salida del canal sea libre, para el estudio de la bifurcación natural de los fluidos no-Newtonianos.

Como condición de entrada en las simulaciones se ingresa un perfil de velocidad de Poiseuille bidimensional para fluido Newtoniano, el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$u_x(y) = u_o \left[1 - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right] \quad (41)$$

Donde:

- u_o corresponde a la velocidad máxima.
- L es la mitad de la longitud característica.

Se ingresa un perfil de velocidad de Poiseuille Newtoniano, ya que el método *Total Residual* resolverá la ecuación de Navier-Stokes, sin dependencia temporal, incorporando el modelo de caracterización Ostwald-de Waele para fluidos no-Newtonianos, por lo que sólo basta con ingresar los índices de potencias n e índice consistencia del fluido m para obtener en las salidas del canal perfiles de velocidad desarrollados según su carácter reológico.

Los resultados obtenidos en las simulaciones, que corresponden a las curvas de velocidad en la salida del canal de la **figura (4)**, se compararon con las curvas de velocidad obtenidas analíticamente, que se obtienen mediante el perfil de velocidad de Poiseuille para el modelo Ostwald-de Waele, para fluidos no-Newtonianos es estado estacionario e incompresible, el cual viene expresado en la siguiente ecuación:

$$u_x(r) = \frac{2n+1}{n+1} u \left[1 - \left(\frac{y}{L} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (42)$$

Donde:

- $u = \left(\frac{1}{2m} \frac{dp}{dz} r_o \right)^{\frac{1}{n}} r_o$ corresponde a la velocidad media.
- El término $\frac{2n+1}{n+1} u$ corresponde a la velocidad máxima.
- n es el índice de potencia.

Resultados

Utilizando la **ecuación (42)** se obtuvieron curvas de perfil de velocidad de forma analítica del modelo Ostwald-de Waele, para diferentes índices de potencias. Los índices de potencia n utilizados fueron: 0.5, 1.25 y 1.75.

Los valores utilizados de H y velocidad media serán los mostrados en el trabajo *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation*, donde el valor de H es igual a $0.01(m)$ y el valor de velocidad media es $u = 0.010 \left(\frac{m}{s} \right)$. Estos valores, al igual que la **ecuación (41)**, se ingresaron en Matlab, para así obtener la curva analítica de los perfiles de velocidad.

A continuación, se muestran las curvas de velocidad u_x obtenidas analíticamente, comparados con las curvas obtenidas numéricamente:

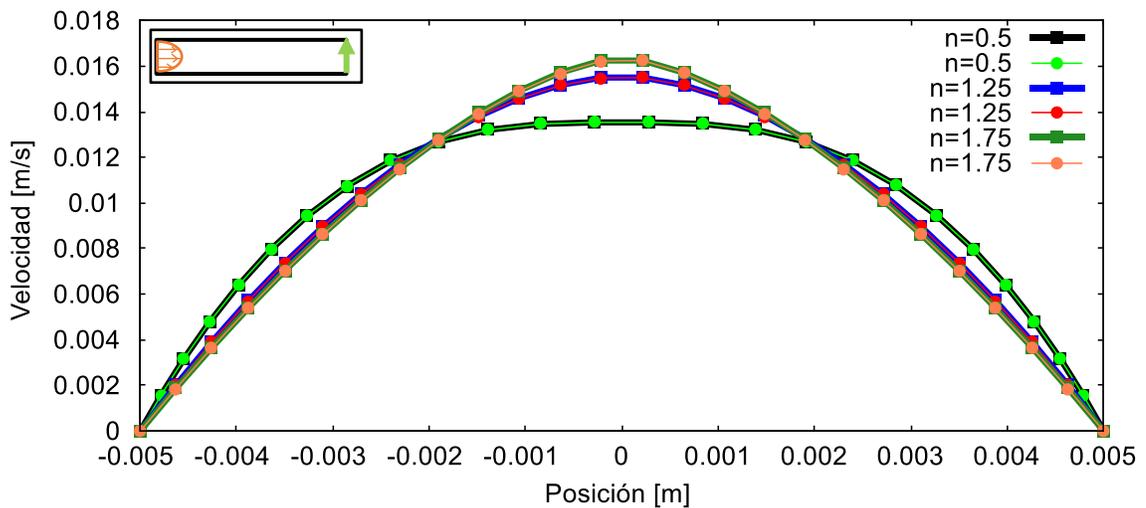


Figura 5. Comparación de perfiles de velocidad analítica con perfiles de velocidad numérica para el modelo Ostwald-de Waele. Las curvas de color negro, azul y verde oscuro corresponden a perfiles de velocidad analítica (simbología cuadrados) y las de color verde claro, rojo y coral a perfiles de velocidad numérica (simbología círculos).

Se puede observar de la **figura (5)** que las curvas de velocidad obtenidas analíticamente (curva de color negra para $n=0.5$, azul para $n=1.25$ y verde oscuro para $n=1.75$) se solapan en los tres casos con las curvas de velocidad obtenidas numéricamente en el canal para fluidos no-Newtoniano, ya sea pseudoplástico o dilatante.

Esto indica que aun cuando se haya ingresado como condición de entrada un perfil de velocidad Newtoniano del flujo de Poiseuille, el fluido se logra desarrollar adecuadamente como fluido no-Newtoniano, esto se debe a que el método estabilizado de elementos finitos utilizado resuelve la ecuación de Navier-Stokes incorporando el modelo de caracterización Ostwald-de Waele para fluidos no-Newtonianos, por lo que sólo basta con ingresar los índices de potencias y de consistencia del fluido.

2.2 Comparación con resultados experimentales

En esta segunda parte del capítulo 2 se compararán los resultados obtenidos numéricamente con el trabajo de Liepsch, Rastogi y Vlachos, *Measurement and calculations of laminar flow in a ninety degree bifurcation*, el cual consiste en un trabajo experimental y numérico; en este trabajo los autores estudiaron la influencia del número de Reynolds en el campo de velocidad en una geometría tipo T en el plano xy , donde se impone un flujo volumétrico entrante $Q_{entrada}$ por uno

de los brazos de la T y se impone un radio $\frac{Q_{\text{brazo principal}}}{Q_{\text{entrada}}}$ y $\frac{Q_{\text{brazo secundario}}}{Q_{\text{entrada}}}$ en la salida del brazo principal y secundario, respectivamente.

Los autores estudiaron el comportamiento de un fluido Newtoniano para los siguientes números de Reynolds: 250, 496, 515, 525, 1062, 1127 y 1130. En la siguiente tabla se muestra el tipo de estudio realizado en el trabajo mencionado:

Reynolds	$\frac{Q_{\text{brazo secundario}}}{Q_{\text{entrada}}}$	Estudio
496	0.44	Experimental y teórico
515	0.23	Experimental y teórico
525	0.64	Experimental y teórico
1062	0.58	Sólo experimental
1127	0.38	Sólo experimental
1130	0.23	Experimental y teórico

Tabla 1. Parámetros estudiados en el trabajo de Liepsch, Rastogi y Vlachos.

En la tabla anterior se puede observar que sólo para algunos números de Reynolds se hace un estudio experimental y teórico. Con teórico, los autores se refieren a una investigación numérica del problema. El estudio numérico se realiza con el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, a diferencia de este trabajo dónde el problema de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos y No-Newtonianos se resolverá con un método de elementos finitos estabilizada, como se vio en el capítulo anterior.

Como el método numérico utilizado en el trabajo mencionado no es el mismo método que se utilizará en esta tesis, sólo se compararán los resultados experimentales mostrados en el trabajo de Liepsch, Rastogi y Vlachos con los resultados de las simulaciones obtenidas por el método de elementos finitos estabilizado, para los números de Reynolds: 496, 515 y 1130, con sus respectivas ratios de flujo volumétrico en las salidas de la geometría T, bajo las mismas condiciones de entrada y de contorno.

Se escogieron estos tres números de Reynolds, ya que, en el trabajo *Measurement and calculations of laminar flow in a ninety degree bifurcation* publicado sólo se muestran curvas de perfil de velocidad $u(y)$ para estos números de Reynolds, por lo que sólo se podrá comparar con estos resultados experimentales.

2.2.1 Geometría

La geometría utilizada corresponde a una T bidimensional en el plano xy . Las dimensiones de esta geometría son las mismas que se detalla en el trabajo mencionado, las cuales son las siguientes:

$$L_{entrada} = L_{brazo\ principal} = L_{brazo\ secundario} = 0.15\ (m)$$

$$Longitud\ caract\erística\ H = 0.01\ (m)$$

Las salidas del flujo de la geometría bidimensional corresponden a la salida del brazo principal y del brazo secundario, como se puede observar en la **figura (6)**.

Una vez creada la geometría en GID se escoge el *problem-type*: FEMUSS⁸; en este problema-type se encuentra el código escrito con el Método Estabilizado de Elementos Finitos: *Total residual*.

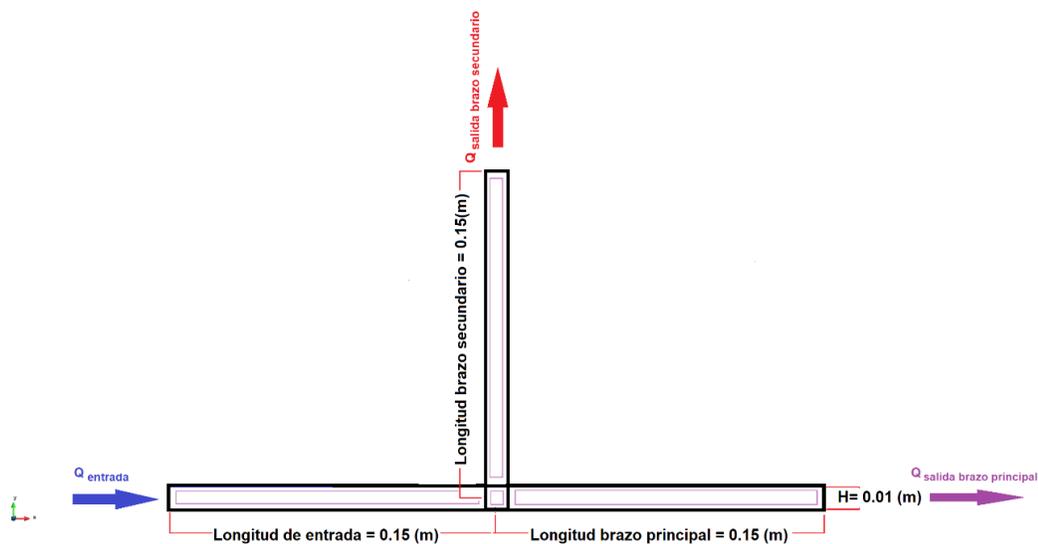


Figura 6. Geometría T bidimensional en el plano xy . Las dimensiones de la geometría corresponden a las descritas en el trabajo *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation* de D. Liepsch, A.K. Rastogi, N.S. Vlachos.

⁸ FEMUSS es un código escrito en FORTRAN que contiene el Método Estabilizado de Elementos Finitos: *Total residual*, con el cual se resolverá numéricamente todos los problemas de este trabajo.

2.2.2 Características del problema

El tipo de fluido que se utiliza en el trabajo de Liepsch, Rastogi y Vlachos es agua destilada, el cual es un fluido Newtoniano, por lo que numéricamente se resolverá la ecuación de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos y la ecuación de continuidad, con independencia temporal. Como se explicó anteriormente, se realizarán simulaciones para tres números de Reynolds: 496, 515 y 1130, por lo que utilizando la siguiente ecuación, que corresponde al número de Reynolds para fluido Newtoniano, se despejó el valor de la viscosidad dinámica, para cada número de Reynolds, el cual será ingresado en las simulaciones:

$$Re = \frac{\rho u H}{\mu} \quad (43)$$

Donde ρ es la densidad, u es la velocidad promedio, H es la longitud característica y μ es la viscosidad dinámica.

Los valores de densidad y velocidad media utilizada en el trabajo mencionado son igual a $\rho = 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ y $u = 0.01 \left(\frac{m}{s}\right)$, respectivamente, por lo que se ingresarán estos valores en GID.

Ingresando los valores de densidad, longitud característica, número de Reynolds y velocidad promedio en la **ecuación (43)**, se despeja el valor de la viscosidad dinámica para cada número de Reynolds, los cuales se muestran en la **tabla (2)**:

Re	$\mu (Pa s)$
496	0.000202
515	0.000194
1130	0.000089

Tabla 2. Viscosidad dinámica calculada para cada número de Reynolds.

2.2.3 Condiciones de borde

- Las paredes de la geometría T deben estar fijas, es decir, su velocidad debe ser nula.
- Los puntos de toda la geometría también deben estar fijos, por lo que su velocidad también debe ser nula.

Condición de entrada:

Como condición de entrada se ingresa el perfil de velocidad de Poiseuille para fluido Newtoniano en la coordenada \hat{x} :

$$u(y) = 0.015 \left(1 - \left(\frac{y}{0.005} \right)^2 \right) \hat{x}$$

Donde la velocidad máxima de entrada es igual a $u_0 = 0.015 \left(\frac{m}{s}\right)$. Se escogió el mismo valor de velocidad máxima que en el trabajo de Liepsch, Rastogi y Vlachos, para tener una igualdad en la condición de entrada y así poder comparar los resultados.

Condición en las salidas

Se imponen condiciones de borde en las dos salidas de la T que corresponden a las condiciones de borde que aparecen en el trabajo de *Liepsch, Rastogi y Vlachos*. Estas condiciones corresponden a un radio entre el flujo de salida del $Q_{brazo\ secundario}$ y el flujo de entrada $Q_{entrada}$. En el trabajo, describen los radios $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ según para cada número de Reynolds, estos valores, los cuales se muestran en la **tabla (3)**, se ingresaron en la salida del brazo secundario.

Reynolds	$\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$	$u_0 \hat{x} \left(\frac{m}{s}\right)$
496	0.44	0.015
515	0.23	0.015
1130	0.23	0.015

Tabla 3. Valores de $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ y de velocidad máxima $u_0 \hat{x} \left(\frac{m}{s}\right)$. Estos valores se imponen en la salida del brazo secundario y en el brazo de entrada de la geometría T.

Conociendo los valores de la relación $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ en los tres Reynolds, es posible hallar los valores de la relación $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$. Como no hay pérdida de masa en el problema, es posible escribir lo siguiente:

$$Q_{entrada} = Q_{salida\ brazo\ principal} + Q_{salida\ brazo\ secundario}$$

Dividiendo la ecuación anterior por $Q_{entrada}$:

$$1 = \frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}} + \frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$$

Luego:

$$\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}} = 1 - \frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$$

Como se conocen los valores de $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ (**tabla 3**), con la relación anterior, se podrá hallar el radio $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$, los cuales se ingresaron en la salida del brazo principal, para su número de Reynolds correspondiente, como se muestra en la **tabla (4)**:

Reynolds	$\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$
496	0.56
515	0.77
1130	0.77

Tabla 4. Valores de $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ calculados. Estos valores se imponen en la salida del brazo principal de la geometría T.

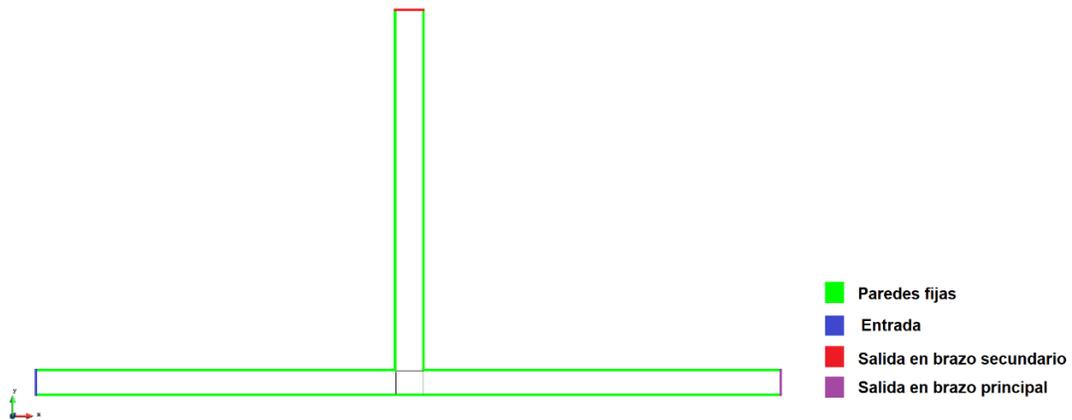


Figura 7. Geometría T con condiciones de contorno.

2.2.4 Mallado

Se utilizaron dos tipos de malla para cada número de Reynolds. La diferencia entre la malla 1 y malla 2 fue el tamaño de los elementos. El tamaño de los elementos en las dos mallas utilizadas se muestra en la **tabla (5)** junto el número total de elementos. Se utilizó malla estructurada con el fin de captar mejor la zona de bifurcación de la T.

Malla	Tamaño de elementos en malla estructurada	Número de elementos
1	0.00010	445.00
2	0.00021	101.664

Tabla 5. Tamaño de elementos de mallas estructuradas utilizadas junto con el número total de elementos.

Se observa de la tabla anterior que el número de elementos de la malla 2 es mucho menor que el número de elementos de la malla 1.

Luego que la malla y las condiciones de bordes ya se han ingresadas, en el código de FEMUSS se selecciona el método de resolución de las ecuaciones dominantes: Método directo, con 100 iteraciones. Finalmente se selecciona la opción *Calcular* para comenzar la simulación.

2.2.5 Resultados

En el trabajo *Measurement and calculations of laminar flow in a ninety degree bifurcation* se muestran gráficos de perfiles de velocidad normalizada por la velocidad media $\frac{u(y)}{u}$ en función de la variación vertical del brazo principal normalizada por la longitud característica $\frac{y}{H}$, en diferentes puntos en la geometría T desde el brazo de entrada hacia el brazo principal de la T; para los números de Reynolds 496,515 y 1130, por lo que se obtuvieron estos mismos gráficos en diferentes puntos de la geometría T, para las dos mallas utilizadas, con el fin de compararlos con los resultados experimentales.

A continuación, se muestran los gráficos de $\frac{u(y)}{u}$ versus $\frac{y}{H}$, obtenidos en las simulaciones con las dos mallas utilizadas para los números de Reynolds 496, 515 y 1130 en los puntos $(-0.005, -0.005) [m]$ y $(-0.005, 0.005)[m]$.

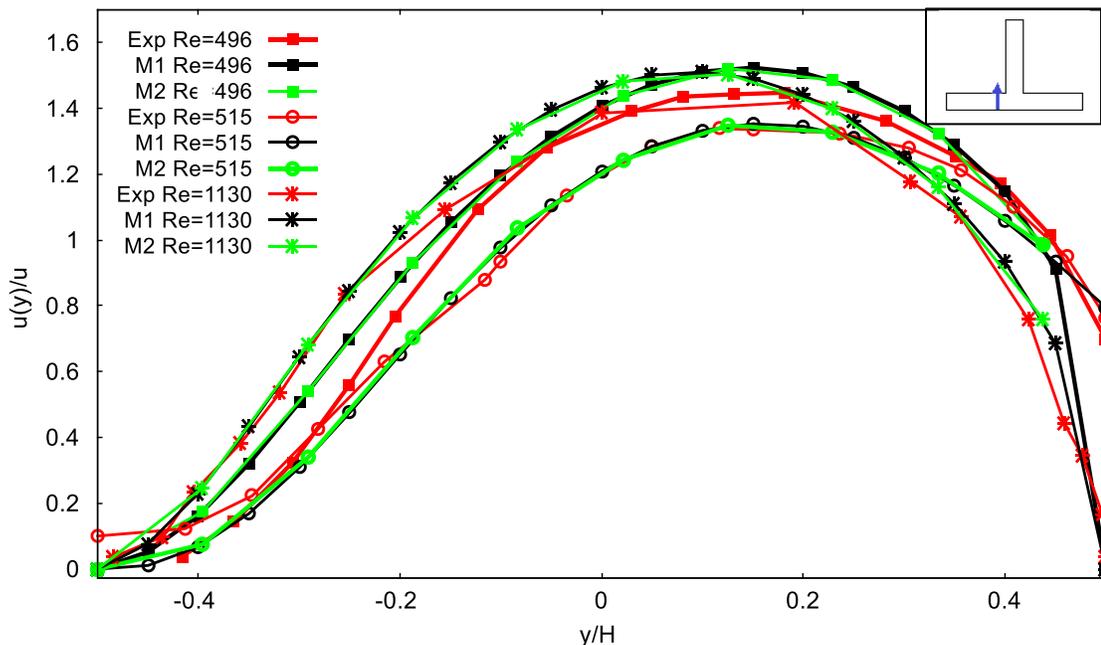


Figura 8. Comparación de perfiles de velocidad normalizada de resultados experimentales Exp (curva de color roja) con resultados numéricos M1 (curva de color negra) y M2 (curva de color verde), donde M1 corresponde a la malla 1 y M2 a la malla 2.

Se puede observar de la figura anterior que los resultados de las dos mallas utilizadas se solapan (curvas de color negro y verde), esto indica que no hay diferencia en los resultados del desarrollo

del perfil de velocidad $u(y)$ si se utiliza la malla 1 o 2, por lo que hay una convergencia en malla, es decir, si se utiliza una malla con elementos más pequeños los resultados numéricos que se han de obtener serán los mismos.

La figura anterior corresponde a un punto anterior a la bifurcación en la geometría T, por lo que ahora se mostrarán curvas $\frac{u(y)}{u}$ versus $\frac{y}{H}$ en $(0.0025, -0.5)$, $(0.0025, 0.5)$, que corresponde a un punto posterior a la bifurcación:

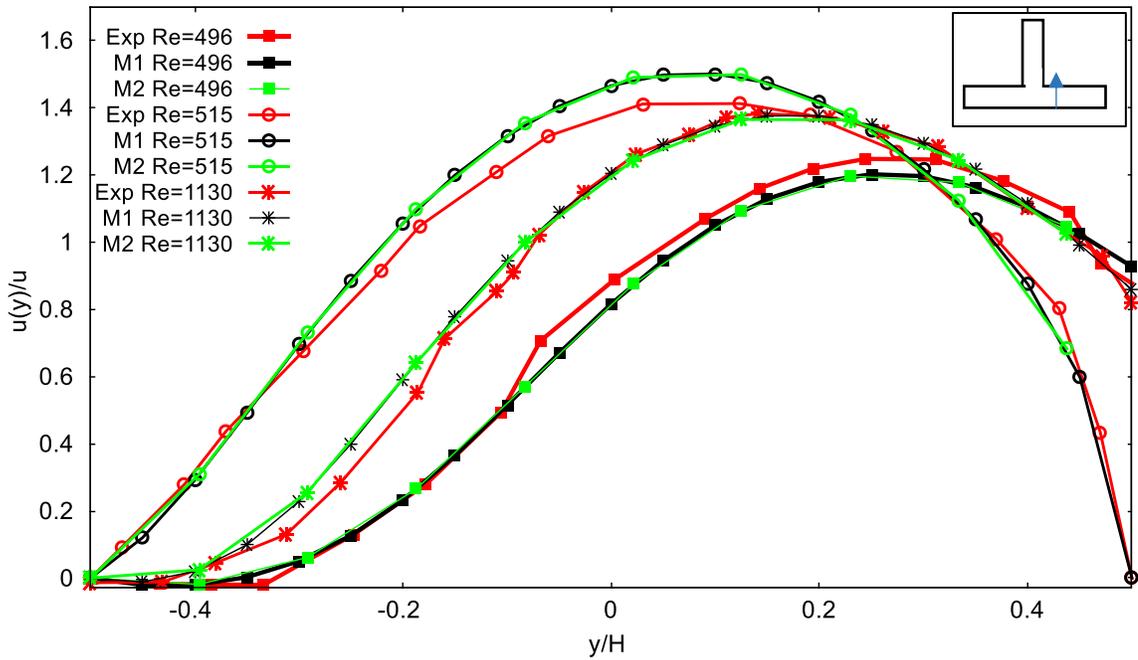


Figura 9. Comparación de perfiles de velocidad normalizada de resultados experimentales Exp (curva de color roja) con resultados numéricos M1 (curva de color negra) y M2 (curva de color verde), donde M1 corresponde a la malla 1 y M2 a la malla 2.

Nuevamente se observa que en los otros puntos graficados las curvas de perfil de velocidad normalizada se solapan en las dos mallas, para los tres números de Reynolds; además se observa que los perfiles de velocidad son muy cercanos a las curvas experimentales mostradas en el trabajo *Measurement and calculations of laminar flow in a ninety degree bifurcation* (curvas de color rojo). Las diferencias se deben a que la geometría utilizada fue bidimensional; en cambio la geometría que utilizaron en el estudio experimental fue tridimensional.

También cabe mencionar que en todos los casos las iteraciones que se requirieron en las simulaciones para que convergieran las soluciones del campo de velocidad, utilizando la malla 2 fueron menores que el número de iteraciones que se requirieron con la malla 1. Además, con las dos mallas, el error en norma L_2 de las velocidades en todos los casos fue de 10^{-6} .

2.3 Conclusión

Se concluye que las curvas de velocidad obtenidas numéricamente se solapan con las curvas de velocidad obtenidas analíticamente para fluidos no-Newtonianos utilizando el modelo Ostwald-de Waele para fluidos no-Newtonianos incompresible y en estado estacionario, por lo que el método numérico utilizado resuelve correctamente este tipo de problema. Además, es posible resolver numéricamente con el método mencionado, utilizando el modelo Ostwald-de Waele, problemas más complejos, como fluidos no-Newtonianos con dependencia temporal.

Además, se concluye de la comparación con resultados experimentales, que es posible utilizar una malla con menor cantidad de elementos en la geometría T sin que influya en el resultado. Esto es conveniente, ya que el proceso es más eficiente en cuanto al tiempo de la simulación, que si se utiliza una malla con mayor cantidad de elementos.

La velocidad residual registrada en cada simulación en los tres números de Reynolds, con las dos mallas, fue del orden 10^{-6} , esto indica que la diferencia de las soluciones de velocidad entre la iteración anterior y la actual es del orden 10^{-6} , lo cual implica que las soluciones convergen adecuadamente.

Capítulo 3: Caracterización de flujo de fluidos no-Newtonianos en salidas de geometría T

El estudio de las bifurcaciones de flujo en las geometrías T son de gran importancia en ingeniería y en bio-ingeniería. En ingeniería, canales con estos tipos de geometría son utilizados para el transporte de líquidos y gases, para la irrigación de sistemas, tratamiento de aguas residuales, conducción de agua en confluencias, entre otras áreas (Vinit Khandelwal, Amit Dhiman, László Baranyi, 2014). En estos casos la hidrodinámica en los canales es controlada por diversas variables: el número de canales, el ángulo de confluencia o flujo de descarga de los canales.

Debido a la importancia de estas geometrías y a los diversos usos de éstas en el campo de la ingeniería, es que el objetivo de este capítulo es caracterizar diferentes tipos de flujos de fluidos no-Newtonianos del tipo Ostwald de-Waele en un amplio rango de índices de potencia [0.25 - 1.75], en un rango de número de Reynolds [50-1000]. Lo anterior para poder entender el efecto de las propiedades reológicas del fluido en la dinámica desarrollada y en específico, en la bifurcación del flujo entre las dos ramas de la geometría T.

En este capítulo se resolverá numéricamente con el método estabilizado de elementos finitos *Total Residual* la ecuación de Navier-Stokes para una geometría T usando el método de caracterización de fluidos no-Newtonianos Ostwald- de Waele en el rango de índices de potencia mencionado en el párrafo anterior, pasando por fluidos pseudoplásticos, Newtonianos y dilatantes.

3.1 Geometría

La geometría creada corresponde a una T bidimensional en el plano xy , como lo que se mostró en la **figura (6)**. Para las dimensiones de la geometría de la T se siguió la recomendación de H.M. Matos, P.J.Oliveira en el trabajo *Steady and unsteady non-Newtonian inelastic flows in a planar T-junction* (H.M. Matos, P.J. Oliveira, 2013), donde las longitudes de los brazos (principal y secundario) deben garantizar el completo desarrollo del perfil de velocidad del fluido en las dos salidas de la T. Las longitudes de los brazos de las salidas utilizadas en el trabajo *Steady and unsteady non-Newtonian inelastic flows in a planar fue* $L_{brazo\ principal} = L_{brazo\ secundario} = 59.5H$ para números de Reynolds cercanos a 1000, para así asegurar el completo desarrollo del fluido no-Newtoniano y que las condiciones de borde en las salidas no afectara al desarrollo del fluido. En el trabajo mencionado se imponen ratios de flujos en las salidas de los dos brazos. Sin embargo, en este trabajo, como condición de contorno en las salidas de los brazos, se impondrán que las salidas sean libres, para el estudio de la bifurcación natural de los fluidos no-Newtonianos.

En este trabajo bastará con las siguientes longitudes de los brazos:

$$L_{entrada} = L_{brazo\ principal} = L_{brazo\ secundario} = 30H$$

Con $H = 1$.

3.2 Características del problema.

El problema que se resolverá numéricamente son las ecuaciones de Navier-Stokes de dos campos para fluidos no-Newtonianos utilizando el método de Ostwald de-Waele. Para la resolución, se debe introducir los valores de índice de potencia n e índice de consistencia m para cada número de Reynolds del rango [50-1000], los cuales varían cada 50.

Los valores de índice de potencia n van en un rango de [0.25 – 1.75], cada 0.25; es decir, el primer índice de potencia utilizado será 0.25, el segundo 0.5, así sucesivamente hasta llegar a 1.75. Esto se realiza para cada uno de los números de Reynolds.

Para obtener el valor de índice de consistencia m respectivo a cada número de Reynolds, se utiliza la siguiente ecuación:

$$m = \frac{\rho u^{2-n} L^n}{Re}$$

Donde se imponen los siguientes valores, que se mantienen constantes en todos los casos:

$$(I) \quad \rho = 1 \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$$

$$(II) \quad u = 1 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$(III) \quad L = H = 1 (m)$$

Introduciendo los valores de (I), (II) y (III), el cálculo del índice de consistencia será mucho más simple y éste será:

$$m = \frac{1}{Re} \quad (44)$$

El primer caso que se realizó fue para el número de Reynolds igual a 50 e índice de potencia $n = 0.25$, luego usando la **ecuación (44)** se obtiene un índice de consistencia $m = 0.02 [Pa s^n]$. Usando el mismo procedimiento se fijan los valores para los otros casos.

3.3 Condiciones de contorno.

Condición de entrada:

- (1) Se ingresó un perfil de velocidad Flujo de Poiseuille para fluidos Newtonianos que garantiza una velocidad media de valor unitaria, $\vec{u}(x, y) = (u_x(y), 0)$:

$$u_{x \text{ entrada}}(y) = 1.5 \left(1 - \frac{y^2}{0.25} \right)$$

Como se explicó en la **sección (2.1)**, aun cuando se ingresa una condición de entrada de velocidad Newtoniano, el perfil de velocidad se desarrollará adecuadamente antes de la bifurcación según la naturaleza del fluido (pseudoplástico, Newtoniano o dilatante), ya que los brazos de la T tienen la longitud suficiente para que el perfil de velocidad se desarrolle.

Las otras condiciones de contorno son:

- (1) Las paredes de la geometría T deben configurarse como no deslizantes, es decir, su velocidad debe ser nula.
- (2) Los vértices de la geometría también deben estar fijas, por lo que su velocidad también debe ser nula.
- (3) En las líneas que definen las dos salidas de la geometría T se impone como condición de contorno que la velocidad normal a las paredes de la T sea libre, mientras que la velocidad tangencial a dichas líneas sea nula.

3.4 Mallado

La malla utilizada fue estructurada, el tipo de elementos fue cuadriláteros y sus tamaños de 0.04, el total de elementos fue de 96.339. En la zona central de la T se concentraron los elementos de la malla para poder captar mejor la bifurcación producida en esa zona.

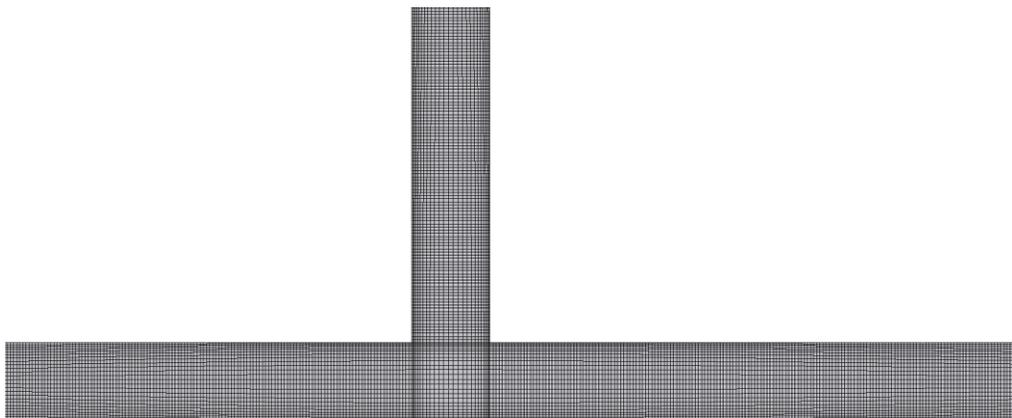


Figura 10. Geometría T bidimensional mallada con 96.339 elementos estructurados.

