

**EMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE SONIDO EN MATERIALES
GRANULARES: EFECTO SOBRE LA COMPACTACIÓN**

DAVID ANTONIO ESPÍNDOLA ROJAS

Director de Tesis:
Dr. Francisco Esteban Melo Hurtado

Trabajo de Tesis para optar al
grado de Doctor en Ciencia con
mención en Física

Santiago-Chile
2012

**EMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE SONIDO EN MATERIALES
GRANULARES: EFECTO SOBRE LA COMPACTACIÓN**

DAVID ANTONIO ESPÍNDOLA ROJAS

Director de Tesis : Dr. Francisco Melo.
Co-Director de Tesis : Dr. Jean-Christophe Géminard.
Profesores Comisión : Dr. Felipe Barra.
: Dr. Luis Gaete.
: Dr. Eugenio Hamm.
: Dr. Sergio Rica.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIA CON MENCIÓN EN FÍSICA

Santiago-Chile
2012

“EMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE SONIDO EN MATERIALES
GRANULARES:
EFECTO SOBRE LA COMPACTACIÓN”

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al grado de Doctor en Ciencia con mención en Física.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO DE CHILE

OCTUBRE 2012

“EMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE SONIDO EN MATERIALES
GRANULARES:
EFECTO SOBRE LA COMPACTACIÓN”

DAVID ANTONIO ESPÍNDOLA ROJAS

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Francisco Melo H., del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato:

.....

.....

.....

.....

.....

Co-Director de Tesis

.....

Director de Tesis

.....

Director

V

A Sofia.

Agradecimientos

Este trabajo es directa consecuencia del apoyo e incentivo que me han brindado mis padres, Nelson Espíndola y Nilda Rojas, durante toda mi vida, a quienes debo agradecer por haber sembrado en mí la inquietud por explorar y aprender. Agradezco también a mi hermana, Paula Espíndola, por el apoyo prestado en los buenos y malos momentos durante este largo proceso. Este trabajo de tesis no podría haber sido posible de no haber contado con el apoyo incondicional de mi familia, María José Toro y Sofía Espíndola, quienes han sufrido comprensivamente mi ausencia debido al tiempo que demanda este tipo de trabajo.

Durante la realización de este trabajo de tesis conté con el apoyo incondicional de mi tutor el Dr. Francisco Melo, quien no solo me ha brindado la preparación académica para transformarme en investigador, sino también me ha traspasado su experiencia personal y moral sobre esta hermosa profesión, invirtiendo tiempo y poniendo a prueba su paciencia. No puedo dejar de agradecer a mi amigo Belfor Galaz por su amistad y aporte en este trabajo. Debo agradecer también a mi amiga y coordinadora del equipo de trabajo, Erika Inostroza, por su buena disposición y ayuda en todos los trámites administrativos. Quisiera agradecer también a mis amigos Leonardo Caballero, Francisco Vivanco, Roberto Bernal y Francisco Santibañez quienes con su simpatía, disposición y experiencia siempre fueron un aporte a todas mis preguntas, a mis compañeros de laboratorio, Franco Tapia, Hector Alarcon, Antonella Rescaglio, Romina Muñoz, Javier Contreras, Nelson Sepulveda, por todas las útiles discusiones que siempre surgieron de la manera más

constructiva posible.

Una parte importante de este trabajo fue realizada en la École Normale Supérieure de Lyon, bajo la tutela del co-director de este trabajo de tesis el Dr. Jean-Christophe Géminard, a quien debo agradecer por haberme recibido en su equipo de trabajo, además de su amistad y paciencia durante mis dos estadías en Francia, las que fueron financiadas por el proyecto ANR-Fondecyt 011 y por el programa de movilidad doctoral a través de la Embajada de Francia en Chile.

La mayor parte de los experimentos presentados no hubiesen sido posibles de no haber contado con la experiencia del equipo técnico del Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile, Manuel Meza, Nelson Flores y Gonzalo Martín, quienes siempre cooperaron constructivamente en los diseños experimentales de este trabajo.

Finalmente, debo agradecer a la Vice-Rectoría de Investigación y Desarrollo de esta Universidad y a la Comisión Nacional de Investigación y Desarrollo (CONICYT) la que, por medio del programa de becas de doctorado nacional, han financiado mis estudios durante los años de duración de esta investigación.

A todos ellos, muchas gracias.

Tabla de Contenidos

1. Introducción	9
1.1. Campo Medio	12
1.1.1. Contacto de Hertz	12
1.1.2. Contacto de Mindlin-Hertz	13
1.1.3. Teoría de Campo Medio	16
1.2. Ultrasonido en Materiales Granulares Densos	20
1.2.1. Dependencia con el tamaño del detector	22
1.2.2. Dependencia con la amplitud de excitación	22
1.2.3. Dependencia con el tamaño del sistema	23
1.2.4. Modelo de difusión	24
1.2.5. Espectroscopia de resonancia ultrasónica no-lineal	26
2. Relajación por pulsos ultrasónicos	29
2.1. Introducción	30
2.1.1. Modelo del bloque	31
2.2. Montaje experimental	41
2.3. Resultados	42
2.4. Esquema teórico	45
2.5. Conclusión	51

3. Ultrasonido durante un ensayo de relajación	53
3.1. Introducción	54
3.1.1. Test de relajación en materiales granulares	55
3.1.2. Fluidificación acústica	60
3.1.3. Análisis estructural (Coda Wave Interferometry)	62
3.2. Montaje experimental	65
3.3. Caracterización de la fluencia natural	67
3.4. Efecto del ultrasonido de alta amplitud	69
3.5. Cambios rápidos de amplitud	72
3.6. Fluidificación Acústica, generalización	76
3.7. Aplicación del método CWI	79
3.8. Conclusión	84
4. Ultrasonido durante un test tri-axial	86
4.1. Introducción	88
4.1.1. Compresión tri-axial en materiales granulares	89
4.1.2. Criterio de ruptura de Mohr-Coulomb	91
4.1.3. Modelo de envejecimiento	94
4.2. Montaje experimental	95
4.3. Dependencia con la presión hidrostática	98
4.4. Dependencia con la velocidad de deformación	99
4.5. Variación de la velocidad del sonido	100
4.6. Variación de la compactación	102
4.7. Modelo de bloques	105
4.8. Modelo de envejecimiento	110
4.9. Ciclos	111
4.10. Aparición de stick-slip	114

<i>TABLA DE CONTENIDOS</i>	3
4.11. Efecto del ultrasonido de alta amplitud	117
4.12. Conclusión	118
5. Conclusiones	120
A. Solución Ecuación de Difusión	122
B. Calibración transductor LFE	128
B.1. Montaje Experimental	128
B.2. Resultados	129
C. Suma de variables aleatorias independientes	132
D. Publicaciones	135

Índice de Ilustraciones

1.1. Esquema del contacto de Hertz y Mindlin-Hertz	12
1.2. Distribución de presiones sobre un contacto	14
1.3. Ondas acústicas en un material granular	21
1.4. Ondas S para distintas amplitudes de excitación	23
1.5. Ondas S para distintos largo D	24
1.6. Aproximación de difusión	26
1.7. NRUS	27
2.1. Diagrama del modelo del Bloque	32
2.2. Mapa α - β para un pulso y un bloque	33
2.3. Movimiento de un bloque en el régimen elástico	34
2.4. Movimiento de un bloque en el régimen inercial	35
2.5. Dependencia del bloque con la posición, u_0	36
2.6. Respuesta a 50 pulsos	38
2.7. Estabilidad del bloque luego de 10 pulsos	39
2.8. Montaje experimental: Experimento tapping	41
2.9. Altura y fuerza en la base del apilamiento	43
2.10. Altura de la pila en función del número de pulsos	44
2.11. Esquema de cadena de L deslizadores	45
2.12. Deformación de una cadena de deslizadores en función de α y β .	47

2.13. Posición de los bloques en función del número de pulsos	48
2.14. Deformación total de la cadena para distintas condiciones iniciales	49
2.15. Deformación total en función de la amplitud	50
3.1. Curvas de fluencia para un mono-cristal de Clorhidrato de Sodio .	56
3.2. Modelo de Maxwell	57
3.3. Diagrama de Fluidificación Acústica	60
3.4. Montaje experimental: Test de fluencia	66
3.5. Onda Coherente propagada a través del packing granular	67
3.6. Relajación de la deformación	68
3.7. Velocidad del sonido en función del esfuerzo	69
3.8. Deformación para distintas amplitudes de ultrasonido	69
3.9. Parámetros del modelo de envejecimiento	71
3.10. Esquema de evolución de la viscosidad efectiva	72
3.11. Respuesta de la deformación al incremento de amplitud	73
3.12. Cambios de velocidad del sonido y viscosidad	76
3.13. Señal detectada por el transductor HFR	79
3.14. Onda coda antes y después de un cambio estructural.	80
3.15. Esquema del método CWI	81
3.16. Resultados CWI sobre la deformación en test de fluencia	83
4.1. Curva de esfuerzo deformación típica	89
4.2. Test tri-axial en arena realizado por Oda	90
4.3. Diagrama Criterio de Mohr-Coulomb	92
4.4. Montaje experimental: Compresión tri-axial	96
4.5. Compresión tri-axial para distintas presiones hidrostáticas	98
4.6. Ensayo tri-axial variando la velocidad de compresión	99
4.7. Variación de la velocidad del sonido durante un test tri-axial	100

4.8. Imágenes para aplicar método de proyección de franjas	102
4.9. Reconstrucción tridimensional de la muestra	103
4.10. Cambio de volumen durante la compresión tri-axial	104
4.11. Diagrama del modelo de bloques	105
4.12. Fuerza para un deslizador	107
4.13. Comparación modelo de bloques y experimento	109
4.14. Fluidity en función del tiempo	110
4.15. Parámetros del modelo de envejecimiento	111
4.16. Ciclos de esfuerzo	112
4.17. Respuesta del modelo de envejecimiento a un ciclo en esfuerzo .	113
4.18. Ciclos en deformación	114
4.19. Stick-Slip en test tri-axial	115
4.20. Mapa de correlación en presencia de stick-slip	116
4.21. Stick-Slip como función del volumen de aceite depositado	116
4.22. Efecto del cambio de amplitud durante la compresión	118
B.1. Montaje experimental: Calibración transductor LFE	129
B.2. Onda acústica emitida por el transductor LFE	130
B.3. Curva de calibración para el transductor LFE	130

Resumen

Este trabajo de tesis presenta un estudio experimental acerca de la interacción entre ondas acústicas y materiales granulares densos, y se enfoca en la desestabilización mediante impulsos sónicos y ultrasónicos. En este contexto, se evidencia un debilitamiento, reflejado en una disminución de la velocidad del sonido efectiva en el medio, y un aumento de la plasticidad, revelado por una deformación macroscópica del medio granular, la que puede estar acompañada de deslizamientos relativos entre los granos que constituyen el medio. debido al tiempo que demanda este tipo de trabajo Este estudio se divide en tres casos. En el primero, modelamos el proceso de compactación en columnas granulares producido por impulsiones sónicas, mediante una construcción basada en una cadena de bloques interactuando entre sí elásticamente, pero friccionando contra las paredes del contenedor. Encontramos que nuestro modelo, a pesar de lo simple, comparte algunas de las características observadas en este tipo de experimentos, como son las ramas reversible e irreversible, ambas observadas experimentalmente en la curva de compactación en función del número de eventos propagados.

En segundo y tercer lugar, mediante un test de relajación de la deformación y un test de compresión triaxial, respectivamente, logramos cuantificar características sobre la interacción de la onda mecánica con los materiales granulares. Usando la propagación de ondas en materiales granulares tanto como para desestabilizar como para obtener información sobre las propiedades mecánicas y la estructura del medio, logramos caracterizar

nuestro sistema granular. Así nos enfocamos en la modificación de la velocidad del sonido y de la viscosidad efectiva del medio como una función de la amplitud de la onda propagada. Mostramos que estos cambios en las propiedades mecánicas, pueden ser vistos como un proceso de envejecimiento, el que ocurre naturalmente sin perturbación aplicada, pero es acelerado en la presencia de estas. Este envejecimiento es producto de re-acomodos a nivel de granos, los que caracterizamos mediante la propagación de ondas de scattering. Para cumplir este objetivo, hemos usado un método llamado “Interferometría de ondas coda” el que nos ayuda a obtener información acerca de los cambios estructurales en el medio.

Mostramos también algunos fenómenos, relativamente novedosos, como son la fluidificación acústica, los eventos de stick slip y la histéresis de velocidad del sonido. Todos estos fenómenos están relacionados a las múltiples no-linealidades a nivel de contacto.

Capítulo 1

Introducción

Una de la principales y más interesantes características de los medios granulares es el hecho de que estos pueden comportarse como materiales en estado líquido, sólido o gaseoso, dependiendo de las condiciones externas a las que es sometido. Por ejemplo, pueden comportarse como sólidos cuando son lo suficientemente densos y están confinados en volumen y/o en presión. Sin embargo, si son sujetos a esfuerzos de cizalle relativamente altos pueden deformarse y fluir tal y como sucede con los líquidos. Por otro lado, en condiciones de vibraciones mecánicas, a amplitudes suficientemente altas y densidades suficientemente bajas, estos materiales comparten una cinética similar a la observada en gases.

Las interacciones entre las partículas constituyentes en materiales granulares secos y densos, son principalmente debidas a la elasticidad a nivel de contacto y a la fricción entre granos. Existe evidencia experimental de que las vibraciones ultrasónicas pueden producir disminución en la fricción del material [1]. En materiales granulares, también existe evidencia similar donde la disminución de la fricción efectiva viene acompañada de pequeñas movilizaciones en los contactos [2, 3]. De esta forma, las perturbaciones

mecánicas sobre materiales granulares pueden inducir una transición desde un comportamiento sólido a uno líquido. Tales movilizaciones pueden producir grandes fluencias globales. Ejemplo de estas desestabilizaciones son comunes en mecánica de suelos, por ejemplo avalanchas. En geofísica, se propone que uno de los mecanismos que producen réplicas sísmicas luego de fuertes terremotos es el debilitamiento de las placas tectónicas, debido a que las ondas de alta amplitud (terremotos) producen una disminución del módulo elástico provocando una sensibilidad extra de las placas tectónicas a perturbaciones, generando nuevos deslizamientos que podrían ser observados como réplicas sísmicas.

En este trabajo de tesis investigamos algunos de los mecanismos mediante los cuales las ondas mecánicas interactúan con la materia granular alterando algunas de sus propiedades mecánicas, provocando debilitamiento y plasticidad, la que se evidencia mediante relajaciones en la deformación macroscópica del sistema.

Los ensayos mecánicos, tales como el test de fluencia o el test de compresión triaxial, son usados comúnmente para obtener información sobre las propiedades reológicas de los materiales en estudio. En este sentido, estos ensayos pueden ser útiles para monitorear el comportamiento mecánico de los medio granulares cuando además son alterados mediante la aplicación de ondas mecánicas.

Este capítulo está destinado a introducir algunos conceptos y observaciones generales comenzando con la mecánica a nivel de contacto y a ilustrar cómo desde aquí obtenemos una descripción macroscópica de las propiedades mecánicas del medio. En el transcurso de los capítulos, el ultrasonido nos ayudará, además de desestabilizar localmente la estructura, a obtener información acerca de las propiedades reológicas y/o el estado de la textura del material.

Debido a esto comentaremos también sobre el fenómeno de propagación de ultrasonido en materiales granulados y cómo a partir de las características de las ondas propagadas podemos inferir esta información.

En los capítulos siguientes trataremos el problema de la fluidificación inducida por ultrasonido mediante tres experimentos propuestos, tapping en columnas de partículas, propagación ultrasónica durante un ensayo de fluencia y propagación ultrasónica durante un ensayo de compresión tri-axial.

El punto de inicio de la reología de medios granulares es, sin lugar a dudas, la mecánica de contacto. Usualmente las partículas constituyentes en materiales granulares se modelan mediante cilindros o esferas, las que interactúan con sus vecinos mediante contactos elásticos y fricción. Estas interacciones son dominantes a nivel macroscópico y naturalmente dependen de la rugosidad superficial. La mayoría de los fenómenos observados en materiales granulares se corresponden con mecanismos de no-linealidad sobre los contactos. Por ejemplo, micro-deslizamientos y deslizamientos, incremento del área de contacto, histéresis friccional, memoria sobre el contacto, entre otros. Por este motivo, comenzaremos por introducir la mecánica de contactos de manera simple y resaltando los aspectos más relevantes para nuestro estudio.

1.1. Campo Medio

1.1.1. Contacto de Hertz

Consideremos dos esferas elásticas presionadas la una contra la otra mediante una fuerza F_n aplicada en la dirección que forma la línea que une los centros de las esferas. Producto de esta fuerza, la distancia entre los centros disminuye en δ formando un área de contacto circular de radio a , ver figura 1.1(a). Desde la teoría de la elasticidad lineal, la relación entre estas cantidades es,

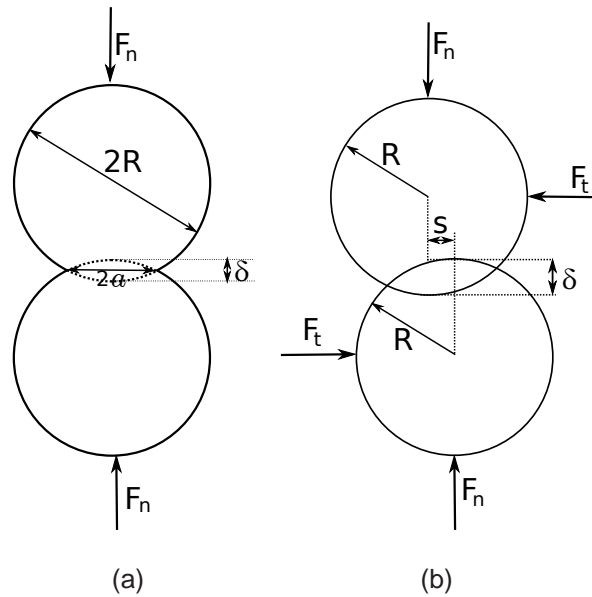


Figura 1.1: (a) Esquema del contacto de Hertz para dos esferas idénticas. (b) Esquema del contacto de Mindlin-Hertz para dos esferas idénticas.

$$\sigma \propto \frac{F_n}{a^2} \propto E_g \frac{\delta}{a}, \quad (1.1)$$

donde E_g es el módulo elástico de los granos. Si consideramos que $\delta \ll R$ y $a \ll R$. Entonces, desde la geometría, obtenemos $a^2 = R\delta$, sustituyendo esto

en la ecuación 1.1, podemos escribir,

$$F_n \propto E_g R^{1/2} \delta^{3/2}. \quad (1.2)$$

Obtenemos que el contacto entre estos dos granos corresponde a una interacción no-lineal con la deformación δ de la forma escrita en la ecuación 1.2. En [4, 5] encontramos un cálculo completo de dos esferas en contacto, obteniendo,

$$F_n = \frac{2}{3} k_n R^{1/2} \delta^{3/2}, \quad (1.3)$$

con $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ y $k_n = 4\mu_g/(1 - \nu_g)$, donde R_1 y R_2 se refiere a los radios de las esferas en contacto y μ_g y ν_g son el módulo de cizalle y la razón de Poisson del material constitutivo de los granos, respectivamente.

1.1.2. Contacto de Mindlin-Hertz

El caso en donde aplicamos una fuerza tangencial a la superficie de contacto entre las esferas (ver figura 1.1(b)), es más delicado y fue estudiado en detalle por Mindlin [6]. Para ejemplificarlo, supongamos un contacto entre dos esferas idénticas sometidas a una fuerza normal constante, F_n , que produce una deformación normal, δ . Luego, aplicamos una fuerza tangencial F_t que produce una deformación s . Si suponemos que no existe deslizamiento entre las superficies de las partículas, entonces podemos escribir, análogamente a la ecuación 1.1,

$$\sigma_t \propto \frac{F_t}{a^2} \propto \mu_g \frac{s}{a}, \quad (1.4)$$

donde σ_t es el esfuerzo producto de la fuerza tangente y μ_g es el modulo de cizalle de los granos. De esta forma, obtenemos

$$F_t \propto \mu_g \sqrt{R\delta} s. \quad (1.5)$$

En la ecuación 1.5, observamos que la fuerza tangencial depende de la deformación normal. En el caso anterior hemos definido el camino de deformación $\delta(s) = Cte$. En general, cuando no consideramos deslizamiento, la fuerza tangencial depende de este camino, mediante

$$dF_t = k_t \sqrt{R\delta(s)} ds, \quad (1.6)$$

donde $k_t = 8\mu_g/(2 - \nu_g)$. Desde la ecuación 1.6 vemos explícitamente que para obtener la relación $F_t = F_t(s)$, necesitamos conocer el camino $\delta(s)$.