Luego de que la malla y las condiciones de bordes ya se han ingresadas, en el código de FEMUSS se selecciona el método de resolución de las ecuaciones dominantes: Método directo, con 100 iteraciones. Finalmente se selecciona la opción *Calcular* para comenzar la simulación.

3.5 Resultados

Una vez finalizada la simulación, se escoge la opción de líneas de contorno de la velocidad. Para verificar que el perfil de velocidad se desarrolle en todos los casos (140 casos en total, 20 números de Reynolds, dónde para cada número de Reynolds hay 7 índices de potencias) se grafican las líneas de contorno del perfil de velocidad en la entrada y en las dos salidas, en las coordenadas que se muestran en la **tabla (6)**:

Perfiles de velocidad graficados	Puntos graficados
<i>Perfil de Velocidad en la entrada.</i>	<i>Punto 1: (-30, -0.5) y (-30, 0.5)</i>
<i>Perfil Velocidad salida brazo principal.</i>	<i>Punto 2: (30, -0.5) y (30, 0.5)</i>
<i>Perfil Velocidad salida brazo secundario.</i>	<i>Punto 3: (-0.5, 30) y (0.5, 30)</i>

Tabla 6. Perfiles de velocidad graficados con sus respectivas coordenadas del plano *xy*.

Haciendo uso de la Ley de conservación de Masa para un fluido incompresible, donde la suma de los dos flujos volumétricos de las salidas debe ser igual al flujo volumétrico de la entrada, se verifica el correcto funcionamiento del programa usado, es decir:

$$Q_{entrada} = Q_{salida\ brazo\ principal} + Q_{salida\ brazo\ secundario} \quad (43)$$

Desarrollando la ecuación (43) para la geometría bidimensional en el plano *xy*:

$$\int_{-0.5}^{0.5} u_{x\ entrada}(y) y dy = \int_{-0.5}^{0.5} u_{brazo\ principal}(y) y dy + \int_{-0.5}^{0.5} u_{brazo\ secundario}(x) x dx \quad (44)$$

Para la obtención de $Q_{entrada}$, se graficó el perfil de velocidad en la entrada de la geometría T, que corresponde al *Punto 1*:

$$Q_{entrada} = \int_{-0.5}^{0.5} u_{x\ entrada}(y) y dy = 0.9984 \left(\frac{m^3}{s} \right) \quad (45)$$

Se obtuvo los perfiles de velocidad en la salida del brazo principal y secundario, para poder calcular $Q_{salida\ brazo\ principal}$ y $Q_{salida\ brazo\ secundario}$. Luego, se comprobó que se cumpliera la **ecuación (43)** para cada número de Reynolds. En las **tablas (5), (6) y (7)** se muestran los resultados de $Q_{salida\ brazo\ principal}$ y $Q_{salida\ brazo\ secundario}$, correspondiente a tres números de Reynolds: 50, 500 y 1000; cada uno con los resultados obtenidos para cada índice de potencia.

Re=50				
n	$Q_{entrada} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{salida\ brazo\ principal} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{salida\ brazo\ secundario} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{suma} \left(\frac{m^3}{s} \right)$
0.25	0.9984	0.3931	0.6053	0.9984
0.5	0.9984	0.4466	0.5518	0.9984
0.75	0.9984	0.5345	0.4639	0.9984
1.00	0.9984	0.5258	0.4726	0.9984
1.25	0.9984	0.5202	0.4782	0.9984
1.5	0.9984	0.5162	0.4822	0.9984
1.75	0.9984	0.5131	0.4853	0.9984

Tabla 7. Flujo volumétrico calculado en la salida del brazo principal de la T, $Q_{salida\ brazo\ principal}$, y en la salida del brazo secundario de la T, $Q_{salida\ brazo\ secundario}$, para cada índice de potencia n de Re=50, donde Q_{suma} corresponde a la suma de ambos. $Q_{entrada}$ es el caudal volumétrico en la entrada de la T.

Re=500				
n	$Q_{entrada} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{salida\ brazo\ principal} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{salida\ brazo\ secundario} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{suma} \left(\frac{m^3}{s} \right)$
0.25	0.9984	0.9119	0.0865	0.9984
0.5	0.9984	0.8287	0.1697	0.9984
0.75	0.9984	0.7729	0.2255	0.9984
1.00	0.9984	0.7239	0.2745	0.9984
1.25	0.9984	0.6811	0.3173	0.9984
1.5	0.9984	0.6467	0.3517	0.9984
1.75	0.9984	0.6206	0.3778	0.9984

Tabla 8. Flujo volumétrico calculado en la salida del brazo principal de la T, $Q_{salida\ brazo\ principal}$, y en la salida del brazo secundario de la T, $Q_{salida\ brazo\ secundario}$, para cada índice de potencia n de Re=500, donde Q_{suma} corresponde a la suma de ambos. $Q_{entrada}$ es el caudal volumétrico en la entrada de la T.

Re=1000				
n	$Q_{entrada} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{salida\ brazo\ principal} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{salida\ brazo\ secundario} \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$Q_{suma} \left(\frac{m^3}{s} \right)$
0.25	0.9984	0.9735	0.0249	0.9984
0.5	0.9984	0.9254	0.0730	0.9984
0.75	0.9984	0.8818	0.1166	0.9984
1.00	0.9984	0.8425	0.1559	0.9984
1.25	0.9984	0.8028	0.1956	0.9984
1.5	0.9984	0.7613	0.2371	0.9984
1.75	0.9984	0.7209	0.2775	0.9984

Tabla 9. Flujo volumétrico calculado en la salida del brazo principal de la T, $Q_{salida\ brazo\ principal}$, y en la salida del brazo secundario de la T, $Q_{salida\ brazo\ secundario}$, para cada índice de potencia n de Re=1000, donde Q_{suma} corresponde a la suma de ambos. $Q_{entrada}$ es el caudal volumétrico en la entrada de la T.

Como se observa de las tablas anteriores, en cada caso, la suma de $Q_{salida\ brazo\ principal} + Q_{salida\ brazo\ secundario}$ es igual a $0.9984 \left(\frac{m^3}{s}\right)$, valor que corresponde al caudal de entrada $Q_{entrada}$. Por lo tanto, los perfiles de velocidad se logran desarrollar completamente en las dos salidas para todos los números de Reynolds con los diferentes índices de potencias, por lo que las longitudes de los brazos $L_{brazo\ principal} = L_{brazo\ secundario} = 30(m)$ es suficiente.

Se graficaron los perfiles de velocidad en las salidas de la T para el comportamiento pseudoplástico y dilatante, específicamente para los índices de potencias 0.25 y 1.75 para cada número de Reynolds. A continuación, se muestran perfiles de velocidades de salida del brazo principal y salida del brazo secundario versus H , con sus respectivos gráficos de viscosidad. Los gráficos que se mostrarán corresponden a los números de Reynolds 100 y 500.

Re=100:

A) Pseudoplástico $n=0.25$

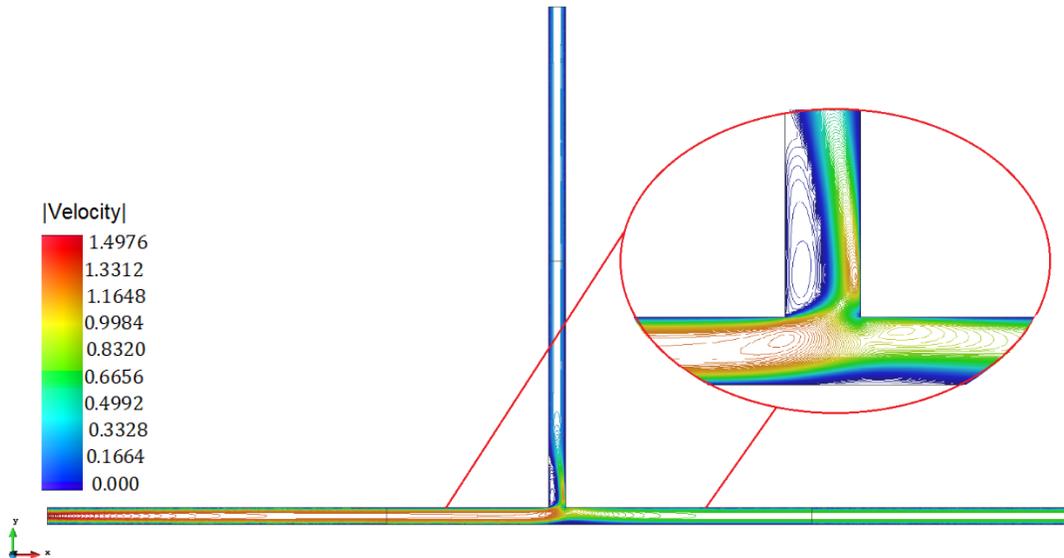


Figura 11. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=100$ e índice de potencia $n=0.25$.

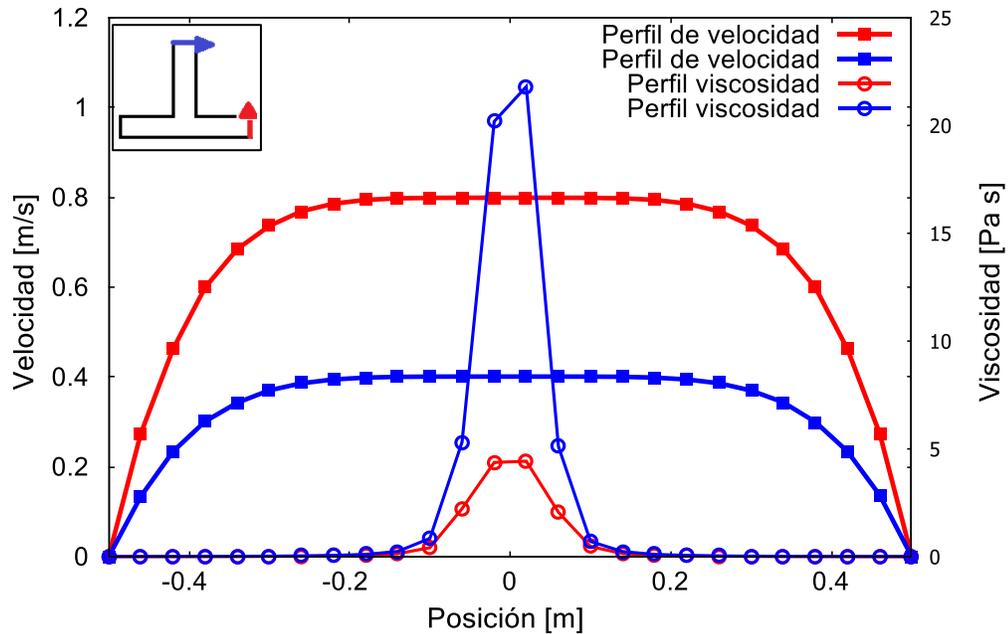


Figura 12. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal (curvas de color rojo) y brazo secundario (curvas de color azul) para $Re=100$ e índice de potencia $n=0.25$.

En la **figura (12)** se muestran los perfiles de salidas de la velocidad para cada brazo de la geometría T: La curva de color roja corresponde al perfil de velocidad en la salida del brazo principal y la curva de color azul al perfil de velocidad en la salida del brazo secundario. Se observa que, en la salida del brazo principal, el perfil de velocidad alcanza mayor amplitud que en el brazo secundario, dando como resultado un mayor gradiente de velocidad en la rama principal, por lo al ser un fluido no-Newtoniano, se gatilla un comportamiento pseudoplástico con mayor pronunciación en la rama secundaria, lo cual se evidencia en los perfiles de viscosidades de la **figura (12)**, ya que la amplitud del perfil de viscosidad en la salida de este brazo es mucho mayor ($20 Pa s^n$) que la amplitud del perfil de viscosidad en la salida del brazo principal ($5 Pa s^n$). La forma del perfil de viscosidad ayuda a entender la forma que adquiere el perfil de velocidad para un fluido *pseudoplástico*; la viscosidad al alcanzar el máximo se mantiene constante en su *peak*, esto genera que la velocidad se mantenga constante en el máximo, produciéndose una “zona tapón” en ese punto, asemejando a un cuerpo rígido sin deformación donde los elementos de éste se mueven todos a una misma velocidad, comportamiento esperado de un plástico.

La relación que hay entre el perfil de velocidad y viscosidad se debe al *comportamiento pseudoplástico* del fluido: A medida que se tiene mayor gradiente de velocidad (salida principal de la T) menor es su viscosidad, como lo que ocurre en la salida del brazo principal, donde la viscosidad máxima alcanzada es de $5 (Pa s^n)$, en cambio si hay un menor gradiente de velocidad, mayor es su viscosidad, que es el caso de la salida del brazo secundario de la T, donde la viscosidad máxima alcanzada es de $20 (Pa s^n)$.

B) Dilatante $n=1.75$:

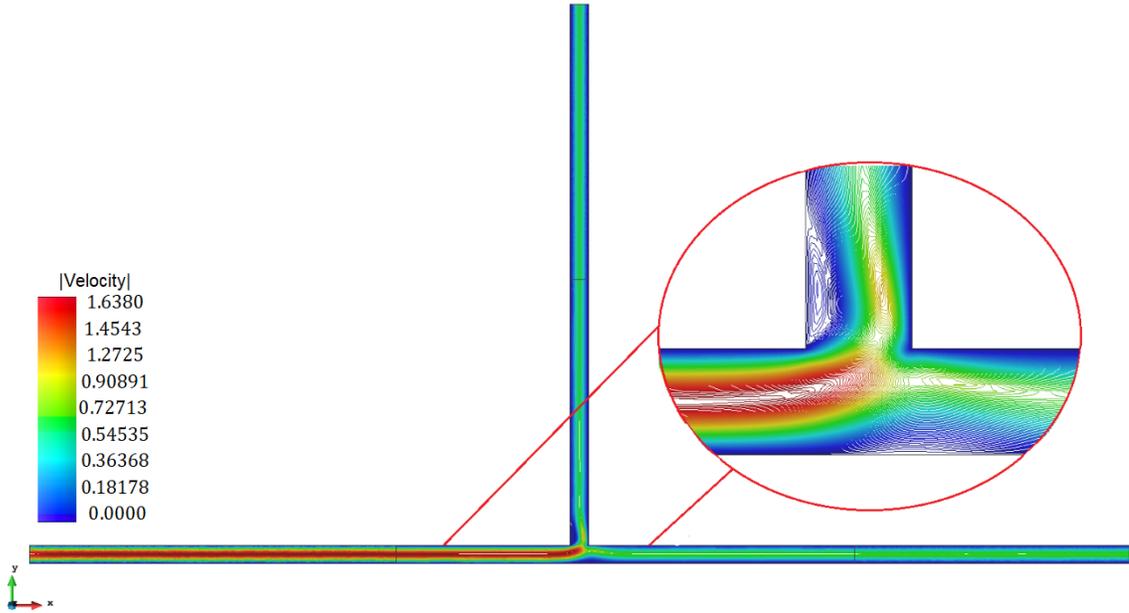


Figura 13. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=100$ e índice de potencia $n=1.75$.

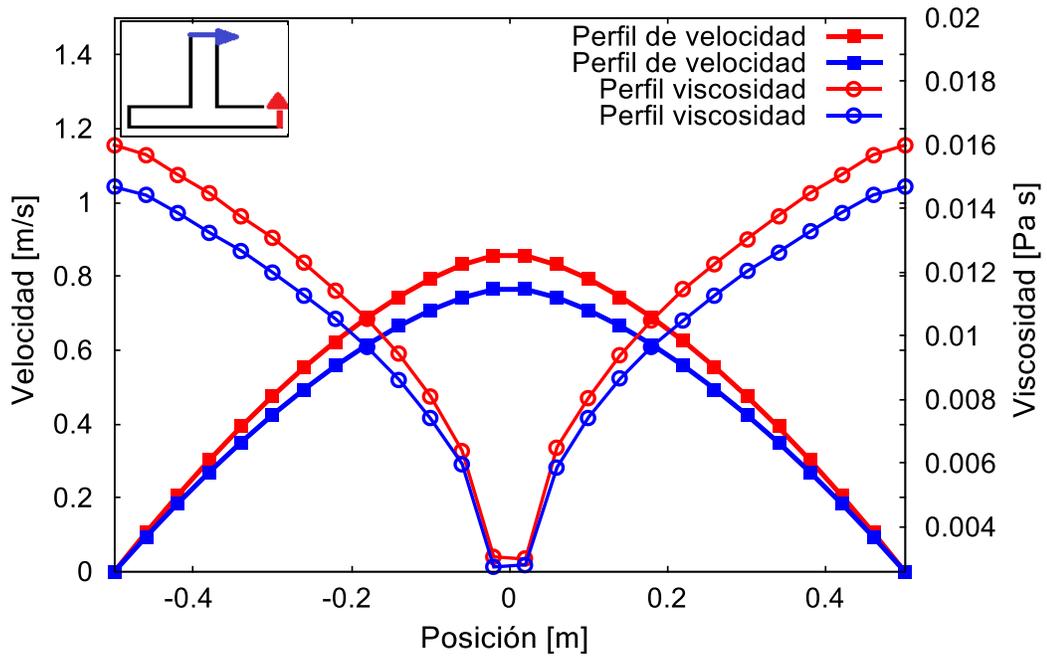


Figura 14. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal (curvas de color rojo) y brazo secundario (curvas de color azul) para $Re=100$ e índice de potencia $n=1.75$.

En la **figura (14)** se muestran los perfiles de velocidad en las salidas en cada brazo de la geometría T, para un fluido dilatante. Se observa que las amplitudes de los perfiles de velocidad son similares, sin embargo, el perfil de velocidad de la salida del brazo principal logra tener una mayor amplitud en comparación a la amplitud del perfil de velocidad de salida en el brazo secundario, dando como resultado un mayor gradiente de velocidad en la rama principal; por lo que al ser un fluido no-Newtoniano, se produce un comportamiento dilatante más pronunciado en el brazo principal, lo cual se refleja en el perfil de viscosidad de la **Figura (14)**. En esta figura se observa que los perfiles de viscosidades, en ambas salidas, tienen valores máximos en zonas cercanas a la pared de la geometría T, llegando a un valor mínimo de viscosidad igual a $0.0028 \text{ (Pa s}^n\text{)}$ en el rango de $H = (-0.02:0.02)$, manteniéndose constante en ese rango, para la salida del brazo secundario y llegando a un valor mínimo de viscosidad igual a $0.0030 \text{ (Pa s}^n\text{)}$ para la salida del brazo principal, en el rango de H mencionado anteriormente. La relación entre velocidad y viscosidad se debe al comportamiento *dilatante* del fluido: A mayor gradiente de velocidad, mayor es la viscosidad, como es el caso de la salida del brazo principal, donde se alcanza una viscosidad máxima de $0.0030 \text{ (Pa s}^n\text{)}$ y a menor gradiente de velocidad, menor es la viscosidad, como sucede en la salida del brazo secundario, donde la viscosidad máxima alcanzada es de $0.0028 \text{ (Pa s}^n\text{)}$.

De las **figuras (12)** y **(14)** se puede observar las diferencias en los perfiles de viscosidad entre un fluido pseudoplástico y dilatante: Para un fluido pseudoplástico, la viscosidad parte desde cero y aumenta rápidamente a partir de $H = -0.1$, produciéndose un *peak* de viscosidad y manteniéndose constante hasta $H = 0.1$, para luego descender rápidamente a valores cercanos a ceros, lo que genera un aumento progresivo de velocidad hasta alcanzar un máximo, el cual se mantiene constante; en cambio para un fluido dilatante la viscosidad parte de valores máximos, los cuales son pequeños (del orden 0.01 Pa s^n), estos descienden rápidamente hasta alcanzar un mínimo, el cual es constante a partir de $H = -0.02$ hasta $H = 0.02$, generando que en esos puntos el fluido dilatante alcance un *peak* de velocidad.

Para $Re=500$

A) Pseudoplástico $n=0.25$:

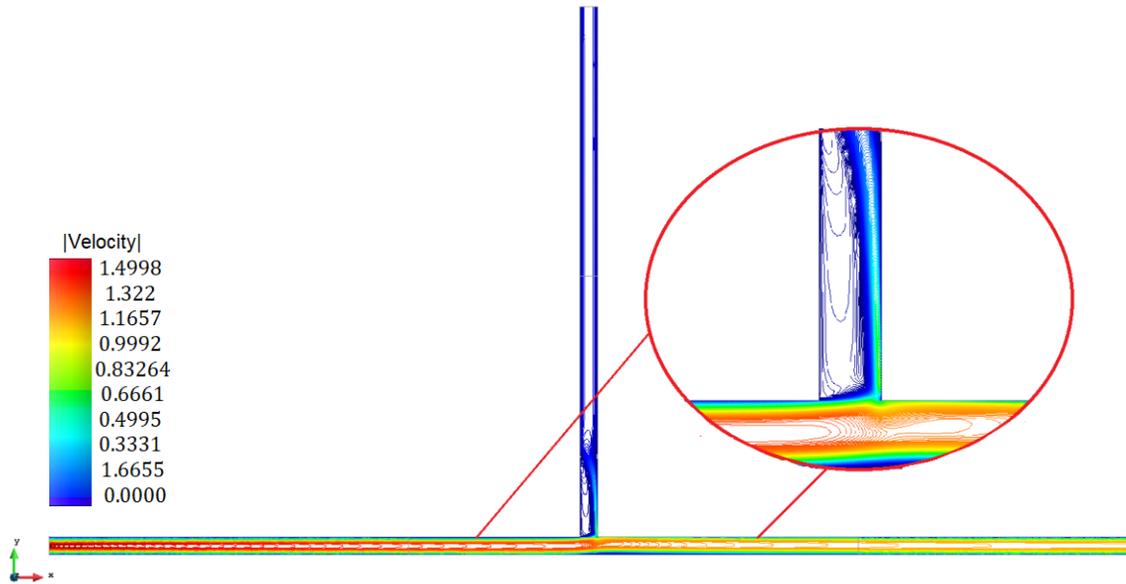


Figura 15. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=500$ e índice de potencia $n=0.25$.

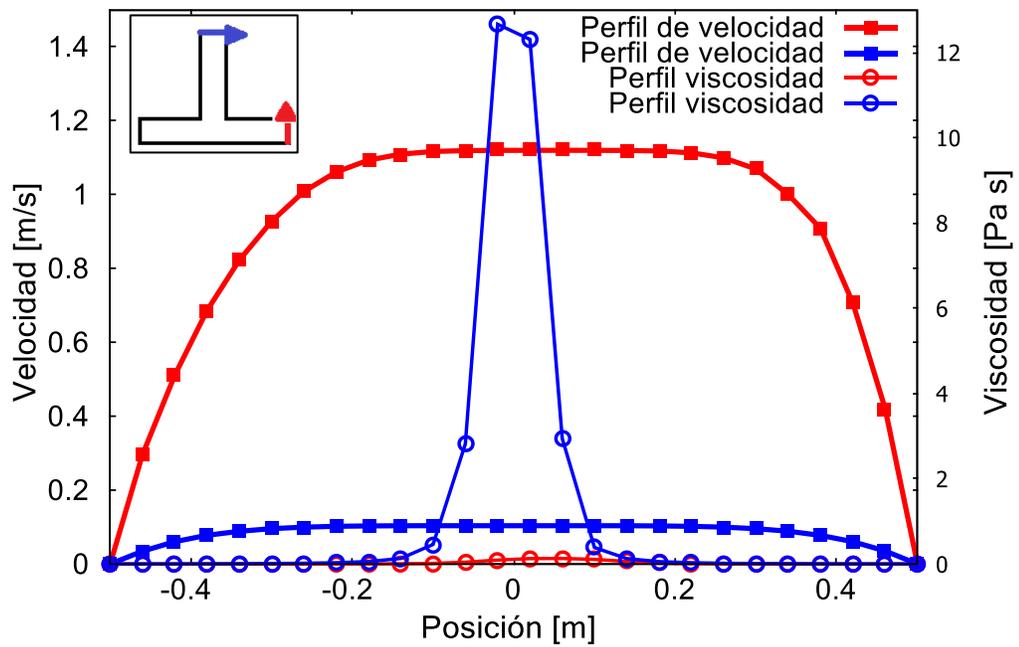


Figura 16. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal (curvas de color rojo) y brazo secundario (curvas de color azul) para $Re=500$ e índice de potencia $n=0.25$.

En la **figura (16)** se muestran los perfiles de salidas de la velocidad para cada brazo de la geometría T en un fluido pseudoplástico: La curva de color roja corresponde al perfil de velocidad en la salida del brazo principal y la curva de color azul al perfil de velocidad en la salida del brazo secundario. Se observa nuevamente que, en la salida del brazo principal, el perfil de velocidad alcanza mayor amplitud que en el brazo secundario, siendo esta diferencia de amplitud mucho mayor que para el $Re=100$. Esto genera que en la salida del brazo principal haya un gradiente de velocidad mucho mayor que en la salida del brazo secundario, por lo que al ser un fluido no-Newtoniano, se produce un comportamiento pseudoplástico mucho más pronunciado en el brazo secundario, lo que se puede evidenciar en los perfiles de viscosidades de la **figura (16)**. De esta figura se observa que la amplitud del perfil de viscosidad en la salida del brazo secundario es mucho mayor que la amplitud del perfil de viscosidad en la salida del brazo principal: El máximo de viscosidad en el brazo secundario es cercano a $13(Pa s^n)$, mientras que el máximo de viscosidad que se genera en el brazo principal es de $0.13(Pa s^n)$. Estos valores se mantienen constantes desde $H=-0.02$ hasta $H=0.02$, produciendo que la velocidad se mantenga constante en su *peak* y generando una “zona tapón” en esos puntos.

Se puede observar que hay una mayor diferencia de amplitudes en los máximos de viscosidad de la salida del brazo principal con el brazo secundario para un fluido pseudoplástico para $Re=500$ que para un fluido pseudoplástico para $Re=100$. Esto se debe a que hay mayor gradiente de velocidad en la salida del brazo principal que en la salida del brazo secundario para $Re=500$ que para $Re=100$.

B) Dilatante $n=1.75$:

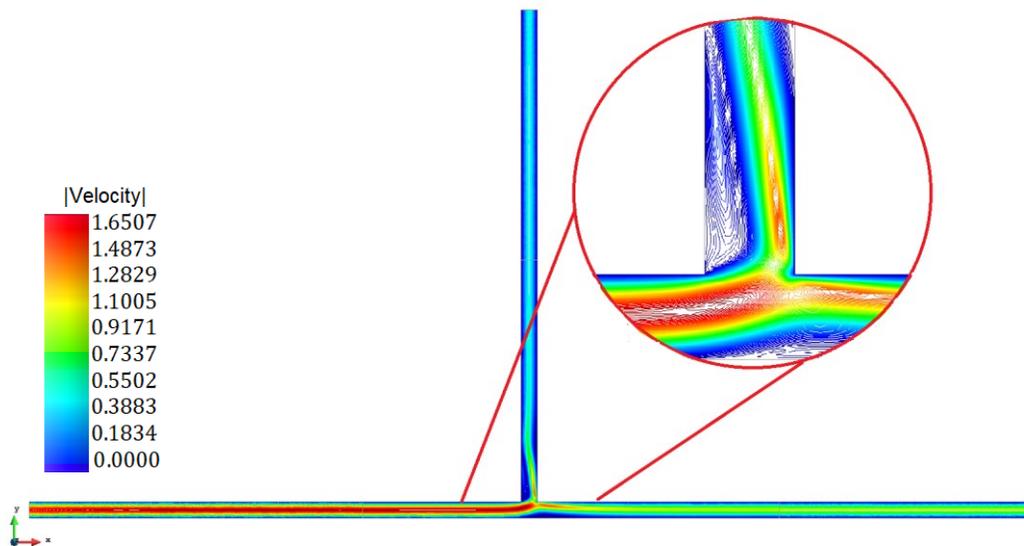


Figura 17. Líneas de contorno de magnitud de velocidad para $Re=500$ e índice de potencia $n=1.75$.

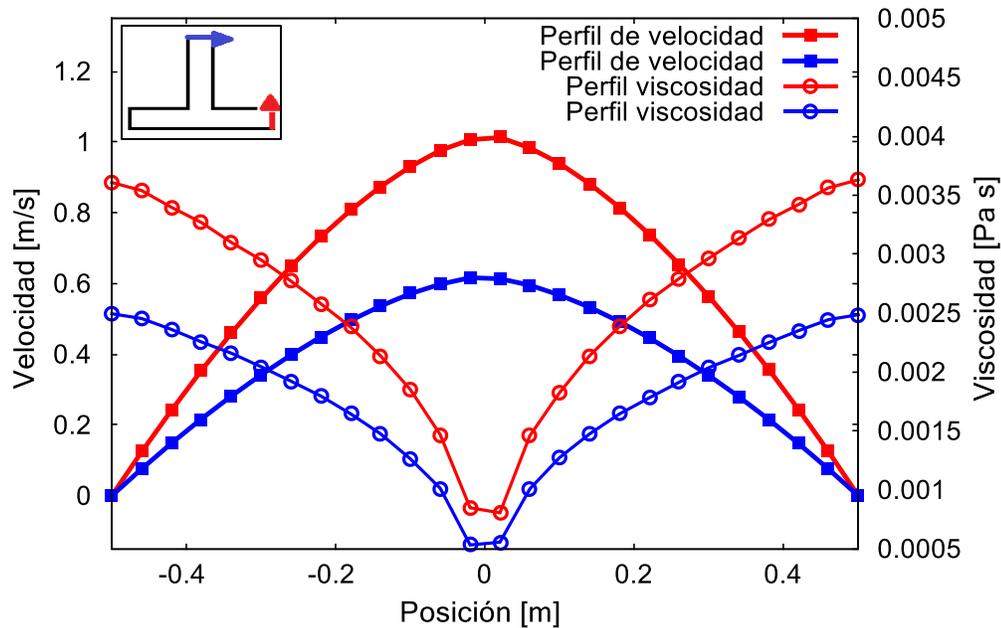


Figura 18. Gráficos de perfil de velocidad y de viscosidad en salida brazo principal (curvas de color rojo) y brazo secundario (curvas de color azul) para $Re=500$ e índice de potencia $n=1.75$.

En la **figura (18)** se muestran los perfiles de velocidad en las salidas en cada brazo de la geometría T, para un fluido dilatante. Se observa que en la salida del brazo principal hay una mayor amplitud de velocidad en comparación al perfil de velocidad de la salida en el brazo secundario, por lo que hay mayor gradiente de velocidad en la salida del brazo principal; debido a que es fluido no-Newtoniano, gatilla un comportamiento dilatante más pronunciado en el brazo principal de la T. Para $Re=500$ se puede distinguir una diferencia de amplitudes de velocidad de salidas mayor que para $Re=100$, donde los perfiles de velocidades alcanzan amplitudes similares. De la **figura (18)** se observa que los perfiles de viscosidades, en ambas salidas, tienen valores máximos en zonas cercanas a la pared de la geometría T, llegando a un valor mínimo de viscosidad igual a $0.00053 \text{ (Pa s}^n\text{)}$ en el rango de $H= (-0.02:0.02)$, manteniéndose constante en ese rango, para la salida del brazo secundario y llegando a un valor mínimo de viscosidad igual a $0.00081 \text{ (Pa s}^n\text{)}$ en el rango mencionado anteriormente para la salida del brazo principal. El valor mínimo de viscosidad alcanzado en la salida principal de la T para $Re=500$ es menor en amplitud que para $Re=100$, por lo que debido al comportamiento dilatante del fluido, esto se ve reflejado en la amplitud de la velocidad en la salida del brazo principal, donde para $Re=500$ la velocidad máxima es mayor que para $Re=100$ ($1.01 \frac{m}{s}$ y $0.86 \frac{m}{s}$, respectivamente). No siendo así para la salida del brazo secundario para $Re=500$ donde la amplitud de velocidad es menor que para $Re=100$ ($0.57 \frac{m}{s}$ y $0.74 \frac{m}{s}$, respectivamente).

Para caracterizar los tipos de fluidos según su índice de potencia, se graficó $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ versus Número de Reynolds y $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ versus Número de Reynolds, para todos los índices de potencia, con estos gráficos se puede llegar a entender el efecto reológico en una bifurcación tipo T para diferentes índices de potencia y números de Reynolds. A continuación, se muestran los gráficos mencionados.

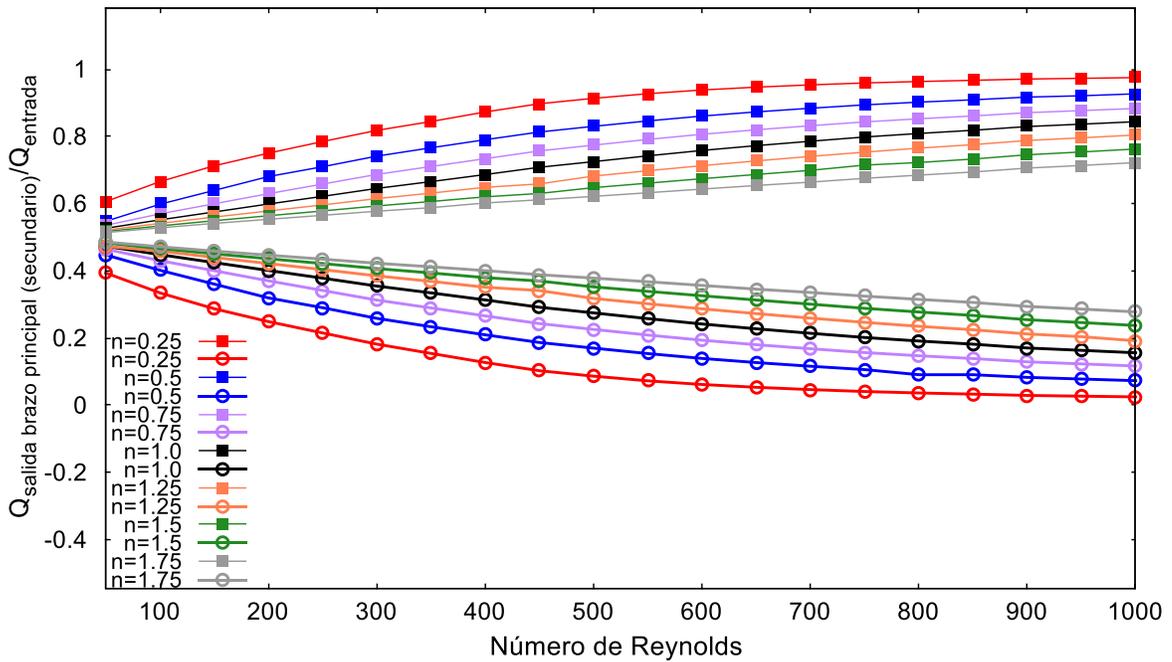


Figura 19. Gráfico $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}} / \frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ versus Número de Reynolds. Las curvas de $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ versus número de Reynolds se indican con cuadrados y las curvas $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ versus número de Reynolds, con círculos.

De la **figura (19)** se observa que el radio $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ crece a medida que el número de Reynolds aumenta. A medida que se aumenta el índice de potencia la pendiente comienza a ser cada vez más lineal.

Para los índices de potencias $n: 1.25, 1.5, 1.75$, se observa que la pendiente de $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ versus número de Reynolds comienza a decrecer, según aumenta el índice de potencia, esto implica que el gradiente de velocidad disminuye a medida que n aumenta y a la vez hay una disminución de viscosidad en la salida del brazo principal. Si $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ disminuye a medida que el índice de potencia crece, esto implica que $Q_{salida\ brazo\ principal}$ disminuye, por lo

tanto, para que haya conservación de masa, $Q_{salida\ brazo\ secundario}$ debe aumentar a medida que crece el índice de potencia, como se observa en el gráfico de la **figura (19)**.

Para los fluidos pseudoplásticos (índice de potencia $n < 1$), $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ aumenta a medida que crece el índice de potencia, lo que implica que hay un mayor gradiente de velocidad, por lo que debido a su comportamiento pseudoplástico, se evidencia una disminución de la viscosidad en la salida del brazo principal a medida que n aumenta.

De la **figura (19)** se observa que $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ disminuye a medida que el número de Reynolds aumenta. Para el caso de fluido dilatante $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ disminuye linealmente hasta llegar a $Re=1000$. La curva del gráfico pierde la pendiente lineal a medida que el índice de potencia disminuye. Para un fluido pseudoplástico, $Q_{salida\ brazo\ secundario}$ disminuye a medida que el índice de potencia disminuye, esto se debe a una disminución de gradiente de velocidad, por lo que se gatilla un crecimiento en el perfil de viscosidad en la salida del brazo secundario.

De la figura anterior se puede observar las desviaciones de $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}} / \frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ de un fluido pseudoplástico y dilatante, con respecto un fluido Newtoniano.

En un fluido pseudoplástico, la pendiente de $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ está sobre un fluido Newtoniano y la pendiente de $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ está bajo la del fluido Newtoniano.

En cambio, para un fluido dilatante, la pendiente de $\frac{Q_{salida\ brazo\ principal}}{Q_{entrada}}$ está bajo la pendiente para un fluido Newtoniano y la pendiente de $\frac{Q_{salida\ brazo\ secundario}}{Q_{entrada}}$ está sobre un fluido Newtoniano.

3.6 Conclusión.

- Los fluidos, tanto pseudoplásticos, Newtonianos y dilatantes lograron desarrollarse adecuadamente en la geometría realizada. Se aseguró que las longitudes de los brazos fuesen lo suficientemente largos para que el fluido se desarrollara según su naturaleza, sin embargo, se halló que éstos se desarrollan antes de llegar a las salidas de la geometría T. Además, se comprobó que la suma de los caudales volumétricos de las dos salidas de la T fuera igual al caudal de entrada, para todos los casos de índices de potencias con sus respectivos números de Reynolds.
- El comportamiento que adquiere un fluido no-Newtoniano en una geometría T dependen fuertemente de la relación de los perfiles de velocidad y de viscosidad. Para un fluido pseudoplástico, mientras mayor sea el gradiente de velocidad en la salida del brazo principal, menor es la viscosidad; en cambio para un fluido dilatante mientras mayor sea el gradiente de velocidad, mayor es la viscosidad adquirida, lo que influye directamente en la bifurcación del flujo entre las dos ramas, incrementando las diferencias entre ellas en el caso pseudoplástico y emparejándola en el caso dilatante.
- A medida que se aumenta el índice de potencia, desde $n=0.25$ hasta $n=1.75$, $\frac{Q_{\text{salida brazo principal}}}{Q_{\text{entrada}}}$ disminuye. Es decir, para fluidos con comportamiento pseudoplástico, en la salida del brazo principal, el gradiente de velocidad disminuye a medida que el índice de potencia aumenta (0.25, 0.5, 0.75), por lo que, debido a su carácter reológico, hay un aumento en la viscosidad. En cambio, para un fluido dilatante, el gradiente de velocidad disminuye a medida que el índice de potencia aumenta (1.25, 1.5, 1.75), por lo que se evidencia una disminución en la viscosidad en la salida del brazo principal. Sin embargo, para cada índice de potencia, a medida que el número de Reynolds aumenta, $\frac{Q_{\text{salida brazo principal}}}{Q_{\text{entrada}}}$ también lo hace, donde para fluidos con comportamiento dilatante aumenta de forma lineal y para fluidos pseudoplásticos la linealidad se va perdiendo.
- A medida que se aumenta el índice de potencia, $\frac{Q_{\text{salida brazo secundario}}}{Q_{\text{entrada}}}$ aumenta. Para fluidos dilatantes, el gradiente de velocidad aumenta cuando el índice de potencia crece (1.25, 1.5, 1.75) en la salida del brazo secundario, lo que se evidencia en un aumento en el perfil de viscosidad. En cambio, en la salida del brazo secundario para un fluido pseudoplástico, el gradiente de velocidad disminuye a medida que el índice de potencia disminuye (0.25, 0.5, 0.75), lo que se refleja en un aumento en el perfil de viscosidad. Para cada índice de potencia, a medida que el número de Reynolds aumenta, $\frac{Q_{\text{salida brazo secundario}}}{Q_{\text{entrada}}}$ disminuye, donde para fluidos dilatantes lo hace de forma lineal.

Capítulo 4: Flujo sanguíneo en Arteria Carótida

La sangre humana es un fluido complejo, compuesto por plasma, glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas. Esta mezcla da como resultado un comportamiento no-lineal entre la viscosidad y los esfuerzos cortantes con características *pseudoplásticas* (Leonardo Moreno, Fausto Calderas, Guadalupe Sánchez, Luis Medina-Torres, 2013), además, la viscosidad de la sangre depende de los niveles de hematocritos, viscosidad del plasma, distribución de células rojas y propiedades mecánicas de las células sanguíneas (Taha Sochi, 2013).

Según la Organización Mundial de la Salud el año 2017, a nivel mundial, 31% de personas fallecieron por accidentes cardiovasculares, es por esto que resulta importante estudiar y analizar el comportamiento sanguíneo, para una mayor comprensión de patologías desde un punto de vista ingenieril, lo cual sin lugar a dudas podría ayudar a mejorar los diagnósticos médicos, además a orientar la creación de nuevos dispositivos.

En este capítulo se estudiará en particular el flujo sanguíneo en la Arteria Carótida en estado estacionario. El flujo sanguíneo es pulsátil, sin embargo, estudiar el flujo sanguíneo estacionario de esta arteria es beneficioso, ya que, forma la base para entender campos de fluidos mucho más complejos, como es en el caso pulsátil y además, la arteria carótida experimenta un flujo relativamente constante durante la diástole, el cual ocupa, aproximadamente dos tercios del ciclo cardíaco (B.K. Bharadvaj, 1982). La importancia de estudiar el flujo en esta arteria reside en el hecho que hay una mayor probabilidad de acumulación de placa de ateroma en geometrías complejas y con bifurcaciones, como es el caso de esta arteria (Kien T. Nguyena, Christopher D. Clarka, Thomas J. Chancellora, Dimitruis V. Papavassilioua, 2008). La acumulación de placa de ateroma, que se genera en las paredes de la arteria Carótida, produce la enfermedad de Estenosis, afectando así el flujo sanguíneo en las zonas que irriga la arteria Carótida, provocando, en casos graves la muerte.

4.1 Arteria Carótida

Las arterias Carótidas son las arterias principales encargadas de transportar la sangre con oxígeno y nutrientes del corazón al cerebro. La arteria Aorta se encarga de distribuir la sangre a nuestros órganos, ésta irriga a la arteria Carótida Común, nombre que recibe el tronco primario de la arteria Carótida (Texas Heart Institute, Denton Cooley, 1962). La arteria Carótida Común se divide en dos ramas, las cuales son (Instituto Nacional de Cáncer, Departamento de Salud y Servicio Humanos de E.E.U.U, 1937):

- 1- Arteria Carótida Interna: Arteria encargada de irrigar al cerebro y a los ojos.
- 2- Arteria Carótida Externa: Esta rama lleva la sangre a la cara, lengua y a las partes externas de la cabeza.

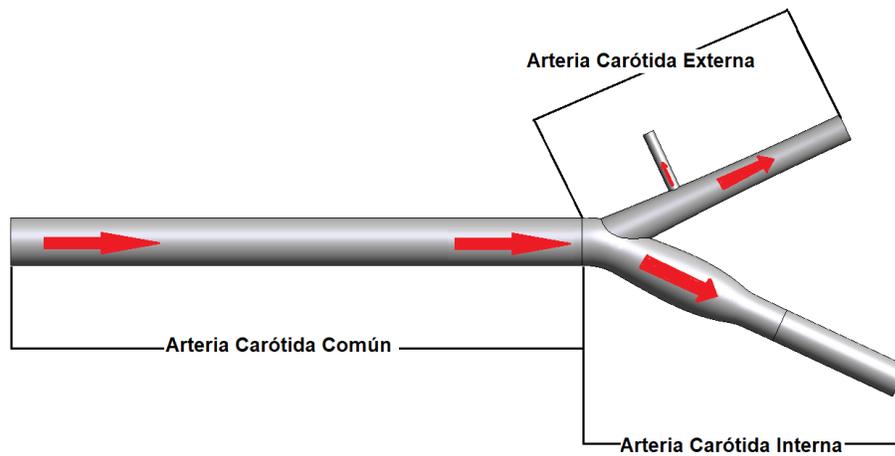


Figura 20. Partes de la arteria Carótida. El tronco primario de la arteria Carótida recibe el nombre de arteria Carótida Común, luego ésta se divide en dos ramas: arteria Carótida Interna y arteria Carótida Externa.

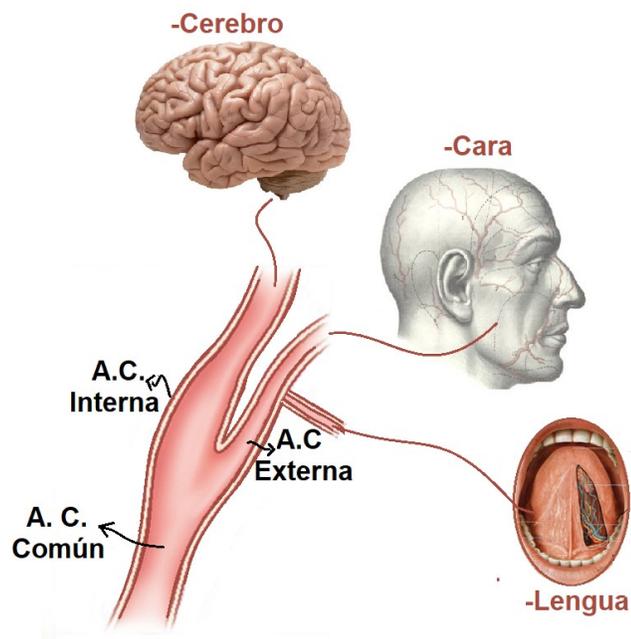


Figura 21. Imagen de Irrigación de arteria Carótida. El flujo sanguíneo, al pasar por la Carótida Común (A.C.Común), sufre una bifurcación, pasando por la arteria Carótida Interna (A.C. Interna) y arteria Carótida Externa (A.C.Externa).

Un accidente cerebrovascular se genera cuando las arterias Carótidas se obstruyen y el cerebro no recibe suficiente oxígeno; éste se produce por acumulación de placa de ateroma en las paredes de las arterias Carótidas, estrechando de forma significativa las arterias. A esta estrechez se le conoce como **Estenosis Carotidea** (Radiological Society of North America, s.f.).

El flujo de la arteria Carótida es pulsátil; un tercio del ciclo cardíaco corresponde a la sístole⁹ y dos tercios corresponden a la diástole¹⁰; sin embargo, en este trabajo, se simulará para caso estacionario, es por esto que para poder simular a la sístole y a la diástole se utilizarán diferentes números de Reynolds para la sangre (B.K. Bharadvaj, 1982):

- $Re=400$, corresponde a la diástole.
- $Re=800$; corresponde a la media entre sístole/diástole.
- $Re=1200$, corresponde a la sístole.

4.1.1 **Geometría Arteria Carótida sana**

Para replicar la geometría de una arteria Carótida sana, se dibujó la geometría del trabajo *Steady flow in a model of the human carotid bifurcation, Part I-Flow Visualization*, donde a través de 124 angiogramas (57 angiogramas corresponden a 22 adultos de 34 a 77 años y 67 angiogramas de 50 niños menores de 18 años) se estimó una geometría tridimensional promedio (B.K. Bharadvaj, 1982). La geometría dibujada se muestra a continuación, con sus dimensiones.

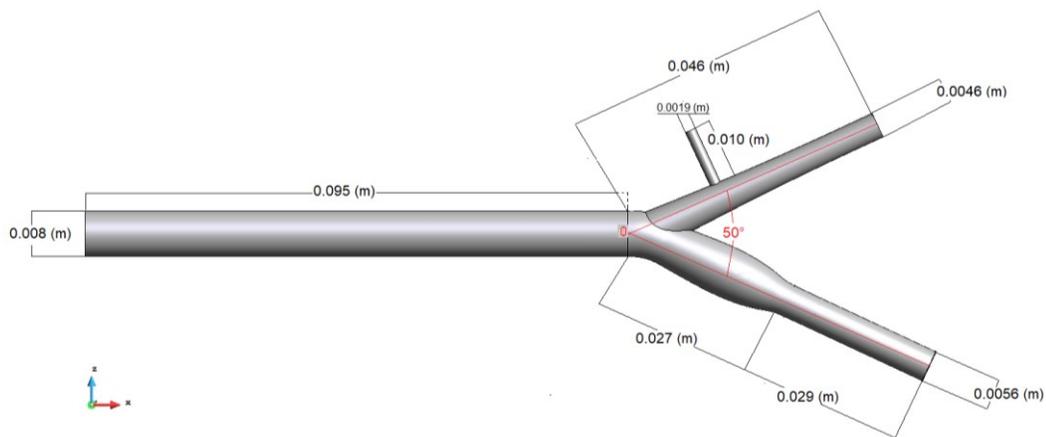


Figura 22. Geometría tridimensional de Arteria Carótida Sana, con sus respectivas dimensiones.

⁹Se denomina sístole a la contracción de las cavidades cardíacas: aurículas y ventrículos. Su duración es aproximadamente de unos 270 milisegundos (Clínica Universidad de Navarra, s.f.).

¹⁰Se denomina diástole al estado de relajación del corazón, en especial de los ventrículos. Su duración en reposo es aproximadamente de unos 500 milisegundos (Clínica Universidad de Navarra, s.f.).

4.1.2 Geometría arteria Carótida con Estenosis

La Estenosis dibujada en la arteria Carótida corresponde a un grado de 60%, esto significa que hay una reducción de un 60% del diámetro de la arteria. La Estenosis se dibujó utilizando la **ecuación (45)**; según la literatura la forma de la Estenosis puede ser cosenoidal, Gaussiana, trapezoidal y rectangular, pero la forma más común es la Estenosis cosenoidal (Dalin Tang, Chung Yang, Shunichi Kobayashi, Jie Zheng, Raymond P. Vito), por lo que se escogió por dibujar esta forma de Estenosis.

La forma de la estenosis es una función que depende del grado de Estenosis, su longitud y su posición con respecto al comienzo de la bifurcación (Ver **figura 38**):

$$D = R_o \left[1 - \frac{1}{2} S \left(1 - \cos \left(\frac{\pi z^*}{l} \right) \right) \right] \quad (45)$$

Donde:

- R_o es el diámetro de la arteria sin Estenosis.
- S es el grado de estenosis, en este caso $S = 0.6$.
- l es la longitud de la estenosis, $l = 0.013$ (m)
- z^* es la posición de la Estenosis con respecto al origen o como se muestra en la **figura (23)**.

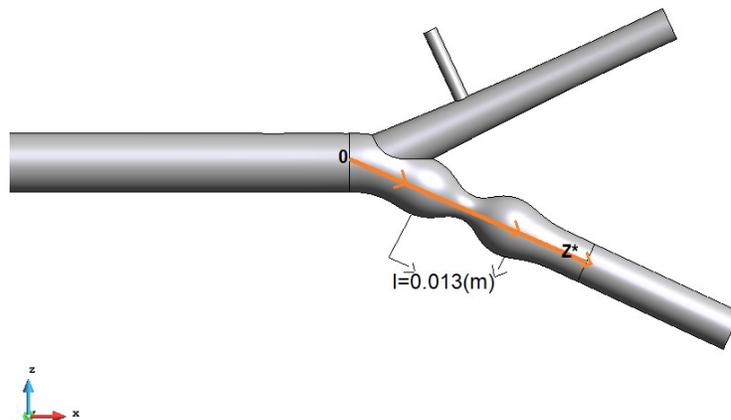


Figura 23. Geometría tridimensional de Arteria Carótida con un 60% de Estenosis, con una longitud de $l = 0.013$ (m). Para esta geometría sólo se modificó la zona donde se encuentra la Estenosis, el resto de la geometría es idéntica a la arteria sana.

Como se mencionó anteriormente, existe una mayor probabilidad de que se deposite placas de ateromas en geometrías complejas, curvas o en bifurcaciones, es por esto, que la Estenosis se dibujó en el bulbo de la arteria Carótida Interna. Se dibujó una Estenosis simétrica. Es importante mencionar que sólo se modificó la zona donde se encuentra la Estenosis y se mantuvo el resto de la geometría con las mismas dimensiones de la geometría de la arteria Carótida sana.

Se escogió un 60% de Estenosis ya que, si bien es una oclusión moderada, es importante estudiarlo, ya que, generalmente con este porcentaje de oclusión los pacientes no sienten síntomas, a diferencia de una oclusión de 70% - 99% en la arteria Carótida, donde el paciente sí sienten síntomas, por lo que se podría desarrollar ciertos criterios para la detección temprana de Estenosis Carotídea (Jeffrey P. Carpenter, Davis JT., FJ. Lexa, 1995).

4.2 Sangre.

Como se mencionó anteriormente, la sangre se describe reológicamente como un fluido no-Newtoniano. Es por esto que para estudiar su comportamiento reológico se utilizaron dos modelos no-Newtonianos: Ostwald- de Waele y Carreau-Yasuda, donde ambos modelos dependen de diferentes parámetros, los cuales, para el caso específico de la sangre a 37°C y densidad $\rho = 1050 \left(\frac{Kg}{m^3}\right)$ están tabulados; éstos se muestran a continuación.

4.2.1 Parámetros de modelo Ostwald-de Waele

Los parámetros para la sangre utilizando el modelo Ostwalds-de Waele son (Mohamed A. Elbbesy ,Abdbalnamen T. Hureka):

$$\text{Índice de consistencia: } m = 0.02 \text{ (Pa} \cdot \text{s}^n)$$

$$\text{índice de potencia : } n = 0.7$$

4.2.2 Parámetros de modelo Carreau-Yasuda

Los parámetros utilizados para la sangre con el modelo Carreau-Yasuda son (Cho Yi, Kensey K.R., 1991):

$$\text{Viscosidad de corte cero : } \mu_o = 0.056 \text{ (Pa} \cdot \text{s)}$$

$$\text{Viscosidad de corte infinito : } \mu_\infty = 0.00345 \text{ (Pa} \cdot \text{s)}$$

$$\text{Constante de tiempo: } \lambda = 1.9 \text{ (s)}$$

$$\text{índice de potencia: } n = 0.22$$

$$\text{Parámetro adimensional } a = 1.2$$

4.3 Características del problema

Como se mencionó, el fluido utilizado es la sangre por lo que al seleccionar los modelos de Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda se deben ingresar los parámetros detallados anteriormente. Este problema se resolverá con el método de Elementos Finitos Estabilizados *Total Residual*.

Condiciones de borde

- Al igual que en los casos anteriores, las paredes y los puntos del dibujo de la arteria Carótida deben permanecer fijas.
- Las tres salidas de la arteria deben ser libres.

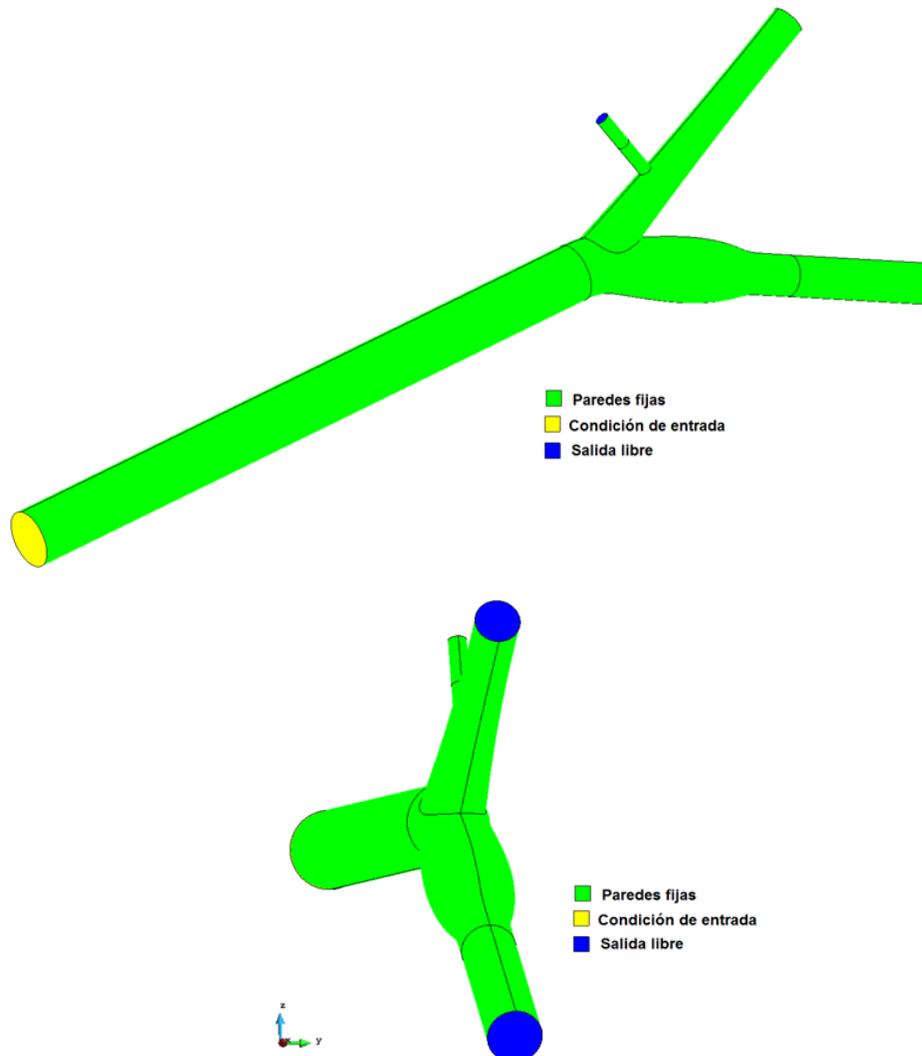


Figura 24. Condiciones de borde de geometría tridimensional de arteria Carótida sana en el pre-procesador de GID

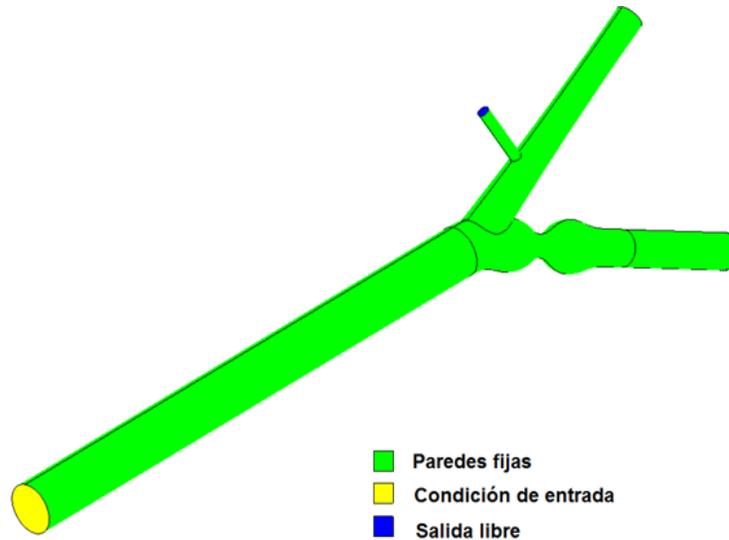


Figura 25. Condiciones de borde de geometría tridimensional de arteria Carótida con 60% de Estenosis en el pre-procesador de GID.

Como condición de entrada se ingresa el perfil de velocidad de flujo de Poiseuille. Para ingresar el perfil de velocidad se calculó la velocidad máxima para los tres números de Reynolds (400, 800 y 1200) para el modelo de Ostwald-de Wale y Carreau-Yasuda; para esto se utilizaron las siguientes ecuaciones, que corresponden a las ecuaciones de números de Reynolds para cada modelo, donde se despejó la velocidad u , la **ecuación (45)** corresponde al número de Reynolds generalizado del modelo Ostwald-de Walee y la **ecuación (46)** corresponde al número de Reynolds del modelo Carreau-Yasuda:

$$Re = \frac{\rho u^{2-n} L^n}{m 8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n} \quad (45)$$

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu_\infty} \quad (46)$$

Donde los valores de ρ , n , m , L y μ_∞ son valores específicos de la sangre, los cuales se mostraron en la **sección (4.2)**.

A continuación, se muestran los valores de velocidad máxima ingresados en las simulaciones:

Re	Velocidad máxima u_o con Modelo	Velocidad máxima u_o con Modelo
	Ostwald-de Walee $\left[\frac{m}{s}\right]$	Carreau-Yasuda $\left[\frac{m}{s}\right]$
400	0.31	0.23
800	0.53	0.46
1200	0.72	0.68

Tabla 10. Valores de velocidad máxima calculados para cada modelo utilizado, según el número de Reynolds.

Por lo que la condición de entrada para la geometría tridimensional se puede escribir como:

$$\vec{v}_{entrada} = u_o \left(1 - \frac{(y^2 + z^2)}{(0.004)^2} \right) \hat{x}$$

La condición de entrada para la geometría bidimensional:

$$\vec{v}_{entrada} = u_o \left(1 - \left(\frac{y}{0.004} \right)^2 \right) \hat{x}$$

Donde u_o corresponde a los valores mostrados en la **tabla (10)**.

Sin embargo, las ecuaciones que definen el número de Reynolds de cada modelo de fluido no-Newtoniano son diferentes, ya que dependen de parámetros específicos de cada modelo, por lo que los valores velocidad máxima para un mismo número de Reynolds no son iguales, como se puede observar en la **tabla (10)**, lo que implica que el caudal volumétrico de entrada en cada modelo es diferente para un mismo número de Reynolds.

Por lo que, para poder obtener los mismos caudales volumétricos de entrada en los dos modelos, en las simulaciones del modelo Carreau-Yasuda se introducirán las mismas condiciones de entrada que para el modelo Ostwald-de Waele, para los tres números de Reynolds. El área bajo la curva de los perfiles de velocidades con el modelo de Carreau-Yasuda (con las nuevas condiciones de entrada) serán iguales al área bajo la curva de los perfiles de velocidades obtenidos con el modelo Ostwald-de Waele.

Como se imponen otros valores de velocidad máxima como condición de entrada en el modelo Carreau-Yasuda, se calculará el número de Reynolds obtenido con dichas velocidades, utilizando la **ecuación (12)**. Estos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Velocidad máxima <i>impuesta</i> u_o $\left[\frac{m}{s} \right]$ para modelo Carreau-Yasuda	Número de Reynolds
0.31	536
0.53	925
0.72	1241

Tabla 11. Valores de velocidad máxima *impuesta* como condición de entrada para modelo Carreau-Yasuda, con sus respectivos números de Reynolds calculados.

Como se observa, imponiendo la misma velocidad de entrada que en el modelo Ostwald-de Waele, el número de Reynolds al cual llega el fluido con el modelo Carreau-Yasuda aumenta.

4.4 Mallado

Geometría bidimensional de arteria Carótida sana

Para mallar la geometría bidimensional se utilizaron *elementos estructurados* y *elementos no – estructurados*. Se malló con elementos no-estructurados el bulbo de la arteria Carótida Interna y toda la arteria Carótida Externa, los tamaños de estos elementos fue de 0.0003. La arteria Carótida Común y el resto de la arteria Carótida Interna se malló con elementos estructurados, el tamaño de estos elementos fue de 0.0006. El total de elementos fue de:

$$\text{Total elementos} = 178.951$$

En la **figura (26)** se puede observar la geometría bidimensional de la arteria Carótida sana con malla utilizada.