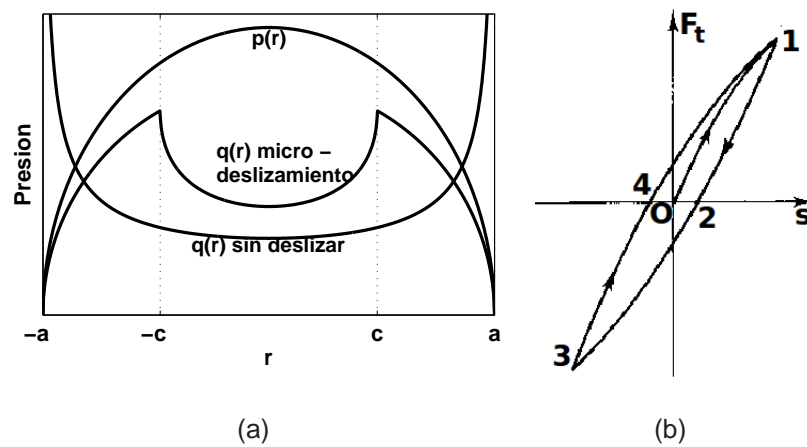


Figura 1.2: (a) Distribución de las presiones sobre el área de contacto entre dos esferas. $p(r)$ es la distribución de esfuerzo normal producida por la fuerza F_n . $q(r)$ (sin deslizar) es la distribución de esfuerzo de corte producida por la fuerza tangencial al área de contacto F_t considerando que no existe deslizamiento. $q(r)$ (micro-deslizamiento) es la distribución de esfuerzo de corte producida por la fuerza tangencial al área de contacto F_t considerando micro deslizamientos en la zona anular $c < r < a$. (b) Ciclo de histéresis producida por un ciclo de carga y descarga de la fuerza tangencia cuando $\delta(s) = Cte$. La curva se recorre en el orden de los números escritos.

Para una deformación normal fija, es decir $\delta(s) = Cte$, observamos, en la figura 1.2(a), la distribución de esfuerzos normales $p(r)$ sobre un área de

contacto circular de radio a . Si además aplicamos una fuerza tangencial, y suponemos que las esferas no presentan ninguna clase de deslizamiento, la distribución de presiones $q(r)$ debido a esta fuerza diverge cerca del límite del área de contacto. De esta manera, en una zona anular dada por $c < r < a$, sobrepasamos localmente el criterio de deslizamiento de Coulomb $q(r) \leq \mu p(r)$. Esto nos lleva a suponer que en realidad siempre encontraremos deslizamientos en esta zona anular. Ahora bien, si consideramos que existen deslizamientos locales sobre la superficie de contacto, obtenemos la distribución de presiones mostrada en la figura 1.2(a), etiquetada como “ $q(r)$ micro-deslizamiento”. Cuando existen micro-deslizamientos en un contacto se origina una fuente de disipación, la cual puede ser observada como una histéresis en un ciclo de carga y descarga de la fuerza tangencial, como el mostrado en la figura 1.2(b). Basándonos en el libro “Contact Mechanics” de Johnson, podemos calcular la rigidez media del contacto en una oscilación de la fuerza en función de la amplitud del desplazamiento s_{max} , esto es,

$$K_{ciclo} = \frac{F_t^{max}}{s_{max}} = \frac{\mu F_n}{s_{max}} \left[1 - \left(1 - \frac{8a}{3\mu F_n} \frac{G_g}{2 - \nu_g} s_{max} \right)^{3/2} \right]. \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 representa la pendiente de la línea que une los puntos inicial y final del ciclo de histéresis de la figura 1.2(b).

En el contacto entre dos esferas existen tres fuentes de no-linealidad. La primera es producida por el incremento de radio del área de contacto a debido al incremento de la fuerza normal (contacto de Hertz). La segunda es debida a la disipación producida por los micro-deslizamientos en la zona anular $c < r < a$ cuando sometemos el contacto a una fuerza tangencial. Y la tercera tiene relación con la elección de la función $\delta(s)$, la cual es intrínsecamente elegida al momento de llevar a cabo la deformación. Estos dos últimos mecanismos dan origen entonces a una dependencia con la historia de la compresión. Una

completa revisión de la mecánica del contacto puede ser encontrada en [5, 7].

1.1.3. Teoría de Campo Medio

Comentaremos aquí sobre el problema de una aglomeración de esferas que interactúan mediante los mecanismos de contacto discutidos anteriormente. La teoría de campo medio consiste en obtener una relación analítica entre el esfuerzo macroscópico impuesto, σ_{ij} , y el campo de deformaciones internas del medio granular, ϵ_{ij} . Para esto, se calcula la energía elástica promedio sobre el empaquetamiento. Una revisión interesante de esta teoría puede ser encontrada en [8, 9]. Una de las principales predicciones de la teoría de campo medio es la dependencia del módulo de compresibilidad efectivo, K_{eff} , y módulo de cizalle efectivo, μ_{eff} , con la presión de confinamiento, p , como $p^{1/3}$. Esto es:

$$K_{eff} = \frac{k_n}{12\pi} (\phi Z)^{2/3} \left(\frac{6\pi p}{k_n} \right)^{1/3} \quad (1.8)$$

$$\mu_{eff} = \frac{k_n + (3/2)k_t}{20\pi} (\phi Z)^{2/3} \left(\frac{6\pi p}{k_n} \right)^{1/3}, \quad (1.9)$$

donde Z es llamado “número de coordinación” y corresponde al número promedio de contactos por grano. Este número, en tres dimensiones, puede fluctuar entre 6 y 12 (estructura fcc). ϕ es la fracción de empaquetamiento, definida como la razón entre el volumen de granos y el volumen total ocupado. Este parámetro toma valores entre 0,54 para el empaquetamiento aleatorio más suelto (random loose packing), y 0.64 para el empaquetamiento aleatorio más denso (random close packing).

Las constantes mecánicas de las ecuaciones 1.8 y 1.9 se relacionan con las velocidades efectivas de propagación de ondas elásticas en compresión c_p

o cizalle c_t ,

$$c_p = \sqrt{\frac{K_{eff} + 4/3\mu_{eff}}{\rho_g\phi}} \propto p^{1/6} \quad (1.10)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu_{eff}}{\rho_g\phi}} \propto p^{1/6}, \quad (1.11)$$

con ρ_g como la densidad del material de los granos.

Para ejemplificar y motivar la discusión respecto de las limitaciones de la teoría de campo medio, resolveremos un pequeño ejemplo. Consideremos dos esferas idénticas en contacto de radio R , cada una posicionada mediante el vector \vec{R}_1 y \vec{R}_2 . El vector que une sus centros, viene dado por $2R\hat{n}$, donde \hat{n} es un vector unitario. Supongamos que tenemos un apilamiento de N esferas de este tipo, ocupando un volumen total V , en donde existen N_c contactos. Entonces, el esfuerzo total se puede escribir como una suma de las contribuciones de cada uno de los contactos:

$$\sigma = -\frac{2R}{V} \sum_{i=1}^{N_c} F_i \hat{n}_i \otimes \hat{n}_i. \quad (1.12)$$

Donde F_i es la fuerza del i -ésimo contacto y viene dada por las relaciones de la mecánica de contacto. Notemos que σ es un tensor y que \otimes simboliza un producto tensorial. El volumen total puede ser escrito como $1/V = \phi/(NV_0)$ donde ϕ es la fracción de empaquetamiento y V_0 es el volumen de una de las esferas. Con esto podemos escribir,

$$\sigma = -\frac{6\phi}{4\pi R^3} \sum_{i=1}^{N_c} F_i \hat{n}_i \otimes \hat{n}_i. \quad (1.13)$$

Si consideramos que no existe fricción entre las esferas, entonces, la fuerza de contacto relevante es la fuerza de Hertz, dada por la ecuación 1.3. Entonces, podemos escribir,

$$\sigma = -\frac{6\phi}{4\pi R^3} F_n(\delta) \sum_{i=1}^{N_c} \hat{n}_i \otimes \hat{n}_i. \quad (1.14)$$

Si consideramos coordenadas esféricas, entonces, podemos definir $\mathcal{P}(\theta, \varphi)$ como la densidad de probabilidad de encontrar un vector \hat{n} orientado mediante los ángulos θ y φ . Si consideramos que el número de partículas es muy grande, entonces, podemos reemplazar la suma por una integral mediante la probabilidad de encontrar el vector \hat{n} en cierta orientación. Esto es,

$$\sum_{i=1}^{N_c} \rightarrow N_c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \mathcal{P}(\theta, \varphi).$$

Supongamos que la probabilidad es homogénea, entonces $\mathcal{P}(\theta, \varphi) = 1/(4\pi)$. Con ayuda del número de coordinación podemos escribir $N_c = NZ/2$, con lo que obtenemos para el tensor de esfuerzos,

$$\sigma = \frac{3Z\phi}{4\pi R^2} F_n(\delta) I. \quad (1.15)$$

Donde I es la identidad. Si consideramos una presión hidrostática sobre el granular y sustituimos la relación 1.3,

$$P = \frac{Z\phi}{6\pi} k_n \left(\frac{\delta}{R} \right)^{3/2}. \quad (1.16)$$

Consideremos ahora que agregamos una pequeña deformación δ' al material, la que produce una pequeña respuesta en el esfuerzo P' . Para esto, expandimos en serie de Taylor la ecuación 1.16

$$P + P' = \frac{Z\phi}{6\pi R^{3/2}} k_n [\delta^{3/2} + 3/2 \delta^{1/2} (\delta' - \delta)]. \quad (1.17)$$

Si la deformación es afin, esto es, la deformación sigue a la presión aplicada, podemos identificar $\delta' - \delta = R\epsilon_v/3$, donde ϵ_v es la deformación volumétrica del sistema. De esta forma obtenemos,

$$P' = \frac{Z\phi}{12\pi R^{3/2}} \left(\frac{\delta}{R} \right)^{1/2} \epsilon_v. \quad (1.18)$$

Haciendo $\frac{dP}{d\epsilon_v}$, obtenemos el modulo de compresibilidad efectivo

$$K_{eff} = \frac{1}{12\pi} (Z\phi k_n)^{2/3} (6\pi P)^{1/3} \quad (1.19)$$

Existe múltiple evidencia experimental [10–13] que corrobora la tendencia dada por las ecuaciones 1.10 y 1.11, mediante la propagación de ondas de longitud de onda grande comparada con el tamaño de las partículas constituyentes del medio, hasta presiones menores que $10MPa$. Sin embargo, a presiones superiores se encuentra que la velocidad del sonido crece más rápido que $P^{1/6}$, específicamente, variando continuamente entre $P^{1/6}$ y $P^{1/3}$. Makse *et al.* en [14], se preocupó de investigar el porqué la teoría de campo medio falla bajo ciertas condiciones. Para esto, debemos enumerar las suposiciones hechas por la teoría [8, 9, 14]:

1. Cada contacto se deforma sobre una línea recta. Esto es, el camino de deformación en el espacio δ - s , cumple que $\frac{d\delta}{ds} = \beta$, donde β es la constante de proporcionalidad entre la deformación tangencial y normal, esta puede ser distinta para cada contacto del material.
2. Micro-deslizamientos despreciables. En este sentido se usa el incremento de la fuerza tangencial dado por la ecuación 1.6. Por lo que no se consideran disipaciones a nivel de contacto.
3. No existen pérdidas de contacto; las partículas inicialmente en contacto permanecen en contacto cuando el sistema se deforma. En este sentido, no se consideran disipaciones a nivel de deslizamientos relativos totales entre partículas.
4. No existen rotaciones entre las partículas. El tensor de deformaciones es simétrico.
5. No existen cambios de la compactación ϕ .
6. No existen cambios del número de coordinación Z .

Makse *et al.*, encontraron que las suposiciones más restrictivas y que produce mayores desviaciones con las condiciones reales de realización de los experimentos, son las número 3 y 6 [14]. Los granos no se encuentran siempre en equilibrio si no se consideran las relajaciones colectivas dentro de material. Por otro lado, el número de coordinación posee una gran influencia debido a que éste puede cambiar hasta en un factor 2. La suposición de afinidad incluye a las restricciones listadas como número 3 y 4, dado que si existe afinidad, no pueden existir relajaciones producto de deslizamientos.

1.2. Ultrasonido en Materiales Granulares Densos

Los ensayos acústicos son una herramienta útil para analizar las propiedades mecánicas de algunos materiales, debido a la alta penetración que poseen las ondas acústicas. En el caso de materiales granulares, la propagación de ondas acústicas presenta características notables debido a la naturaleza heterogénea del medio y a la complejidad de las interacciones a nivel de contacto. Se posee evidencia experimental [10, 15, 16] de que existe al menos dos regímenes en la propagación de ondas en medios granulares.

Para ejemplificar este fenómeno, consideremos una celda de paredes rígidas con forma cilíndrica de altura D , en cuyo interior se depositan partículas esféricas de vidrio. Se propagará una onda acústica usando un transductor ultrasónico desde un extremo de la celda. En el extremo opuesto, otro transductor recolectará la oscilación transmitida. Se encuentra que, si la excitación es de longitud de onda mucho mayor que el tamaño típico de los granos constitutivos $\lambda \gg d$, la onda se propaga como en un medio efectivo (figura 1.3(a)) pudiéndose definir con ella una velocidad de propagación efectiva, la cual puede ser relacionada con los módulos elásticos efectivos

mediante la ecuación 1.10 y 1.11, según corresponda. Si la perturbación acústica posee una longitud de onda del orden del tamaño típico de los granos $\lambda \sim d$, la señal obtenida es como la mostrada en la figura 1.3(b). Esta onda posee dos componentes en frecuencia. La primera, es referida en la literatura como onda “S” o “CODA”, la cual es de alta frecuencia y es producida por el fenómeno de múltiples scattering. Se ha encontrado que ésta posee con mayor probabilidad una polarización en cizalle [13], debido a que existen dos modos transversales y sólo uno longitudinal para una dirección de propagación dada, en el contexto del teorema de equipartición de la energía. Esta onda es altamente sensible a la textura de la red de contactos y se modifica si existen cambios estructurales tales como deslizamientos, cambios locales de la velocidad de propagación, cambios en la presión, entre otros. La segunda componente visible es etiquetada como onda “P” o componente balística, es una onda coherente, no dispersiva de baja frecuencia, corresponde a energía intercambiada desde modos de alta hacia modos de baja frecuencia, debido a la mecánica de los contactos no-lineales ya comentados. Supongamos que el

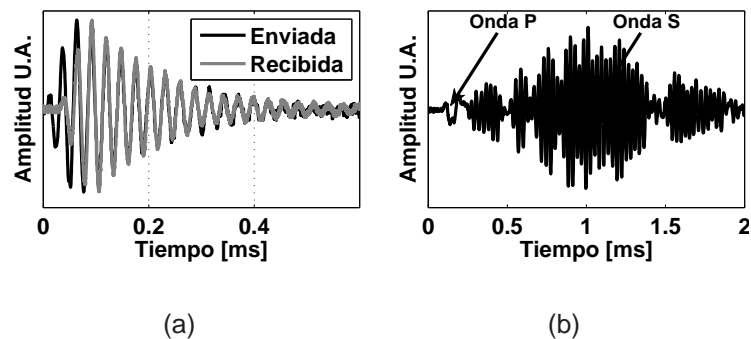


Figura 1.3: Ondas acústicas en un material granular. (a) En negro vemos la onda emitida, la cual es de longitud de onda $\lambda \gg d$. En gris vemos la onda recibida. (b) Onda recibida es respuesta a un pulso de un ciclo de duración con longitud de onda $\lambda \sim d$.

medio es excitado con dos frecuencias a la vez ω_1 y ω_2 , con $\omega_1 > \omega_2$, dado que

el contacto es no-lineal, existirá conversión de modos durante la propagación, por ejemplo aparecerán frecuencias como $\omega_1 - \omega_2$ y $\omega_1 + \omega_2$. Si consideramos también que los modos con frecuencias mayores se disipan más rápido y si nuestro sistema es lo suficientemente largo, conservaremos sólo el modo que posee frecuencia menor, que corresponde a $\omega_1 - \omega_2$. Este mecanismo ocurre junto con la propagación de la onda sobre el material, y la conversión múltiple de modos da como resultado que una parte de la energía de excitación, en forma de una onda de alta frecuencia, se transforma en una componente de baja frecuencia con longitud de onda $\lambda \ll d$, la que se propaga a través del medio a una velocidad efectiva dada, en principio, por la ecuación 1.10 o 1.11. Este proceso es conocido como auto-demodulación y es estudiado en [16–18].

1.2.1. Dependencia con el tamaño del detector

La onda S, al no ser coherente, es decir, aleatoria en fase sobre los centros de scattering ubicados en la sección de medición del cilindro, depende del tamaño del detector. Mientras más grande es el detector más grande es el área de integración, mayor cantidad de centros de scattering son incluidos, por lo que la onda de scattering detectada disminuye en amplitud.

1.2.2. Dependencia con la amplitud de excitación

La relación entre la onda P y la onda S depende de la amplitud de excitación. En la figura 1.4 observamos las señales P y S directas y su respectivo espectro en frecuencia para tres valores de amplitud, ϵ_a . Aquí las características no-lineales de la propagación de ondas se vuelven evidentes debido a su dependencia con la amplitud de propagación. A mayor amplitud, mayor es la amplitud de la onda P respecto de la onda S.

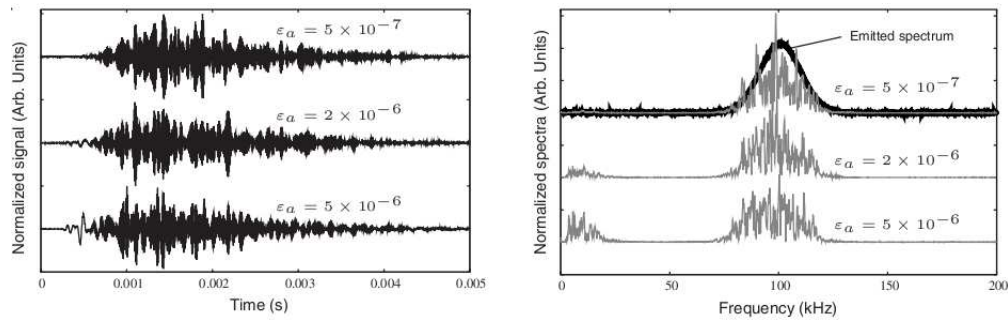


Figura 1.4: Señales obtenidas a partir de la excitación, en un medio granular, mediante un tren de onda de longitud de onda $\lambda \sim d$, para tres amplitudes de ultrasonido ϵ_a . En el panel de la izquierda observamos las señales en el espacio directo y en el panel derecho sus respectivos espectros en frecuencia. El espectro incidente es mostrado en línea gruesa continua. Notamos que existen dos componentes en frecuencia, la componente P y la componente S . [17].

1.2.3. Dependencia con el tamaño del sistema

La onda S y P dependen del tamaño de la muestra en la dirección de propagación. En la figura 1.5 observamos ondas típicas para muestras de tres distintos largos D . Notamos que la amplitud y la separación temporal de las componentes en frecuencia se modifica. En muestras más largas, la componente coherente posee mayor amplitud en relación a la componente de scattering. Esto puede ser explicado desde el punto de vista de la auto-demodulación; dado que mientras más viaja la onda en el medio, mayores son las conversiones de alta a baja frecuencia. Consideremos también que la componente de alta frecuencia posee una mayor atenuación, esto produciría que a un D suficientemente grande, sólo deberíamos conservar la componente de baja frecuencia.