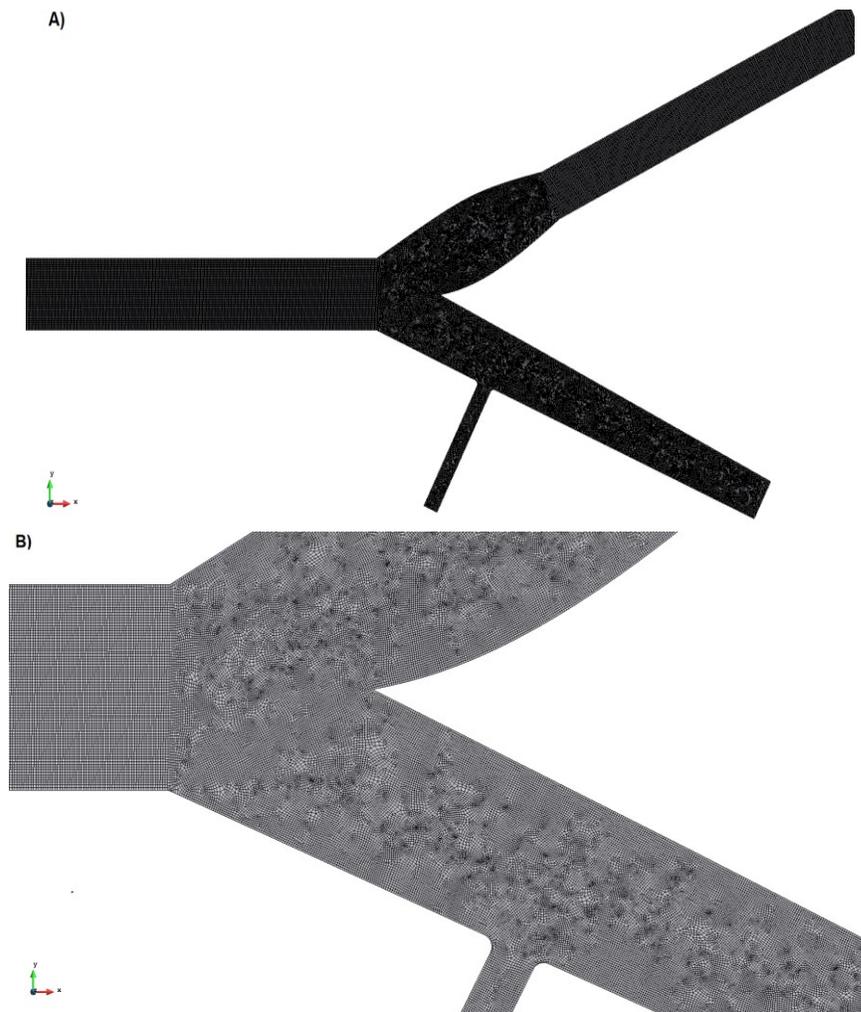


Figura 26. A) Malla en geometría bidimensional de la arteria Carótida sana con 178.951 elementos. B) Zoom para visualizar mejor la malla utilizada en la zona de la bifurcación.

Geometría bidimensional de arteria Carótida con Estenosis

Para mallar la geometría bidimensional de la arteria con 60% de Estenosis se utilizaron *elementos estructurados* y *elementos no – estructurados*. Se malló con elementos *estructurados* la arteria Carótida Común y la rama posterior a la estenosis de la arteria Carótida Interna, los tamaños de estos elementos fue de 0.0003. Se malló con elementos *no-estructurados* la zona con Estenosis y toda la arteria Carótida Externa, los tamaños de estos elementos fueron de 0.0006. El total de elementos fue de:

$$\text{Total elementos} = 102.966$$

En la **figura (27)** se puede observar la geometría bidimensional de la arteria Carótida sana con malla utilizada.

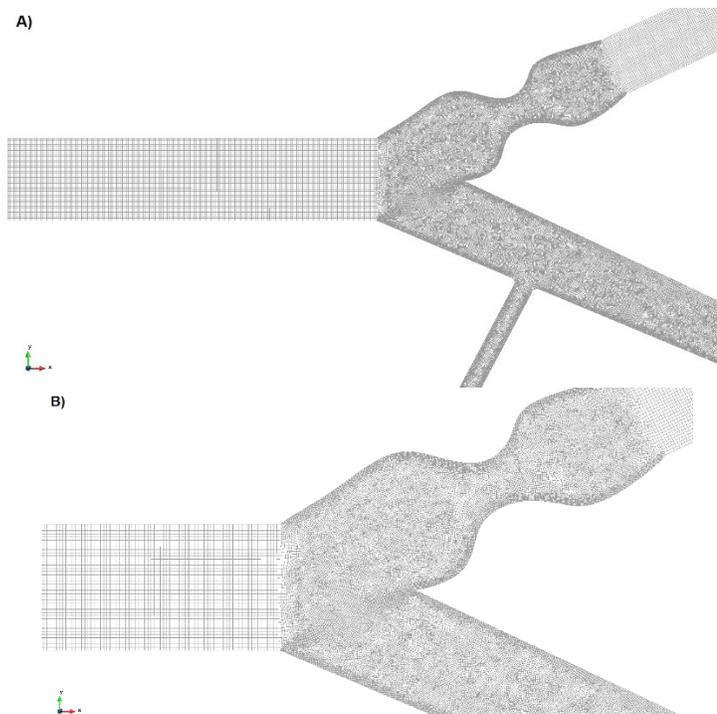


Figura 27. A) Malla en geometría bidimensional de la arteria Carótida con 60% de Estenosis con 102.966 elementos B) Zoom para visualizar mejor la malla utilizada en la zona de la bifurcación.

Geometría tridimensional

Para mallar la geometría tridimensional, ya sea la arteria Carótida sana o con Estenosis, se utilizaron *elementos no – estructurados*. Los elementos no-estructurados utilizados en toda la geometría fueron tetraedros. Se utilizaron dos tamaños de elementos de la malla, al igual que en el caso bidimensional, los elementos de menor tamaño se ubicaron en los dominios de la bifurcación de la arteria.

El total de elementos tetraédricos para la arteria sana fue de:

$$\text{Total de elementos tetraédricos arteria sana} = 1.304.678$$

Para la arteria tridimensional con estenosis:

$$\text{Total de elementos tetraédricos arteria con estenosis} = 1.153.289$$

En las **figuras (27) y (28)** se observan las geometrías tridimensionales de la arteria con las mallas utilizadas.

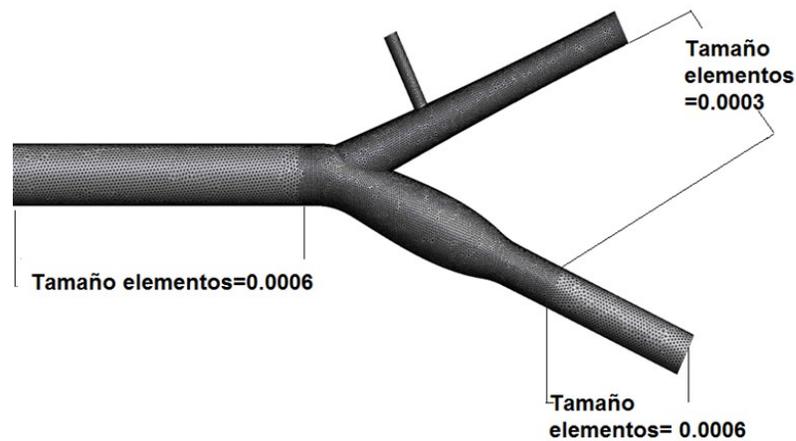


Figura 28. Geometría tridimensional de la arteria Carótida sana mallada con 1.304.678.

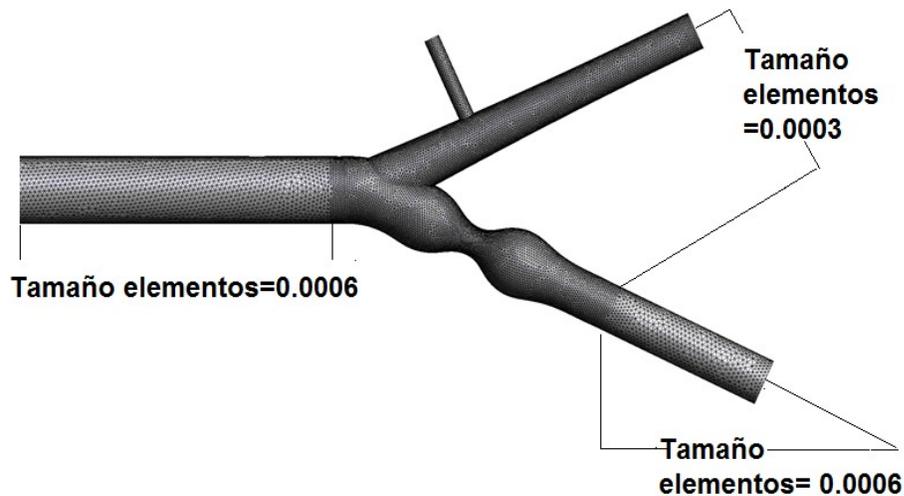


Figura 29. Geometría tridimensional de la arteria Carótida con 60% de Estenosis mallada con 1.153.289.

Luego de que la malla y las condiciones de bordes ya se han ingresadas, en el código de FEMUSS se selecciona el método de resolución de las ecuaciones dominantes: Método Iterativo Multigrad para el caso tridimensional y Método directo para el caso bidimensional. Finalmente se selecciona la opción *Calcular* para comenzar la simulación.

4.5 Resultados

4.5.1 Comparación con modelo experimental tridimensional

Se compararon los resultados obtenidos de las simulaciones con los perfiles de velocidad axial experimentales del trabajo *Steady Flow in a Model of the Human Carotid Bifurcation. Pat II* de la arteria Carótida Interna, para el número de Reynolds $Re = 400$ (B.K. Bharadvaj, 1982). Los autores mencionan que la influencia en el flujo en la arteria Carótida se debe principalmente a la compleja geometría de la arteria Carótida. Es por esto que para verificar que el modelo geométrico que se utilizará sea el correcto, se compararon resultados de las simulaciones obtenidas con los del trabajo mencionado.

En el trabajo *Steady Flow in a Model of the Human Carotid Bifurcation. Pat II* el fluido que utilizan en el experimento es agua, que es un fluido Newtoniano; por lo que para poder comparar los resultados de las velocidades axiales en la arteria Carótida Interna se realizó una simulación numérica con los parámetros de agua:

$$\text{Densidad: } \rho = 1000 \left(\frac{Kg}{m^3} \right)$$

$$\text{Viscosidad dinámica : } \mu = 0.001(Pa \cdot s)$$

Para obtener el valor de la velocidad máxima de entrada se utilizó la ecuación de número de Reynolds para fluido Newtoniano:

$$Re = \frac{\rho L \bar{u}}{\mu}$$

Donde:

ρ es la densidad

L es la longitud característica

\bar{u} es la velocidad promedio.

μ es la viscosidad dinámica.

Para número de Reynolds igual a 400 se obtuvo la siguiente condición de entrada:

$$u_{\text{entrada}} \hat{x} = u_0 \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{(0.004)^2} \right) \left[\frac{m}{s} \right]$$

Donde $u_0 = 0.1 \left(\frac{m}{s} \right)$.

La comparación de resultados se realizó en dos secciones de la arteria Carótida Interna, estas secciones se nombraron S_i , donde $i = 1, 2$, donde:

1. S_1 corresponde al inicio de la arteria Carótida Interna.
2. S_2 corresponde a la sección transversal con mayor diámetro del bulbo de la arteria Carótida Interna.

La **figura (30)** muestra la ubicación de las secciones nombradas, donde la dirección de las flechas indica el sentido en el que se graficó la velocidad.

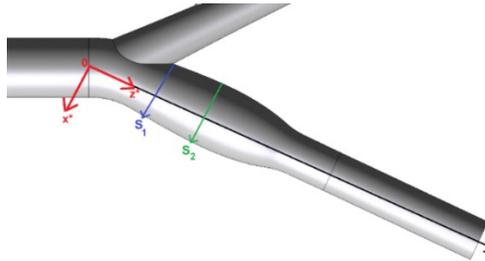


Figura 30. Ubicación de las secciones S_i en la arteria Carótida Interna. El eje z^* corresponde al eje axial de la arteria Carótida Interna.

A continuación, se muestran los gráficos de perfil de velocidad axial obtenidos para las secciones S_1 y S_2 , comparados con los perfiles de velocidad axial del trabajo *Steady Flow in a Model of the Human Carotid Bifurcation. Part II*:

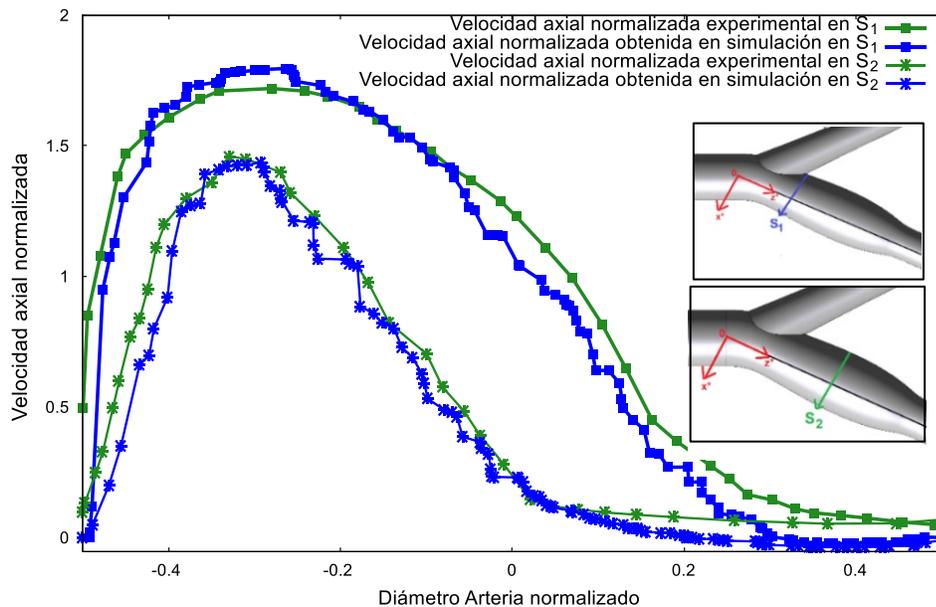


Figura 31. Comparación de velocidades axiales normalizadas de simulación con resultados experimentales para $Re=400$ en S_1 y en S_2 .

Se puede observar que las curvas de velocidades axiales obtenidas por las simulaciones son muy parecidas a las curvas de *Steady Flow in a Model of the Human Carotid Bifurcation. Part II*, por lo que el modelo geométrico realizado, con las condiciones de borde se podrán utilizar para simular el comportamiento de la sangre.

4.5.2 Comparación con Espectrograma en arteria Carótida Común.

Se compararon los valores de caudal volumétrico obtenidos en las simulaciones para la diástole ($Re=400$) y para sístole ($Re=1200$) de la arteria Carótida Común con Espectros Doppler del trabajo *A Spectrum of Doppler Waveforms in the Carotid and Vertebral Arteries* (Eric M. Rohren, Mark A. Kliewer, Barbara A. Carroll, Barbara S. Hertzberg, December 2003). Se compararon los caudales volumétricos obtenidos mediante los dos modelos de fluido no-Newtoniano utilizados: Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda. Como se mencionó anteriormente, para estos números de Reynolds no se tiene el mismo caudal volumétrico en los dos modelos, por lo que esta comparación servirá para conocer qué modelo, con estos números de Reynolds, se ajusta más al caudal volumétrico medido. Los valores de caudales volumétricos de las mediciones publicadas se muestran en las **tablas (12) y (13)** junto con las diferencias porcentuales obtenidas en cada modelo.

Caudal volumétrico sístole mediciones $\left(\frac{cm^3}{s}\right)$	Diferencia porcentual en sístole con modelo Ostwald- de Waele (%)	Diferencia porcentual en sístole con modelo Carreau-Yasuda (%)
109.8	10.3	40.2

Tabla 12. Diferencias porcentuales de caudales volumétricos en diástole de los modelos utilizados con las mediciones publicadas, en arteria Carótida Común.

Caudal volumétrico diástole mediciones $\left(\frac{cm^3}{s}\right)$	Diferencia porcentual en diástole con modelo Ostwald- de Waele (%)	Diferencia porcentual en diástole con modelo Carreau-Yasuda (%)
32.7	9.0	30.1

Tabla 13. Diferencias porcentuales de caudales volumétricos en diástole de los modelos utilizados con las mediciones publicadas, en arteria Carótida Común.

De las tablas anteriores, se observa que hay una menor diferencia porcentual en el caudal volumétrico de la arteria Carótida Común, tanto en sístole como en diástole, para los números de Reynolds 400 y 800 utilizando el modelo Ostwald- de Waele.

Como se mencionó anteriormente, utilizando el modelo Carreau-Yasuda pero para los números de Reynolds 536, 925 y 1241 (**tabla 11**) se obtiene el mismo caudal volumétrico que el obtenido con el modelo Ostwald-de Waele para los números de Reynolds 400, 800 y 1200, respectivamente, por lo que las diferencias porcentuales en diástole y en sístole de caudal volumétrico del modelo Carreau-Yasuda con las mediciones son las mismas que las que se obtuvieron con el modelo Ostwald-de Waele para los números de Reynolds 400 y 1200, ya que en ambos modelos se utilizó igual condición de entrada.

4.5.3 Resultados.

Para visualizar mejor los resultados de las simulaciones en la arteria tridimensional se realizó un corte en el plano xz . A continuación, se muestra las líneas de contorno de la componente x de la velocidad obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele para $Re=400$ y con el modelo Carreau-Yasuda para $Re=536$, para la arteria Carótida sana y para la arteria Carótida con un 60% de Estenosis.

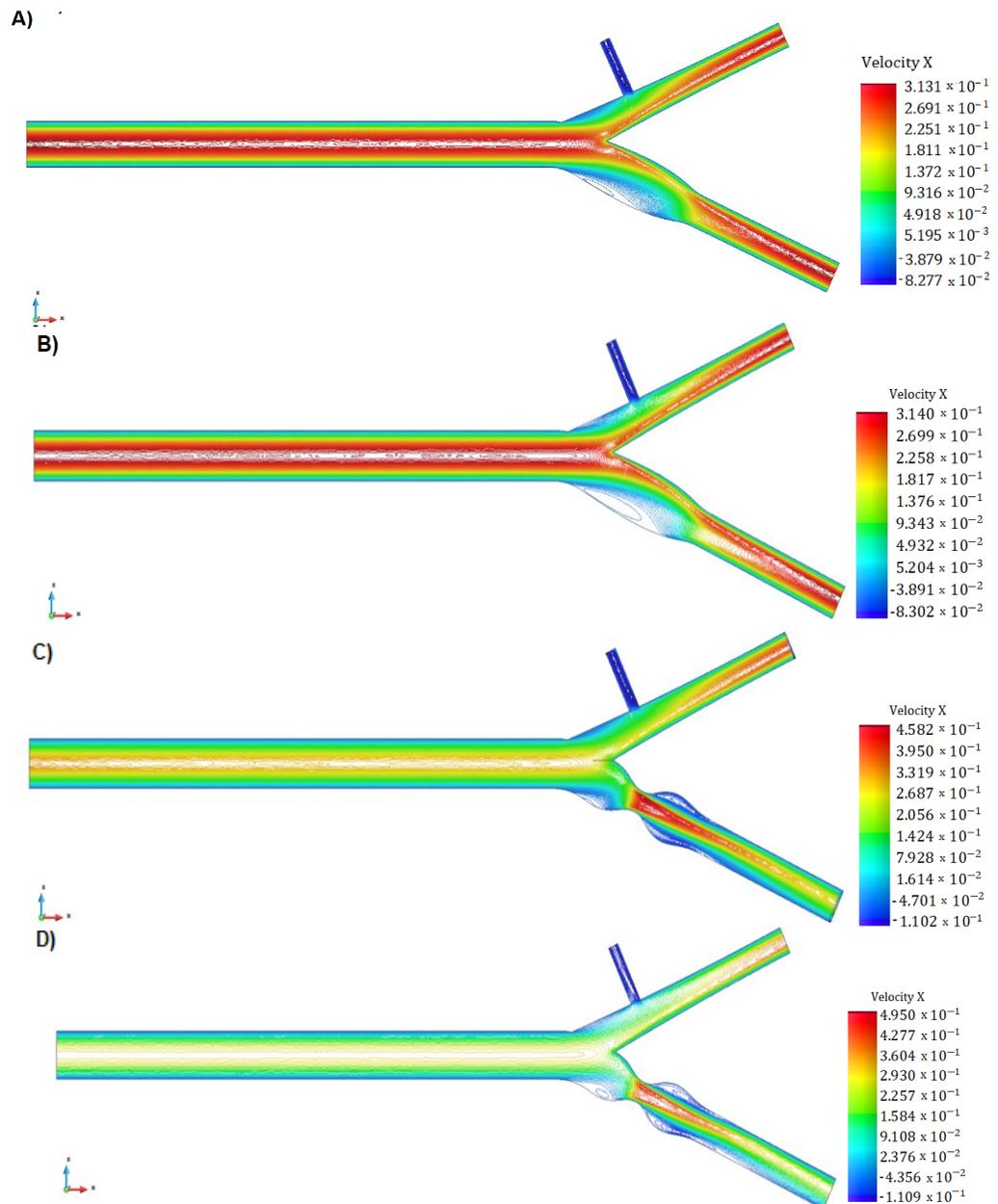


Figura 32. Línea de contorno de la componente x de la velocidad A) Para arteria Carótida sana utilizando Modelo Ostwald-de Waele para $Re=400$. B) Para arteria Carótida sana utilizando Modelo Carreau-Yasuda para $Re=536$. C) Para arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Ostwald-de Waele para $Re=400$ y D) Para arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Carreau-Yasuda para $Re=536$.

En **figura (32.A)** y **(32.B)** se observan líneas de contorno de la componente x de la velocidad en la arteria Carótida sana, utilizando el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda, respectivamente. Como se explicó anteriormente, en el modelo de Carreau-Yasuda se introdujeron los mismos valores de velocidad máxima como condición de entrada que los que se introdujeron para el modelo Ostwald-de Waele, con el fin, de que en ambos modelos haya el mismo caudal volumétrico. Como prueba de esto se puede observar las escalas de la componente x de la velocidad; las escalas para número de Reynolds 400 y número de Reynolds 536 son similares, aun cuando los números de Reynolds son diferentes. Lo mismo sucede para la **figura (32.C)** y **(32.D)**, donde se muestran las líneas de contorno de la componente x de velocidad en la arteria Carótida con Estenosis.

En las **figuras (32.A)** y **(32.B)** se observa que en el bulbo de la arteria Carótida Interna de la arteria sana, cerca de la pared externa, la componente x de la velocidad alcanza valores negativos, según las escalas mostradas, es decir, hay una formación de *zona de recirculación* en la pared externa de la arteria Carótida Interna. En las **figuras (32.C)** y **(32.D)**, donde se muestra las líneas de contorno de la componente x de velocidad para la arteria Carótida con Estenosis, se observa que en ambos modelos se generan *zonas de recirculación* antes y después de la Estenosis en la arteria Carótida Interna, en ambas paredes de la arteria.

En la **figura (33)** se muestran los resultados obtenidos para $Re=800$ con el modelo Ostwald-de Waele y para $Re=925$ con el modelo Carreau- Yasuda, para la arteria Carótida sana y para la arteria Carótida con 60% de Estenosis. Nuevamente, los números de Reynolds en estos dos modelos son diferentes, sin embargo, el caudal volumétrico ingresado como condición de borde es igual, por lo que es posible comparar los resultados.

Se observa que los valores de la componente x de velocidad obtenidos con el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda son muy similares para la arteria sana y para la arteria con Estenosis.

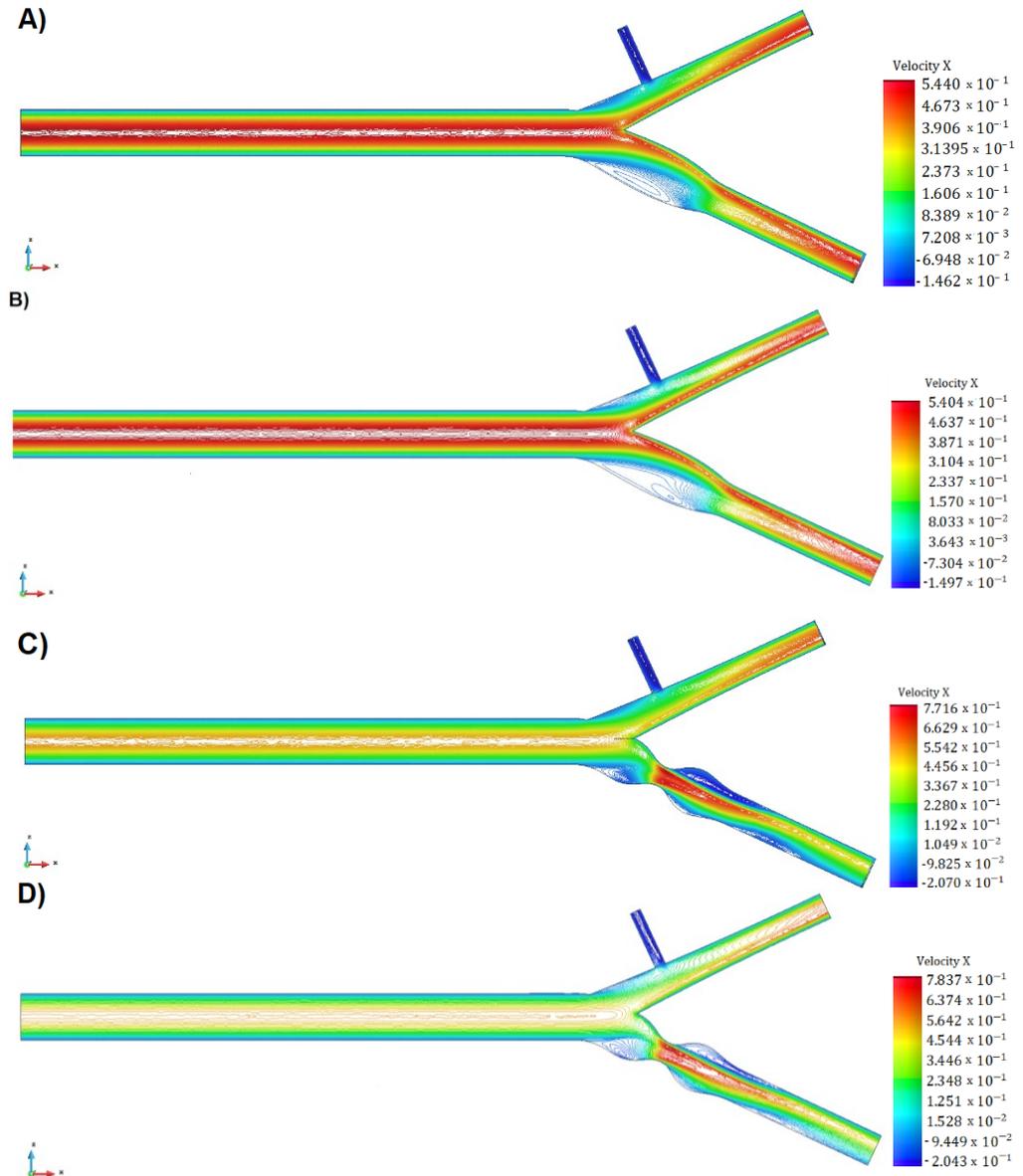


Figura 33. Línea de contorno de la componente x de la velocidad A) Para arteria Carótida sana utilizando Modelo Ostwald-de Waele para $Re=800$. B) Para arteria Carótida sana utilizando Modelo Carreau-Yasuda para $Re=925$. C) Para arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Ostwald-de Waele para $Re=800$ y D) Para arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Carreau-Yasuda para $Re=925$.

En la **figura (33)** se muestran las líneas de contorno de la componente x de velocidad para $Re=1200$ con el modelo Ostwald-de Waele y para $Re=1241$ con el modelo Carreau-Yasuda, para la arteria Carótida sana y para la arteria Carótida con 60% de Estenosis. Nuevamente es posible observar que los valores obtenidos mediante el método Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda son similares, tanto como para la arteria sana y para la arteria con Estenosis, aun cuando los números de Reynolds son diferentes.

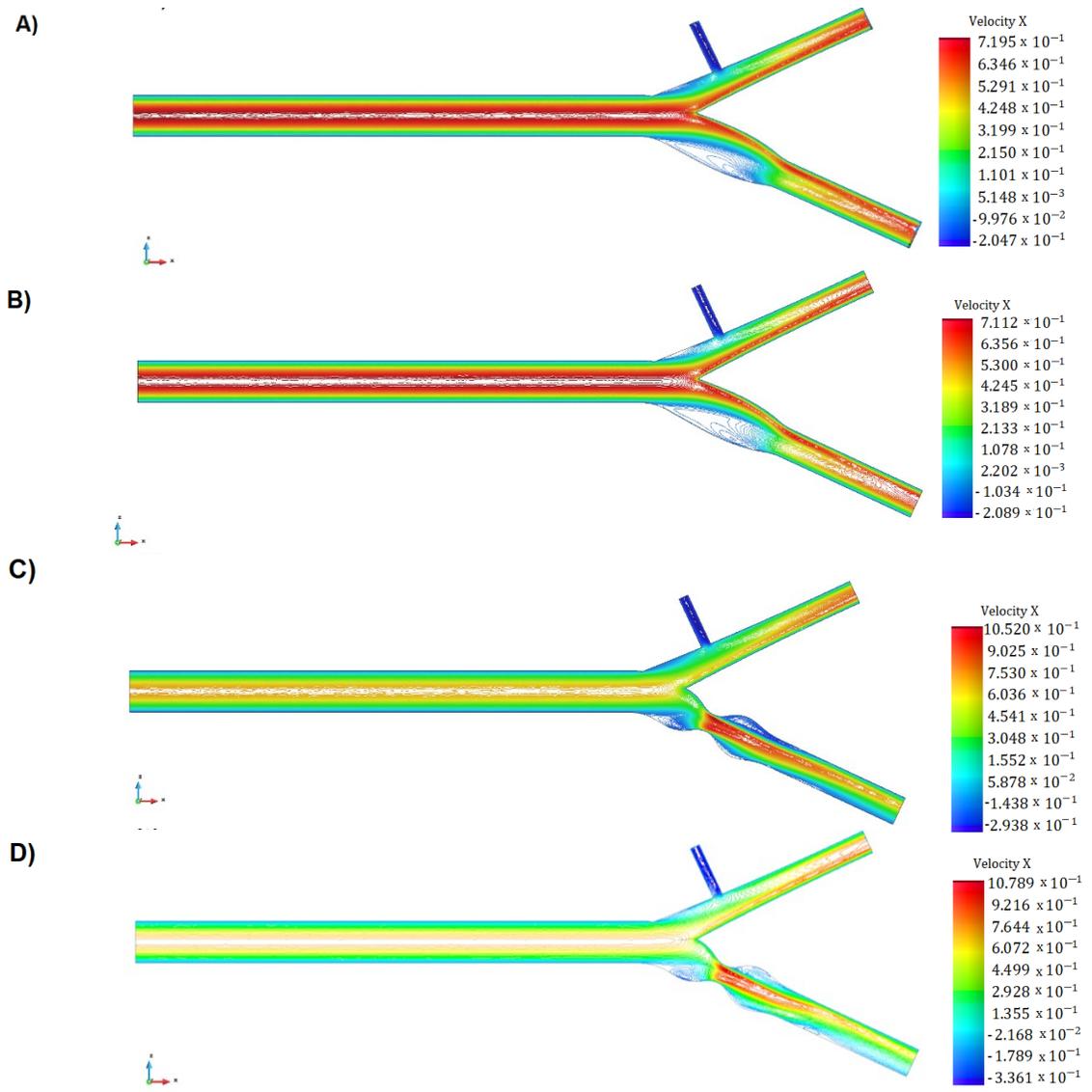


Figura 34. Línea de contorno de la componente x de la velocidad A) Para arteria Carótida sana utilizando Modelo Ostwald-de Waele para $Re=1200$. B) Para arteria Carótida sana utilizando Modelo Carreau-Yasuda para $Re=1241$. C) Para arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Ostwald-de Waele para $Re=1200$ y D) Para arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Carreau-Yasuda para $Re=1241$.

A partir de la bifurcación en la arteria Carótida, la velocidad tiene otra componente la cual es la componente z de velocidad. Debido al corte que se realizó en la figura tridimensional es posible observar las líneas de contorno de esta componente.

A continuación, en la **figura (35)** se muestran los resultados obtenidos de líneas de contorno de la componente z de velocidad con el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda para los números de Reynolds 400 y 536, respectivamente, para la arteria Carótida sana y para la arteria con 60% de Estenosis.

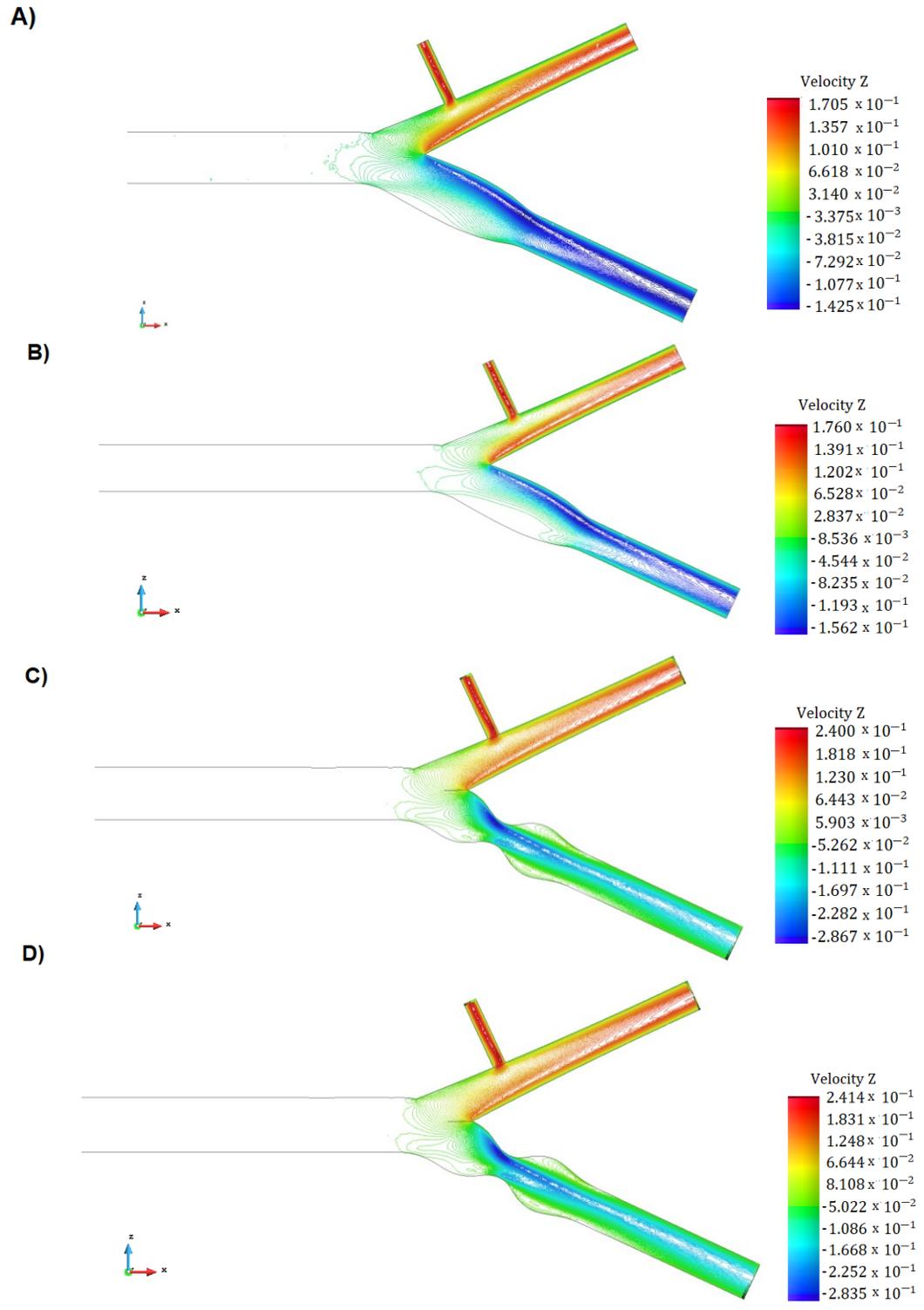
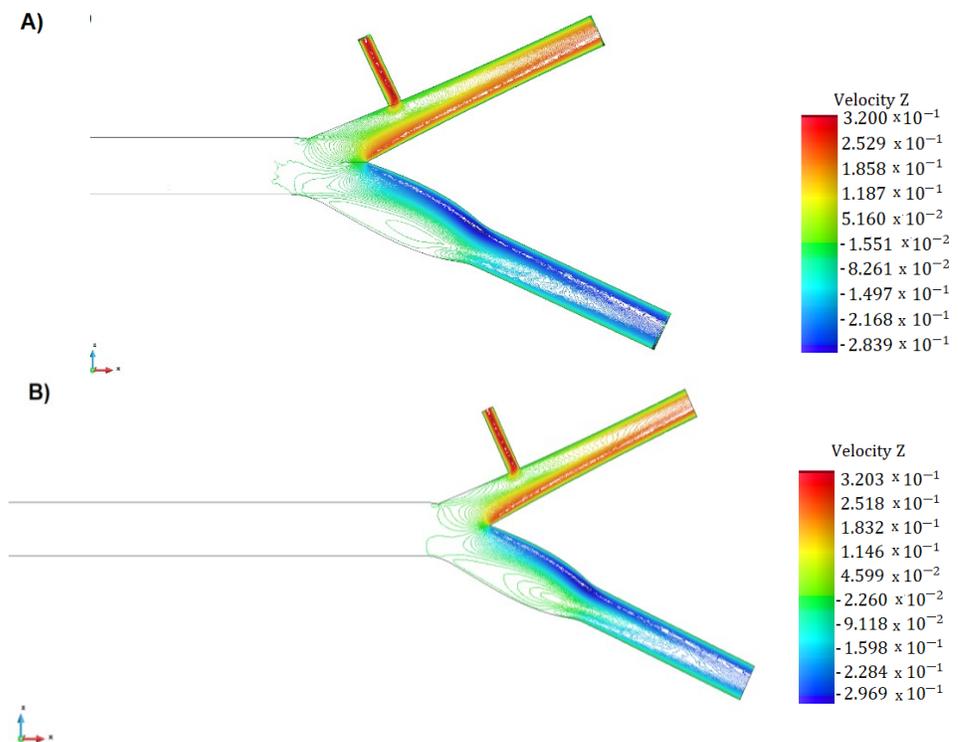


Figura 35. Línea de contorno de la componente z de la velocidad para A) Arteria Carótida sana utilizando Modelo Ostwald-de Waele para $Re=400$. B) Arteria Carótida sana utilizando Modelo Carreau-Yasuda para $Re=536$ C) Arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Ostwald-de Waele para $Re=400$ y para D) Arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Carreau-Yasuda para $Re=536$.

De la figura anterior se observa que los valores de la componente z de velocidad, en ambos modelos son muy similares. También es posible observar que la componente z también tiene valores negativos en el bulbo de la arteria Carótida Interna, para la arteria sana y en la zona con Estenosis.

En la **figura (36)** se muestran las líneas de contorno de la componente z de velocidad obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda, para los números de Reynolds 800 y 925, respectivamente. Nuevamente se observan valores negativos de la componente z de velocidad en el bulbo de la arteria Carótida sana y en la zona con Estenosis. Se puede observar que los valores que se muestran en las escalas de *velocidad z* son similares entre ambos modelos, debido a que se introduce el mismo flujo volumétrico como condición de entrada.

En la **figura (37)** se muestran líneas de contorno de la componente z de velocidad obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda, para los números de Reynolds 1200 y 1241, respectivamente.



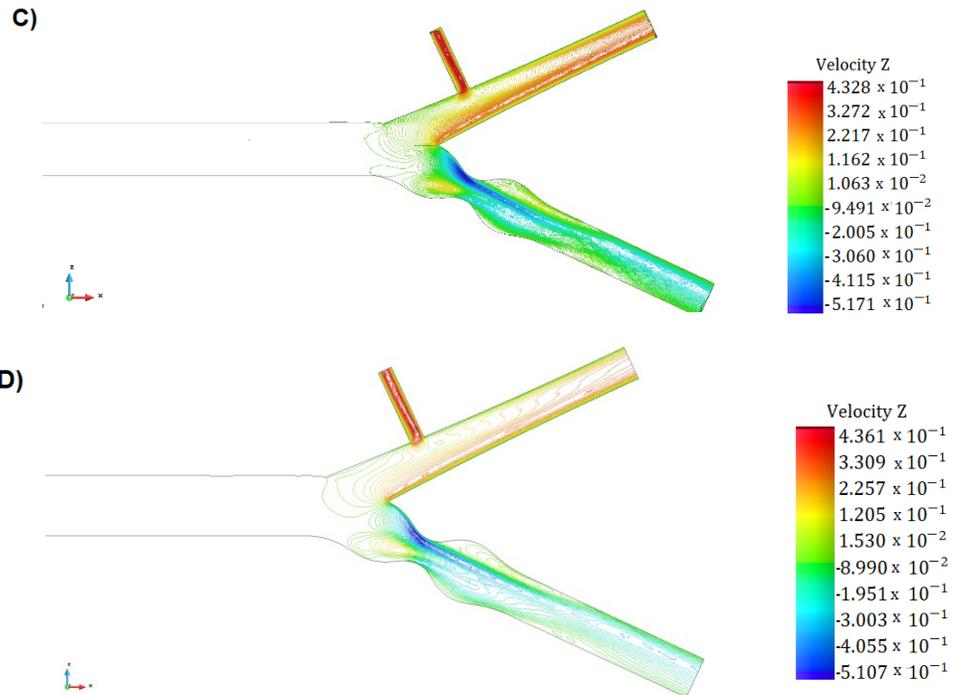
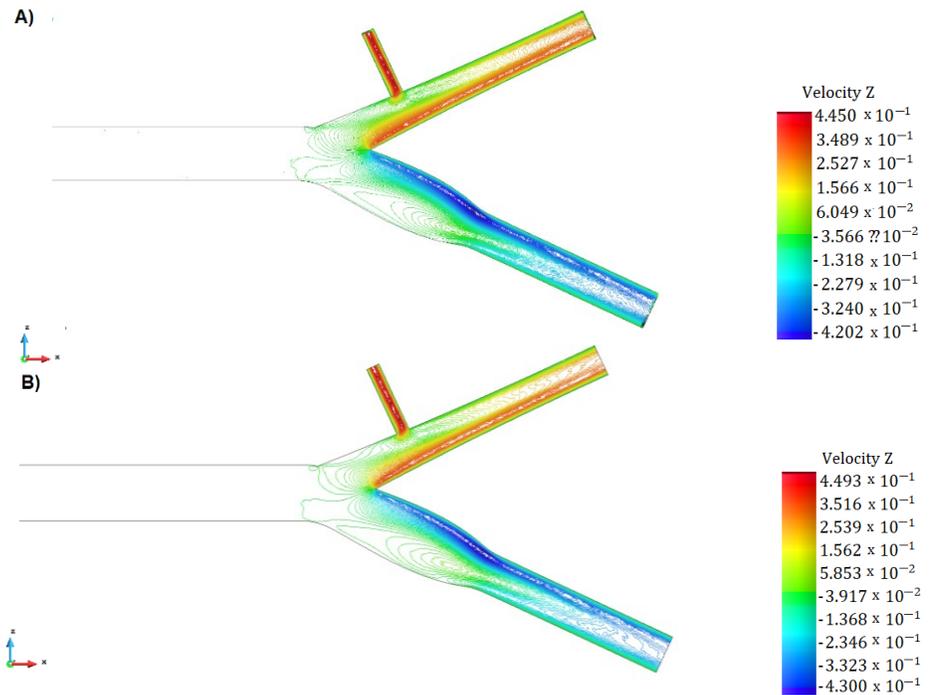


Figura 36. Línea de contorno de la componente z de la velocidad para A) Arteria Carótida sana utilizando Modelo Ostwald-de Waele para $Re=800$. B) Arteria Carótida sana utilizando Modelo Carreau-Yasuda para $Re=925$ C) Arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Ostwald-de Waele para $Re=800$ y para D) Arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Carreau-Yasuda para $Re=925$.



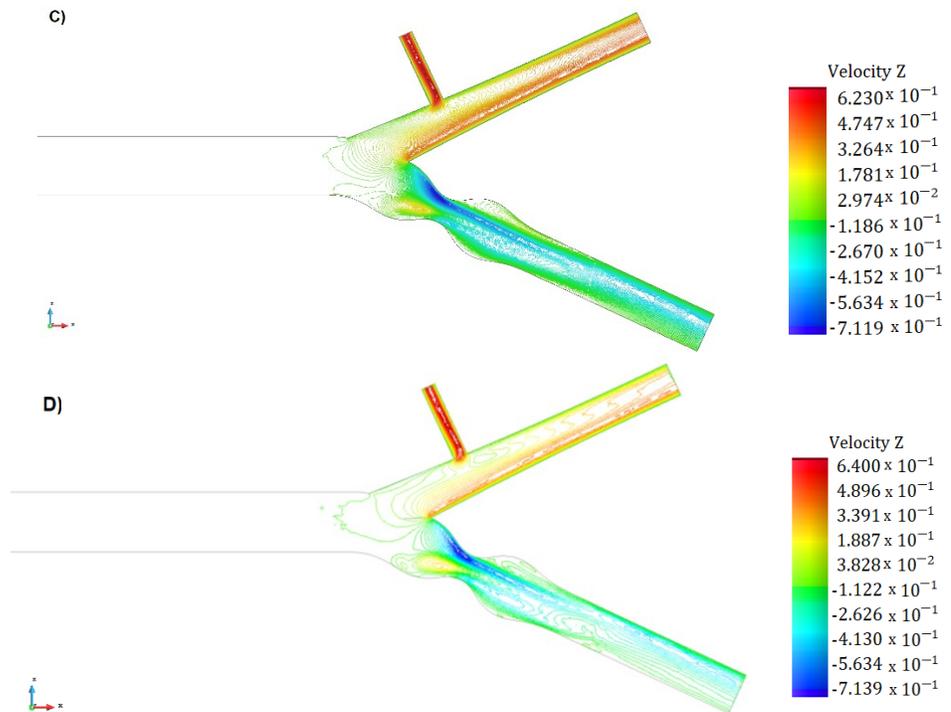


Figura 37. Línea de contorno de la componente z de la velocidad para A) Arteria Carótida sana utilizando Modelo Ostwald-de Waele para $Re=1200$. B) Arteria Carótida sana utilizando Modelo Carreau-Yasuda para $Re=1241$ C) Arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Ostwald-de Waele para $Re=1200$ y para D) Arteria Carótida con 60% de Estenosis utilizando modelo Carreau-Yasuda para $Re=1241$.

Para entender mejor el comportamiento de la sangre en la arteria Carótida se graficó la velocidad axial de la velocidad de la arteria Carótida Interna en las secciones S_1 , S_2 y S_3 . La sección S_1 corresponde a la sección de entrada de la arteria Carótida Interna sana y de la arteria Carótida Interna con Estenosis, S_2 corresponde a la zona con mayor diámetro en el bulbo en la arteria Carótida sana y a la zona con menor diámetro en la Estenosis en la arteria con Estenosis, S_3 corresponde a la salida en ambos casos. En la **figura (38)** se muestra las ubicaciones de estas secciones en la arteria Carótida sana y en la **figura (39)** se muestra las ubicaciones de las secciones S_1 , S_2 y S_3 en la arteria con 60% de Estenosis.

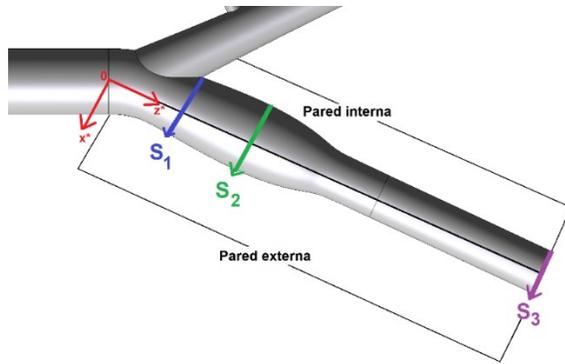


Figura 38 . Secciones S_1, S_2 y S_3 de la arteria Carótida sana. Se denominará z^* al eje axial de la arteria Carótida Interna.

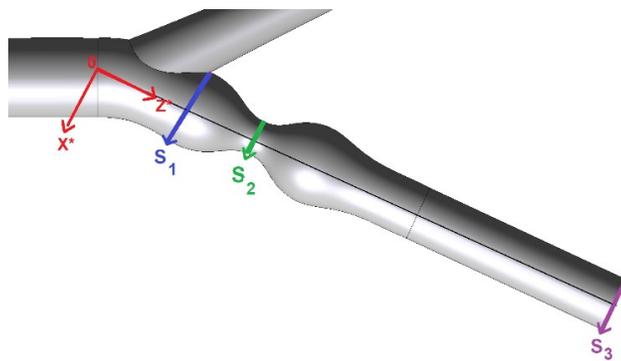


Figura 39. Secciones S_1, S_2 y S_3 de la arteria Carótida con 60% de Estenosis. Se denominará z^* al eje axial de la arteria Carótida Interna.

A continuación, se muestran los gráficos realizados de velocidad axial con respecto al eje z^* en función del diámetro de la arteria Carótida Interna, en las secciones S_1, S_2 y S_3 . En la **figura (40)** se comparan perfiles de velocidad axial obtenidos S_1 cuando se tienen una misma condición de entrada para los modelos Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda, para la arteria Carótida sana y la arteria Carótida con 60% de Estenosis.

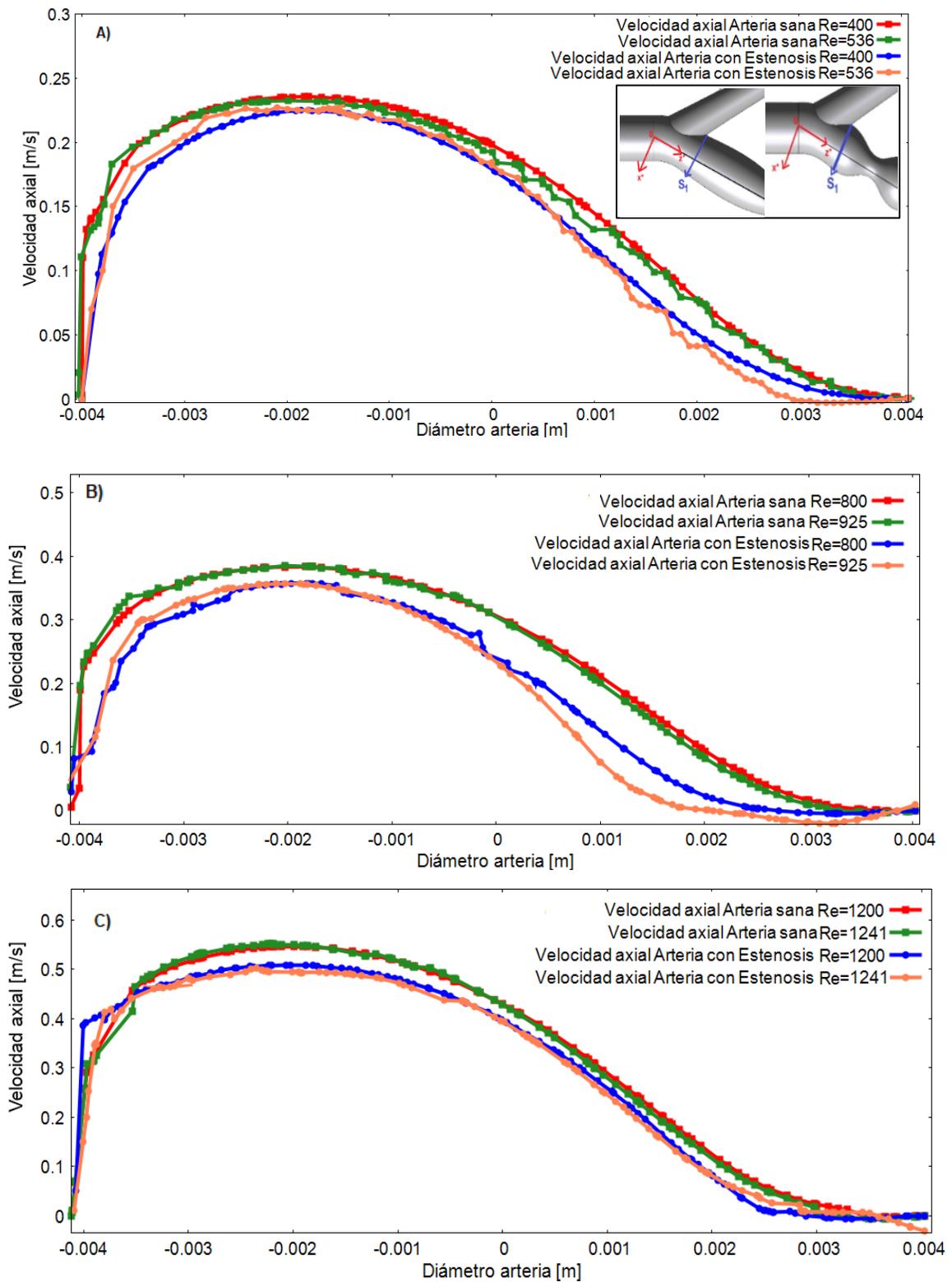


Figura 40. Gráficos de velocidad axial en sección 1 para arteria tridimensional para arteria Carótida sana y con Estenosis utilizando modelos A) Ostwald-de Waele para $Re=400$ y Carreau-Yasuda para $Re=536$. B) Ostwald-de Waele para $Re=800$ y Carreau-Yasuda para $Re=925$. C) Ostwald-de Waele para $Re=1200$ y Carreau-Yasuda para $Re=1241$.

Para $Re=400$ y $Re=536$, de la arteria Carótida sana (curvas de color rojo y verde), los valores de la curva de velocidad axial comienzan a decaer a partir del diámetro $0.0037(m)$ de S_1 hasta llegar a valores cercanos a cero. En la arteria Carótida sana, para $Re=400$ la velocidad axial no alcanza valores negativos, por lo que no hay una zona de recirculación, sin embargo, para $Re=536$ usando el modelo Carreau-Yasuda, la velocidad axial decae hasta valores negativos, formándose una *zona de recirculación*. Para $Re=800$, a partir del diámetro $0.0037(m)$ de S_1 los valores de la velocidad axial comienzan a descender a valores negativos, mientras que para $Re=925$, lo hace a partir del diámetro $0.0032(m)$ de S_1 hasta el término de esta sección, por lo que para este número de Reynolds la zona de recirculación tiene una mayor longitud, ya que comienza desde una posición anterior. Tanto como para $Re=1200$ y $Re=1241$ el gradiente de velocidad axial comienza a disminuir a partir de $0.0034(m)$ de S_1 y la velocidad axial comienza a decaer a valores negativos hasta el final de S_1 . Se observa que las curvas de velocidad axial en S_1 para la arteria sana aumentan de amplitud a medida que aumenta el número de Reynolds para los dos modelos utilizados, además que los gráficos obtenidos con los modelos Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda para la arteria Carótida sana son muy similares cuando se ingresa una misma condición de entrada, aun cuando el número de Reynolds no sea el mismo.

En la arteria Carótida con Estenosis (curvas de color azul y coral), para $Re=400$, los valores de velocidad axial disminuyen a valores cercanos a ceros cerca de la pared externa de la arteria Carótida Interna, sin embargo, no hay valores negativos de velocidad axial en S_1 para este número de Reynolds, por lo que no hay zona de recirculación. Para los números de Reynolds 800 y 1200 , en la arteria Carótida con Estenosis, se observa que aproximadamente a partir del diámetro $0.003(m)$ de S_1 los valores de velocidad axial comienzan a descender lentamente a valores negativos. Es decir, que en la sección S_1 ya existe una *zona de recirculación* la cual se ubica cerca a la pared externa de la arteria Carótida Interna para esos números de Reynolds con el modelo Ostwald-de Waele, para una estenosis del 60% . Los mismo ocurre en la arteria sana, como se explicó anteriormente. Para el número de Reynolds 536 , utilizando el modelo de Carreau-Yasuda, se observa que a partir del diámetro $0.003(m)$ de S_1 los valores de velocidad axial comienzan a disminuir a valores negativos, por lo que también se forma una zona de recirculación cerca de la pared externa de la arteria Carótida Interna. Para $Re=925$ y $Re=1241$ los valores de velocidad axial comienzan a disminuir a partir del valor $0.002(m)$ y de $0.003(m)$ de S_1 . Por lo que utilizando el modelo Carreau-Yasuda también se forman *zonas de recirculación* en la arteria Carótida Interna cuando presenta Estenosis. Nuevamente se observa que los gráficos de velocidad axial son muy similares cuando se ingresa una misma condición de entrada en la arteria Carótida con Estenosis.

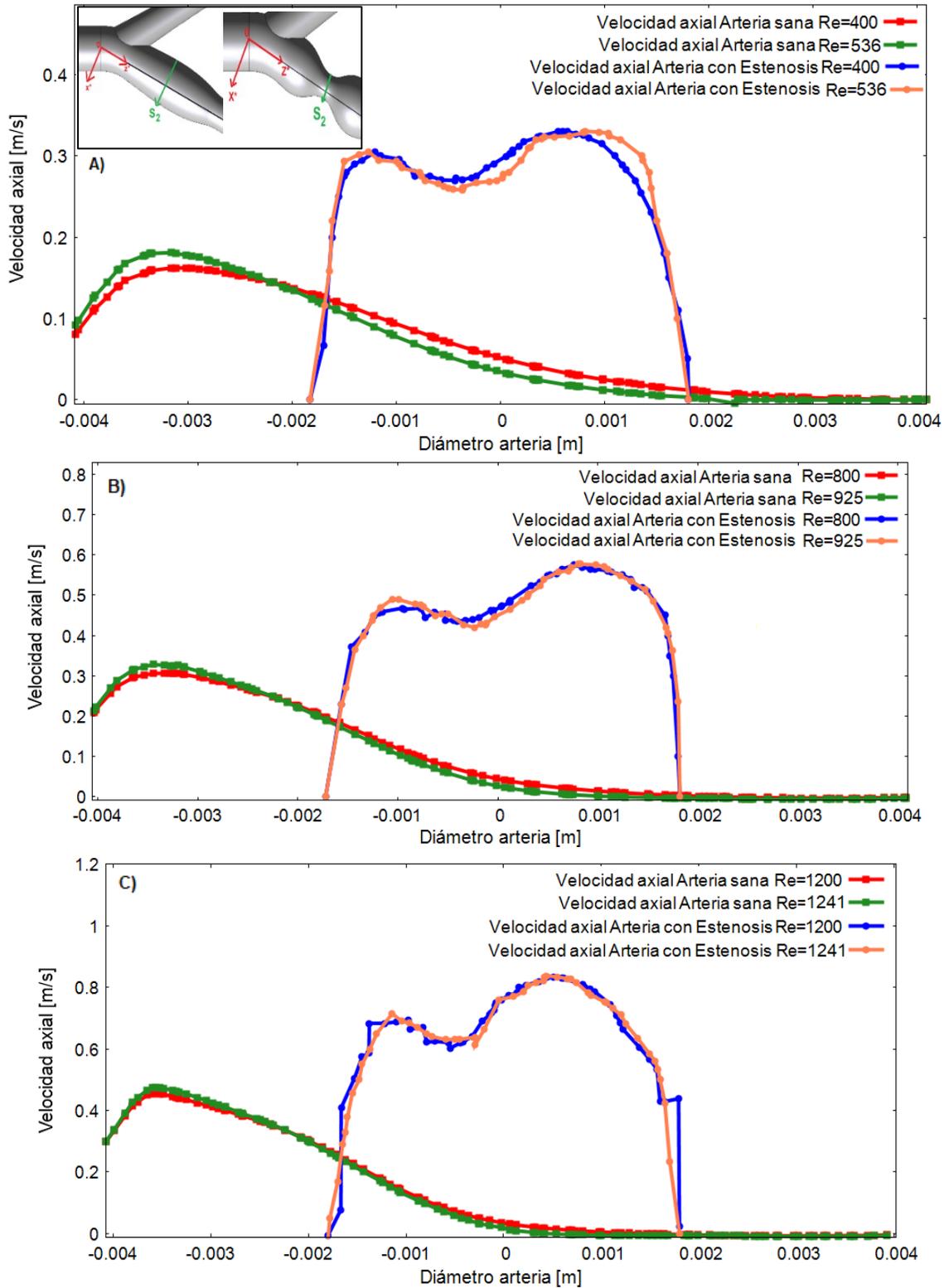


Figura 41. Gráficos de velocidad axial en S_2 para arteria tridimensional para arteria Carótida sana y con Estenosis utilizando modelos A) Ostwald-de Waele para $Re=400$ y Carreau-Yasuda para $Re=536$. B) Ostwald-de Waele para $Re=800$ y Carreau-Yasuda para $Re=925$. C) Ostwald-de Waele para $Re=1200$ y Carreau-Yasuda para $Re=1241$.

En la sección S_2 , la velocidad axial para la arteria Carótida sana alcanza valores negativos para los números de Reynolds 400 y 536, utilizando el modelo Ostwald-de Waele (curvas de color rojo) y Carreau-Yasuda (curvas de color verde), respectivamente. Para $Re=400$ la velocidad axial decae a valores negativos desde $0.0035 (m)$ hasta el final de la sección S_2 , mientras que para $Re=536$ ocurre desde $0.0023 (m)$ hasta el final de S_2 . Para los números de Reynolds 800 y 925 la velocidad axial comienza a decaer a valores negativos desde una posición anterior en S_2 que para los números de Reynolds 400 y 536; para $Re=800$ decae a partir de $0.0021 (m)$ hasta el final de la sección S_2 y para $Re=925$ decae a partir de $0.0018 (m)$, para luego aumentar lentamente hacia el final de S_2 . Para el caso $Re=1200$, utilizando el modelo Ostwald-de Waele la velocidad axial comienza a tener valores negativos a partir de $0.0023 (m)$ y cerca de $0.0035 (m)$ aumenta lentamente hacia el final de S_2 , para $Re=1241$ utilizando el modelo Carreau-Yasuda la velocidad axial decae a valores negativos desde $0.00054 (m)$ y aumenta lentamente a partir de $0.0037 (m)$. Para todos los números de Reynolds utilizando el modelo Ostwald-de Waele se forman zonas de recirculación en la sección S_2 , lo mismo ocurre para el modelo Carreau-Yasuda. La diferencia entre los modelos es que las zonas de recirculación que se forman con el modelo Carreau-Yasuda abarcan un mayor diámetro de la sección S_2 de la arteria Carótida sana, que con el modelo Ostwald-de Waele, en todos los números de Reynolds. Se observa de las figuras **(41.A)**, **(41.B)** y **(41.C)** que las amplitudes de velocidad axial para la arteria Carótida sana aumenta a medida que el flujo volumétrico ingresado como condición de entrada aumenta y que las curvas de velocidad axial entre ambos modelos utilizados son similares cuando se impone una misma condición de entrada.

La sección S_2 para la arteria Carótida con 60% de Estenosis corresponde a la sección con menor diámetro de la Estenosis, por lo que, debido a la disminución del diámetro, la velocidad axial alcanza amplitudes mayores que en comparación a las secciones S_2 de la arteria Carótida sana. Para el número de Reynolds 400, el perfil de velocidad axial alcanza un *peak* de velocidad axial cerca de $0.3 \left(\frac{m}{s}\right)$ en los puntos $-0.0012 (m)$ y $0.00059 (m)$ de S_2 y para $Re=536$ los *peaks* de velocidad axial se alcanzan en $-0.0012 (m)$ y en $0.00081 (m)$ de S_2 . Para los números de Reynolds 800, 925, 1200 y 1241, el perfil de velocidad axial tiene un máximo global hacia el lado de la pared externa de la arteria Carótida Interna y otro máximo local hacia el lado de la pared interna de la arteria, por lo que ya no tienen igual valor, hay una diferencia entre ambos máximos la cual aumenta a medida que el número de Reynolds crece. En la arteria con Estenosis no hay formación de zonas de recirculación, como sí ocurre en la arteria Carótida sana, es decir, todas las velocidades axiales en S_2 son positivas. Se observa que las curvas de velocidad axial entre los dos modelos son similares cuando se tiene igual condición de entrada.