Al ser S una onda de scattering es sensible a la textura de la red de contactos, por lo tanto su análisis nos entrega información acerca de esta red. Existen algunos métodos propuestos para extraer la información desde la onda

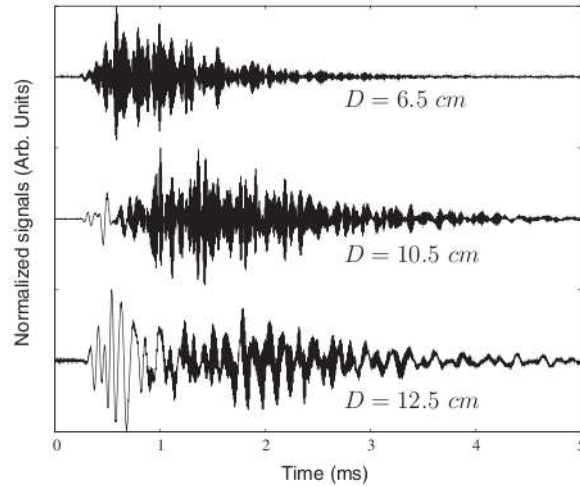


Figura 1.5: Observamos la dependencia de la onda S y P sobre la separación D entre el detector y el emisor. [17].

S. Por ejemplo, se pueden usar correlaciones cruzadas para detectar cambios en las ondas antes y después de cierto suceso [17, 19]. Esto nos da información solamente cualitativa. Una forma de obtener información cuantitativa es usar la aproximación de difusión que discutimos a continuación.

1.2.4. Modelo de difusión

Este modelo fue propuesto para ondas electromagnéticas dispersivas [20], pero también es aplicable a ondas acústicas, [21, 22]. Se ha propuesto que la densidad de energía U se propaga dispersivamente a través del material luego de haberse propagado una distancia inicial z_0 y evoluciona según la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\tau_a} U(\vec{r}, t) = D \nabla^2 U(\vec{r}, t) \quad (1.20)$$

donde τ_a es el tiempo de absorción inelástico, $D = v_e l^*/3$ es el coeficiente de difusión, l^* es el camino libre medio y v_e es la velocidad de propagación media.

Al resolver esta ecuación con las condiciones de borde indicadas, obtenemos una expresión para la intensidad promedio de la onda de scattering $J(t)$. En el apéndice A, resolvemos esta ecuación para un sistema excitado mediante una onda plana localizada en toda la extensión de la muestra, con coeficientes de reflectividad R , mediante la cual encontramos:

$$J(t) = \frac{2U_0 D}{C} e^{-\frac{t}{\tau_a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_n \cos \frac{\beta_n}{L} z_0}{C \sin^2 \beta_n + L} e^{-\frac{D \beta_n^2}{L^2} t} \quad (1.21)$$

Donde U_0 es la energía por unidad de longitud incidente en el material granular, $C = \frac{2l^*}{3} \frac{1+R}{1-R}$ y R es el coeficiente de reflectividad que toma valores entre 0 y 1, $R = 1$ implica que toda la energía se refleja, y β_n viene dada por el n -ésimo cero de la ecuación 1.22.

$$\tan \beta_n = \frac{L}{C \beta_n}. \quad (1.22)$$

Experimentalmente $J(t)$, puede ser obtenida promediando la envolvente al cuadrado de las ondas S , sobre muchas configuraciones o sobre muchos centros de scattering en la superficie examinada, es decir:

$$J(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ENV[S(t)], \quad (1.23)$$

donde ENV se refiere a la envolvente y la suma es sobre N configuraciones distintas de la red de contactos o N partículas sobre la sección examinada. Ajustando la medición experimental obtenida mediante la ecuación 1.23 con la relación teórica de la ecuación 1.21, obtenemos los parámetros D y τ_a , a partir de los cuales se pueden obtener parámetros como el camino libre medio l^* , que nos ayuda a caracterizar la estructura del granular. En la figura 1.6 observamos la aplicación de este modelo a nuestro sistema. Este consiste en un empaquetamiento cilíndrico de partículas excitado desde una de sus tapas. En la tapa opuesta recolectamos las ondas de scattering mediante un vibrómetro láser sobre varios puntos en la superficie, luego estas señales son usada en

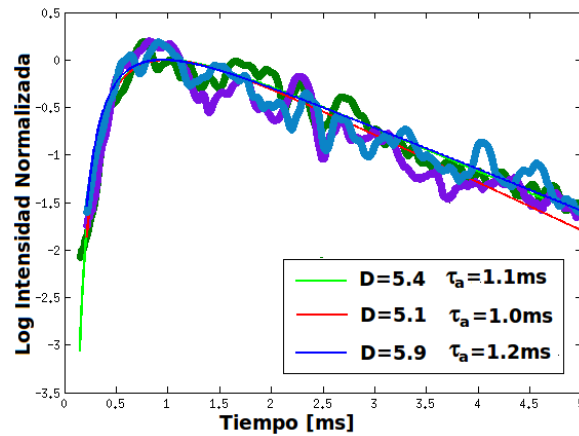


Figura 1.6: Aplicación del modelo de difusión: las líneas gruesas corresponden a los datos experimentales obtenidos adquiriendo las distintas señales de scattering sobre toda la superficie opuesta al emisor. Las líneas delgadas corresponden a los respectivos ajustes mediante la ecuación 1.21. Todas las curvas aquí fueron obtenidas a partir de experimentos independientes realizado bajo condiciones experimentales similares.

la ecuación 1.23 para obtener la envolvente de la figura 1.6. Las curvas en la figura 1.6 fueron obtenidas a partir de experimentos independientes realizados en condiciones experimentales similares.

1.2.5. Espectroscopia de resonancia ultrasónica no-lineal (NRUS)

La propagación de ultrasonido no sólo sirve como herramienta para obtener propiedades mecánicas o parámetros estructurales en medios granulares. También existe una interacción de la onda con el medio, lo que deriva en cambios a nivel estructural o global en el material. Ejemplo de esto es el experimento de espectroscopia de resonancia, que consiste en excitar mediante una onda continua, a amplitud y frecuencia fija, un extremo de un cilindro formado

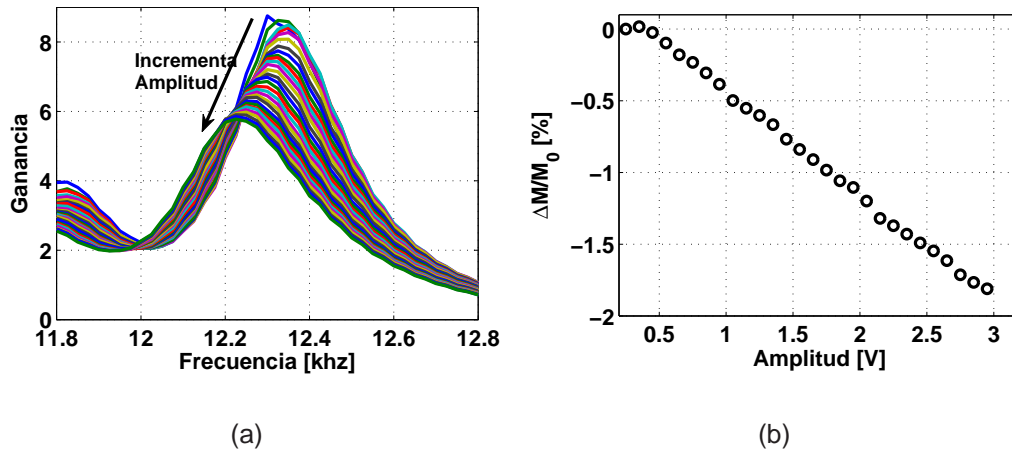


Figura 1.7: (a) Primer modo resonante en un material granular confinado en un cilindro. Incrementando sucesivamente la amplitud, la frecuencia de resonancia disminuye. (b) Variación porcentual del módulo M obtenida a partir del corrimiento de la curva de resonancia como una función de la amplitud de excitación.

de material granular consolidado. Sobre el otro extremo se recolecta la onda. Midiendo la amplitud y la fase respecto de la señal incidente en función de la frecuencia de excitación, obtenemos, cerca del modo fundamental, una curva de resonancia, (ver figura 1.7(a)) cuyo máximo depende de la amplitud de excitación. Como la frecuencia de resonancia del primer modo se puede escribir $f_r = c/(2L)$, donde L es la longitud típica del sistema y c es la velocidad del sonido efectiva del medio granular, entonces la variación de ésta en torno al valor de la frecuencia de resonancia medido a una amplitud de referencia pequeña f_{r0} es $\Delta f_r/f_{r0} = \Delta c/c_0$. Por otro lado, la velocidad del sonido efectiva se relaciona con el módulo $M = K_{eff} + 4/3\mu_{eff}$, esto es $c = \sqrt{M/\rho}$, donde ρ es la densidad efectiva del medio. La variación porcentual de la velocidad es $\Delta c/c_0 \sim \Delta M/(2M_0)$. Con todo esto, podemos escribir:

$$\frac{\Delta M}{M_0} \sim 2 \frac{\Delta f_r}{f_{r0}}. \quad (1.24)$$

Mediante la ecuación 1.24 obtenemos que los cambios en la frecuencia

de resonancia corresponden a un debilitamiento del material producto de la propagación de la onda en el medio. Otros autores han encontrado resultados similares en medios granulares, tales como arenas [23]. Incluso se ha llegado a plantear que éste puede ser uno de los mecanismos responsables del gatillamiento de réplicas sísmicas luego de grandes terremotos [24].

Capítulo 2

Relajación por pulsos ultrasónicos: “tapping sónico”

En la industria existen variadas problemáticas relacionadas con el empaquetamiento o apilamiento de materiales granulares, tales como productos agrícolas, farmacéuticos, químicos, entre otros. En minería se incurre en grandes pérdidas monetarias producto de la falta de precisión en conocer la cantidades reales de material extraído en las excavaciones. En este tipo de aplicaciones es de vital importancia conocer el comportamiento del empaquetamiento en materiales granulares, cuando estos son sometidos a perturbaciones mecánicas. Más académicamente, los procesos relacionados con la dinámica de los apilamientos granulares comparten algunas características con los materiales amorfos.

2.1. Introducción

Una de las características interesantes de los empaquetamientos granulares no cohesivos, es que pueden encontrarse estables en un amplio rango de densidades o compactaciones, típicamente para partículas monodispersas, entre $\rho \approx 0,55$ (Random loose packing) y $\rho \approx 0,64$ (Random close packing). En un material granular, constituido por partículas de vidrio del orden del milímetro, la energía térmica a temperatura ambiente es más de 10 ordenes de magnitud menor que la energía potencial gravitacional y/o la energía elástica generada en un contacto típico, por lo que se generan estados metaestables debido a que el ruido térmico a nivel de los granos no es capaz de conducir al sistema hacia un estado de mínimo absoluto de energía. De este modo, el carácter a-térmico produce que los apilamientos granulares puedan pasar de una densidad a otra en la medida que dispongan de un cierto camino para reestructurar el medio. Para estudiar este tipo de fenómenos típicamente se usan columnas o apilamientos verticales de granos, a los que se les introduce energía mecánica. Divoux *et al.* han estudiado la relajación de la compactación en pilas granulares mediante la aplicación de ciclos térmicos al apilamiento granular [25], encontrando que estos ciclos producen reacomodos de contactos debido a dilataciones térmicas resultantes de gradientes de temperatura en el medio. Otros autores han sometido la pila granular a repetidos pulsos acústicos en las paredes del medio [26, 27] encontrando que, a amplitud suficiente, la densidad del medio crece lentamente con el número de pulsos aplicados. También se observó un estado estacionario de la compactación que no depende de la compactación inicial. En [26, 28] se ha propuesto un mecanismo basado en la generación de volumen vacío dentro del material para alojar nuevas partículas. En este mismo contexto, si sometemos la pila granular a pulsos incrementando y luego disminuyendo su amplitud, es

posible observar dos ramas de evolución, una meta-estable, generada a bajas amplitudes y otra estacionaria [27, 29, 30].

En este capítulo, presentamos un modelo basado en una cadena compuesta de deslizadores interactuando entre sí elásticamente. Este modelo captura algunas de las características de los apilamientos verticales de partículas monodispersas no cohesivas cuando son sometidas a impulsos acústicos de longitud de onda grande, comparada con el tamaño del apilamiento, a saber, la elasticidad entre partículas, la fricción con las paredes del sistema y la aparición de una rama reversible y otra irreversible en la compactación del medio [27, 29, 30]. También mostraremos algunos resultados experimentales que evidencian relajaciones lentas de la densidad promedio de una columna granular perturbada con ondas acústicas.

Para comenzar necesitamos introducir el modelo de la cadena de deslizadores, caracterizando primero el comportamiento de un deslizador sometido a vibraciones mecánicas.

2.1.1. Modelo del bloque

Consideremos el deslizador de masa M de la figura 2.1. Apoyado, debido a una fuerza normal p , sobre una superficie rígida cuyos coeficientes de roce estático y dinámico son μ_s y μ_d , respectivamente. Este bloque está conectado a un resorte de constante de restitución k cuyo extremo opuesto está fijo. En el extremo libre del deslizador se aplica una fuerza de volumen F constante paralela a la superficie la que representa el peso de los granos en el marco del experimento de relajación del apilamiento granular introducido anteriormente. Las impulsiones mecánicas son impuestas sobre la base del bloque mediante una perturbación oscilatoria de la forma $A g(\omega t)$, donde $|g(\omega t)|$ tiene un valor

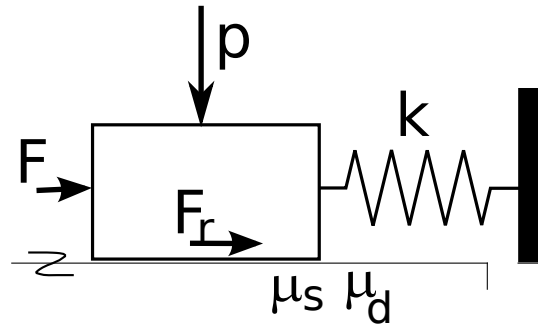


Figura 2.1: Diagrama del modelo de bloque consistente en un deslizador apoyado en una superficie rígida con fricción, conectado a un extremo de un resorte, cuyo extremo opuesto permanece fijo. Una perturbación oscilatorio se propaga a través de la superficie provocando o no deslizamiento en el bloque.

máximo de 1, y ω es la frecuencia angular de la perturbación. Luego, ¿Qué le pasará al bloque? ¿Cuál será su posición final luego del pulso? ¿Deslizará o no?.

Mientras el bloque no deslice la ecuación de movimiento nos da

$$A\omega^2 M g''(\phi) = -kx_0 - kAg(\phi) + F + F_r, \quad (2.1)$$

donde la comilla simboliza las derivadas respecto de $\phi = \omega t$ y x_0 es la posición inicial del bloque respecto del largo natural del resorte. En este punto adimensionalizamos las cantidades definiendo $\alpha = \frac{Ak}{\mu_s p}$, $\beta = \frac{A\omega^2 M}{\mu_s p}$, $\gamma = \frac{\mu_s - \mu_d}{\mu_s}$, $u = x/A$, $f = \frac{F}{\mu_s p}$ y $f_r = \frac{F_r}{\mu_s p}$. Con esto la ecuación 2.1 se convierte en:

$$\beta g''(\phi) + \alpha g(\phi) = f + f_r - \alpha u_0. \quad (2.2)$$

El bloque deslizará, si se cumple $|F_r| > \mu_s p$. Esto se traduce en,

$$|\alpha(g(\phi) + u_0) + \beta g''(\phi) - f| > 1. \quad (2.3)$$

Una vez cumplida la ecuación 2.3, el bloque deslizará según la ecuación de movimiento,

$$\beta u'' + \alpha u = f \pm (1 - \gamma). \quad (2.4)$$

El signo en el último término de la derecha de la ecuación 2.4 depende de la velocidad relativa entre el bloque y la superficie. Si el bloque desliza hacia la derecha en relación a la superficie, según la figura 2.1, el signo será negativo.

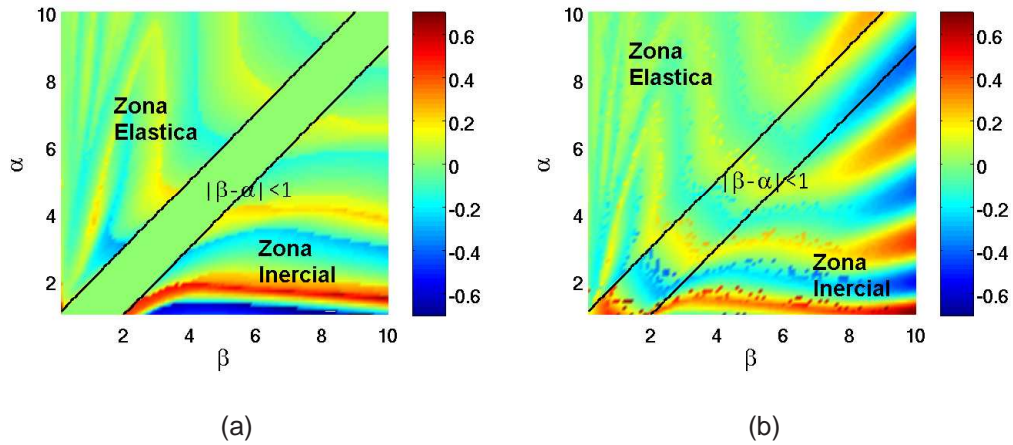


Figura 2.2: Posición del bloque luego de un pulso (u_1) como función de los parámetros α y β , en respuesta a una perturbación sinusoidal de un ciclo de duración, despreciando (b) o no (a) los efectos provocados por la discontinuidad de la derivada de la perturbación.

Supongamos que no existe fuerza externa, $f = 0$, que la posición inicial del bloque es nula, $u_0 = 0$, y que la perturbación es sinusoidal de un ciclo de duración, esto es $g(\phi) = \sin \phi$. La elección de la duración del pulso de un ciclo, produce una discontinuidad en la velocidad de la superficie de apoyo desde un valor $g'(2\pi) = 1$ a $g'(2\pi + \varepsilon) = 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, ocasionando deslizamientos sin importar el valor de los parámetros α y β , salvo si $\beta = 0$. Usando el pulso sinusoidal, el criterio de deslizamiento de la ecuación 2.3 se transforma en:

$$|(\alpha - \beta) \sin(\phi)| > 1. \quad (2.5)$$

En este caso simplificado, el bloque no desliza si $|\alpha - \beta| < 1$. Resolviendo numéricamente, mediante el método "Runge-Kutta Orden 4", la ecuación 2.4 junto con 2.5, realizamos un mapa grabando la posición final del bloque luego de

un pulso sinusoidal u_1 , barriendo los parámetros α y β , figura 2.2(a). Podemos ver en este mapa que la zona $|\alpha - \beta| < 1$ no presenta movimientos tal como predice la ecuación 2.5. El mapa de la figura 2.2(a) fue realizado con una excitación sinusoidal de un ciclo despreciando los efectos de la discontinuidad en la derivada del pulso. La figura 2.2(b) incluye este efecto, el que contribuye con desplazamiento adicional al final del pulso, con una mayor influencia para valores mayores de β . En estos mapas podemos identificar dos regiones, una región elástica y una región inercial, las que describiremos a continuación.

Régimen elástico

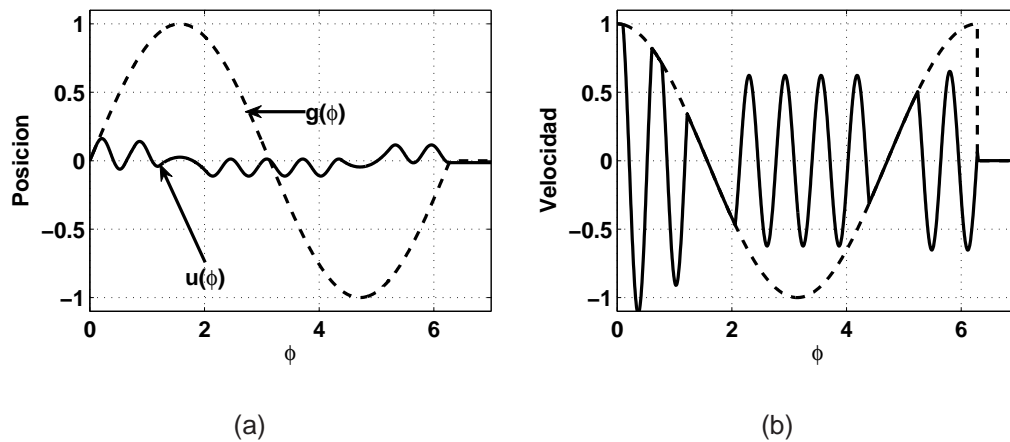


Figura 2.3: Movimiento de un bloque en el régimen elástico para $\alpha = 10$, $\beta = 0,1$ y $\gamma = 0,5$.

En línea continua vemos la posición(a) y velocidad (b) del bloque y en línea segmentada vemos la posición(a) y velocidad (b) de la superficie.

El régimen elástico consiste en la zona del espacio de parámetros α - β en donde $\alpha \gg \beta$. En este régimen el sistema posee una frecuencia natural mucho mayor que la frecuencia de excitación, lo que provoca que el bloque se mueva oscilando a su frecuencia natural y adhiriéndose a la superficie cuando la velocidad relativa entre el bloque y la superficie sea nula. En la figura 2.3

vemos el movimiento y la velocidad del bloque (línea continua) y de la base (línea segmentada) para $\alpha = 10$, $\beta = 0,1$ y $\gamma = 0,5$, se puede observar que el desplazamiento efectivo luego del pulso es muy pequeño, alrededor de 1,4 % de la amplitud del pulso.

Régimen inercial

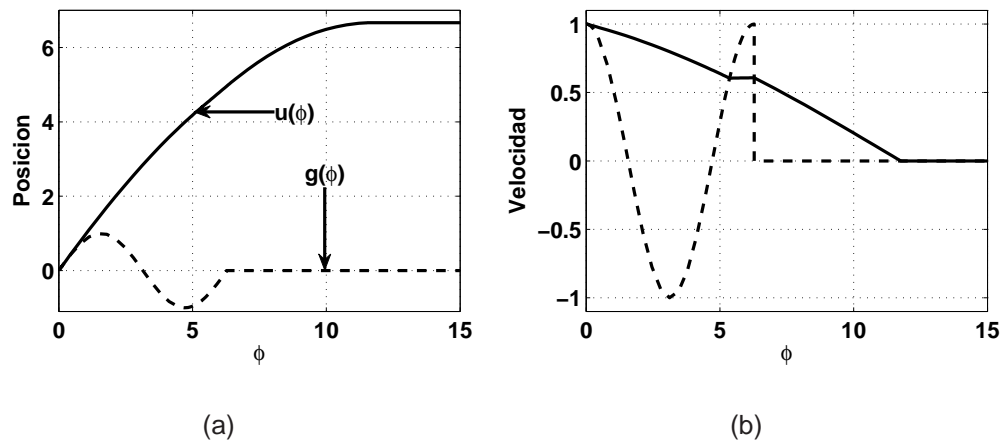


Figura 2.4: Movimiento de un bloque en el régimen inercial para $\alpha = 0,1$, $\beta = 10$ y $\gamma = 0,5$. En línea continua vemos la posición (a) y velocidad (b) del bloque y en línea segmentada vemos la posición(a) y velocidad (b) de la superficie.

El régimen inercial consiste en la zona del espacio de parámetros α - β en donde $\beta \gg \alpha$. En este régimen el sistema posee una frecuencia natural mucho menor que la frecuencia de excitación. Por lo que el bloque no puede seguir el movimiento de la oscilación y se despegue en una suerte de lanzamiento. Este caso se puede visualizar analíticamente despreciando el término elástico de la ecuación 2.4, esto es,

$$\beta u'' = \pm(1 - \gamma). \tag{2.6}$$

Si suponemos que no existen cambios de signo en la velocidad relativa entre el bloque y la base. Entonces, esta ecuación corresponde a un movimiento

uniformemente acelerado y tiene como solución una función cuadrática, lo que equivale a un lanzamiento. Luego, el sistema dejará de deslizarse cuando la velocidad relativa se anule, esto ocurre en el vértice de la parábola $u(\phi)$. En la figura 2.4 vemos el movimiento y la velocidad del bloque (línea continua) y de la base (línea segmentada) para $\alpha = 0,1$, $\beta = 10$ y $\gamma = 0,5$. Se puede observar que el desplazamiento efectivo luego del pulso es seis veces la amplitud del pulso.

Dependencia con el estiramiento inicial, u_0

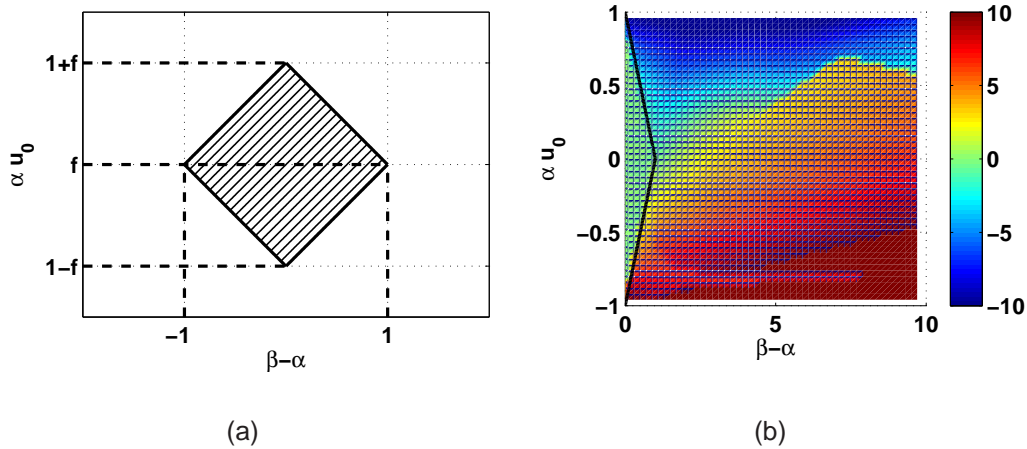


Figura 2.5: (a) Esquema de solución de las inecuaciones 2.7 en el espacio $\alpha u_0 - (\beta - \alpha)$. El área tachada simboliza la zona donde el bloque no es susceptible a la perturbación. (b) Simulación numérica de un pulso aplicado al bloque con $f = 0$ y $\gamma = 0,5$, barriendo en el espacio de parámetros $\alpha u_0 - (\beta - \alpha)$. La escala de colores representa la diferencia entre la posición antes y después del pulso, $u_1 - u_0$.

Para revisar la dependencia con el estiramiento inicial u_0 , sustuiremos la condición $g(\phi) = \sin \phi$ en la ecuación 2.3, con lo que obtenemos un set de

cuatro inecuaciones,

$$\begin{aligned}
 \alpha u_0 &> f + 1 + (\beta - \alpha) \\
 \alpha u_0 &< f - 1 + (\beta - \alpha) \\
 \alpha u_0 &> f + 1 - (\beta - \alpha) \\
 \alpha u_0 &< f - 1 - (\beta - \alpha),
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

cuya solución, parametrizada por $(\beta - \alpha)$ y αu_0 , es mostrada en la figura 2.5(a). El área tachada corresponde a la zona de condiciones iniciales que no provocan deslizamientos para ningún valor de ϕ . Si nuestro sistema está en equilibrio sin perturbación aplicada ($\beta - \alpha = 0$), entonces, estará estable en cualquier valor $f - 1 < \alpha u_0 < f + 1$. Al imponer una perturbación sobre el bloque ($0 < \beta - \alpha < 1$)¹ y establecer como condición inicial cualquier αu_0 fuera del área tachada, el bloque deslizará y quedará en alguna otra posición dentro del área tachada, dejando al bloque bloqueado fuera de la influencia de un nuevo pulso. Esto hace que para valores $\beta - \alpha$ entre -1 y 1 , existan posiciones estables luego de N pulsos aplicados pero, no únicas, ya que la posición final dependerá de la posición inicial. En la figura 2.5(b) mostramos, en escala de colores, la diferencia entre la posición final e inicial del bloque luego de un pulso como una función de $\beta - \alpha$ y la condición inicial αu_0 . Notamos que se observa el área estable prevista por las inecuaciones 2.7. Notamos también que la fuerza de volumen f actúa añadiendo un offset en la condición inicial y modificando la posición final. Sin embargo, la posición final a distintas fuerza f puede ser obtenida sustituyendo $u(\phi) \rightarrow u(\phi)f/\alpha$ en las ecuaciones 2.3 y 2.4.

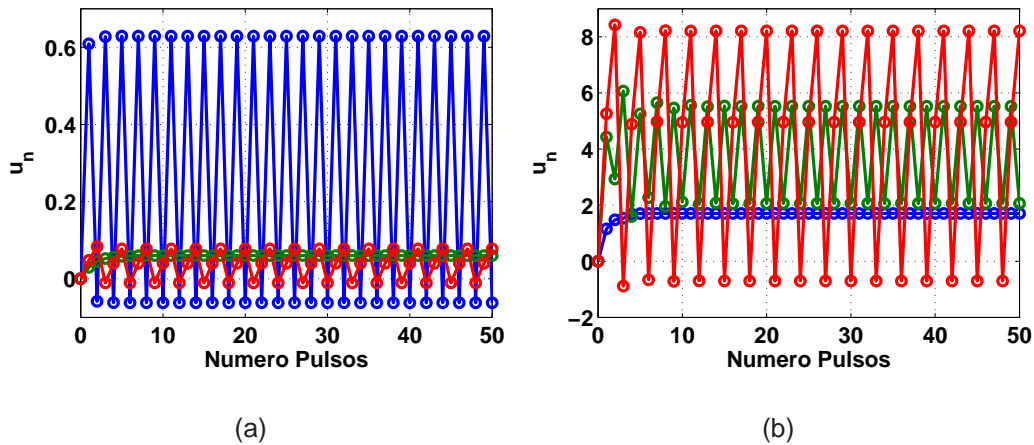


Figura 2.6: Posición en reposos del bloque luego del pulso n -ésimo para el régimen elástico (a) e inercial (b). (a) las curvas azul verde y roja corresponden a valores $\beta = 0,1$ y $\alpha = 1,5$, $\alpha = 4,5$ y $\alpha = 4,9$, respectivamente. (b) Las curvas azul verde y roja corresponden a valores $\alpha = 0,1$ y $\beta = 1,5$, $\beta = 4,5$ y $\beta = 4,9$, respectivamente.

Respuesta a N pulsos

Buscaremos la existencia de estados estacionarios de la posición del bloque, en donde la perturbación no modifique el estiramiento del resorte. Para esto someteremos nuestro bloque a una serie de $N = 50$ pulsos, elegidos privilegiando el tiempo de cálculo y la obtención del estado estacionario. Partiremos del estado inicial $u_0 = 0$. Cada uno de los pulsos es aplicado una vez que el bloque está en reposo, es decir, la separación temporal entre los pulsos será grande tal que el bloque alcance a detenerse antes de la aplicación de la siguiente perturbación. Llamaremos u_n a la posición en reposo del bloque luego del n -ésimo pulso. En la figura 2.6 observamos curvas de u_n para distintos valores de α y β correspondientes al régimen elástico (figura 2.6(a)) e inercial (figura 2.6(b)). En ambos casos, vemos que existe convergencia de la posición del bloque. No obstante, esta convergencia puede ser oscilatoria en torno a

¹Esto es equivalente a fijar el valor del parámetro $|\beta - \alpha| > 0$.

dos o tres estados. Concentrémonos en la curva azul de la figura 2.6(b), cuyos parámetros son $\alpha = 0,1$ y $\beta = 1,5$. Ésta posee un valor u_n estacionario en donde el bloque no oscila, esto podría ser explicado asumiendo que los pulsos no provocan deslizamientos en el bloque. Sin embargo, esto contradice lo expuesto por la figura 2.5(a), que dice que el bloque deslizará sin importar su condición inicial siempre y cuando $|\beta - \alpha| > 1$. El real motivo de la convergencia del bloque es que éste entra en una especie de resonancia en donde, aunque desliza, la posición inicial antes del pulso n -ésimo (u_{n-1}) es igual a la posición final después del pulso n -ésimo (u_n). Este estado de convergencia no depende de la posición inicial u_0 como se observa en la figura 2.7(a) en donde hemos sometido al bloque a un serie de 10 pulsos partiendo desde distintas condiciones iniciales u_0 barriendo todos los valores posibles, es decir, $-1 < \alpha u_0 < 1$.

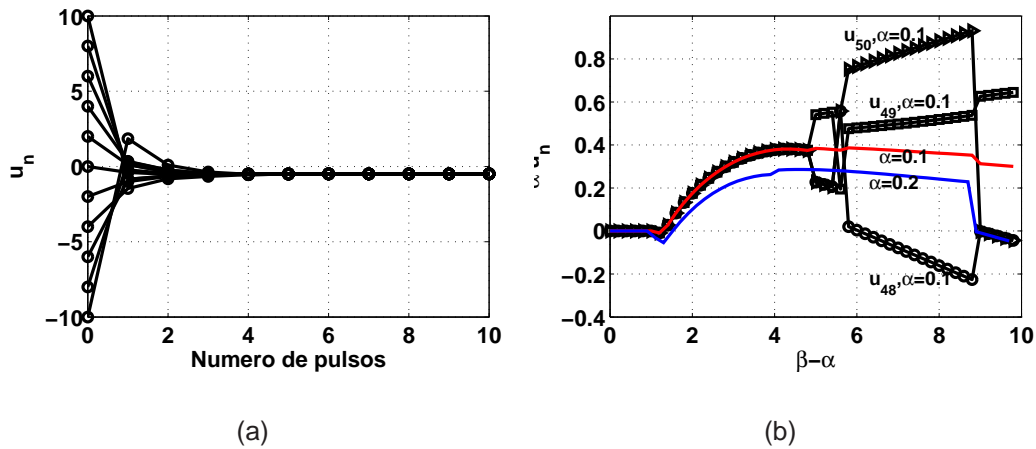


Figura 2.7: (a) Posición u_n del bloque luego del pulso n -ésimo partiendo de distintas condiciones iniciales u_0 para un set de parámetros únicos dados por $\alpha = 0,1$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 0,5$ y $f = 0$. (b) Las curvas negras representan la posición u_{48} , u_{49} y u_{50} para un set de parámetros dados por $\alpha = 0,1$, $\gamma = 0,5$ y $f = 0$ partiendo de la condición inicial $u_0 = 0$. La curva roja representa la mediana entre estas tres curvas. La curva azul es la mediana de tres curvas u_{48} , u_{49} y u_{50} (no mostradas) para un set de parámetros $\alpha = 0,2$, $\gamma = 0,5$ y $f = 0$.

Para explorar los valores de estabilidad o convergencia de la posición del bloque como respuesta a repetidos pulsos sinusoidales de un ciclo de duración, realizamos experimentos numéricos a fuerza $f = 0$, $\gamma = 0,5$ y $u_0 = 0$ para dos valores de $\alpha = 0,1$ y $0,2$ barriendo en el parámetro β . Las curvas negras de la figura 2.7(b) corresponden a los valores de la posición del bloque como función de $\beta - \alpha$ luego de 48, 49 y 50 pulsos; αu_{48} , αu_{49} y αu_{50} , respectivamente, con $\alpha = 0,1$. Observamos que para $\beta - \alpha < 1$ el bloque no desliza, lo que está en acuerdo con la condición inicial impuesta $u_0 = 0$ según el set de inecuaciones 2.7. Para valores de $\beta - \alpha$ entre 1 y 5 vemos que las tres curvas coinciden, lo que implica que en este rango de parámetros el bloque converge a un valor único tal como la curva azul de la figura 2.6(b). Para valores de $\beta - \alpha$ entre 5 y 5,8 la curva u_{48} y u_{50} van juntas. Sin embargo, la curva u_{49} posee un valor superior, lo que implica que el bloque está oscilando entre dos puntos (curva verde figura 2.6(b)). Algo similar ocurre para $\beta - \alpha$ entre 5,8 y 9 en donde el bloque oscila entre tres estados (curva roja figura 2.6(b)). Por último, para valores entre 9 y 10 el bloque vuelve a oscilar entre dos estados (curva verde figura 2.6(b)). Las curvas roja y azul en la figura 2.7(b) nos muestran la mediana entre estas tres curvas u_{48} , u_{49} y u_{50} para $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 0$, respectivamente. Estas curvas revelan que el valor en torno al cual se presenta la oscilación es relativamente continuo con el parámetro $\beta - \alpha$, salvo en el último trayecto para valores entre 9 y 10, y presenta una dependencia con el parámetro α .

En la sección siguiente presentamos experimentos de compactación mediante impulsos mecánicos sobre las paredes de una columna granular. Nos enfocaremos, además de la altura o compactación de la columna, en la fuerza sobre la base de esta. Inspirados en los resultados presentados para un bloque, desarrollaremos una analogía entre el comportamiento observado experimentalmente en la columna granular y una cadena de deslizadores

acoplados.

2.2. Montaje experimental

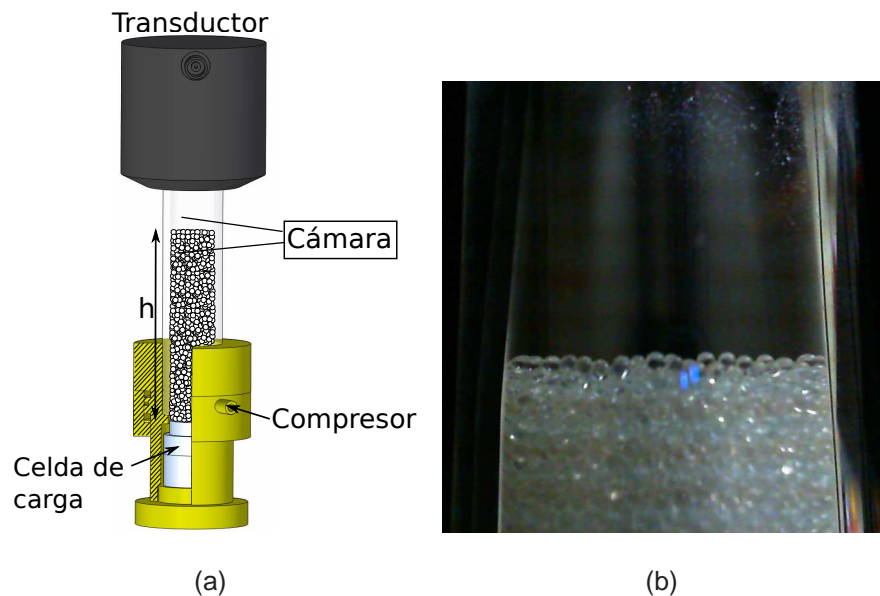


Figura 2.8: (a) Montaje Experimental experimento tapping. El esquema no está a escala. (b) Imagen típica de la superficie libre de las partículas dentro del tubo.

Depositamos una masa de $600g$ de partículas de vidrio esféricas de tamaño $800\mu m$ dentro de un tubo de vidrio de diámetro interno de $20mm$ y $3mm$ de grosor de la pared, hasta una altura de $1,3m$. Para medir la fuerza ejercida por las partículas disponemos una celda de carga en la base del tubo de vidrio, de tal forma que la celda de carga no está en contacto directo con la base del tubo, sino sólo con las partículas. Usaremos un transductor ultrasónico de contacto "Panametrics V1011" de $100kHz$ de frecuencia central, puesto en contacto con la superficie superior del tubo, para emitir pulsos acústicos a través de la pared del tubo. Estos pulsos son trenes de ondas sinusoidales

de 20, 50, 100, 200 o 300 ciclos de duración a una frecuencia de 8kHz. Esta configuración nos permite propagar pulsos solamente a través de la pared, los que serán directamente responsables de los deslizamientos estructurales internos del apilamiento. Disponemos de una webcam “Microsoft” de resolución HD para obtener imágenes de la interfase del material dentro del vidrio. Usando la función $A \tanh^{-1}[ax + c]$ ajustamos el perfil promedio de intensidades en la dirección vertical para obtener la altura del apilamiento, definida como el punto de inflexión de la función. Con esto obtenemos una resolución de $300\mu m$ en la medición de la altura del apilamiento. Por cada pulso enviado registraremos una imagen. Mediante el procesamiento de estas imágenes obtenemos la altura h de la pila granular como función del número de pulsos propagados sobre el tubo. Para facilitar la repetición del experimento usaremos un compresor de aire conectado a la base del tubo para soltar las partículas y producir una nueva condición inicial (ver figura 2.8).