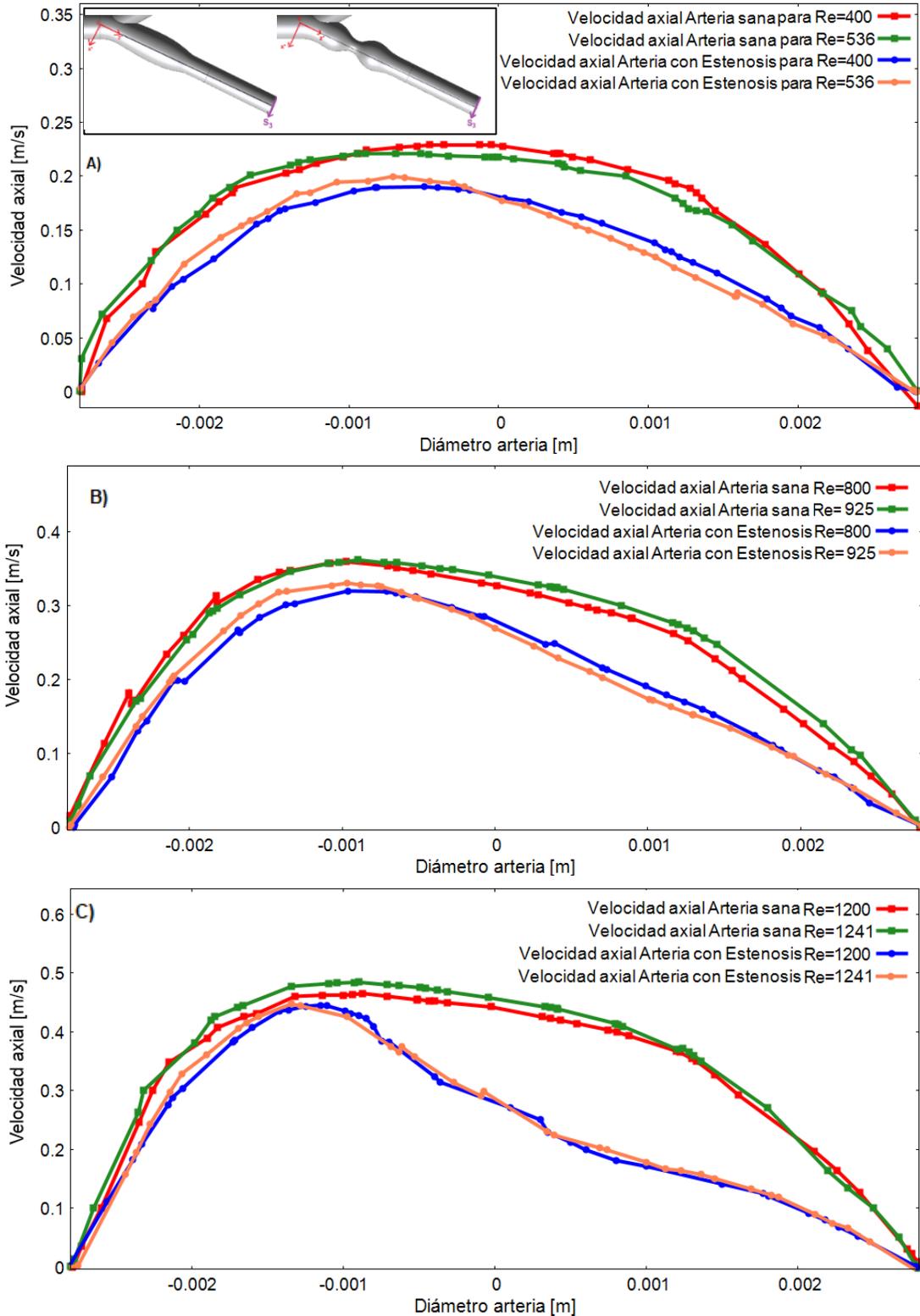


Figura 42. Gráficos de velocidad axial en S_3 para arteria tridimensional para arteria Carótida sana y con Estenosis utilizando modelos A) Oswald-de Waele para $Re=400$ y Carreau-Yasuda para $Re=536$. B) Oswald de Waele para $Re=800$ y Carreau-Yasuda para $Re=925$. C) Oswald-de Waele para $Re=1200$ y Carreau-Yasuda para $Re=1241$.

Finalmente se llega a la sección S_3 , que corresponde a la salida de la arteria Carótida Interna. Se observa que en las curvas de velocidad axial para $Re=400$ y $Re=536$ para la arteria Carótida sana se forma la “zona tapón” debido al comportamiento pseudoplástico de la sangre. Para los números de Reynolds 800 y 925, 1200 y 1241, la curva del perfil de velocidad axial pierde su simetría con respecto a $0(m)$ de S_3 . Para los números de Reynolds 800 y 925 la velocidad axial alcanza su valor máximo en $-0.001 (m)$ y para los números de Reynolds 1200 y 1241 la velocidad axial alcanza su valor máximo en $-0.0009 (m)$ de S_3 . Se observa de las curvas de velocidad axial para la arteria Carótida sana de las figuras **(42.A)**, **(42.B)** y **(42.C)** que las amplitudes de velocidad axial aumenta a medida que el flujo volumétrico ingresado como condición de entrada aumenta.

Las curvas de velocidad axial para la arteria Carótida con 60% de Estenosis en S_3 pierde la forma parabólica para los números de Reynolds 400 y 536. Para estos números de Reynolds el gradiente de velocidad axial disminuye a partir de $-0.0007 (m)$ hasta el final de la sección S_3 , lo que explica lo forma asimétrica de la curva de perfil de velocidad axial para la arteria con Estenosis. Para los números de Reynolds 800 y 925 la curva de perfil de velocidad axial sigue siendo asimétrica, para estos valores de números de Reynolds el gradiente de velocidad disminuye a partir de $0.00076(m)$ y de $0.0008 (m)$ de S_3 . Finalmente, para los números de Reynolds 1200 y 1241 el gradiente de velocidad axial disminuye a partir de $0.0001 (m)$ hasta $0.00046 (m)$, punto donde el gradiente de velocidad aumenta

Se observa que los perfiles de velocidad axial en la salida de la arteria Carótida Interna con 60% de Estenosis es muy diferente a los perfiles de velocidad axial de la arteria Carótida sana, por lo que habrá una diferencia de flujo volumétrico en la salida de la arteria Carótida Interna cuando ésta presente Estenosis y cuando se encuentre sana. Además, se puede observar que las curvas obtenidas con los dos modelos son muy similares cuando se aplica la misma condición de entrada, esto es, para $Re=400$ y $Re=764$, $Re=800$ y $Re=925$, $Re=1200$ y $Re=1241$.

A continuación, se muestran las *streamlines* obtenidas de las simulaciones utilizando el modelo Ostwald-de Waele para los números de Reynolds 400, 800 y 1200. De estas imágenes se puede captar el flujo helicoidal que se forma en el bulbo de la arteria Carótida Interna de la arteria Carótida sana. Las líneas de color azul las *zonas de recirculación* las cuales se forman en el bulbo de la arteria Carótida Interna y que crecen a medida que el número de Reynolds aumenta.

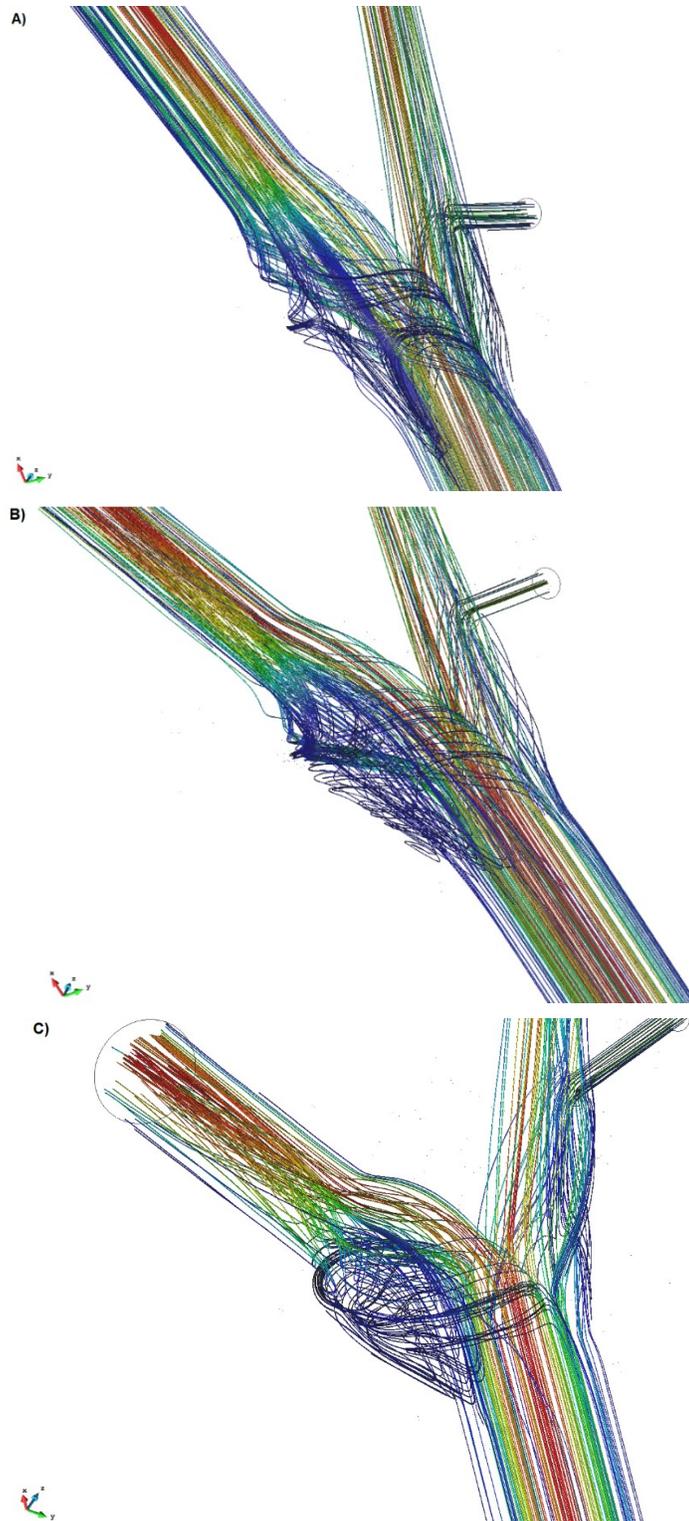
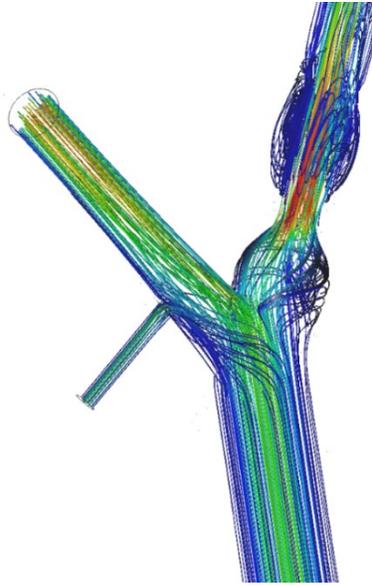
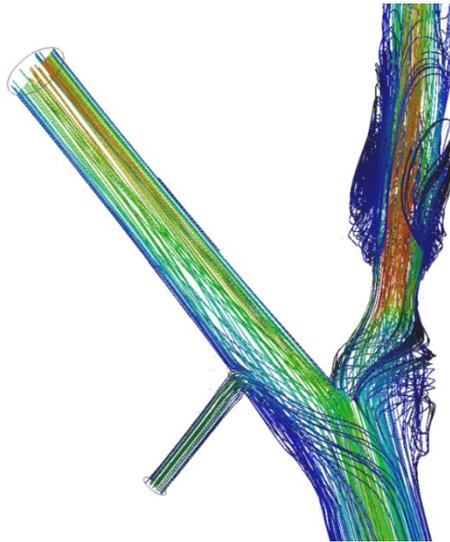


Figura 43. Streamlines de la arteria Carótida sana obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele para A) $Re=400$ B) $Re=800$ y C) $Re=1200$.

A)



B)



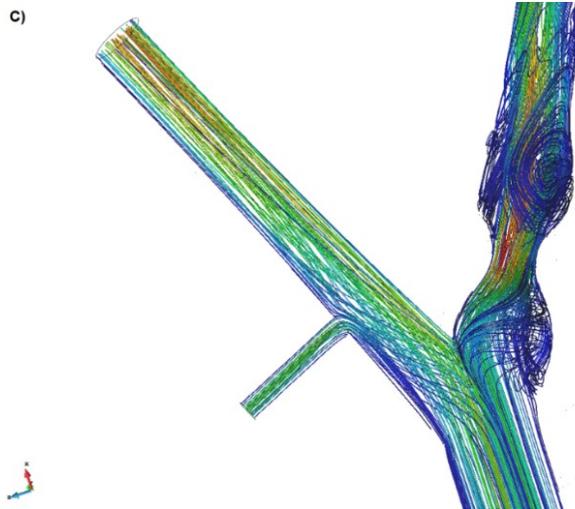


Figura 44. Streamlines de la arteria Carótida con Estenosis obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele para A) $Re=400$ B) $Re=800$ y C) $Re=1200$.

En la **figura (44)** se observan *streamlines* de la arteria Carótida con 60% de Estenosis. Se generan zonas de recirculación antes y después de la Estenosis en la arteria Carótida Interna. Las zonas de recirculación crecen a medida que el número de Reynolds aumenta.

Además de realizar simulaciones para arteria Carótida tridimensional, también se realizaron simulaciones con geometrías bidimensionales en el plano xy para arteria Carótida sana y con 60% de Estenosis. A continuación, se muestran gráficos comparativos entre velocidad axial obtenida con la geometría tridimensional y con la geometría bidimensional, para la arteria Carótida sana y con Estenosis para los números de Reynolds 400, 800 y 1200.

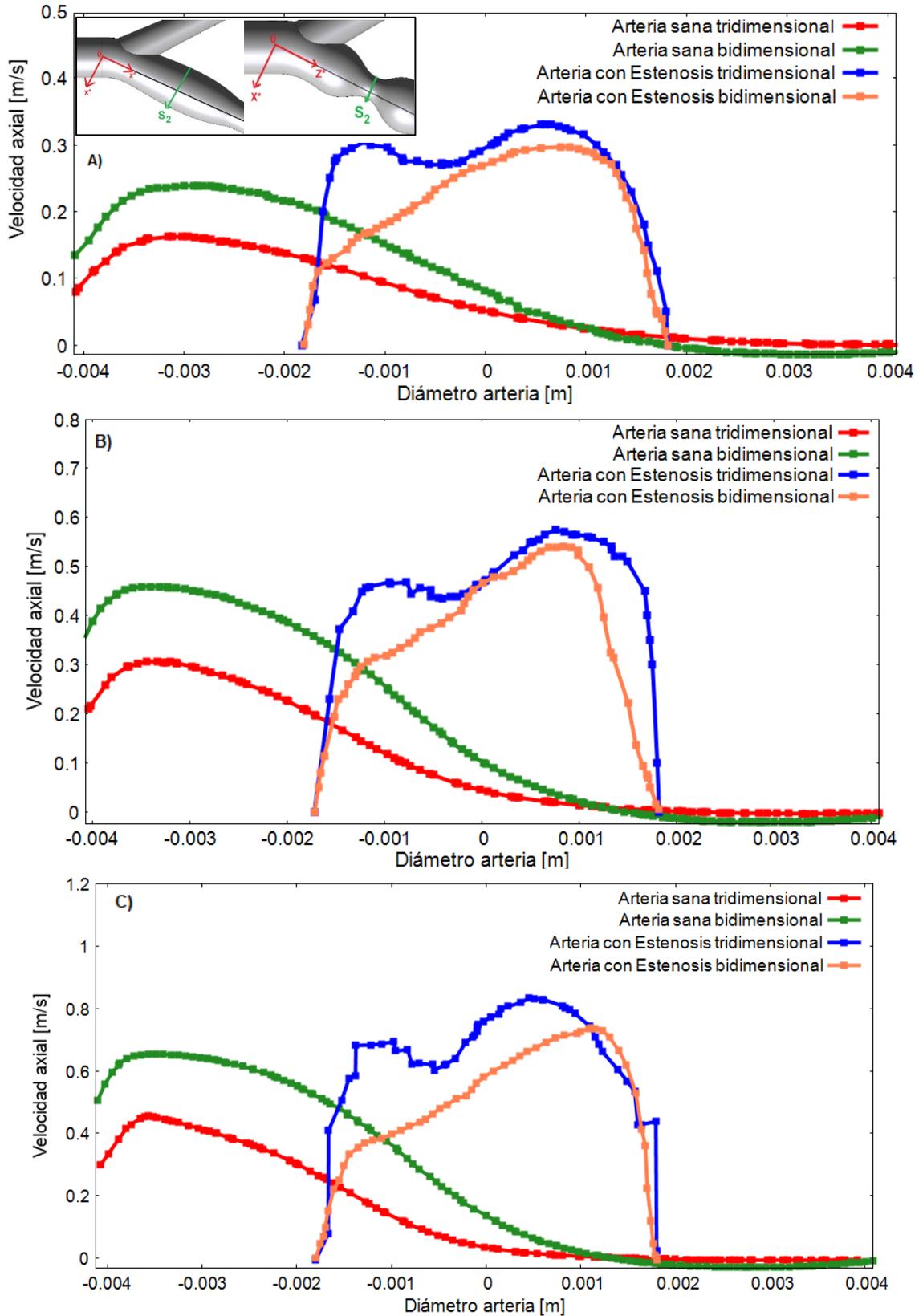


Figura 45. Gráficos comparativos de Velocidad axial en sección 2 de arteria Carótida Interna bidimensional y tridimensional para A) $Re = 400$ B) $Re = 800$ y C) $Re = 1200$.

En la **figura (45)** se comparan gráficos de velocidad axial en la sección S_2 de la arteria Carótida bidimensional con la arteria Carótida tridimensional. En la **figura (45.A)** se muestran gráficos para $Re=400$ en la sección S_2 de la arteria Carótida sana y con 60% de Estenosis. La curva de color rojo corresponde a la velocidad axial en la sección S_2 de la arteria Carótida sana tridimensional y la curva de color verde a la velocidad axial en la sección S_2 de la arteria Carótida sana bidimensional. Se observa que estas curvas presentan diferencias, la velocidad axial de la arteria bidimensional decae a valores negativos, lo que implica que se forma una zona de recirculación cerca de la pared externa de la arteria Carótida Interna, sin embargo, para $Re=400$ la arteria tridimensional no presenta una zona de recirculación. Además, se observa que la velocidad axial de la arteria bidimensional alcanza una mayor amplitud que la arteria tridimensional, esto se debe a que la arteria bidimensional no capta los efectos tridimensionales que se forman en los diferentes planos xz , sino que solamente se resuelve el problema en el plano xy . Para $Re=800$ y $Re=1200$ la arteria bidimensional sana decae a valores negativos más bajos que en la arteria tridimensional sana y a la vez, alcanza amplitudes mayores que las alcanzadas por la arteria Carótida tridimensional sana.

Las curvas de color azul corresponden a la velocidad axial en S_2 de la arteria Carótida tridimensional con 60% de Estenosis y la curva de color coral corresponde a la velocidad axial en S_2 de la arteria Carótida bidimensional con 60% de Estenosis. Se observa que hay diferencias entre la curva de velocidad axial de la arteria bidimensional con Estenosis con la curva de velocidad axial de la arteria tridimensional con Estenosis. La arteria bidimensional sólo capta un máximo en la sección S_2 , mientras que la arteria tridimensional capta dos máximos, como se explicó anteriormente. Lo mismo ocurre para los números de Reynolds 800 y 1200, donde la velocidad axial de la arteria bidimensional con Estenosis capta solamente un máximo y no dos como es el caso de la arteria tridimensional.

En la **figura (46)** se muestran dos imágenes de líneas de contorno de la componente x de velocidad, la primera corresponde a la arteria Carótida sana bidimensional y la segunda a la arteria Carótida sana tridimensional, se puede observar que en el bulbo de la arteria Carótida Interna de la arteria bidimensional los valores de la componente x de velocidad alcanza valores más bajos que en la arteria tridimensional, según las escalas de velocidad mostrados a continuación. Además, es posible observar que, en la arteria bidimensional, al sólo estar en el plano xy , no se captan las zonas de recirculación de forma helicoidal que sí se forman en la arteria tridimensional en el bulbo de la arteria Carótida Interna sana.

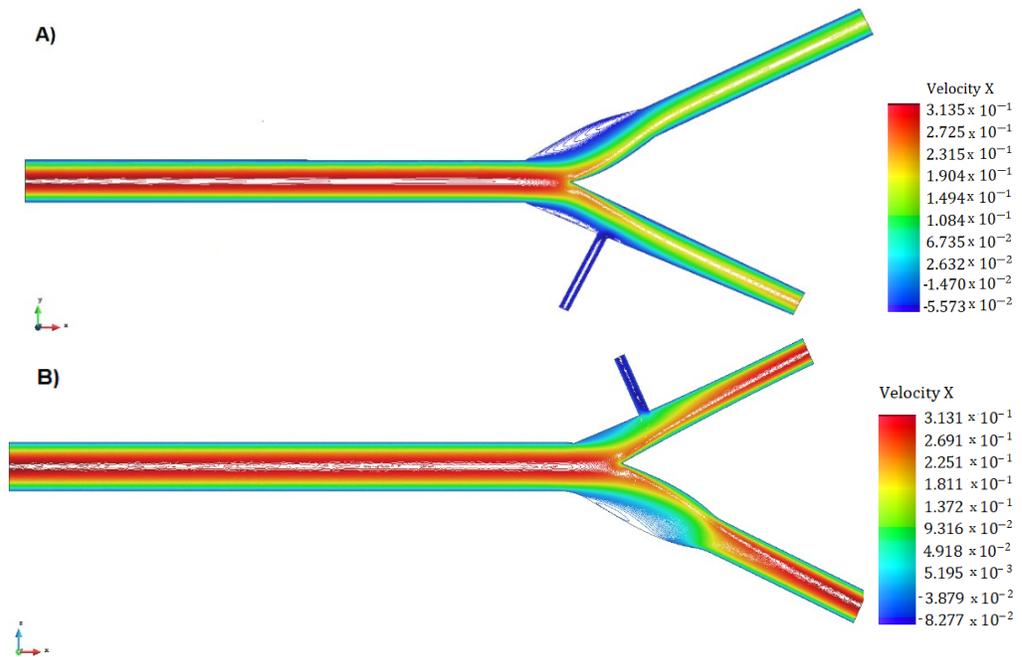


Figura 46. Líneas de contorno de la componente x de la velocidad de A) Arteria bidimensional B) Arteria tridimensional.

En la **figura (47)** se muestran dos imágenes de líneas de contorno de la componente x de velocidad, la primera corresponde a la arteria Carótida bidimensional con 60% de Estenosis y la segunda a la arteria Carótida tridimensional con 60% de Estenosis, se puede observar que en el bulbo de la arteria Carótida Interna de la arteria bidimensional los valores de la componente x de velocidad alcanza valores más bajos que en la arteria tridimensional.

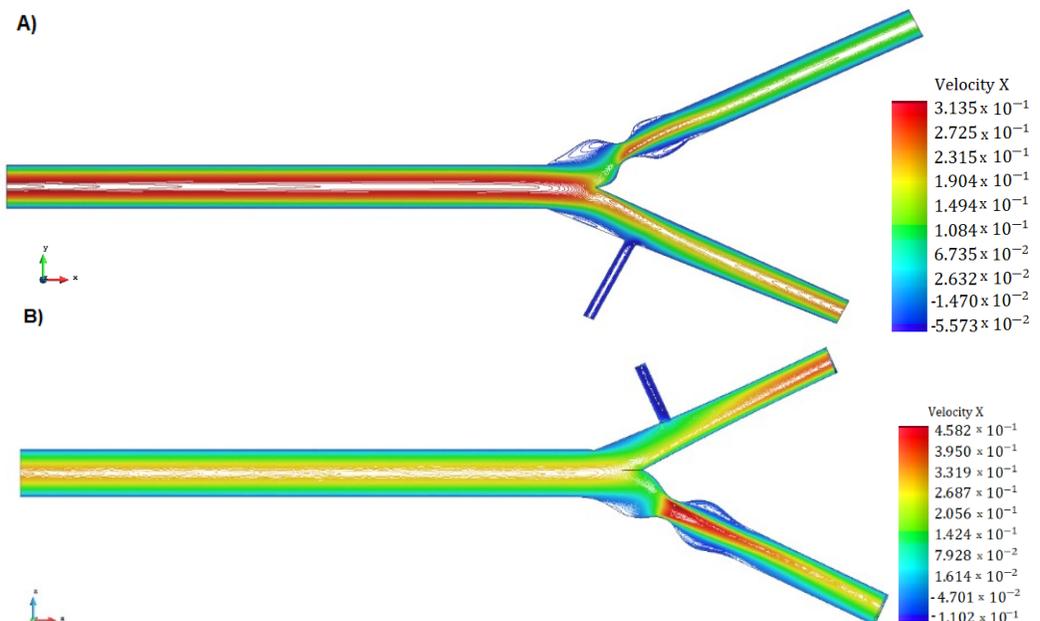


Figura 47. Líneas de contorno de la componente x de la velocidad de A) Arteria bidimensional con 60% de Estenosis B) Arteria tridimensional con 60% de Estenosis.

Debido a que la sangre es un fluido no-Newtoniano, su comportamiento pseudoplástico se ve reflejado en la viscosidad. A continuación, se muestran perfiles de viscosidad en las secciones con sus respectivos perfiles de velocidad axial.

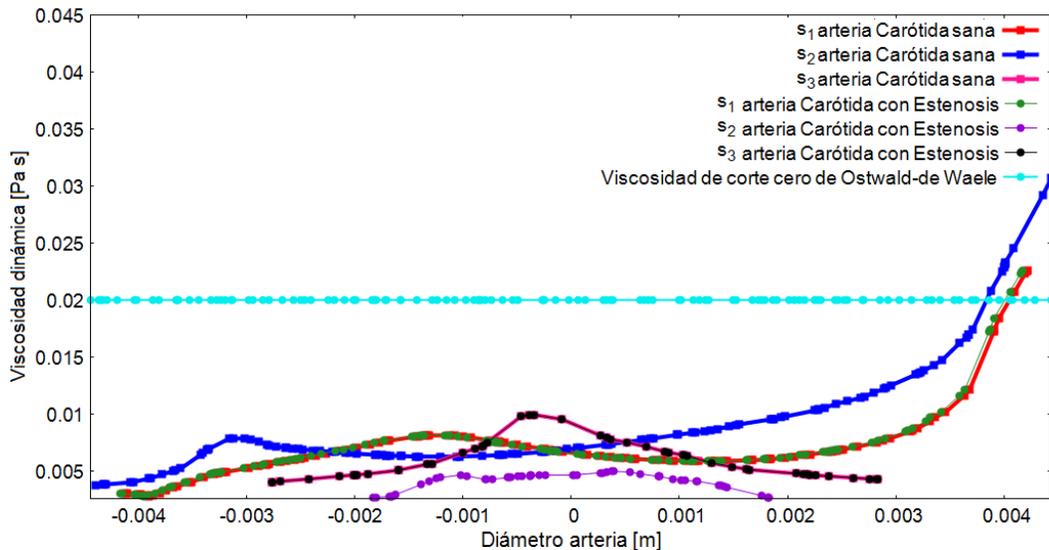


Figura 48. Perfiles de viscosidad dinámica con modelo Ostwald-de Waele en arteria Carótida tridimensional sana y con 60% de Estenosis para $Re=400$.

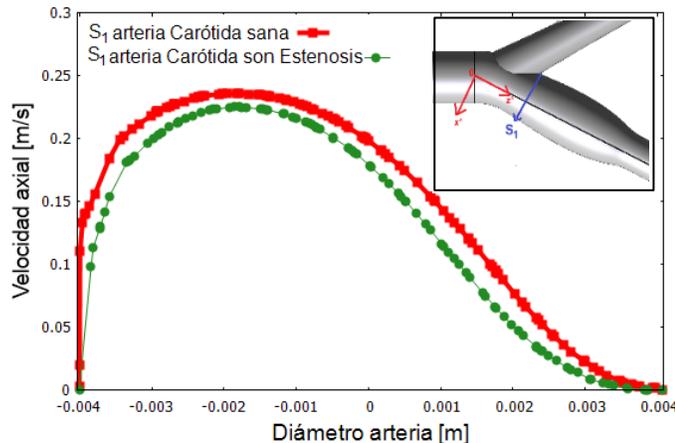


Figura 49. Perfil de velocidad axial obtenidos con modelo Ostwald-de Waele para arteria Carótida sana y con 60% de Estenosis en sección S_1 para $Re=400$.

De la **figura (48)**, se observa que los perfiles de viscosidad para la arteria sana y con Estenosis son muy similares en la sección S_1 . Los perfiles de viscosidad, en la sección S_1 , tanto como para la arteria sana como para la arteria con Estenosis (curvas de color rojo y verde, respectivamente) aumentan lentamente hasta llegar a un máximo cercano en $-0.0015(m)$, para luego volver a disminuir, además a partir del punto $0.0037 (m)$ la viscosidad comienza a aumentar hasta el final de la sección S_1 , lo que debido a las propiedades pseudoplásticas de la sangre se gatilla en una disminución paulatina del gradiente de velocidad axial, reflejándose en el perfil de velocidad axial, donde la velocidad disminuye lentamente hasta llegar a valores cercanos a cero hasta el final de la sección S_1 , como se observa en la **figura (49)**.

Luego en la sección S_2 se observa que los perfiles de viscosidad de la arteria sana y de la arteria con Estenosis son diferentes debido a la disminución de diámetro que presenta la arteria cuando tiene Estenosis (**Figura 50**). En esta sección, en la arteria Carótida sana, a partir de aproximadamente 0.0039 (m) la pendiente de la curva de viscosidad comienza a aumentar rápidamente hasta el final del diámetro de esta sección, sobrepasando la viscosidad de corte cero igual a $0.02\text{ (Pa s}^n\text{)}$, llegando a un valor de $0.032\text{ (Pa s}^n\text{)}$, esto se puede evidenciar debido al comportamiento pseudoplástico de la sangre, que como se puede observar en la **figura (50.A)** la velocidad axial disminuye a valores negativos a partir de 0.0039 (m) , disminuyendo también el gradiente de velocidad axial a partir de ese punto. Para la arteria Carótida con Estenosis la viscosidad disminuye en esta sección alcanzando un valor máximo de, aproximadamente, $0.005\text{ (Pa s}^n\text{)}$, evidenciando el comportamiento no-Newtoniano de la sangre en el perfil de velocidad axial, como se observa en la curva de color morado de la **figura (50.B)**, donde se observa que hay un aumento drástico de velocidad axial cuando la arteria presenta Estenosis.

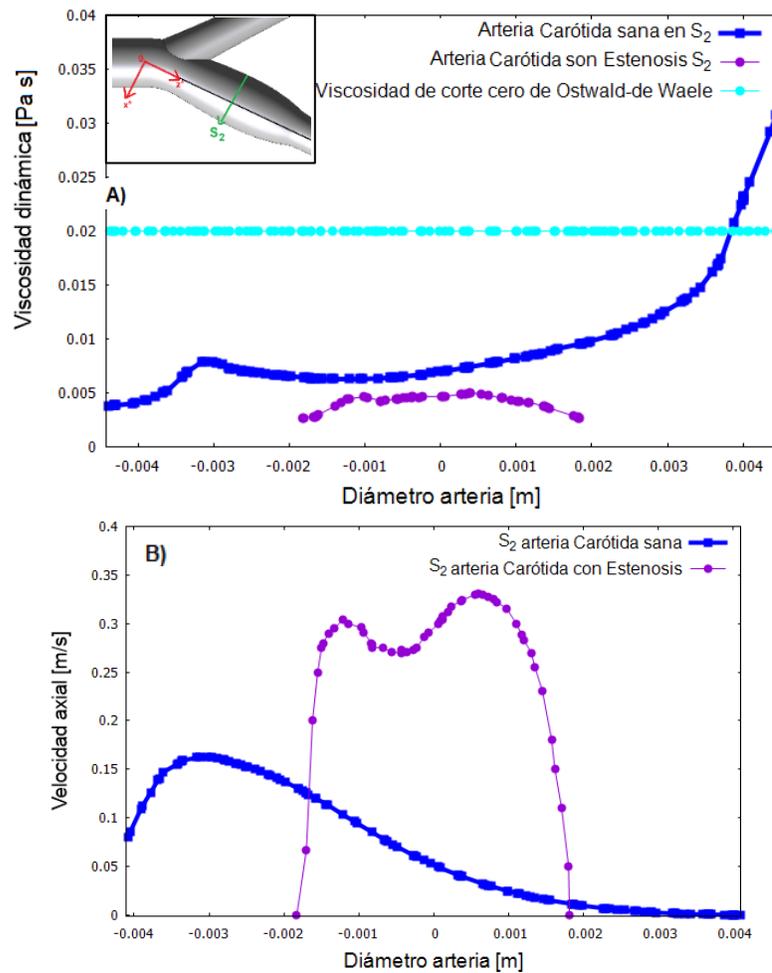


Figura 50. Comportamiento de la sangre en la sección S_2 , para arteria sana y con Estenosis, utilizando el modelo Ostwald-de Waele, para $Re=400$, en A) Perfil de viscosidad dinámica y en B) Perfil de velocidad axial.