2.3. Resultados

Observamos que la fuerza inicial del apilamiento granular no corresponde con el peso total de la muestra, esto debido al efecto Janssen [31] consistente en que, dada la extensa longitud del apilamiento comparada al diámetro del mismo, el sistema apoya gran parte de su peso sobre las paredes del tubo por lo que una fracción del peso total (al rededor de 10 %) es medido por el sensor de fuerza ya que el tubo no está en contacto con este.

El comportamiento de la pila granular en respuesta a la propagación de trenes de onda, es mostrado en la figura 2.9 en donde observamos dos tipos de comportamiento. El primero, se puede observar en la figura 2.9(a), corresponde a reordenamientos que se ven continuos a grades escalas de tiempo pero que

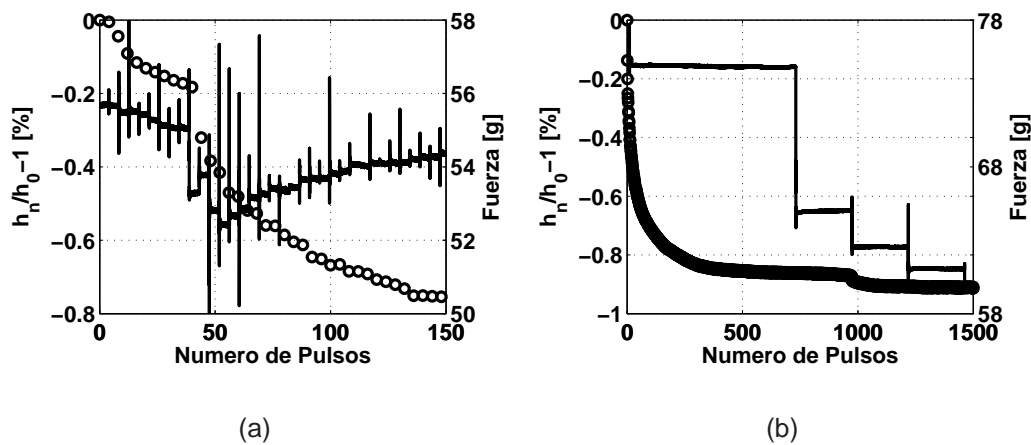


Figura 2.9: Los círculos indican el cambio de altura relativo a la altura inicial y la línea continua representa la fuerza en la base del tubo, ambas como función del número de pulsos aplicados. Ambos experimentos fueron hechos con pulsos sinusoidales de 100 ciclos enviados cada 4 segundos.

a pequeñas se revelan pequeños reordenamientos provocados por cada pulso los que se ven reflejados en una evolución tipo logarítmica (figura 2.9(b)) de la altura del apilamiento y en pequeños saltos en la fuerza. El segundo fenómeno es observado a grandes escalas de tiempo como en la figura 2.9(b) en donde cercano a 1000 pulsos observamos una discontinuidad de la altura, la que corresponde a una gran discontinuidad en la fuerza.

Encontramos que es sumamente difícil generar una repetitividad del experimento. En la figura 2.10(a) observamos cinco experimentos realizados en condiciones experimentales similares, excitando con trenes de onda de 50 ciclos, con la misma cantidad de partículas y con la misma amplitud de excitación. Observamos que si bien las curvas no convergen a la misma altura final, estas comparten algunas características. Por ejemplo, todas las curvas presentan discontinuidades como las mostradas en la figura 2.9(b). El número de pulsos característico necesario para obtener la altura final es en todos los

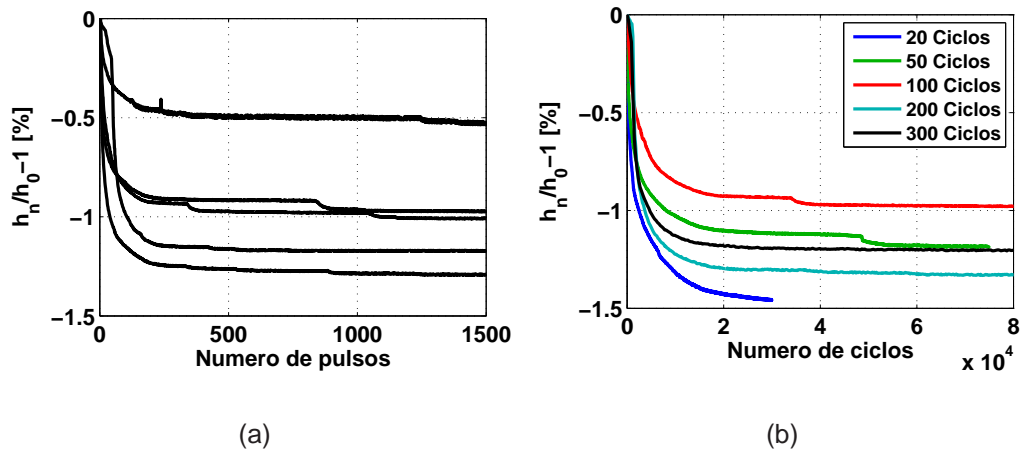


Figura 2.10: 2.10(a) Altura del apilamiento granular en función del número de pulsos, cada pulsos consiste de 50 ciclos sinusoidales. Notar que todas estas curvas fueron hechas en condiciones experimentales similares. 2.10(b) Altura del apilamiento granular como función del número de ciclos, cada curva corresponde a excitaciones con pulsos con distintos números de ciclos.

casos, de la figura 2.10(a), similar, al rededor de 300 pulsos. No obstante, al explorar la dependencia de la altura de la columna con el número de ciclos en cada pulso, nos encontramos con que este número de pulsos característico cambia pero escala con el número de ciclos en cada pulso. En la figura 2.10(b) observamos una serie de experimentos usando pulsos con distinto número de ciclos, en función del número de ciclos aplicado. Todas estas curvas parecen tener el mismo número de ciclos característico, aproximadamente 2×10^4 ciclos.

En estos experimento podemos notar que no existe una correlación entre la compactación y la fuerza en la base del apilamiento. Suponemos entonces, que las variables importantes son las internas. Para esto, proponemos utilizar una cadena de deslizadores, la cual posee una analogía unidimensional con el apilamiento experimental. En donde representaremos cada elemento de sección transversal como un deslizador que puede friccionar contra la pared del sistema. La interacción entre las partículas es representada por un resorte

intercalado entre los distintos elementos de la cadena. La interacción entre la pared y las partículas es análoga a una fuerza de reacción normal creada por las partículas al apoyarse sobre la pared del apilamiento. Similarmente al modelo de un bloque, aquí la acción de una fuerza de volumen (gravedad) puede ser vista como una re-definición de la posición del bloque. Por lo que sustituimos esta fuerza, por una fuerza de superficie que representa la acción de una fuerza externa sobre el sistema, cuyo efecto no es claro en el esquema de nuestro modelo.

2.4. Esquema teórico

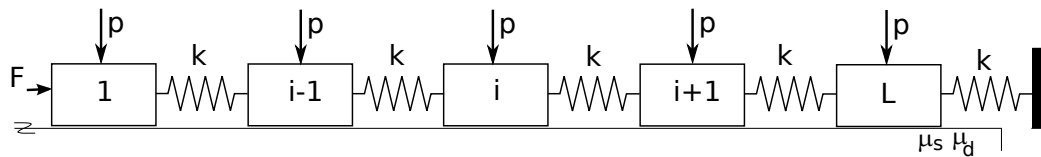


Figura 2.11: Esquema de cadena de L deslizadores conectados entre si por resortes de constante de restitución k . El extremo derecho de la cadena permanece fijo.

Consideremos una cadena lineal conformada por L bloques de masa M , conectados entre si por un resorte de constante de restitución k como se muestra en la figura 2.11. Enumeraremos los bloques desde 1 hasta L partiendo desde el extremo libre. La cadena completa está apoyada en una superficie cuyos coeficientes de roce estáticos y dinámicos vienen dados por μ_s y μ_d , respectivamente. Aplicamos una fuerza normal p constante a cada uno de los bloques de la cadena y una fuerza F , constante, sobre el extremo libre de la cadena en dirección de los resortes. Aplicaremos pulsos $Ag(\phi)$ a la base y observaremos las posiciones de los distintos bloques luego de los pulsos.

Definiremos $u_{(i,n)}$ como la posición del bloque i -ésimo luego del n -ésimo

pulso. Usando los mismos parámetros adimensionales que en la sección 2.1, obtenemos que los criterios de deslizamiento son,

$$\begin{aligned}
 Si \quad i = 1 \quad & |\alpha(u_{(1,n)}(\phi) - u_{(2,n)}(\phi)) + \beta g''(\phi) - f| < 1 \\
 Si \quad i \neq 1, L \quad & |\alpha(2u_{(i,n)}(\phi) - u_{(i+1,n)}(\phi) - u_{(i-1,n)}(\phi)) + \beta g''(\phi)| < 1 \\
 Si \quad i = L \quad & |\alpha(2u_{(L,n)}(\phi) - u_{(L-1,n)}(\phi)) + \beta g''(\phi)| < 1.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Una vez que los bloques deslizan las respectivas ecuaciones de movimiento son,

$$\begin{aligned}
 Si \quad i = 1 \quad & \beta u''_{(1,n)}(\phi) = -\alpha(u_{(1,n)}(\phi) - u_{(2,n)}(\phi)) + f \pm (1 - \gamma) \\
 Si \quad i \neq 1, L \quad & \beta u''_{(i,n)}(\phi) = -\alpha(2u_{(i,n)}(\phi) - u_{(i-1,n)}(\phi) - u_{(i+1,n)}(\phi)) \pm (1 - \gamma) \\
 Si \quad i = L \quad & \beta u''_{(L,n)}(\phi) = -\alpha(2u_{(L,n)}(\phi) - u_{(L-1,n)}(\phi)) \pm (1 - \gamma).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Escribimos explícitamente la dependencia con ϕ para referirnos a la función de respuesta del bloque y diferenciar esta cantidad con $u_{i,n}$ que corresponde sólo a la posición de equilibrio de la función $u_{i,n}(\phi)$. Restringiéndonos a la aplicación de sólo un pulso, y suponiendo que las elongaciones iniciales de los resortes son nulas y que nuestros pulsos son sinusoidales. Entonces, $u_{(i,1)}(\phi) = g(\phi) = -g(\phi)''$. Las condiciones de deslizamiento se convierten en,

$$\begin{aligned}
 Si \quad i = 1, \quad & |-\beta \sin \phi - f| < 1 \\
 Si \quad i \neq 1, L, \quad & |-\beta \sin \phi| < 1 \\
 Si \quad i = L, \quad & |(\alpha - \beta) \sin \phi| < 1.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Se establece entonces, que el régimen dominante es el inercial para todos los bloques excepto el último $i = L$, dado que el parámetro α no controla los deslizamientos en las dos primeras inecuaciones del sistema 2.10. Como vimos en la sección 2.1, usar pulsos sinusoidales de un ciclo de duración, produce dificultades en los cálculos numéricos debido a la discontinuidad ingresada en la derivada del pulso. Para evitar esto usaremos pulsos gaussianos como los de

la ecuación 2.11.

$$g(\phi) = e^{-\left(\frac{\phi-\pi/2}{3.5}\right)^2} \sin \phi. \quad (2.11)$$

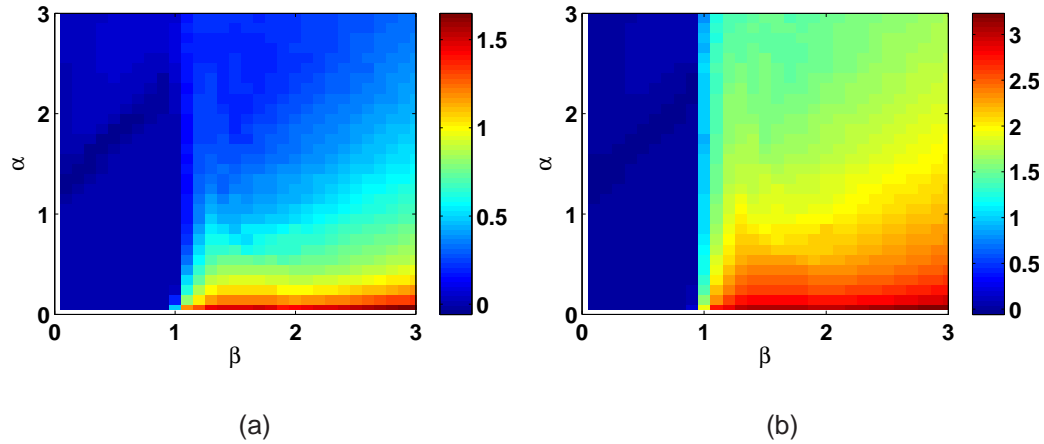


Figura 2.12: Deformación total de una cadena de $L = 10$ deslizadores con $\gamma = 0$ y $f = 0$ como función de los parámetros α y β . (a) Deformación total luego del primer pulso (h_1). (b) Deformación total luego del centésimo pulso (h_{100}).

De aquí en adelante, para simplificar los cálculos usaremos $\gamma = 0$, lo que equivale, simplemente a $\mu_s = \mu_d$. Definiremos la compresión total de la cadena luego del pulso n -ésimo como $h_n = \sum_{i=1}^L u_{(i,n)}$. En la figura 2.12 observamos, como función de los parámetros α y β , la compresión total de la cadena inmediatamente después del primer pulso, figura (a), e inmediatamente después del centésimo pulso, figura (b), sobre una cadena compuesta de $L = 10$ bloques con $f = 0$ y $u_{(i,0)} = 0$. Notamos que para valores de $\beta > 1$ la cadena desliza. Sin embargo, en la zona dada por $\beta - \alpha > 1$ y $\beta < 1$ observamos pequeñas deformaciones producidas por el deslizamiento del bloque L -ésimo. A pesar de que el pulso usado no es sinusoidal, este comportamiento es muy similar al establecido en las ecuaciones 2.10. Revelamos además que el pulso es más eficiente mientras mayor es el valor de β y menor el de α .

En la figura 2.13 observamos la posición de los bloques pertenecientes

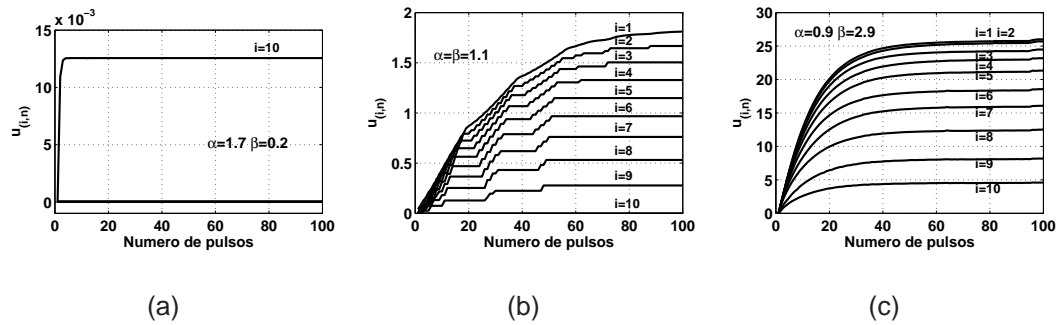


Figura 2.13: Posición de los diez bloques de un cadena de deslizadores con $u_{(i,0)} = 0$, $f = 0$ y $\gamma = 0$ para, (a) $\alpha = 1,7$ y $\beta = 0,2$, (b) $\alpha = \beta = 1,1$ y (c) $\alpha = 0,9$ y $\beta = 2,9$. Notar que en (a) el único bloque que desliza es el $i = L = 10$ y que en (b), el bloque $i = L = 10$ no desliza.

a la cadena como función del número de pulsos para tres set de valores de los parámetros α y β . En la zona $\beta < 1$ y $\beta - \alpha > 1$ (figura 2.13(a)) observamos que el único deslizamiento existente pertenece al último bloque de la cadena $i = 10$. Esto justifica la deformación total observada en esta zona, en el mapa de la figura 2.12. En la zona $\beta > 1$ con $\beta - \alpha < 1$, el pulso no es suficiente para provocar deslizamiento de todos los bloques desde el primer pulso. Sin embargo, todos deslizan, excepto el último, debido a las interacciones entre los bloques, esto se revela como saltos discretos en las curvas de la figura 2.13(b). Por último, en la zona $\beta > 1$ y $\beta - \alpha > 1$ el pulso provoca deslizamiento en todos los bloques desde el primer pulso (ver figura 2.13(c)).

En la figura 2.13 observamos que la posición de los bloques converge a un valor bien definido luego de la aplicación de suficientes pulsos. Para saber si este valor de convergencia es único o depende de la configuración inicial, repetimos las simulaciones comenzando desde un estado inicial distinto cada vez. Este estado inicial es obtenido dando de manera aleatoria las posiciones iniciales de cada bloque y probando luego si la configuración obtenida es estable sin pulso aplicado. Caracterizamos el estado inicial mediante la deformación

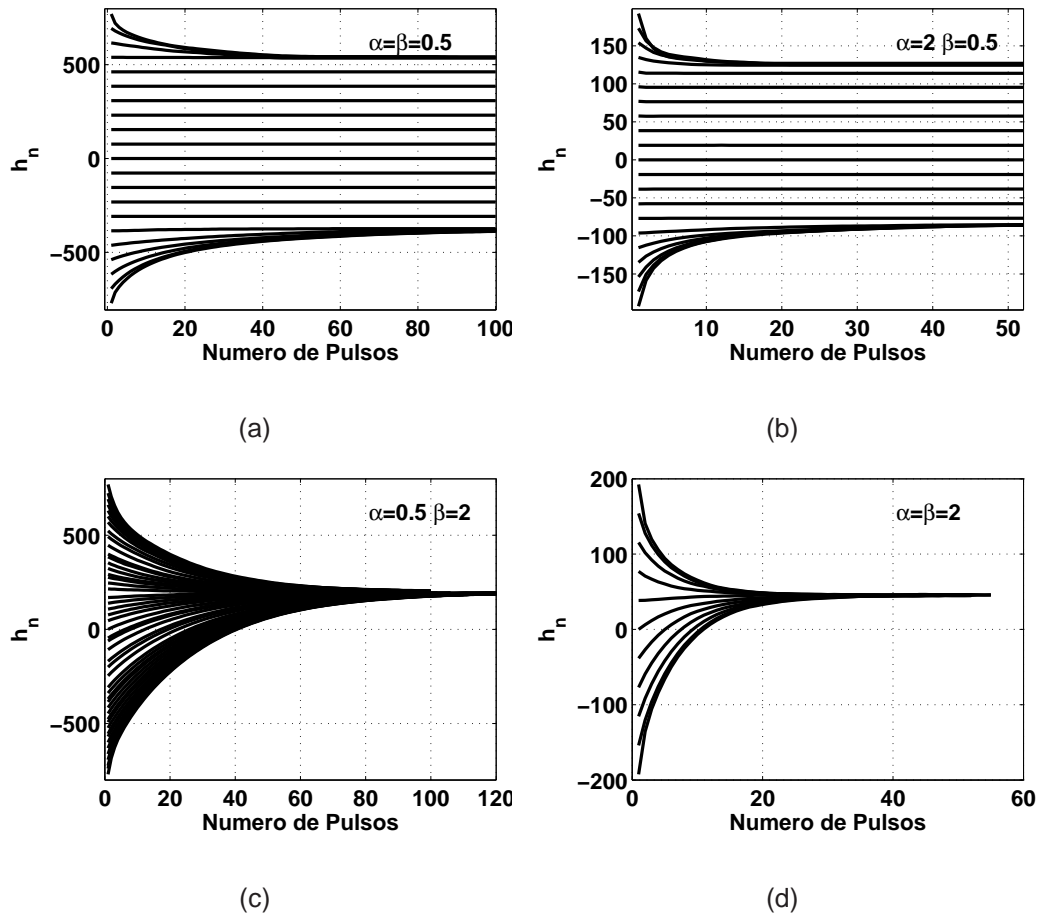


Figura 2.14: Curvas de deformación total de una cadena constituida de 10 bloques con $f = 0$ y $\gamma = 0$, en función del número de pulsos para distintos estados iniciales h_0 y distintos set de parámetros α, β .

total inicial $h_0 = \sum_{i=1}^L u_{(i,0)}$. En la figura 2.14 observamos estos experimentos para cuatro set de parámetros $\alpha - \beta$. El primero, figura 2.14(a) y 2.14(b), representa la zona del espacio de parámetros en donde $\beta < 1$, observamos que en esta zona la deformación estable del sistema depende de la deformación inicial h_0 . Por el contrario, en la zona del espacio de parámetros en donde $\beta > 1$ el sistema converge a un valor bien definido de h sin importar el valor de inicio.

Por último realizamos un experimento similar al elaborado y discutido

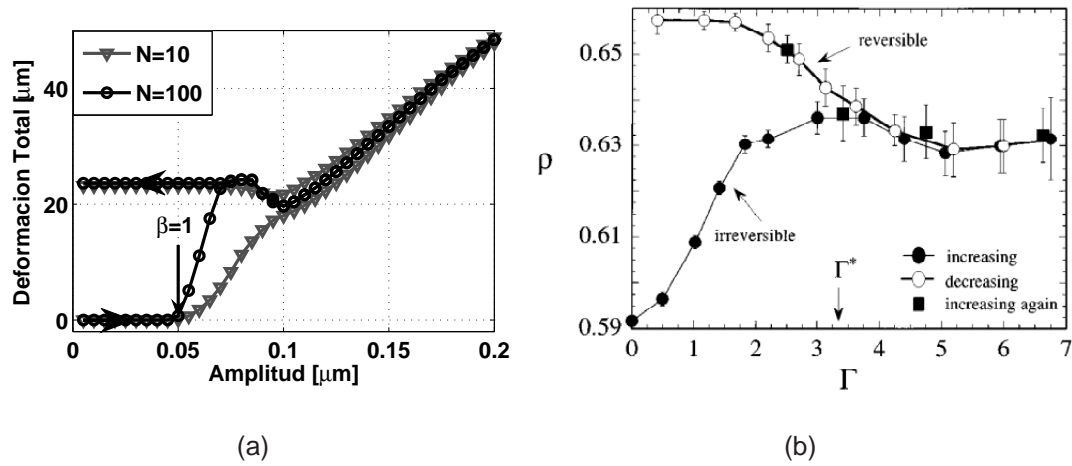


Figura 2.15: (a) Deformación total de la cadena con $L = 10$ bloques a $f = 0$ y $\gamma = 0$ como una función de la amplitud de las secuencias de pulsos emitidas. Los triángulos representa una simulación con secuencia de 10 pulsos cada una y los círculos con secuencias de 100 pulsos. Las flechas negras indican la dirección sobre la curva, incremento o decremento de amplitud. (a) Datos obtenidos por Nowak *et al.* [29, 30]. Densidad en función de $\Gamma = A\omega^2/g$, g , es la aceleración de gravedad. Estos experimento fueron realizados en condiciones similares a nuestra simulación.

por Nowak *et al.* en [29, 30]. Sometemos una cadena de $L = 10$ bloques, con $f = 0$ y $\gamma = 0$ a secuencias de N pulsos gaussianos (ecuación 2.11) con una amplitud A_0 , las siguientes secuencias de pulsos son incrementadas en amplitud en pasos de $5nm$ hasta llegar a una amplitud de $0,2\mu m$. Luego de esto las secuencias son disminuidas en amplitud hasta volver a A_0 . El resultado de esta simulación es representado en la figura 2.15(a), por la deformación total del bloque como función de la amplitud de las secuencias. Para $N = 10$ y $N = 100$, vemos que el sistema no desliza nada a amplitudes menores que $A = 0,05\mu m$, las que corresponden a $\beta < 1$. Como dijimos anteriormente, el sistema converge a un valor de h_n bien definido cuando $\beta > 1$. Sin embargo, observamos características irreversibles en estas curvas. Vemos que existe una

rama irreversible generada gracias a que la cadena posee un número de pulsos característicos muy grande para obtener el estado estacionario, el movimiento en esta rama es similar al mostrado en la figura 2.13(b), cada pulso moviliza un deslizador lo que provoca una deformación lenta de la cadena. También observamos una rama reversible en donde la cadena logra alcanzar el estado estacionario en cada secuencia de pulsos, el comportamiento de esta rama se ve reflejado en la figura 2.13(c), en esta zona cada pulsos logra movilizar a toda la cadena lo que produce una deformación rápida hasta el estado estacionario. A alta amplitud, sobre $0,1\mu m$, la deformación estacionaria crece linealmente con la amplitud, esto puede ser explicado gracias a la falta de un tamaño de bloque finito en nuestra simulación. Al momento de descender la amplitud, el sistema se encuentra más cerca de la deformación estacionaria, por lo que necesita mucho menos pulsos para estabilizar, originando en la zona comprendida entre $A = 0,05$ y $A = 0,075$ para la curva a $N = 100$, una aparente ramificación del estado estable. El mínimo local visualizado cerca de $A = 0,1$ corresponde a un cambio de comportamiento debido al cambio de régimen en el espacio β - α . Esto es, pasamos desde la zona $\beta - \alpha < 1$ con $\beta > 1$ a la zona $\beta - \alpha > 1$ con $\beta > 1$. Este comportamiento es similar al obtenido por Nowak *et al.* en [29, 30] figura 2.15(b). Podemos decir entonces que nuestro modelo, basado en la cadena de deslizadores, puede exitosamente reproducir el fenómeno de reversibilidad e irreversibilidad presentado en columnas de material granular cuando son sometidos a perturbaciones acústicas.

2.5. Conclusión

El modelo, aunque simple, captura el comportamiento de relajación lenta de la pila granular observado por nuestro experimento y por los experimentos,

de este mismo tipo, realizados por otros autores, en especial los de [27, 29, 30]. Se ha establecido que si $\beta > 1$, el sistema converge a un estado estacionario sin importar las condiciones iniciales de la cadena. Este mismo comportamiento fue descrito en [27] en una pila granular excitada con pulsos acústicos. Sin embargo, para alcanzar este estado estacionario a bajas amplitudes de vibración, es necesario una cantidad enorme de pulsos, alrededor de 10^5 en nuestra simulación. Esto hace que la cadena circule sobre una rama irreversible durante el incremento de la amplitud, figura 2.15(a). Un comportamiento similar es ilustrado experimentalmente en [27, 29, 30], figura 2.15(b). A partir de nuestro modelo, podemos concluir que la relajación mediante impulsiones acústicas sobre una columna granular es principalmente un fenómeno inercial, en donde los estados meta-estables son originados a partir de los mecanismos de fricción interna del material. Podemos inferir, que la manera más eficiente de obtener una alta compactación en una columna granular es incrementando y disminuyendo la amplitud tal como se muestra en la figura 2.15.

Capítulo 3

Ultrasonido durante un ensayo de relajación

La correcta comprensión de la mecánica de suelos es fundamental a la hora de fijar los cimientos de grandes construcciones. El aumento de la carga aplicada sobre el material granular provoca una lenta relajación de la deformación, a través de deslizamientos o fracturas en los puntos de contacto entre las partículas que componen el medio. El mismo mecanismo se presenta en las placas tectónicas, donde la relajación de la presión que ejercen unas sobre otras se traduce en fracturas o deslizamientos, generando a su vez ondas sísmicas que conllevan gran destrucción. Con esto en mente, exploramos algunas de las propiedades reológicas durante un ensayo de fluencia en un material granular denso y las modificaciones inducidas en estas propiedades producto de la propagación de ondas ultrasónicas de relativa alta intensidad.

3.1. Introducción

Un test de relajación de la deformación es un ensayo mecánico en donde se observa la deformación como una función del tiempo cuando el material es sometido a la acción de una fuerza de superficie constante. Existe evidencia de que los materiales granulares consolidados también exhiben este tipo de comportamiento. Murayama [32] realizó este tipo de ensayo en arena y propuso un modelo reológico basado en un set de resortes, pistones y deslizadores para dar cuenta de los distintos comportamientos; elástico, viscoelástico, elastoplástico y viscoelastoplástico. Este modelo involucra esfuerzos críticos por sobre los que el material cambia de un comportamiento a otro. Sin embargo, aún no existe claridad sobre el origen físico de estos fenómenos en materiales granulares. Otro intento por explicar el proceso de relajación de la deformación es propuesto por McDowell [33–36]. McDowell concluye que en materiales granulares constituidos de partículas frágiles, el principal mecanismo de disminución del tamaño (y por ende de compactación) de la muestra es debido al cambio de granulometría, producto del rompimiento de partículas generado por las grandes fuerzas concentradas en pequeños puntos de contacto. Un estudio actual [37], muestra que el proceso de relajación de deformación puede ser modelado como un proceso de envejecimiento de las constantes reológicas involucradas [38], debido a la evolución del granular hacia un estado de jamming.

Basándonos en el modelo de envejecimiento, antes mencionado, caracterizamos los ensayos de fluencia, realizados en materiales granulares compuestos de partículas de vidrio. Usamos herramientas acústicas para obtener información sobre los cambios de rigidez efectiva y cambios estructurales. Para lograr esto último, usaremos una técnica llamada “Interferometría de onda CODA”,

desarrollada por Snieder [39]. Esta técnica aprovecha la alta sensibilidad de las ondas dispersivas a los cambios estructurales, para obtener información sobre pequeños cambios inducidos por las ondas mecánicas.

Como se ha descrito en los capítulos anteriores, la propagación de ondas de amplitud suficientemente alta puede generar cambios en el estado de los contactos entre granos y, por lo tanto, en las propiedades mecánicas efectivas del material. Alterando de esta forma el comportamiento de las curvas de deformación durante los ensayos de fluencia. Así evidenciamos dos fenómenos. El primero, conocido como “Debilitamiento Elástico”, es percibido como una disminución de la velocidad de propagación del sonido efectiva. El Debilitamiento Elástico es compatible con un mecanismo histerético producido a partir de la fricción entre los contactos, como el que se ha detallado en el capítulo 1. El segundo fenómeno observado es llamado “fluidificación acústica”, este consiste en una disminución de la viscosidad efectiva del medio y es descrito según el modelo propuesto por Melosh [40] al que incluimos una pequeña generalización incorporando una nueva variable aleatoria para dar cuenta de la viscosidad finita en ausencia de perturbaciones acústicas. De esta forma hemos encontrado que las perturbaciones mecánicas inducen envejecimiento sobre el material granular.

3.1.1. Test de relajación en materiales granulares

Los ensayos de relajación de deformación o ensayos de fluencia son usados para caracterizar la capacidad de fluir de un material cuando es sometido a la acción de una esfuerzo uni-axial constante. En el caso de un material homogéneo e isótropo, como un metal, la capacidad de fluir es explicada desde un punto de vista termodinámico como un proceso

térmicamente activado [41, 42] donde, el ruido molecular térmico conduce al sistema lentamente hacia un estado de deformación estable definido por el esfuerzo externo aplicado y la temperatura. En la figura 3.1, observamos un ensayo de fluencia sobre un mono-cristal de clorhidrato de sodio, para distintas temperaturas y distintas presiones externas aplicadas.

En la escala de tamaño de nuestras partículas (diámetro $d = 1\text{mm}$), la razón entre la energía potencial gravitatoria y la energía de excitación térmica a temperatura ambiente es de orden $\sim 10^{-16}$, por lo que el efecto térmico sobre el granular es despreciable. A pesar de esto, existen resultados experimentales que muestran fluencias en los materiales granulares cuando son mantenidos a presión constante menores que el “yield stress” [25, 37, 43, 44].

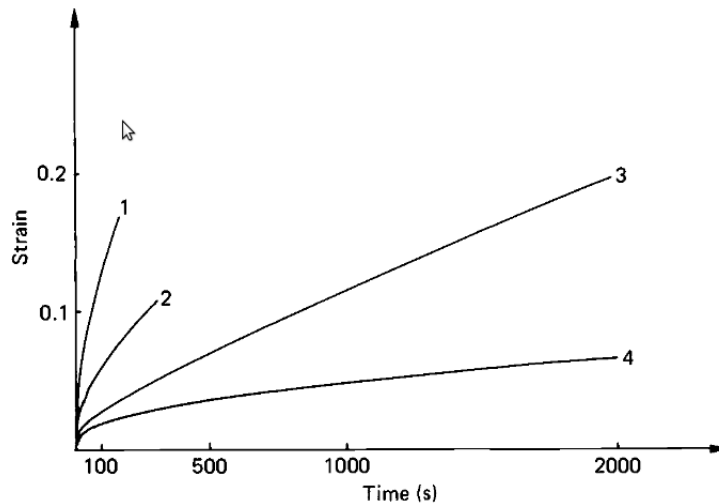


Figura 3.1: Curvas de fluencia a esfuerzo y temperatura constantes. Mono-cristal de Clorhidrato de Sodio deformado en compresión a lo largo del eje $\langle 100 \rangle$. 1- $T = 780^\circ\text{C}$, $\sigma = 50\text{g}/\text{mm}^2$; 2- $T = 780^\circ\text{C}$, $\sigma = 30\text{g}/\text{mm}^2$; 3- $T = 780^\circ\text{C}$, $\sigma = 25\text{g}/\text{mm}^2$; 4- $T = 765^\circ\text{C}$, $\sigma = 10\text{g}/\text{mm}^2$ (Poirier, 1972 [41]).

Comúnmente el comportamiento mecánico de los materiales es modelado por medio de combinaciones de elementos constitutivos, resortes y pistones. Cada uno de estos elementos aporta distintas características al medio

en estudio. Un resorte modela el comportamiento elástico del sistema, mientras que un pistón agrega una fuente de disipación viscosa. Con estos dos elementos podemos modelar entonces un material visco-elástico. Si bien, mucho de los fluidos cotidianos pueden ser caracterizados de esta manera, existen otros que presentan propiedades anómalas las que son compartidas por los materiales granulares, procesos de relajación complejos, efectos de memoria, localización de esfuerzo, entre otras. Por ejemplo, algunos fluidos complejos presentan viscosidades que dependen de la tasa de cizallamiento o incluso del tiempo [42, 45, 46]. En este contexto, Derec [38] propone un modelo para explicar el comportamiento de este tipo de fluidos, este es basado en la existencia de una evolución temporal del tiempo de relajación de esfuerzo característico de un modelo de Maxwell (resorte y pistón en serie), lo que también puede ser visto como una evolución temporal de las propiedades mecánicas del material. Nguyen *et al.* en [37] adaptaron el modelo propuesto por Derec [38] para caracterizar la relajación de la deformación en un material granular cuando es sometido a la acción de un esfuerzo de corte constante.

Modelo de Envejecimiento



Figura 3.2: Modelo de Maxwell. Resorte de constante elástica G y amortiguador de viscosidad efectiva η , La variable $f = G/\eta$ es el parámetro que da cuenta del envejecimiento según el modelo desarrollado en [38].

El modelo de envejecimiento consiste en suponer que la respuesta mecánica de nuestro aglomerado granular está dada por un resorte, caracte-

rizado por una rigidez G , y un amortiguador, de viscosidad η , ambos en serie como se muestra en la figura 3.2. Derec propone además una dinámica para la variable $f = G/\eta$, llamada *fluidity*, que pondera las posibles modificaciones en el tiempo de las constantes mecánicas del material. Ambos ingredientes nos permiten escribir este modelo como;

$$\dot{\sigma} = -f\sigma + G\dot{\gamma} \quad (3.1)$$

$$\dot{f} = -af^2 + r\dot{\gamma}^2, \quad (3.2)$$

donde γ es la deformación del sistema (definida positiva en compresión), a y r son constantes positivas llamadas constante de envejecimiento y de rejuvenecimiento, respectivamente. La ecuación 3.1 representa la dinámica de un modelo de Maxwell típico [42] con $f = 1/\tau = G/\eta$ donde τ es el tiempo de relajación característico del sistema. Por otro lado, la ecuación 3.2 fue elegida a partir de la representación teórica más simple que respeta todas las simetrías del problema. f cambia según la competencia de dos términos. El primero, representa un envejecimiento que, en este contexto, implica un decrecimiento de f . El segundo, representa un rejuvenecimiento lo que equivale a un incremento de f . Si $\dot{\gamma} = 0$, la función f decrece naturalmente sólo debido a la existencia de un tiempo característico finito. Podemos obtener un estado bloqueado o de jamming, si $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ y $\eta \rightarrow \infty$, lo que implica que $f \rightarrow 0$. Por otro lado, si $\eta \rightarrow 0$ obtenemos un medio completamente fluidificado. De esta forma, una disminución de la variable f corresponde a una solidificación, y un aumento de f corresponde a una fluidificación. Al aplicar las condiciones del test de fluencia $\sigma = Cte$, el sistema de ecuaciones 3.1-3.2 se reduce a:

$$\dot{f} = -a_{eq}f^2, \quad (3.3)$$

donde $a_{eq} = a(1 - \frac{r}{a} \frac{\sigma^2}{G^2})$ y $f = \frac{G\dot{\gamma}}{\sigma}$. Resolviendo la ecuación 3.3 encontramos,

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{Ga_{eq}} \log(1 + a_{eq}f_0t). \quad (3.4)$$

Este modelo predice que un material granular, sometido a esfuerzo uni-axial constante, fluye con una tendencia logarítmica dada por la ecuación 3.4. Lo que, a primera vista, está de acuerdo con algunas observaciones experimentales [25, 37, 43, 44, 47]. Otra observación experimental interesante hecha en [37], muestra que el parámetro $1/f_0$ diverge cuando el sistema se aproxima a una configuración de jamming, lo que tiene directa relación con que la viscosidad efectiva del medio diverge.

Como hemos mencionado en capítulos anteriores, las ondas acústicas son una herramienta muy poderosa para obtener información sobre medios heterogéneos, como los materiales granulares, tales como la velocidad del sonido efectiva, o parámetros relacionados con la coherencia de la estructura del material, como los obtenidos con el modelo de difusión acústica [11, 22, 48] que es discutido en el capítulo 1 y en el apéndice A. Además de esto, en las últimas dos décadas se ha comenzado a explorar los efectos que producen las ondas mecánicas, de relativamente alta amplitud, en materiales granulares. Se ha encontrado que estas ondas pueden producir debilitamiento, reflejado en una disminución del modulo elástico efectivo del medio [24], y aumento de la plasticidad, reflejado en un aumento de la viscosidad efectiva del medio [49]. Este tipo de interacción entre la materia granular y las ondas acústicas tiene como origen los múltiples procesos no lineales que ocurren a nivel de contacto como son, micro-deslizamientos, deslizamiento, efectos de memoria a nivel de contacto, pérdidas de contacto, bandas de cizalle, rompimiento de partículas, elasticidad asociada a las rugosidades de los granos, entre otros.

3.1.2. Fluidificación acústica

Uno de los modelos propuesto para explicar la interacción onda-materia es el modelo de “Fluidificación Acústica” desarrollado por Melosh *et al.* [40]. Este modelo es ampliamente usado en estudio de cráteres desde el punto de vista geomecánico [50, 51], movimiento de fallas sísmicas [49] y al debilitamiento de fallas en rocas [52].

Consideremos un empaquetamiento granular compuesto por partículas de diámetro d distribuidas aleatoriamente en un espacio cilíndrico, sometido a un esfuerzo hidrostático $P_0 = 95KPa$, además de un esfuerzo externo en la dirección axial σ_{ext} como se muestra en la figura 3.3(a). Localmente, cada

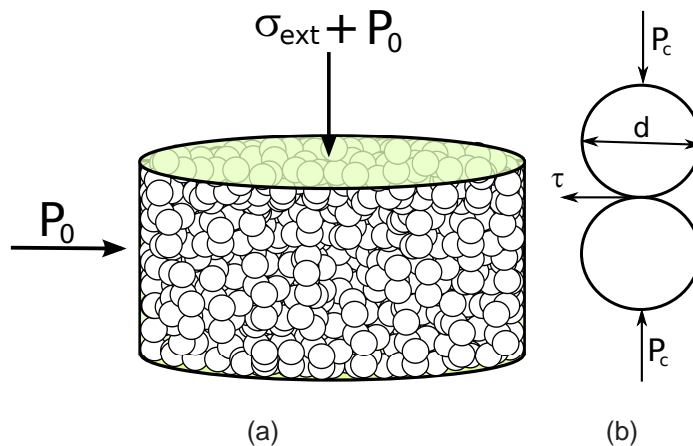


Figura 3.3: (a) Condiciones de esfuerzo macroscópico impuestas al material granular.
(b) Esquema de las condiciones de esfuerzo en un contacto.

contacto está sometido a un esfuerzo de corte τ y a una presión normal P_c , Figura 3.3(b). Estas variables microscópicas se relacionan con las variables macroscópicas por medio de sus promedios espaciales como sigue: $\langle \tau \rangle = \sigma_{ext}/2$ y $P_c = P_0 + \sigma_{ext}/2$. Los contactos en cuestión deslizarán cuando se cumpla el criterio de Coulomb, es decir, $\tau > \tau_{st} = \mu P_c$, donde μ es el coeficiente de

fricción estático entre las partículas en contacto.