Finalmente se tiene la sección S_3 , que corresponde a la salida de la arteria Carótida Interna, donde es posible observar que el perfil de viscosidad es simétrico en el punto -0.0003 (m) de S_3 y que se mantiene constante en el punto máximo, alcanzando un valor máximo de viscosidad 0.0099 ($Pa s^n$) en la arteria Carótida sana y un valor máximo igual a 0.0082 ($Pa s^n$) para la arteria con Estenosis, lo que, gatilla que en el perfil de velocidad axial se genere una “zona tapón” en esta sección. La viscosidad comienza a decaer en el punto de S_3 igual a 0.00028 (m).

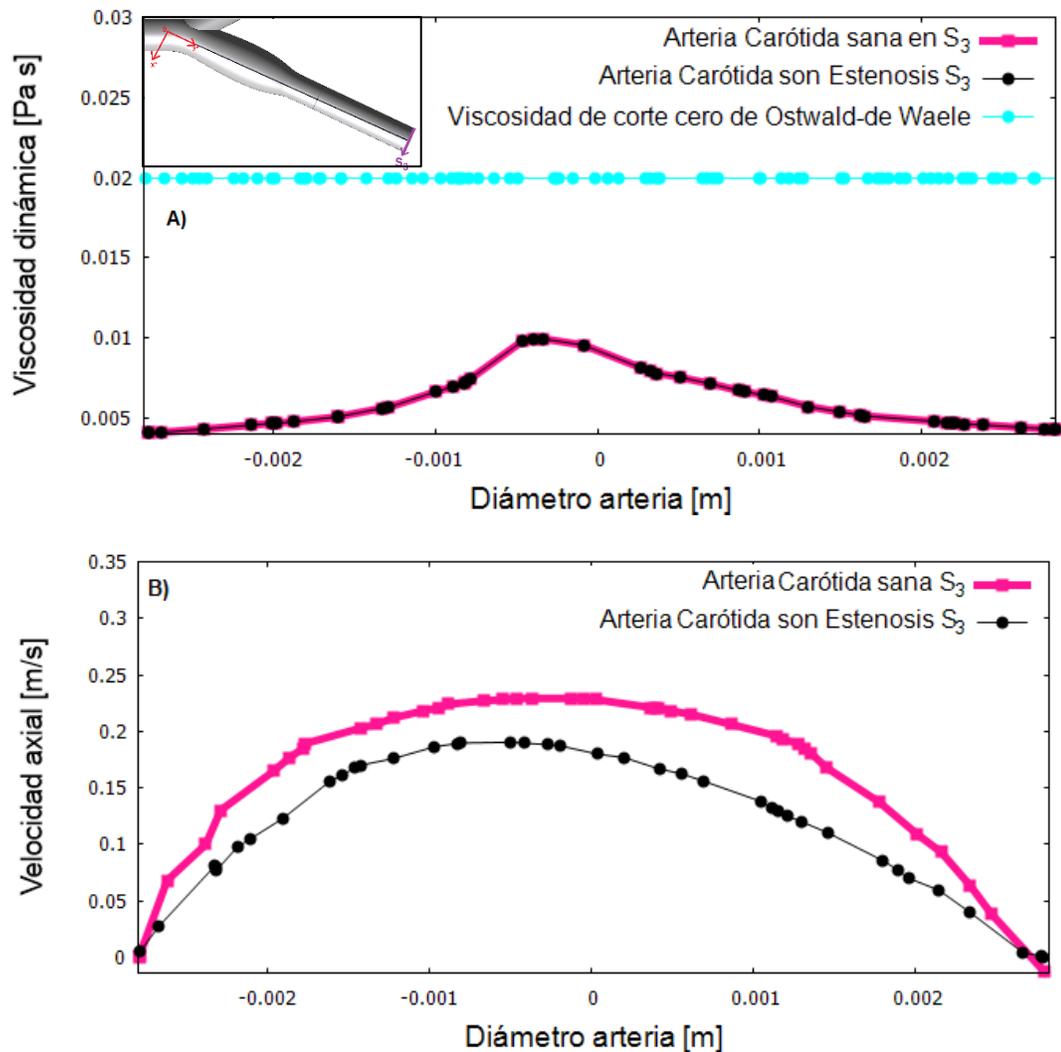


Figura 51. Comportamiento de la sangre en la sección S_3 , para arteria sana y con Estenosis, utilizando el modelo Ostwald-de Waele, para $Re=400$, en A) Perfil de viscosidad dinámica y en B) Perfil de velocidad axial.

A continuación, se muestran los perfiles de viscosidad dinámica en las secciones S_1, S_2 y S_3 obtenidos con el modelo Carreau-Yasuda para $Re=536$, para la arteria Carótida sana y para la arteria con Estenosis.

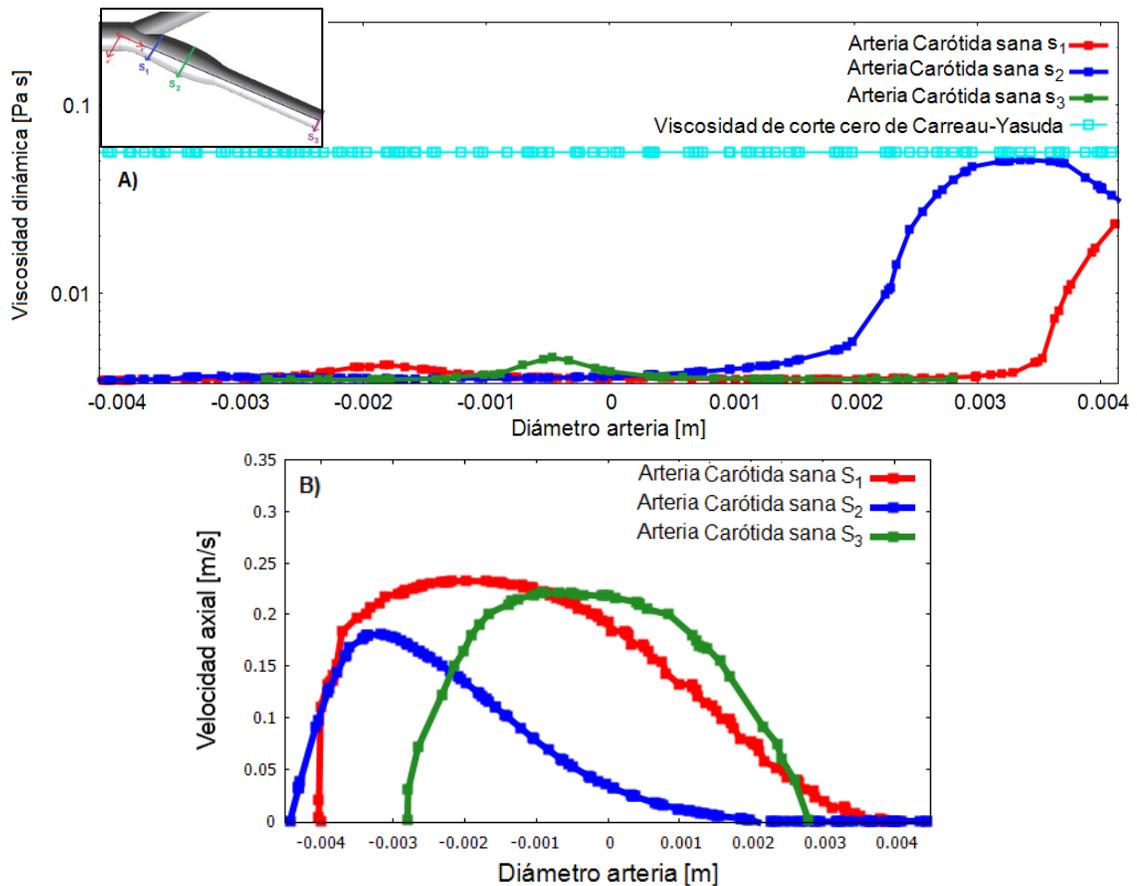


Figura 52. Comportamiento de la sangre en las secciones S_1, S_2 y S_3 en la arteria sana, utilizando el modelo Carreau-Yasuda, en A) Perfil de viscosidad dinámica y en B) Perfil de velocidad axial.

En la **figura (52.A)** se muestran los perfiles de viscosidad dinámica en las tres secciones de la arteria Carótida sana utilizando el modelo Carreau-Yasuda. En este modelo, la viscosidad de corte cero es $0.056 (Pa \cdot s)$, la cual es mayor que la viscosidad de corte del modelo Ostwald- de Waele ($0.02 Pa \cdot s^n$), debido a que el rango de valores de viscosidades son mayores al rango utilizado en el modelo Ostwald-de Waele no se alcanza a captar con más detalle los perfiles de viscosidad para este modelo. Se observa que el perfil de viscosidad en la sección S_1 (*curva de color roja*) aumenta drásticamente en el punto $0.0035 (m)$ hasta el final de la sección S_1 , por lo que debido a las propiedades pseudoplásticas de la sangre, se observa una disminución de la velocidad axial a valores cercanos a ceros e incluso a valores negativos a partir del punto mencionado, como se muestra en la **figura (52.B)**.

A partir de la posición $0.0025 (m)$ de S_2 el perfil de viscosidad aumenta llegando a un *peak* de $0.051 (Pa \cdot s^n)$, sin sobrepasar la viscosidad de corte cero debido al comportamiento pseudoplástico de la sangre, a partir $0.0025 (m)$, para el modelo Carreau-Yasuda, se puede observar una disminución en la velocidad axial a partir de $0.0025 (m)$, debido a la disminución de gradiente de velocidad axial.

Finalmente se tiene la sección S_3 , donde se observa que el perfil de viscosidad es simétrico en el punto $-0.0005(m)$ de S_3 , llegando a un valor máximo de $0.0045(Pa s)$, el cual se mantiene constante en el rango de $[-0.00071; -0.00033]$ y que, debido a las propiedades no-Newtonianas de la sangre, se gatilla en una “zona tapón” en el perfil de velocidad axial en esta sección, donde la pendiente en el *peak* de velocidad axial es cercana cero.

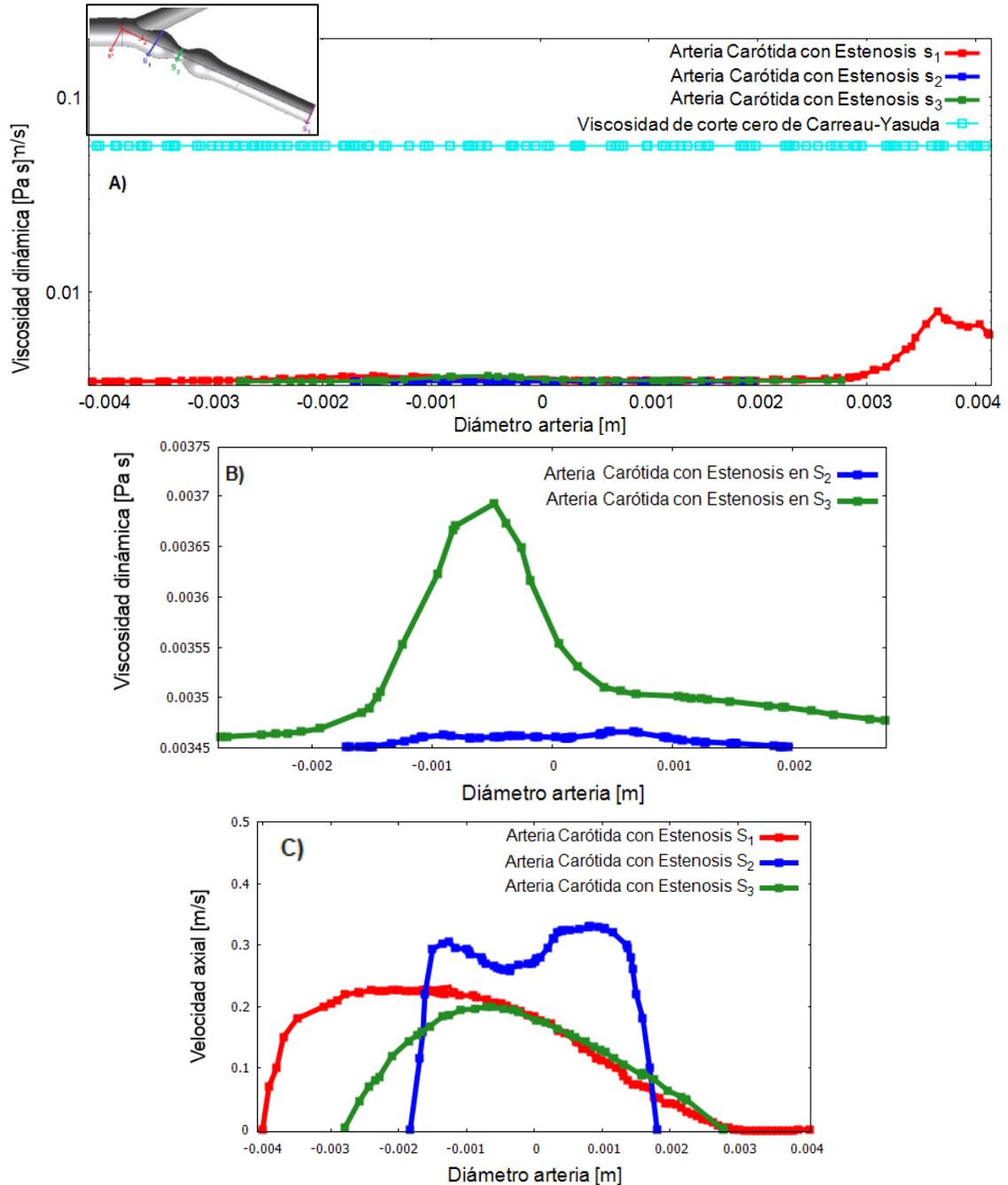


Figura 53. Comportamiento de la sangre en las secciones S_1, S_2 y S_3 en la arteria con Estenosis, utilizando el modelo Carreau-Yasuda, para el A) perfil de viscosidad dinámica, B) Gráficos de perfil de viscosidad en las secciones S_2 y S_3 con una escala menor en el eje vertical, y para C) perfiles de velocidad axial en secciones S_1, S_2 y S_3 .

En la **figura (53.A)** se muestran los perfiles de viscosidad en las tres secciones de la arteria Carótida con Estenosis. Se observa que estos perfiles tienen valores de viscosidad muy pequeños en comparación a la viscosidad de corte cero del modelo Carreau-Yasuda, sin embargo, se puede observar que el perfil de viscosidad dinámica en el punto $0.0035 (m)$ de la sección S_1 aumenta, gatillando una disminución del gradiente de velocidad axial, lo que se ve reflejado en una disminución a valores cercanos a cero en la velocidad axial.

El perfil de viscosidad en la sección S_2 no presenta grandes variaciones manteniéndose casi constante en un rango de valores de viscosidad igual a $[0.00345: 0.00346] (Pa s)$.

El perfil de viscosidad de la sección S_3 no es simétrico para $Re=536$, como se puede observar en la **figura (53.C)**, sino que al alcanzar su máximo cerca de $0.0037 (Pa s)$ en el punto $-0.00048 (m)$ de la sección S_3 comienza a disminuir rápidamente hasta llegar a un punto donde la pendiente de la viscosidad es menos inclinada, sin embargo, alcanza valores mayores que los que se alcanzan en el perfil de viscosidad cerca de la pared interna de la arteria Carótida, por lo que, debido a las propiedades pseudoplásticas de la sangre, el gradiente de velocidad es menor, reflejándose en el perfil de velocidad axial, donde la pendiente del perfil de velocidad es menos inclinada a partir de $-0.00048 (m)$ hasta el final de la sección S_3 .

A continuación, se muestran las líneas de contorno de la viscosidad en la geometría tridimensional y bidimensional. Si se compara la geometría bidimensional con la geometría tridimensional cortada en el plano xz se observa que las líneas de contorno de la viscosidad en ambas geometrías son similares, en ambas se generan una zona de mayor viscosidad en el bulbo de la arteria Carótida Interna, además se puede observar que los valores de viscosidad, según las escalas, son muy similares. Lo mismo ocurre con la arteria Carótida con Estenosis, como se muestra en la siguiente figura.

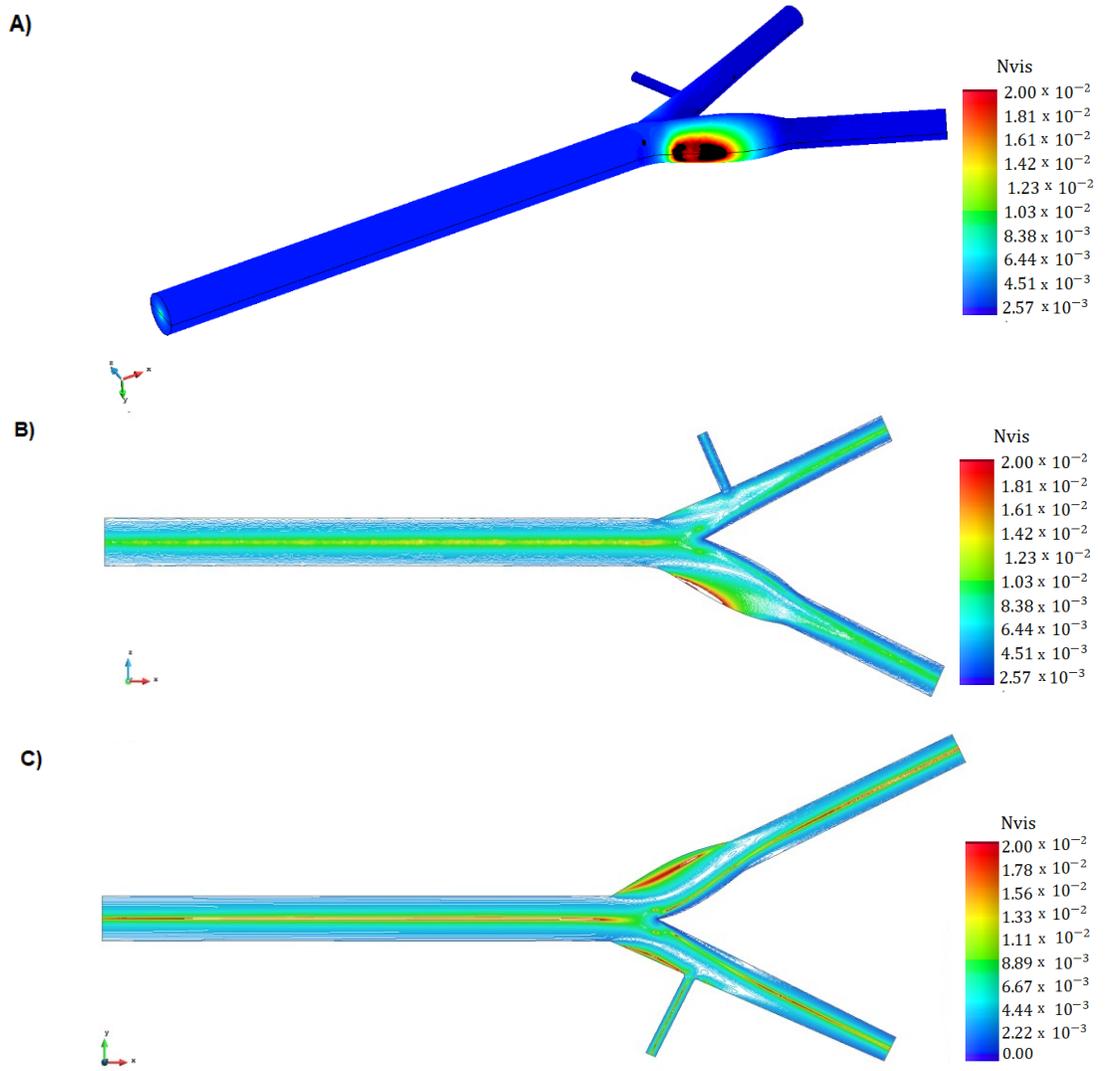


Figura 54. Líneas de contorno de viscosidad para $Re=400$ de A) Arteria tridimensional sana B) Corte de Arteria tridimensional sana en el plano xz C) Arteria bidimensional sana.

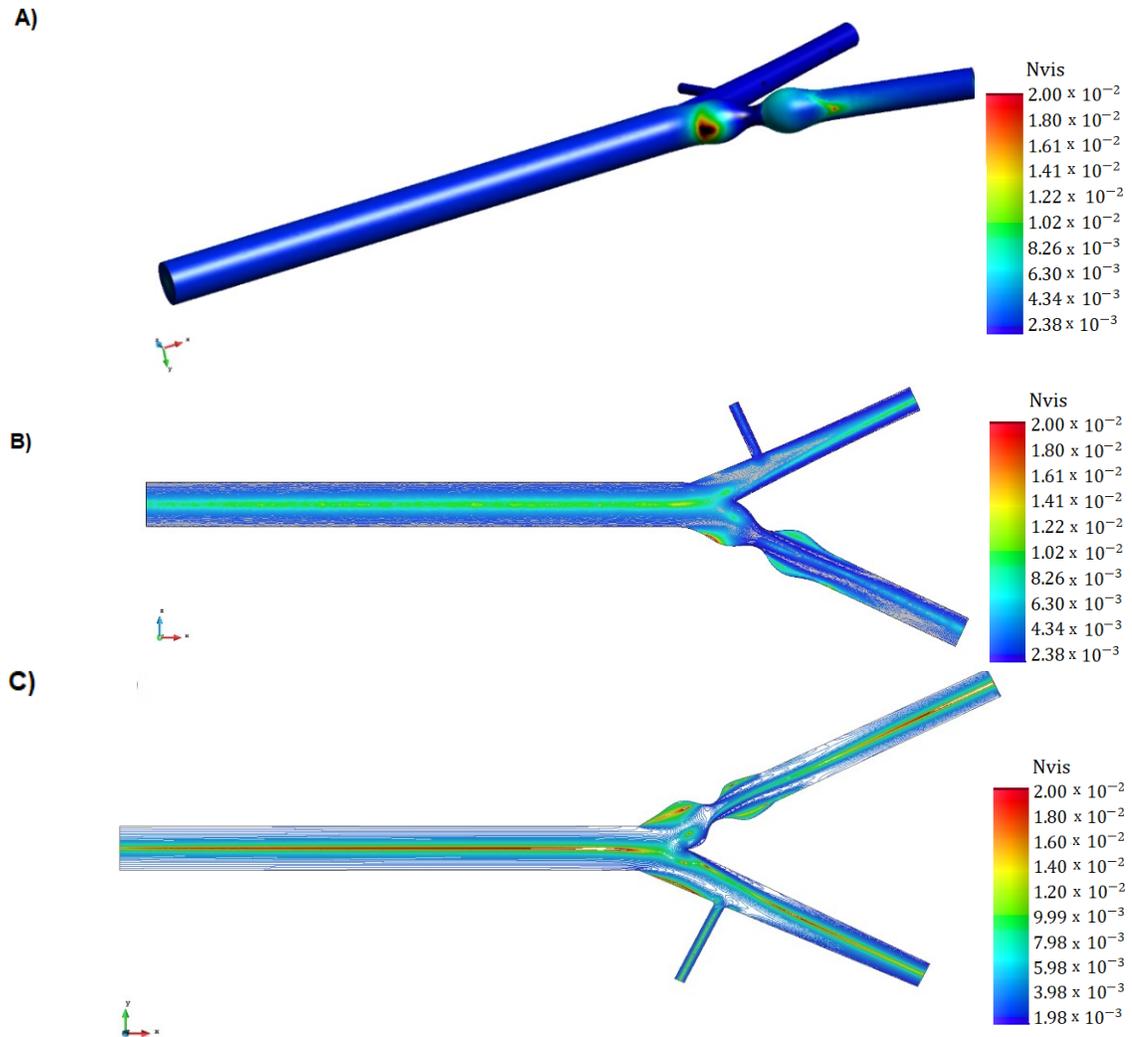


Figura 55. Líneas de contorno de viscosidad para $Re=400$ de A) Arteria tridimensional con 60% de Estenosis B) Corte de Arteria tridimensional con 60% de Estenosis en el plano xz C) Arteria bidimensional con 60% de Estenosis.

Comparando la **figura (55.A)** con la **figura (55.C)** se observa que las líneas de contorno de la viscosidad de la geometría bidimensional con la geometría tridimensional con bastantes similares, en ambas figuras se generan una zona de mayor viscosidad en la zona anterior a la Estenosis. Además, se observa que los valores en la escala son muy similares entre la figura bidimensional y entre la figura tridimensional.

4.5.3 Comparación de flujos de salida en Arteria Carótida /flujo de entrada

A continuación, se compararán los flujos de salidas de arteria Carótida sana con arteria Carótida con 60% de estenosis, para los tres números de Reynolds del modelo Ostwald-de Waele y para los tres números de Reynolds del modelo Carreau-Yasuda, con el fin de cuantificar el efecto de la Estenosis.

Para poder realizar esto se obtuvieron los perfiles de velocidades axiales de las tres salidas de la arteria Carótida: Carótida Interna (A.C.I), Externa (A.C.E) y de la arteria que nace en la arteria Carótida Externa. Una vez obtenidos estos perfiles de velocidad axial, se calculó el área bajo la curva de estos gráficos en el software Matlab.

En la **figura (56)** y **(57)** se muestran gráficos de comparación de perfil de velocidad axial en la salida de la arteria Carótida Interna y en la salida de la arteria Carótida Externa, respectivamente, para una arteria sana y para la arteria con 60% de Estenosis.

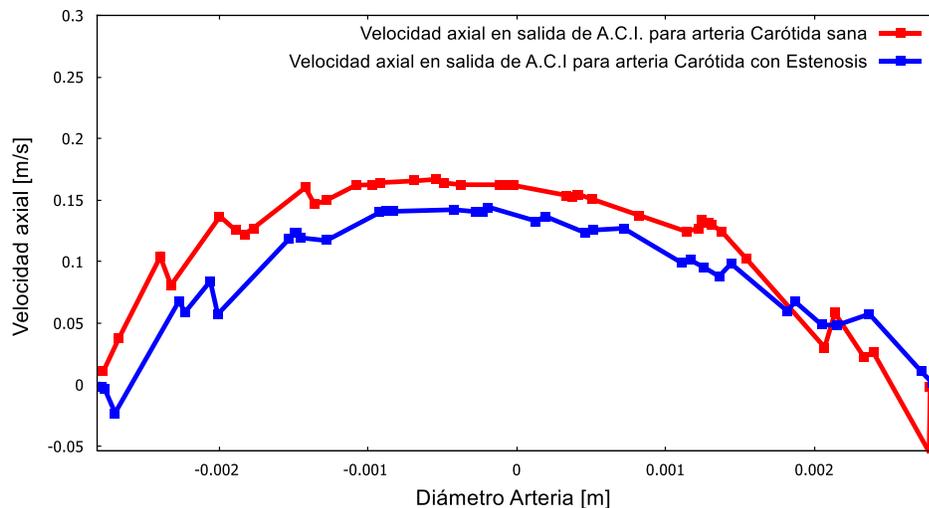


Figura 56. Perfiles de velocidades axiales de la arteria Carótida Interna (A.C.I) para la arteria Carótida Sana y Carótida con estenosis, para $Re=400$.

En la **figura (56)** se graficó el perfil de velocidad en la salida de la arteria Carótida Interna. La curva de color rojo corresponde al perfil de velocidad en la arteria sana y la curva de color azul a la arteria Carótida con 60% de Estenosis. Cuando la arteria presenta Estenosis, el perfil de velocidad en la salida de la arteria Carótida Interna presenta una menor amplitud, en comparación a la arteria sin Estenosis cuando el número de Reynolds es 400.

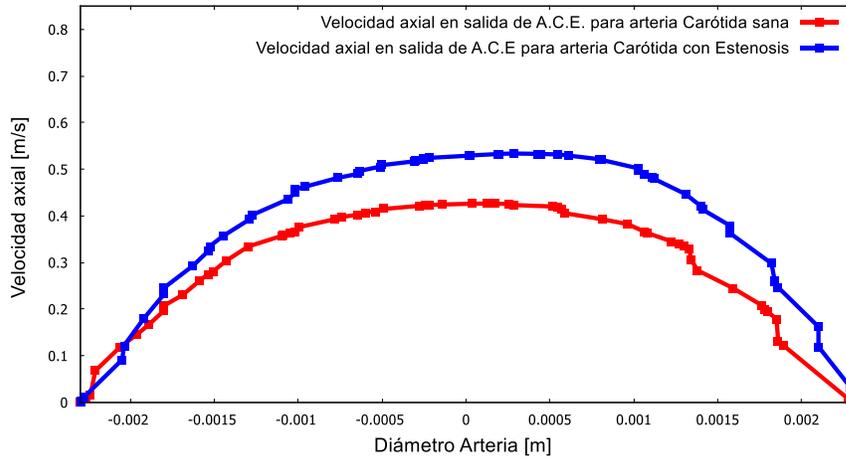


Figura 57. Perfiles de velocidades axiales de la arteria Carótida Externa (A.C.E.) para la arteria Carótida Sana y Carótida con estenosis, para $Re=400$.

En la **figura (57)** se graficaron los perfiles de velocidades en las salidas de la arteria Carótida Externa. Se observa que hay una mayor amplitud de velocidad en la salida de la arteria Carótida externa cuando hay Estenosis en la arteria Carótida.

Para cuantificar cuál es el efecto de la Estenosis en el flujo sanguíneo, se calculó el caudal volumétrico en las salidas de la arteria Carótida Interna y Externa, como se mencionó anteriormente. Primero se obtuvo el caudal volumétrico que hay en la entrada de la arteria Carótida Común, para los 6 números de Reynolds. Estos valores se muestran en la **tabla (14)**, que se muestra a continuación:

Re	Caudal de entrada en Arteria Carótida Común ($\frac{cm^3}{s}$)
400 y 536	41.72
800 y 925	71.73
1200 y 1241	98.46

Tabla 14. Caudal volumétrico en la entrada de la Arteria Carótida Común correspondiente a cada número de Reynolds utilizado en el modelo Ostwald-de Waele.

Luego se calculó los caudales volumétricos en las salidas de la arteria Carótida Interna y Externa. A partir de estos valores se calculó el porcentaje de caudal volumétrico en las salidas con respecto a los caudales de entrada de la arteria Carótida Común. Primero se realizó para la arteria Carótida sana, con el fin de conocer cuál es la bifurcación natural de caudal en cada rama de la arteria Carótida. Cabe mencionar que para obtener el caudal de salida en la arteria Carótida Externa se sumó el caudal de salida de la rama que nace en ésta.

En la **tabla (15)** se muestran los valores de porcentaje de caudal obtenidos en las salidas de la arteria Carótida Interna sana y Externa para los números de Reynolds 400, 536, 800,925,1200 y 1241:

Re	Caudal en salida de Arteria Carótida Interna sana (%)	Caudal en salida de Arteria Carótida con 60% de Estenosis (%)	Caudal en salida de Arteria Carótida Externa sana (%)	Caudal en salida de Arteria Carótida Externa con 60% de Estenosis (%)
400	48.7	27.0	51.3	73.0
536	49.0	29.2	51.0	70.8
800	45.2	23.2	54.8	76.8
925	45.3	24.3	54.7	75.7
1200	43.1	19.9	56.9	80.1
1241	44.7	22.0	55.3	78.0

Tabla 15. Porcentaje de caudal volumétrico en las salidas de la arteria Carótida Interna y Externa, para la arteria Carótida sana, utilizando modelo Ostwald- de Waele (Re:400,800 y 1200) y modelo Carreau-Yasuda (Re:536,925 y 1241).

De la **tabla (15)** se observa que el porcentaje de caudal volumétrico en la salida en la arteria Carótida Interna sana y Externa sana con respecto al caudal volumétrico de la arteria Carótida Común son muy similares, la mayor diferencia entre las dos salidas corresponde al número de Reynolds 1200, con una diferencia de 13.8%. Para los números de Reynolds 400, 800 y 1200, utilizados para el modelo Ostwald-de Waele, la diferencia entre los caudales de las salidas entre las dos ramas, para la arteria sana, son: 2.6%, 9.6%,13.8%, respectivamente, donde se puede observar, que a medida que el número de Reynolds aumenta, la diferencia entre los caudales de salidas entre las dos ramas aumenta. Para los números de Reynolds 536, 925 y 1241, utilizados para el modelo Carreau-Yasuda, la diferencia de caudal volumétrico en las salidas de las dos ramas, para la arteria sana, son de: 2.0%, 9.4 % y 10.6%, donde, nuevamente, hay una mayor diferencia entre los caudales de salida a medida que el número de Reynolds aumenta.