Supongamos ahora que sometemos el material a una presión de vibración acústica con una longitud de onda única o dominante λ , con un peak de rarefacción s . Supondremos que ésta variable es aleatoria y que la probabilidad de encontrar un contacto con una amplitud de vibración entre s y $s + ds$ es,

$$\mathcal{P}(s)ds = \frac{ds}{\sqrt{2\pi}\zeta_s} e^{-\frac{s^2}{2\zeta_s^2}}. \quad (3.5)$$

Debido a esta amplitud de vibración, el criterio de deslizamiento cambia. Los contactos ahora desestabilizarán cuando $\tau > \mu(P_c - s)$ o, escrito de otra forma,

$$s > s_c = P_c - \tau/\mu. \quad (3.6)$$

Los contactos que deslizan son todos aquellos en donde $s > s_c$. A partir de esto, es posible escribir la fracción de volumen que desliza, ζ , usando la ecuación 3.5.

$$\zeta(s > s_c) = \int_{s_c}^s \mathcal{P}(s)ds = \frac{1}{2} \left[1 - \text{Erf} \left(\frac{s_c}{\sqrt{2}\zeta_s} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Por otro lado, sabemos que en un sistema linealmente elástico $\tau = G\gamma$, donde $G = \rho c^2$, ρ es la densidad y c es la velocidad del sonido en el bulk. La deformación local está dada por $\gamma_{local} = \frac{\tau}{\rho c^2}$. Integrando a la fracción de volumen que puede deslizar ($\zeta(y > y_c)$), obtenemos que la deformación que ocurre durante un ciclo de la perturbación es:

$$\gamma \approx \frac{\bar{\tau}}{2\rho c^2} \left[1 - \text{Erf} \left(\frac{s_c}{\sqrt{2}\zeta_s} \right) \right]. \quad (3.8)$$

El esfuerzo de corte aplicado al sistema no debe distribuirse en todos los contactos, sólo en los que soportan el sistema. Esto es, en la fracción de volumen $1 - \zeta(y > y_c)$. Por lo que el esfuerzo de corte medio en los contactos es $\bar{\tau} = \tau/(1 - \zeta(y > y_c))$, $\bar{\tau}$ es mayor que el esfuerzo aplicado τ . Luego, podemos

escribir la deformación como:

$$\begin{aligned}
 \gamma &\approx \frac{\bar{\tau}}{2\rho c^2} \left[1 - \text{Erfc} \left(\frac{s_c}{\sqrt{2}\zeta_s} \right) \right] \\
 &\approx \frac{\tau}{2\rho c^2} \left[\frac{\text{Erfc} \left(\frac{s_c}{\sqrt{2}\zeta_s} \right)}{1 - \frac{1}{2}\text{Erfc} \left(\frac{s_c}{\sqrt{2}\zeta_s} \right)} \right] \\
 &\approx \frac{\tau}{\rho c^2} \left[\frac{2}{\text{Erfc} \left(\frac{s_c}{\zeta_s} \right)} - 1 \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La ecuación 3.9 representa la deformación producida sobre toda la muestra durante un ciclo de la perturbación. Con esto, podemos calcular la tasa de deformación como $\dot{\gamma} \approx \gamma/T$, donde T es el periodo de la onda. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma} &\approx \gamma/T = \gamma c/\lambda \\
 &\approx \frac{\tau}{\rho \lambda c} \left[\frac{2}{\text{Erfc}(\chi)} - 1 \right]^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

con $\chi = (1 - \Omega)/\Sigma$, $\Omega = \tau/\tau_{st}$ y $\Sigma = \zeta/s_c$. A partir de esto, obtenemos la viscosidad efectiva del medio, la que viene dada por $\eta_{eff} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$.

$$\eta_{eff} = \rho \lambda c \left[\frac{2}{\text{Erfc}(\chi)} - 1 \right]. \tag{3.11}$$

Éste modelo da cuenta de que la amplitud de la vibración modifica la viscosidad efectiva del sistema, permitiendo que contactos que en un principio eran estables, ahora, deslicen. Aumentando así la disipación interna del granular. Éste efecto se evidencia como una deformación macroscópica del material. Sin embargo, esta construcción no explica la existencia de una viscosidad finita en ausencia de perturbaciones, es decir, elimina la posibilidad de flujo sin aplicar ultrasonido como lo observado en [25, 47].

3.1.3. Análisis estructural (Coda Wave Interferometry)

Para caracterizar de manera más detallada los cambios internos, a nivel de contactos, en el material granular, usaremos el método denominado

“Interferometría de Ondas Coda”, o CWI por sus siglas en ingles, desarrollado por Snieder [39, 53, 54]. Este modelo aprovecha la alta sensibilidad de las ondas de dispersión a los cambios estructurales, en medios altamente dispersivos. Las modificaciones estructurales, a las que nos referimos, pueden consistir en; pequeños cambios en la posición relativa entre los dispersores, pequeños cambios locales en las velocidades de propagación de las ondas, compresiones homogéneas de los dispersores y/o cambio en la velocidad de propagación efectiva del medio.

Ésta técnica posee múltiples aplicaciones. En un contexto geotécnico, se puede usar para detectar daños en construcciones [54, 55]. En el área de ensayos no destructivos, se puede utilizar para monitorear la aparición de grietas en materiales o cambios a nivel de sus propiedades mecánicas[56]. En geofísica, puede ser usada para la supervisión de volcanes o fallas sísmicas [57–59]. A continuación, se hará una revisión de la descripción teórica presentada en el artículo de Gret [56].

Consideremos un material granular consolidado contenido en un volumen finito. En él se propagan ondas mecánicas de alta frecuencia, las que son múltiple-mente dispersadas debido a la red de contactos. Supongamos que poseemos dos ondas coda, adquiridas un instante antes y después de un cambio estructural. La onda coda antes del cambio, $u_a(t)$, puede ser escrita como una suma de todas las ondas $A_p(t)$ que se propagan sobre todas las posibles trayectorias p que unen el emisor con el receptor, es decir, sobre todas las cadenas de fuerza por donde es posible que se propague la onda.

$$u_a(t) = \sum_p A_p(t). \quad (3.12)$$

Luego de la modificación estructural, el cambio dominante en la onda es producto de cambios en los tiempos de vuelo $\Delta\tau_p$ de las ondas que viajan sobre

cada cadena de fuerza.

$$u_d(t) = \sum_p A_p(t - \Delta\tau_p). \quad (3.13)$$

$$R^{(\tau, \tau_w)}(t_s) \equiv \frac{\int_{\tau - \tau_w}^{\tau + \tau_w} u_a(t') u_d(t' + t_s) dt'}{\sqrt{\int_{\tau - \tau_w}^{\tau + \tau_w} u_a^2(t') dt' \int_{\tau - \tau_w}^{\tau + \tau_w} u_d^2(t') dt'}}. \quad (3.14)$$

Este método se basa en el cálculo del máximo de la función de correlación por ventanas dada por la ecuación 3.14. Las ventanas están centradas en un tiempo τ y poseen un ancho $2\tau_w$.

Luego de sustituir las ecuaciones 3.12 y 3.13 en 3.14, obtenemos una doble suma. Los términos cruzado $p \neq p'$ poseen correlación despreciable, dado que son incoherentes. Por lo tanto, podemos escribir,

$$R^{(\tau, \tau_w)}(t_s) \approx \frac{\sum_{p(\tau, \tau_w)} C_p(\Delta\tau_p - t_s)}{\sum_{p(\tau, \tau_w)} C_p(0)}, \quad (3.15)$$

donde la suma es tomada sobre todos los caminos con tiempo de vuelo entre $\tau - \tau_w$ y $\tau + \tau_w$ y $C_p(t)$ es definido como:

$$C_p(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A_p(t' + t) A_p(t') dt'. \quad (3.16)$$

Si los desplazamientos en fase de los caminos son mucho menores que el periodo dominante de la onda, podemos usar una expansión en serie de Taylor a segundo orden para obtener:

$$C_p(\Delta\tau_p) = C_p(0) \left(1 + \frac{1}{2} w_p^2 \Delta\tau_p^2 \right), \quad (3.17)$$

donde

$$w_p^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A_p(t') \ddot{A}_p(t') dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} A_p^2(t') dt'}. \quad (3.18)$$

Sustituyendo esto en la ecuación 3.15, obtenemos:

$$R^{(\tau, \tau_w)}(t_s) \approx 1 - \frac{1}{2} \overline{w^2} \langle (\Delta\tau_p - t_s^2)^2 \rangle, \quad (3.19)$$

con \bar{w} como la frecuencia media sobre los caminos con tiempos de llegada entre $\tau - \tau_w$ y $\tau + \tau_w$, la que viene dada por:

$$\bar{w}^2 = \frac{\sum_p \int_{\tau-\tau_w}^{\tau+\tau_w} A_p(t') \ddot{A}_p(t') dt'}{\sum_p \int_{\tau-\tau_w}^{\tau+\tau_w} A_p^2(t') dt'}. \quad (3.20)$$

La función de correlación mostrada en la ecuación 3.19 tiene un máximo cuando $t_s = \langle \Delta\tau_p \rangle_{\tau, \tau_w} \equiv \Delta\tau$, que es el valor medio del desfase temporal de los caminos con tiempo de llegada entre $\tau - \tau_w$ y $\tau + \tau_w$. Reemplazando esto en la ecuación 3.19, obtenemos:

$$R_{max}^{(\tau, \tau_w)} \approx 1 - \frac{1}{2} \bar{w}^2 \sigma_\tau^2. \quad (3.21)$$

Entonces, calculando el máximo de correlación de la ecuación 3.19, obtenemos el desfase medio $\Delta\tau$ de la ventana con centro τ y con la ecuación 3.21 obtenemos la varianza de la misma.

3.2. Montaje experimental

Nuestro sistema granular consiste en partículas de vidrio poli-dispersas de diámetro $d = 0,9 - 1,2mm$ confinadas por una membrana de látex cilíndrica cerrada herméticamente en sus extremos por dos transductores ultrasónicos, figura. 3.4. La muestra es preparada poniendo una masa fija $M = 37g$ de material granular dentro del contenedor de látex, para luego fijar su forma gracias a un molde de duraluminio, de altura $h = 20mm$ y diámetro $D = 40mm$. Esto produce una fracción de empaquetamiento $\phi \approx 0,63$. Antes de remover el molde, el aire intersticial dentro de la muestra es evacuado por medio de una bomba de vacío, asegurando una presión de confinamiento $P_0 \approx 93KPa$. La muestra es montada en la maquina del test de fluencia, en donde se le aplicará una presión uni-axial constante σ_{ext} que va desde 15 a 80KPa. Un sensor de posición inductivo capturará la deformación axial, mientras ocurre el proceso de

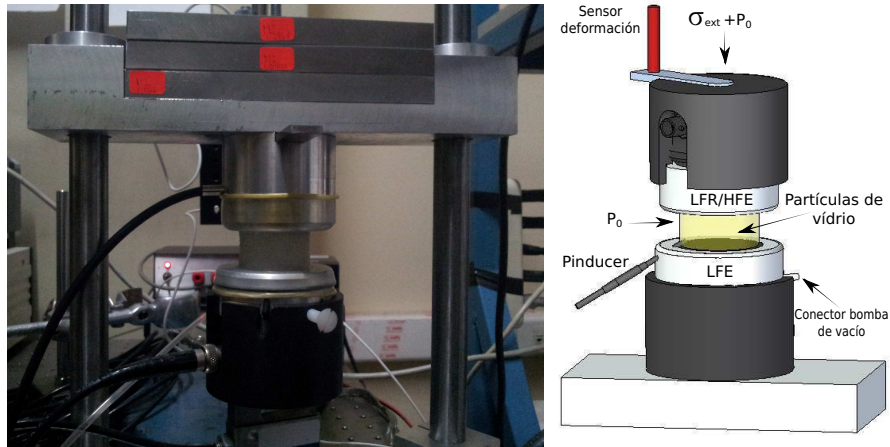


Figura 3.4: Configuración Experimental. El Transductor superior es intercambiable entre un emisor de alta frecuencia (HFE) y un receptor de baja frecuencia (LFR), LFE es un transductor emisor de baja frecuencia, y HFR indica el receptor miniatura de alta frecuencia.

relajación de deformación. Monitoreamos la velocidad del sonido y las ondas de scattering, mediante los transductores ultrasónicos. Para esto, usaremos un transductor emisor de baja frecuencia (LFE), de área activa $42mm$, puesto en la superficie inferior, para enviar un tren de onda coherente de 2 ciclos a $40Khz$ ($\lambda \approx 16d$) cada $1seg$ a través de la muestra. La amplitud de este transductor fue directamente calibrada en términos de desplazamiento por medio de un Laser Doppler Vibrometer (Polytec Inc., Germany). Esta calibración es mostrada en detalle en el apéndice B. De aquí en adelante cuando nos refiramos a la amplitud de la onda ϵ_{US} , estaremos hablando de la amplitud impuesta por este transductor(LFE). Dependiendo de la variable a monitorear durante el ensayo, velocidad del sonido o correlación de speckles, colocaremos en la parte superior de la muestra un transductor receptor de baja frecuencia (LFR, idéntico a LFE) para medir la velocidad del sonido, o un emisor de alta frecuencia (HFE, de $30mm$ de diámetro) para transmitir un tren de onda de dos ciclos a $320KHz$ ($\lambda \approx 2d$) cada $200ms$ los que son propagados a través de la muestra y son

capturados por un transductor miniatura de alta frecuencia HFR puesto de forma oblicua a la muestra.

3.3. Caracterización de la fluencia natural

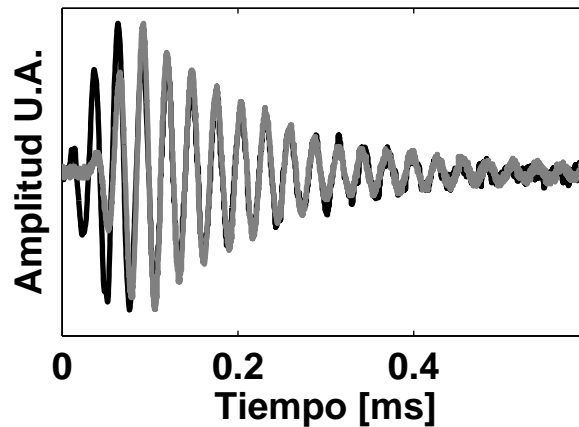


Figura 3.5: En negro vemos la onda propagada por el transductor LFE, y en gris la recibida al otro extremo de la muestra por LFR. El desfase existente entre ambas corresponde al tiempo de vuelo de la onda t_{of} .

Comenzaremos por caracterizar la respuesta del sistema granular cuando es sometido a un esfuerzo axial constante σ_{ext} . Para esto, mediremos la deformación γ , con un sensor de posición inductivo, y la velocidad del sonido, enviando pulsos de dos ciclos a 40KHz de amplitud 10nm con el transductor LFE, durante el proceso de relajación. En la figura 3.5 vemos en negro la onda emitida por el transductor LFE y en gris la recibida por LFR al otro extremo de la muestra. Notamos que existe un desfase entre ambas, este corresponde al tiempo de vuelo de la onda en el medio, t_{of} , que nos ayuda a definir la velocidad del sonido efectiva como $c = h(t)/t_{of}$, donde $h(t)$ es la altura del material. Este tiempo de vuelo es calculado mediante el ajuste de una recta

en la vecindad del segundo cruce por cero de la onda recibida. Se intentaron otros métodos de calculo del tiempo de vuelo, como el método de correlación, detección del primer máximo, medición de la velocidad de grupo o fase a través de la fase espectral. Sin embargo, dada la gran atenuación y la baja velocidad del sonido, el método más preciso probado fue la detección del segundo cruce por cero de la señal. Por otro lado, en la figura 3.6(a) vemos la deformación experimentada por la muestra, donde notamos que la amplitud de esta crece con el esfuerzo aplicado σ_{ext} . Durante un ensayo a esfuerzo externo y amplitud de ultrasonido constantes la velocidad del sonido no varía notoriamente como muestra la figura 3.6(b), excepto durante los primeros segundo del test, que es cuando el esfuerzo externo es aplicado.

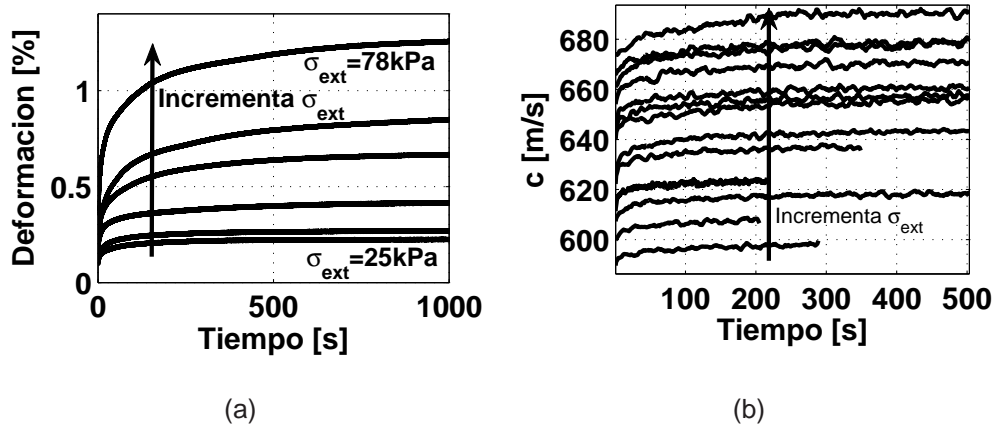


Figura 3.6: Deformación (a) y velocidad del sonido (b) durante un ensayo de relajación para distintos esfuerzos externos aplicados.

Usando los datos de la figura 3.6(b), obtenemos la velocidad del sonido efectiva media del sistema como función de la presión total aplicada. En la figura 3.7 se observa que la velocidad del sonido sigue una ley de potencia parecida a $P^{1/4}$. La línea negra representa la predicción realizada por la teoría de campo medio, tal como se introdujo en el capítulo 1.

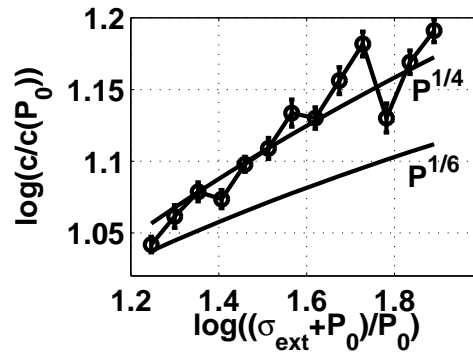


Figura 3.7: Velocidad del sonido como función del esfuerzo aplicado, esta velocidad es calculada a partir de los datos mostrados en 3.6(b), como el promedio de cada una de las curvas, las líneas negras muestran como debiera ser la tendencia $P^{1/4}$ y la teoría de campo medio presentada en el capítulo 1.

3.4. Efecto del ultrasonido de alta amplitud

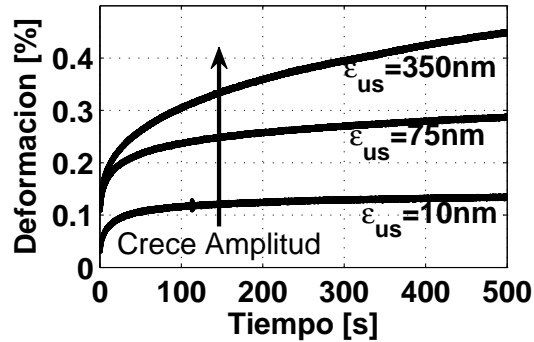


Figura 3.8: Deformación en función del tiempo en un test de fluencia para tres amplitudes de ultrasonido.

Queremos explorar el efecto del ultrasonido sobre el test de relajación, para hacer esto repetimos el experimento anterior para distintas amplitudes ϵ_{US} . Observamos que el incremento de amplitud produce un incremento de la fluencia total del sistema, ver figura 3.8.