De la tabla anterior, se puede observar que cuando la arteria Carótida presenta un 60% de Estenosis, el caudal aumenta en la salida de la Carótida Externa y a la vez disminuye el caudal en la salida de la arteria Carótida Interna, ya sea para el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda. El aumento de caudal en la salida de la arteria Carótida Externa para la arteria con 60% de Estenosis con respecto al caudal en la salida de la arteria Carótida Externa de una arteria sana es de: 21.7%,22.0% y 23.1%%, para los números de Reynolds 400, 800 y 1200, respectivamente. El aumento de caudal en la salida de la arteria Carótida Externa para la arteria con 60% de Estenosis con respecto al caudal en la salida de la arteria Carótida Externa de una arteria sana es de: 19.8%, 21.0%% y de 22.7%, para los números de Reynolds 536,925 y 1241,

respectivamente. Como se observa, el aumento de caudal en las salidas de la arteria Carótida Externa aumenta a medida que decrece el número de Reynolds, para los dos modelos utilizados.

A continuación, se muestra un gráfico de barras con los porcentajes de disminución de flujo sanguíneo en la arteria Carótida Interna cuando ésta presenta una Estenosis de un 60%, para cada número de Reynolds. En el eje vertical se muestran los porcentajes de disminución de flujo sanguíneo en la arteria Carótida Interna y el eje horizontal del gráfico corresponde a los números de Reynolds.

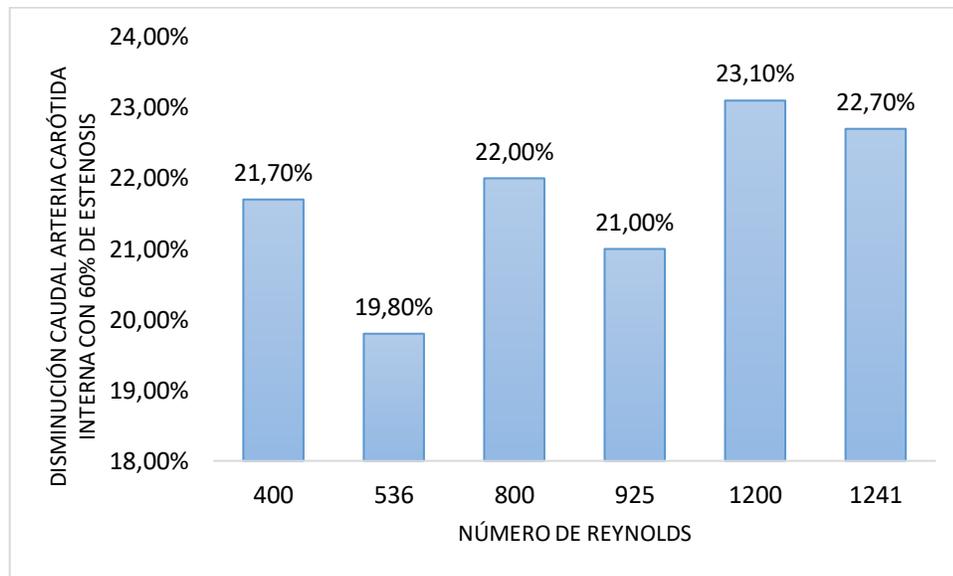


Figura 58. Gráfico de barras de disminución de flujo sanguíneo en la salida de la arteria Carótida Interna para cada número de Reynolds, cuando ésta presenta un 60% de Estenosis.

Del gráfico anterior se puede observar los porcentajes de disminución de flujo en la salida de la arteria Carótida Interna, cuando la arteria Carótida presenta un 60% de Estenosis, para cada número de Reynolds. A la vez, estos porcentajes corresponden a un aumento de flujo en la salida de la arteria Carótida Externa cuando la arteria presenta Estenosis, manteniéndose constante la relación de que el flujo volumétrico en la entrada es igual a la suma de los flujos volumétrico de las salidas.

4.5.4 Efecto de cambio de ángulo en el flujo sanguíneo de la arteria Carótida sana

Estudios sobre la hemodinámica de la arteria Carótida han concluido que, con el incremento de edad de una persona, el ángulo de bifurcación de la arteria Carótida se incrementa en arterias que no presentan estenosis (Alexey V. Kamenskiy, Iraklis I. Pipinos, Jeffrey S. Carson, Jason N. MacTaggart, B. Timothy Baxter, 2015).

Es por esto que para saber cuál es el efecto en los flujos de las salidas al cambiar el ángulo entre la arteria Carótida Interna y Externa, se simuló la arteria Carótida sana con un ángulo de 70° con el modelo Ostwald-de Waele, para los números de Reynolds: 400, 800 y 1200 y con el modelo Carreau-Yasuda, para los números de Reynolds: 536, 925 y 1. Las velocidades de entradas corresponden a las calculadas en la **sección (5.3)**.

Las dimensiones de la geometría utilizada son las mismas que las que se muestran en la **figura (21), de la sección (4.1.1)**, lo que cambia es el ángulo de bifurcación a 70° . Las condiciones de contorno y la malla para arteria Carótida sana se mantienen igual que en las secciones 5.3 y 5.4, respectivamente.

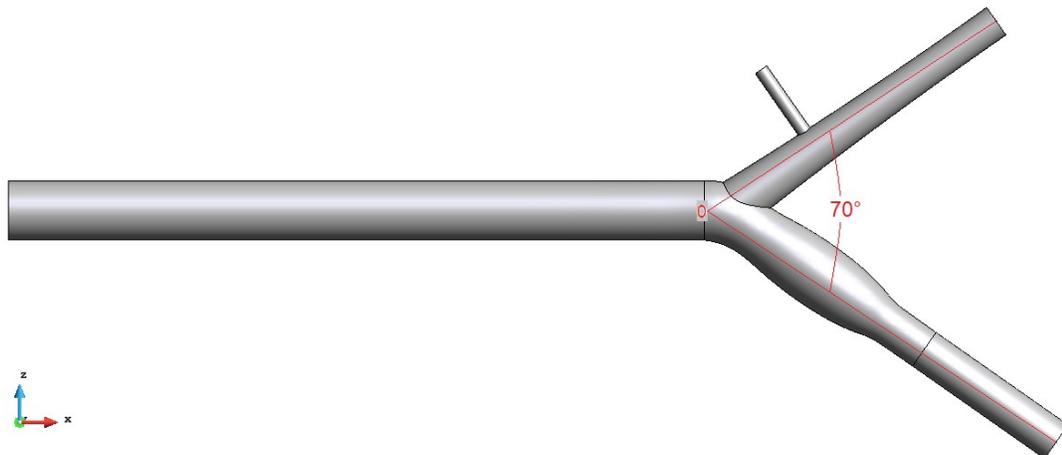


Figura 59. Arteria Carótida con un ángulo de bifurcación de 70° .

Para cuantificar cuál es el efecto del cambio de ángulo en el flujo sanguíneo de las salidas de la arteria Carótida, se calculó el caudal volumétrico en las salidas de la arteria carótida Interna y Externa, luego se calculó qué porcentaje de flujo correspondía con respecto al caudal volumétrico de la entrada de la arteria Carótida Común para los Reynolds 400, 800 y 1200 del modelo Ostwald-de Waele y para los Reynolds 536, 925 y 1241 para el modelo Carreau-Yasuda.

A continuación, se muestra los porcentajes de caudales volumétricos calculados para las salidas de la arteria Carótida sana (con un ángulo de bifurcación de 50°) y para la arteria Carótida que presenta un ángulo de bifurcación de 70°, con respecto al caudal volumétrico de entrada:

Re	Caudal en salida de Arteria Carótida Interna sana (%)	Caudal en salida de Arteria Carótida Interna con 70° (%)	Caudal en salida de Arteria Carótida Externa sana (%)	Caudal en salida de Arteria Carótida Externa con 70° (%)
400	48.7	36.0	51.3	64.0
536	49.0	34.6	51.0	65.4
800	45.2	30.0	54.8	70.0
925	45.3	31.1	54.7	68.9
1200	43.1	28.6	56.9	71.4
1241	44.7	30.2	55.3	69.8

Tabla 16. Porcentaje de caudal volumétrico en las salidas de la arteria Carótida Interna y Externa, para la arteria Carótida con ángulo de bifurcación 70° utilizando el modelo Ostwald-de Waele.

De la **tabla (16)** se observa que cuando el ángulo de bifurcación aumenta a 70° el caudal de salida en la arteria Carótida Interna disminuye en un 12.7%, 15.2% y 14.5%, para los números de Reynolds 400, 800 y 1200, respectivamente y el caudal en la arteria Carótida Externa aumenta en los porcentajes mencionados, para los respectivos números de Reynolds.

Realizando el mismo procedimiento, pero para el modelo Carreau-Yasuda, se observa que cuando el ángulo de bifurcación aumenta a 70° el caudal de salida en la arteria Carótida Interna disminuye en un 14.4%, 14.2% y 14.5%, con respecto a los caudales volumétricos de las salidas en la arteria Carótida Interna sana, para los números de Reynolds 536, 925 y 1241, respectivamente, y el caudal en la arteria Carótida Externa aumenta en los porcentajes mencionados, para los respectivos números de Reynolds.

A continuación, se muestran gráficos de barras de los porcentajes de disminución de flujo sanguíneo en la arteria Carótida Interna para cada número de Reynolds, cuando el ángulo de bifurcación aumenta a 70°. El eje vertical muestra los porcentajes de disminución de flujo sanguíneo y en el eje horizontal corresponden a los números de Reynolds del modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda:

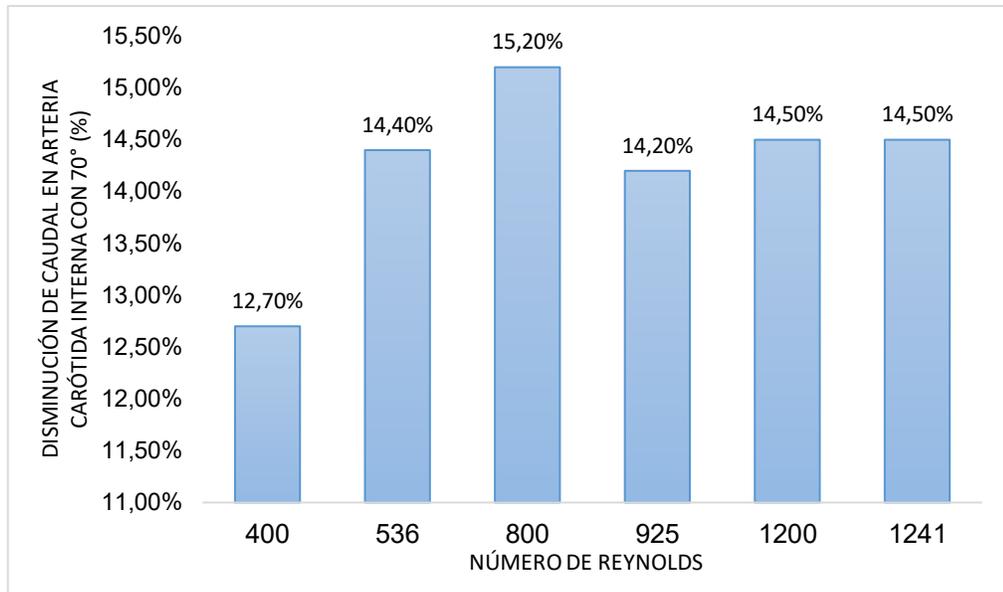


Figura 60. Gráfico de barras de disminución de flujo sanguíneo en la salida de la arteria Carótida Interna para cada número de Reynolds, cuando hay el ángulo de bifurcación aumenta a 70°.

Del gráfico anterior se puede observar los porcentajes de disminución de flujo en la salida de la arteria Carótida Interna cuando el ángulo de bifurcación aumenta a 70°, para cada número de Reynolds. A la vez, estos porcentajes corresponden a un aumento de flujo en las salidas de la arteria Carótida Externa cuando el ángulo aumenta a 70°, manteniéndose constante la relación de que el flujo volumétrico en la entrada es igual a la suma de los flujos volumétrico de las salidas.

4.6 Conclusión

- Para el estudio numérico de la arteria Carótida sana se realizó una geometría en base estudios y mediciones que se encuentran en la literatura. Si bien, las dimensiones de la geometría fueron un promedio de geometrías de arterias Carótidas de 124 angiografías de personas de diferentes edades, los resultados de flujo volumétrico de diástole y sístole en la arteria Carótida Común (para $Re=400$ y $Re=1200$) se asemejan bastantes a las mediciones con espectrogramas, resultando una diferencia porcentual de 10.3% y de 9.0%, para diástole y sístole, utilizando el modelo Ostwald-de Waele.
- Para los números de Reynolds: 400, 800 y 1200, los caudales volumétricos obtenidos con los modelos Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda son diferentes; esto se debe a que hay definición diferente para el número de Reynolds en cada modelo fluido no-Newtoniano, el cual depende de parámetros específicos de cada modelo
- En la bifurcación libre en la arteria Carótida sana, se halló que los caudales volumétricos en la salida de la arteria Carótida Externa e Interna presentan una pequeña diferencia. Para los números de Reynolds 400, 800 y 1200, la diferencia de caudal entre las dos

salidas es de, respectivamente, 2.6%, 9.6%, 13.8%. Para los números de Reynolds 536, 925 y 1241, la diferencia de caudal entra las dos salidas es de, respectivamente: 2.0%, 9.4 % y 10.6%.

- Cuando la arteria Carótida Interna presenta un 60% de Estenosis de tipo cosenoidal, hay una disminución de caudal volumétrico en la salida de la arteria Carótida Interna. Para los Reynolds 400, 800 y 1200, utilizando el modelo Ostwald-de Waele, los porcentajes de disminución de caudal en esta salida son: 21.7%, 22.0% y 23.1%, Para los números de Reynolds 536, 925 y 1241, utilizando el modelo Carreau-Yasuda, la disminución de caudal es de: 19.8%, 21.0% y de 22.7%. Por lo que para ambos modelos utilizados se obtiene una disminución en los caudales de salida en la arteria Carótida Interna y a la vez, un aumento en estos mismos porcentajes para cada número de Reynolds en la salida de la arteria Carótida Externa. La arteria Carótida Interna es la arteria encargada de irrigar al cerebro con sangre, por lo que una disminución de caudal sanguíneo podría causar consecuencias graves.
- Cuando el ángulo de bifurcación de las ramas de la arteria Carótida crece de 50° a 70°, el caudal volumétrico de las salidas se ven afectadas. Se produce una disminución de caudal en la salida de la arteria Carótida Interna, con respecto a la arteria Carótida sana, de: 12.7%, 15.2% y 14.5%, para los números de Reynolds 400, 800 y 1200. Para los números de Reynolds 536, 925 y 1241, también hay una disminución en el caudal volumétrico de la salida de la arteria Carótida Interna, estos porcentajes de disminución son: 14.4%, 14.2% y 14.5%, respectivamente. En los dos modelos utilizados, al disminuir el caudal en las salidas de la arteria Carótida Interna, se produce un aumento de caudal en los porcentajes mencionados en la salida de la arteria Carótida Externa, de tal forma que se cumple $Q_{entrada} = Q_{salida\ Carótida\ Interna} + Q_{salida\ Carótida\ Externa}$.

Conclusiones

Se logró validar el Método de Elementos Finitos Estabilizado utilizado en este trabajo. En la validación analítica se halló que los resultados de velocidad obtenida mediante las simulaciones para fluidos no-Newtonianos se solapan con las curvas de velocidad analítica obtenidas con el modelo Ostwald-de Waele, por lo que el método utilizado resuelve correctamente el problema de Navier-Stokes de dos campos para fluidos no-Newtonianos para caso estacionario. Al realizar las comparaciones de los perfiles de velocidad obtenidas de las simulaciones con los resultados experimentales de *Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation*, se halló que las curvas de velocidad son bastantes similares, además, se logró realizar una convergencia en malla para el problema de la geometría T bidimensional en el plano xy .

Para el problema de la geometría T bidimensional, donde se utilizó fluidos no-Newtonianos en un rango de índice de potencias de [0.25-1.75] para diferentes números de Reynolds, se logró estudiar la influencia del número de Reynolds y del índice de potencia en el proceso de bifurcación de fluidos dilatantes y pseudoplásticos. Para un fluido pseudoplástico, a medida que se incrementa el número de Reynolds, en un rango de [50:1000], el caudal volumétrico en la salida del brazo principal se incrementa y la diferencia con el caudal en la salida del brazo secundario, aumenta. En cambio, para un fluido dilatante, la diferencia de los caudales entre las dos salidas se aproxima a medida que el número de Reynolds aumenta, por lo que se concluye que se logró caracterizar la dinámica de fluidos no-Newtonianos, con diferente carácter reológico, en una geometría T, según el índice de potencia y el número de Reynolds.

Para las simulaciones de Flujo sanguíneo en Arteria Carótida, el método de resolución de las ecuaciones resultantes fue Iterativo Multigrid para el caso tridimensional, se escogió este método debido a que el tiempo de simulación es menor que con el método Directo y el costo computacional es significativamente reducido. En cambio, para la arteria bidimensional el método de resolución de las ecuaciones fue Directo, se escogió este método debido a que el tiempo de solución y de convergencia es mucho menor que con el método Iterativo.

Para las simulaciones de flujo sanguíneo las ecuaciones gobernantes fueron la Ecuación de Navier-Stokes y la de Continuidad, para fluido no-Newtoniano y estacionario. Si bien, al comparar los resultados de los flujos volumétricos de la arteria Carótida Común con los de una Ecografía Doppler las diferencias porcentuales, utilizando el modelo Ostwald- de Waele son pequeñas (9.0% y 10.3% para diástole y sístole, respectivamente), se puede mejorar a futuro utilizando una condición de entrada que describa de forma más real las curvas sístole y diástole de la arteria Carótida. Sin embargo, utilizando los números de Reynolds 400, 800 y 1200 con el modelo Carreau-Yasuda, las diferencias porcentuales con las curvas de una Ecografía Doppler fueron mucho mayor, para la diástole fue de 30.1% y para la sístole fue de 40.2%, estas diferencias entre

los dos modelos con la Ecografía Doppler se debe a que para cada modelo se tiene una ecuación diferente para el número de Reynolds, donde cada ecuación depende de valores propios del modelo, por lo que se ve afectado el flujo volumétrico.

Aplicando lo estudiado en el capítulo *Caracterización de flujo de fluido no-Newtonianos en geometría T*, se pudo observar, que debido al carácter pseudoplástico de la sangre se visualiza un aumento de viscosidad en el bulbo de la arteria Carótida Interna sana cuando existe una disminución de gradiente de velocidad, debido a la formación de zonas de recirculación, ya sea para la arteria Carótida bidimensional o tridimensional. Estas zonas de recirculación se forman naturalmente en el bulbo de la arteria Carótida Interna, lugar donde es más probable la deposición de placa de ateroma y con ello la formación de Estenosis, como se estudió, sin embargo, no se estudió la interacción fluido-estructura con las paredes de la arteria Carótida, el movimiento que se podría generar entre fluido-pared podría ayudar a la formación de zonas de recirculación en otras partes de la arteria lo que conllevaría a la formación de Estenosis en otras zonas, por lo que se vería afectado el flujo de las salidas de la arteria.

Se logró cuantificar el efecto de la Estenosis tipo Cosenoidal en el flujo sanguíneo de la arteria Carótida, los resultados de las simulaciones indican que cuando la arteria Carótida presenta Estenosis, hay una disminución de flujo en la salida de la arteria Carótida Interna lo que podría afectar en la irrigación sanguínea al cerebro; a la vez hay un aumento de flujo en la salida de la arteria Carótida Externa lo que podría causar algún efecto en las zonas que irriga esta rama de la arteria. Para un mismo caudal volumétrico de entrada, las diferencias porcentuales entre el modelo Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda, son las siguientes: 1.9%, 1.0% y 0.4%, para $Re=400$ y $Re=536$, $Re=800$ y $Re=925$, $Re=1200$ y $Re=1241$.

También se logró cuantificar el efecto de cambio de ángulo de la bifurcación de la arteria Carótida, cuando éste aumenta en 20° y se mantiene la geometría de la arteria Carótida sana. El caudal volumétrico en la salida de la arteria Carótida Interna disminuye, por lo que, por conservación de masa, el caudal volumétrico aumenta en la salida de la arteria Carótida Externa. Las diferencias de caudal volumétrico en la salida de la arteria Carótida Interna entre los dos modelos de fluidos no-Newtonianos son pequeñas: Para $Re=400$ y $Re=536$ hay una diferencia de caudal volumétrico igual a 1.7%, para $Re=800$ y $Re=925$ hay una diferencia de 1.0% y para $Re=1200$ y $Re=1241$ hay una diferencia de caudal volumétrico igual a 0.0%, por lo que se puede evidenciar un aumento de diferencia de caudal a medida que decrece el número de Reynolds.

Referencias bibliográficas

- Alexey V. Kamenskiy, Iraklis I. Pipinos, Jeffrey S. Carson, Jason N. MacTaggart, B. Timothy Baxter. (2015). Age and disease-related geometric and structural remodeling of the carotid artery.
- B.K. Bharadvaj, R. M. (1982). Steady flow in a model of the human carotid bifurcation. Part.II-Flow visualization. *15*(5).
- Carotid Spectral Doppler Waveform in Heart Failure. (n.d.). *Vascular Medicine*. Retrieved from Vascular Medicine: vascularmedicinelab.com
- Cho Yi, Kensey K.R. (1991). Effects of the Non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel, Part.1. (28).
- Clínica Uinversidad de Navarra. (n.d.). *Clínica Uinversidad de Navarra*. Retrieved from Clínica Uinversidad de Navarra: www.cun.es
- D. Liepsch, S. Moravec, A.K. Rastogi, N.S. Vlachos. (1982). Measurement and calculations of Laminar Flow in a ninety degree bifurcation. *15*(7).
- Dalin Tang, Chung Yang, Shunichi Kobayashi, Jie Zheng, Raymond P. Vito. (n.d.). Effect of Stenosis Asymeetry on Blood Flow and Artery Compression: A three-Dimensional Fluid-Structure Interaction Model.
- Dietrich Braess. (2007). *Finite element*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eric M. Rohren, Mark A. Kliewer, Barbara A. Carroll, Barbara S. Hertzberg. (December 2003). A Spectrum of Doppler Waveforms in the Carotid and Vertebral Arteries. *American Roentgen Ray Society*, 1695–1704.
- Eric M. Rohren, Mark A. Kliewer, Barbara A. Carroll, Barbara S. Hertzberg. (2003). A Spectrum of Doppler Waveforms in the Carotid and Vertebral Arteries.
- Ernesto Castillo Del Barrio. (2016). *Stabilized Finite Element Formulation for the Three-Field Viscoelastic Fluid Flow Problem*. Barcelona.
- Evans, N. S. (2016). Carotid Artery Stenosis.
- Faber, T. (1995). *Fluid Dynamics for pyhsicists*. Cambridge University Press.
- GID the personal pre and post processor. (n.d.). *GID the personal pre and post processor*. (CIMNE) Retrieved from GID the personal pre and post processor: <https://www.gidhome.com/>

- H.M. Matos, P.J. Oliveira. (2013). Steady and unsteady non-Newtonian inelastic flows in a planar T-junction. (39).
- Instituto Nacional de Cáncer, Departamento de Salud y Servicio Humanos de E.E.U.U. (1937). *Instituto Nacional del Cáncer*. (Instituto Nacional de Cáncer, Departamento de Salud y Servicio Humanos de E.E.U.U) Retrieved from Instituto Nacional del Cáncer: <https://www.cancer.gov/espanol>
- Irgens, F. (2013.). *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Trondheim: Springer.
- J.H. Ferziger, M.Peric. (n.d.). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.
- James W. Daily, Donald R.F. Harleman. (1975). *Dinámica de los fluidos con aplicaciones a la Ingeniería*. México.: Trillas.
- Jeffrey P. Carpenter, Davis JT., FJ. Lexa. (1995). Determination of sixty percent of greater Carotid artery stenosis by duplex Doppler ultrasonography.
- John Francis Richardson, R. P. Chhabra. (2008). *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*.
- Kien T. Nguyen, Christopher D. Clark, Thomas J. Chancellor, Dimitris V. Papavassiliou. (2008). Carotid Geometry Effects on Blood Flow and on Risk for Vascular Disease.
- Laura Acosta Izquierdo, F. A. (2016). Anatomía de la Arteria Carótida. 19(1).
- Leonardo Moreno, Fausto Calderas, Guadalupe Sánchez, Luis Medina-Torres. (2013). La sangre desde el punto de vista de la reología.
- Miami Cardiac and Vascular Institute, Baptist Health South Florida. (n.d.). *Miami Cardiac and Vascular Institute*. (Baptist Health South Florida) Retrieved from Miami Cardiac and Vascular Institute: www.baptisthealth.net
- Mohamed A. Elbbesy, Abdbalnamen T. Hureka. (n.d.). Computation of the coefficients of the Power Law model for whole blood and their correlation with blood parameter. 8.
- O. C. Zienkiewicz, R. L. (1994.). *El Método de los Elementos Finitos, Vol. 1*. Barcelona.: McGraw-Hill.
- Organización Mundial de la salud. (2011). *Informe sobre la situación mundial de las enfermedades no transmisibles*. Ginebra.: Organización Mundial de la Salud. Retrieved from <https://www.who.int/es>
- Paritosh R. Vasava. (2007). Fluid Flow in T-Junction of Pipes. *Fluid Flow in T-Junction of Pipes*.

- R. Codina, S.Badia, J. Baige and J. Principe. (2004). *Variational Multiscale Methods in Computational Fluid Dynamics*. Barcelona.
- Radiological Society of North America. (n.d.). *Radiological Society of North America*. Retrieved from Radiological Society of North America: www.radiologyinfo.org
- Taha Sochi. (2013). *Non-Newtonian Rheology in Blood Circulation*. London: Cornell University.
- Texas Heart Institute, Denton Cooley. (1962). *Texas Heart Institute*. Retrieved from www.texasheart.org
- Tirupathi R. Chandrupatla,Ashok D. Belegundu. (2002). *Introduction to finite elements in engineering*. Prentice Hall.
- Tritton, D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications.
- Vinit Khandelwal, Amit Dhiman, László Baranyi. (2014). Laminar flow of Non-Newtonian shear-thinning fluids in a T-channel.

Anexo

De la siguiente Ecografía se obtuvieron los datos de las señales que corresponden a la sístole y a la diástole de la arteria Carótida Común, para compararlos con las simulaciones para $Re=400$ y $Re=1200$ de los modelos Ostwald-de Waele y Carreau-Yasuda. Los datos de la **figura (61)** se extrajeron gracias al programa g3data.



Figura 61. Ecografía Doppler de la arteria Carótida Común.

GID

GID es un paquete de pre-procesamiento y post-procesamiento, que permite definir y tratar problemas de simulación numérica, ya sean problemas de análisis estructural, dinámica de fluidos, electromagnetismo, transferencia de calor, entre otros.

Como pre-procesador, GID puede realizar lo siguiente (GID the personal pre and post processor, s.f.):

- GID es un sistema CAD que cuenta con superficies NURBS para definir geometrías. Diseñar geometrías/dominios de problemas de elementos finitos.
- Es posible importar geometrías CAD a GID, los formatos que lee GID son: IGES, ACIS, STEP o DXF.

- Permite definir condiciones iniciales y de frontera a la geometría o a la malla. Las geometrías y mallas pueden organizarse en grupos, donde es posible definir en cada grupo condiciones iniciales y de frontera.
- Genera potentes mallas de forma rápida y eficiente, para superficies y volúmenes, basados en diferentes técnicas: No-estructurada, estructurada o mallas cartesianas. Para generar la malla en el dominio, GID admite diferentes tipos de elementos: triángulos, cuadriláteros, círculos, primas, tetraedros o esferas. Permite dividir una geometría y a cada división se le puede asignar diferentes mallas.

Algunas funciones de GID como post-procesador son:

- Se puede visualizar los resultados obtenidos en la simulación; algunas opciones son: líneas de contornos, curvas de nivel, gráficos vectoriales o líneas de corriente.
- Con los resultados obtenidos, se pueden realizar gráficos 2D, como la evolución de un resultado en un punto a través de diferentes pasos de tiempo, gráfico de líneas, gráfico de límites, entre otros.

Creación de un *problem-type* en GID

Un *problem-type* es un conjunto de archivos configurados que contiene un código (script) con un método numérico de resolución; una vez que se carga el *problem-type* en GID entonces es posible preparar el problema que se quiere trabajar.

En un *problem-type*, se deben definir:

- Condiciones iniciales y de frontera.
- Parámetros físicos, como densidad, viscosidad, entre otros.
- Parámetros de métodos de resolución numérica.
- Datos del problema (problema temporal o no, inclusión de fuerza de gravedad, entre otros).

En este trabajo el *problem-type* que se utilizará será FEMUSS, el cual es un código escrito en FORTRAN que contiene el Método Estabilizado de Elementos Finitos: Total Residual.

Métodos de resolución de sistemas de Ecuaciones Lineales (J.H. Ferziger, M.Peric)

Para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, como la **ecuación (40)**, se utilizaron dos métodos, esto se describen a continuación:

Método Directo: Descomposición LU

Se tiene una matriz A $m \times n$ que se puede escribir como el producto de dos matrices:

$$A=LU \quad (\mathbf{A.1})$$

donde L es una matriz triangular inferior $m \times m$ y U es una matriz escalonada $m \times n$. Entonces para resolver el sistema original $Ax = b$, se escribe:

$$Ax = (LU)x = L(Ux) = b \quad (\mathbf{A.2})$$

Una posible estrategia de solución consiste en realizar lo siguiente:

$$y = Ux \quad (\mathbf{A.3})$$

Para resolver y :

$$Ly = b \quad (\mathbf{A.4})$$

Como la matriz L es triangular superior este sistema puede resolverse mediante sustitución hacia abajo.

Una vez con los valores encontrados de y , las incógnitas al sistema inicial se resuelven despejando x de $Ux = y$. Nuevamente, como U es escalonada, este sistema puede resolverse en caso de tener solución mediante sustitución hacia atrás.

Método Iterativo Multigrid

El método multigrid se basa en tener una relación entre dos mallas: una fina y otra gruesa. La solución inicial está usualmente lejos de la solución que converge. El método consiste en resolver la ecuación en una malla gruesa y usar esa solución en la malla más fina.

Consideremos el siguiente problema:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad (\mathbf{A.5})$$

Si se utiliza diferencias finitas para aproximar el problema anterior:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = f_i \quad (\mathbf{A.6})$$

Luego de n iteraciones en la malla con espaciado Δx , se obtiene una solución y^n , la ecuación anterior se cumple con un residuo ρ^n :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n) = f_i - \rho_i^n \quad (\text{A.7})$$

Restando la ecuación (A.7) a la ecuación (A.6):

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (\epsilon_{i-1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i+1}^n) = \rho_i^n \quad (\text{A.8})$$

La ecuación (A.8) es para el nodo i de la malla fina.

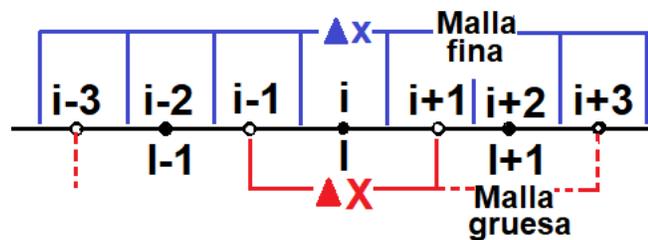
Para hallar la ecuación en la malla gruesa, notamos que el nodo l de la malla gruesa consiste en el volumen de control alrededor de $i-1$ y de $i+1$ de la malla fina:

$$\frac{1}{4(\Delta x)^2} (\epsilon_{i-2}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i+2}^n) = \frac{1}{4} (\rho_{i-1}^n + 2\rho_i^n + \rho_{i+1}^n) \quad (\text{A.9})$$

Usando la relación entre las dos mallas $\Delta X = 2\Delta x$, la ecuación anterior es equivalente a:

$$\frac{1}{\Delta X^2} (\epsilon_{l-1}^n - 2\epsilon_l^n + \epsilon_{l+1}^n) = \frac{1}{4} (\bar{\rho}_l) \quad (\text{A.10})$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es la aproximación de la segunda derivada para la malla gruesa, el lado derecho es un residuo promedio en el nodo l de la malla gruesa. La interpolación más simple de una cantidad de la malla gruesa a la malla fina es la interpolación lineal. Los puntos de la malla fina que se encuentran cerca de la malla gruesa forman un promedio de los puntos cercanos del nodo l de la malla gruesa.



Figura

Figura 62. Mallas de la técnica multigrad.