Para caracterizar este fenómeno de fluencia, usaremos el modelo de envejecimiento descrito al inicio de éste capítulo. Este fue desarrollado por Derec *et al.* [38] para ser usado en la descripción de la mecánica de materiales vitreos. En [37] lo han usado en materiales granulares para caracterizar ensayos de fluencia en modo cizalle, han encontrado evidencia experimental de que la fluencia en materiales granulares sigue una tendencia como la descrita por la ecuación 3.4. Usaremos esta relación para caracterizar nuestras curvas de fluencia mostradas en 3.6(a) y 3.8. Para esto, reescribiremos la ecuación 3.4 como,

$$\gamma(t) = \frac{\sigma f_0}{GC} \log(1 + Ct), \quad (3.22)$$

con $C = a_{eq}f_0$ y $a_{eq} = a(1 - \frac{\sigma_D^2}{\sigma^2})$, con $\sigma_D = \sqrt{a/r}G$, donde f_0/G puede ser encontrado desde la pendiente inicial, usando $f_0/G = \dot{\gamma}_0/\sigma$. De esta forma, la constante C , es el único parámetro para ajustar nuestros datos experimentales a nuestro modelo. Experimentalmente hemos observado que la velocidad del sonido y, por consiguiente la rigidez del sistema, permanece constante durante un test de fluencia a presión de confinamiento, esfuerzo externo y amplitud de ultrasonido constantes. Dado que nuestro modelo de envejecimiento se basa en las variaciones de $f = G/\eta$ durante éste ensayo, podemos decir que la cantidad que envejece es la viscosidad efectiva. Entonces, podemos reescribir la ecuación 3.2 como una evolución temporal de la viscosidad efectiva, esto es:

$$\eta(t) = a_{eq}Gt + \frac{G}{f_0}. \quad (3.23)$$

Con ayuda de la ecuación 3.23, podemos interpretar el parámetro $a_{eq}G$ como la tasa de incremento de la viscosidad durante el proceso de fluencia y G/f_0 como la viscosidad inicial del sistema. En la figura 3.9(a) vemos que el parámetro C no muestra dependencia evidente con el esfuerzo externo aplicado. Sin embargo, observamos un decrecimiento no despreciable de éste con el incremento de

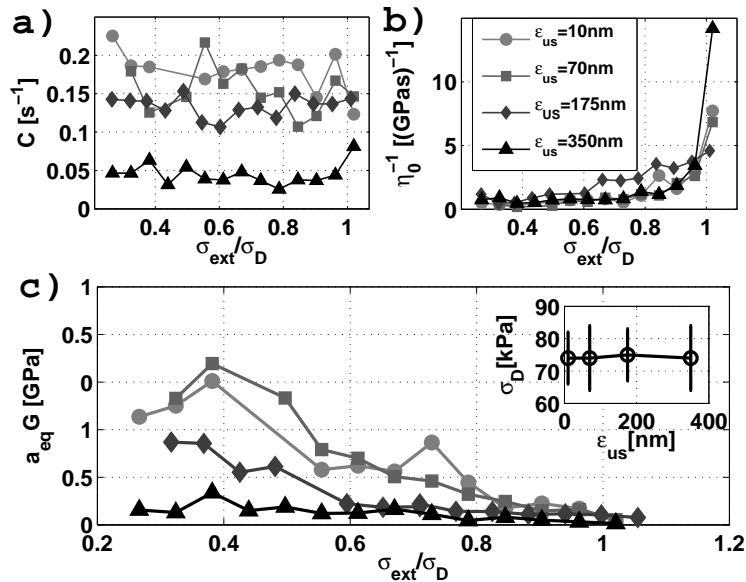


Figura 3.9: Parámetros del modelo de envejecimiento. (a) Vemos el parámetro directamente obtenido desde el ajuste de nuestros datos experimentales $C = a_{eq}f_0$. (b) f_0/G medido desde la tasa de deformación inicial de los datos ($\dot{\gamma}/\sigma$). (c) Tasa de incremento de la viscosidad $a_{eq}G$ obtenido desde la razón entre C y f_0/G . inset, observamos σ_D como función de la amplitud de ultrasonido.

amplitud. Observamos también que el inverso de la viscosidad inicial ($1/\eta_0 = f_0/G$) se incrementa con el esfuerzo externo aplicado, para valores de σ_{ext} cercanos a $\sigma_D = 75\text{KPa}$. Lo que quiere decir que el sistema se fluidifica rápidamente cerca de presiones cercanas al yield stress, Figura 3.9(b). Sin embargo, no es posible distinguir claramente la dependencia de éste parámetro con la amplitud de ultrasonido. En la figura 3.9(c) observamos que la tasa de incremento de la viscosidad, $a_{eq}G$, disminuye con el esfuerzo externo aplicado y con la amplitud de ultrasonido. Este parámetro nos indica que el sistema se fluidifica más cuanto mayor es el esfuerzo externo y cuanto mayor es la amplitud de ultrasonido. Sin embargo, el inset de la figura 3.9(c) refleja que el yield stress σ_D no depende de la amplitud del ultrasonido.

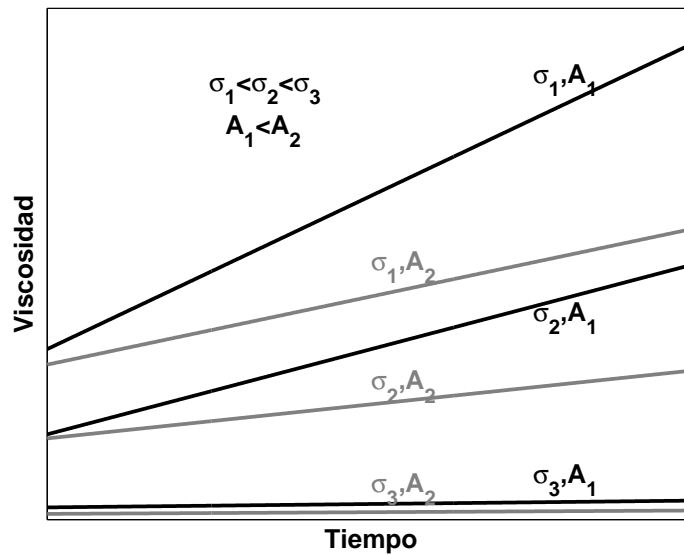


Figura 3.10: Esquema de evolución de la viscosidad efectiva producto del proceso de envejecimiento, las líneas negras y grises representan dos amplitudes de ultrasonido A_1 y A_2 , donde $A_1 < A_2$

Esquematizamos el proceso de envejecimiento durante el test de relajación de deformación con ayuda de la figura 3.10, donde observamos que mientras mayor es la presión externa aplicada menor es la tasa de incremento de viscosidad efectiva y menor es la viscosidad inicial de la muestra (curvas negras). Por otro lado, la amplitud de la onda mecánica interviene disminuyendo también la tasa de incremento de la viscosidad efectiva. Sin embargo, esta viscosidad efectiva siempre aumenta con el tiempo.

3.5. Cambios rápidos de amplitud

Para comprender con mayor profundidad el efecto del ultrasonido en un test de fluencia, realizamos un experimento en donde iniciamos el test

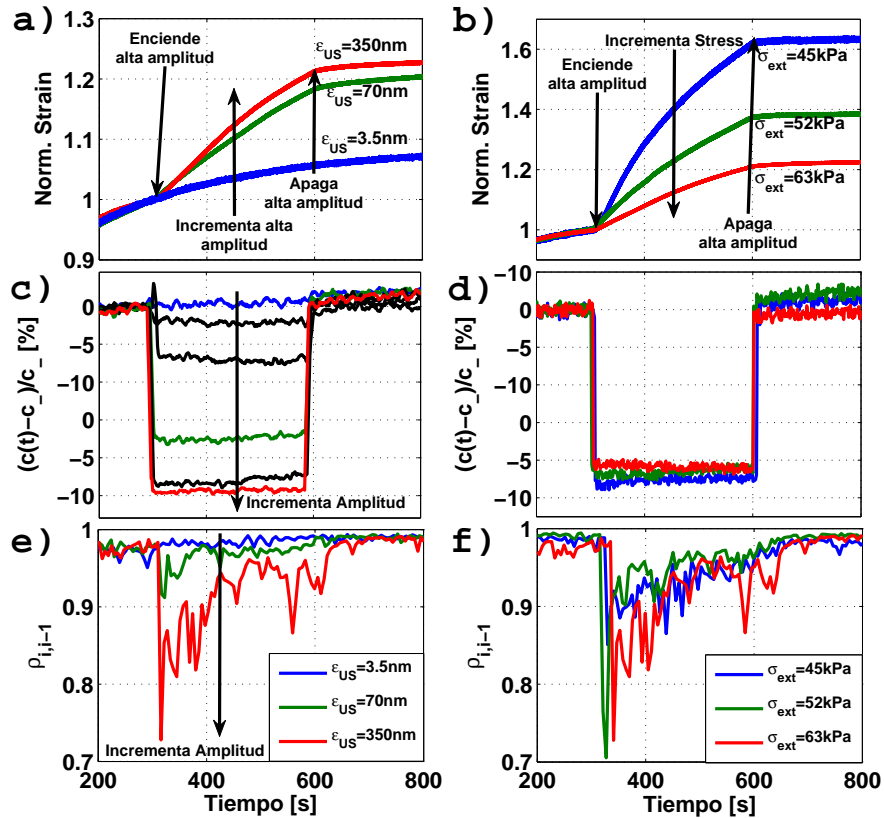


Figura 3.11: Respuesta del test de relajación a un incremento súbito de la amplitud de ultrasonido. (a) y (c) Discontinuidad en la tasa de deformación y la velocidad, respectivamente, a esfuerzo $\sigma_{ext} = 45kPa$. (b) y (d) Discontinuidad en la tasa de deformación y la velocidad, respectivamente. (e) y (f) Máximo de correlación cruzada relativa para condiciones similares a (a) y (b) respectivamente. Usamos los subíndices “-” para indicar el valor de las cantidades un instante antes del incremento de amplitud.

a una amplitud $\epsilon_{US} = 10nm$ durante cinco minutos, para luego rápidamente incrementarla hasta un valor mayor durante otros cinco minutos, posteriormente disminuimos la amplitud hasta el valor inicial. El incremento de amplitud produce un incremento instantáneo en la tasa de deformación. Este incremento es mayor cuanto mayor es la amplitud del ultrasonido aplicado, tal como se observa en

la figura 3.11(a). Sin embargo, dicho incremento es menor a mayor esfuerzo externo aplicado, Figura 3.11(b). Notamos también que este incremento va acompañado de una disminución instantánea de la velocidad del sonido. La amplitud de dicha discontinuidad sólo depende de la amplitud del ultrasonido aplicado, ver figura 3.11(c) y (d).

Repetimos estos experimentos, bajo condiciones similares y cambiamos el transductor LFR por un emisor de alta frecuencia HFE, para obtener información acerca de las ondas dispersadas por el medio. De esta forma, mediante el cálculo del máximo de correlación cruzada entre señales vecinas ($\rho_{i,i-1}$), en donde $\rho_{i,i-1} = 1$ implica que las señales i -ésima e $i - 1$ -ésima son idénticas y $\rho_{i,i-1} = 0$ implica que las señales i -ésima e $i - 1$ -ésima no tienen ningún parecido. En las figuras 3.11(e) y (f), observamos que, antes de la alta amplitud, el máximo de correlación no evidencia ningún cambio estructural. Al aumentar la amplitud observamos una gran disminución de la correlación, evidenciando un cambio estructural que incrementa con la amplitud.

En la figura 3.12(a) vemos que el cambio de velocidad del sonido disminuye con la amplitud. Sin embargo, este no depende de la carga externa aplicada al sistema. Este efecto es conocido en la literatura como “Elastic Weakening” y es explicado en términos de la histéresis de fricción producida por los micro-deslizamientos existentes en los contactos. El mecanismo de histéresis consiste en un cambio de la pendiente promedio de la curva de fuerza tangencial vs. deformación tangencial, en un ciclo. En la figura 1.2(b) observamos un ciclo de histéresis, la rigidez media del ciclo viene dada por la pendiente de la curva que se forma al unir los puntos “1” y “3” (ecuación 1.7), esta pendiente disminuye al incrementar la amplitud del ciclo. Jia *et al.* en [60] encontraron que el cambio de velocidad del sonido disminuye linealmente con la amplitud de la perturbación. Sin embargo, el rango de exploración de

amplitudes es mucho más pequeño que el nuestro, aproximadamente entre 0 y $25nm$. Nosotros revelamos una saturación a grandes amplitudes de excitación probablemente debida a la pérdida de contacto producto de deslizamientos relativos entre las partículas. A partir de la ecuación 1.7 podemos calcular el cambio de velocidad del sonido producto del mecanismo de histéresis cuando cambiamos la amplitud de la onda propagada, encontramos que ese cambio debe ir como la línea continua de la figura 3.12(a). Notamos aquí que el cambio de velocidad del sonido no depende del esfuerzo externo aplicado y que el fenómeno de histéresis por fricción puede explicar el debilitamiento a bajas amplitudes de excitación. Sin embargo, a altas amplitudes no es suficiente y creemos que otro mecanismo es el que predomina, proponemos que a altas amplitudes existen pérdidas de contacto, lo que se debe ver revelado como pérdidas de correlación entre las ondas de scattering, las que analizaremos más adelante mediante el método CWI.

Este fenómeno de dependencia de la velocidad del sonido con la amplitud de excitación de la onda, ya ha sido observado en múltiples ocasiones [12, 17, 18, 24, 60–62]. Sin embargo, esto no explica la discontinuidad en la tasa de deformación mostrada en 3.11(a) y (b), por lo que asumimos que aún no hemos considerado una variable. En el marco del modelo de envejecimiento descrito y aplicado en este capítulo, sabemos que $f = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{\sigma}{\sigma} \dot{\gamma}$, con lo que podemos relacionar el cambio de tasa de deformación con un cambio en viscosidad efectiva,

$$\frac{\Delta \dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_-} = -\frac{\Delta \eta}{\eta_+}, \quad (3.24)$$

aquí usamos los subíndices “-” y “+” para referirnos a los valores de las cantidades un instante antes y después de incrementar la amplitud, respectivamente. Observamos, en la figura 3.12(b), una disminución en la viscosidad efectiva del sistema cuando aumentamos la amplitud de la onda y

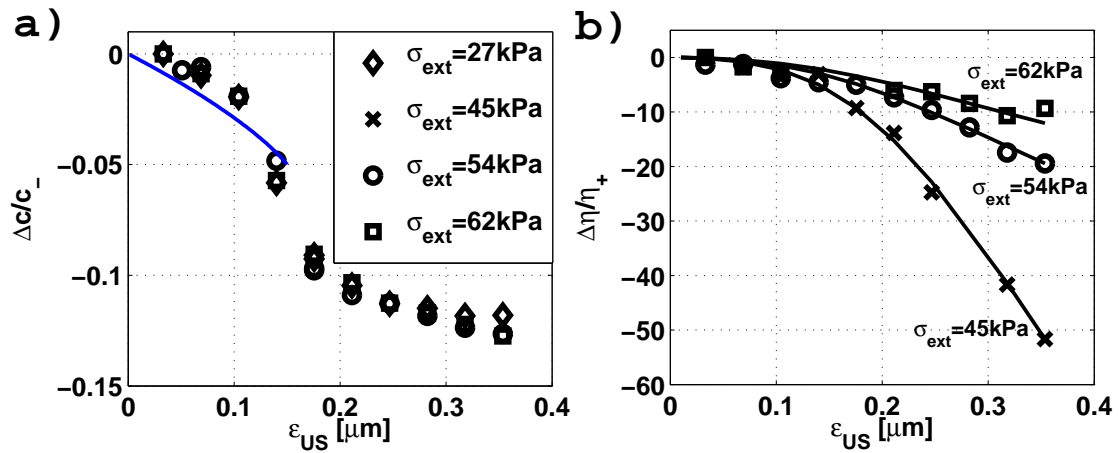


Figura 3.12: (a) Cambios en la velocidad del sonido como función de la amplitud de ultrasonido, la línea continua en un calculo basado en la ecuación 1.7. (b) Cambios de viscosidad efectiva, la líneas continuas representan el ajuste del modelo de “fluidificación acústica generalizado” a nuestros datos experimentales mediante un único par de valores $A = 5,8e3$ y $B = 0,18$.

que ésta disminución es menor cuanto mayor es el esfuerzo aplicado. Para modelar este fenómeno, recurrimos al modelo propuesto por Melosh llamado “Fluidificación Acústica”, desarrollado en la introducción de este capítulo. Sin embargo, este modelo no admite una viscosidad finita en ausencia de ondas propagándose por el medio. Para tomar en cuenta esto, proponemos una simple generalización que explicaremos a continuación.

3.6. Fluidificación Acústica, generalización

Bajo el mismo esquema establecido en la sección 3.1.2, ilustrado en la figura 3.3, en donde consideramos partículas de diámetro d distribuidas de manera aleatoria en un volumen cilíndrico. Aplicamos a este, un esfuerzo hidrostático de magnitud $P_0 = 95\text{KPa}$, un esfuerzo externo en la dirección axial

σ_{ext} y una perturbación acústica distribuida aleatoriamente en la estructura del material. Al igual que en la sección 3.1.2, cada contacto está sometido a un esfuerzo de corte τ y a una presión normal P_c . Estas variables microscópicas están relacionadas con las variables microscópica mediante $\langle \tau \rangle = \sigma_{ext}/2$ y $\langle P_c \rangle = P_0 + \sigma_{ext}/2$. Los contactos en cuestión deslizarán cuando se cumpla el criterio de Coulomb, es decir $\tau > \tau_{st} = \mu P_c$. Para dar cuenta de la viscosidad finita en ausencia de perturbación acústica, definiremos una nueva variable estocástica $p = P_c - \langle P_c \rangle$, que representa el desorden a nivel de la presión de confinamiento en los contactos. Supondremos, además, que la probabilidad de encontrar un contacto con una presión sobre el promedio entre p y $p + dp$ es,

$$\mathcal{P}(p)dp = \frac{dp}{\sqrt{2\pi}\zeta_p} e^{-\frac{p^2}{2\zeta_p^2}}. \quad (3.25)$$

A diferencia de lo expuesto en la ecuación 3.6, ahora los contactos se desestabilizaran cuando,

$$y = s + p > y_c = P_c - \tau/\mu. \quad (3.26)$$

Como p y s son variables aleatorias con distribución de probabilidad normal. Entonces, la distribución de probabilidad de y , también será normal. Además, si suponemos que p y s son independientes. Entonces, y tendrá una varianza $\zeta^2 = \zeta_s^2 + \zeta_p^2$ (Demostración en apéndice C). Entonces, la probabilidad de que un contacto tenga un valor de y entre y e $y + dy$ es,

$$\mathcal{P}(y)dy = \frac{dy}{\sqrt{2\pi}\zeta} e^{-\frac{y^2}{2\zeta^2}}. \quad (3.27)$$

Los contactos que deslizan son todos aquellos en donde $y > y_c$, por lo que la fracción de volumen que desliza ζ es,

$$\zeta(y > y_c) = \int_{y_c}^y \mathcal{P}(y)dy = \frac{1}{2} \left[1 - \text{Erf} \left(\frac{y_c}{\sqrt{2}\zeta} \right) \right]. \quad (3.28)$$

De aquí en adelante, el procedimiento matemático para calcular la viscosidad efectiva es idéntico al desarrollado en la sección 3.1.2, por lo que nos saltaremos directamente a la viscosidad efectiva resultante,

$$\eta_{eff} = \rho\lambda c \left[\frac{2}{Erfc(\chi)} - 1 \right], \quad (3.29)$$

donde $\chi = (1 - \Omega)/\Sigma$, $\Omega = \tau/\tau_{st}$ y $\Sigma = \varsigma/y_c$. Nuestra hipótesis, en este punto, es que la desviación estándar de la variable aleatoria p es proporcional a la presión de confinamiento promedio del sistema, esto es $\varsigma_p = B\langle P_c \rangle$ con B como constante de proporcionalidad. Podemos interpretar el parámetro B como un indicador de orden del sistema, es decir, mientras mayor es el valor de B más desordenado es el granular. Si $B = 0$ entonces, el bulk es completamente ordenado. La segunda hipótesis es que la desviación estándar de la variable aleatoria s es proporcional a la amplitud de vibración externa impuesta y a la desviación estándar de la presión de confinamiento, esto es $\varsigma_s = A\varsigma_p\epsilon_{US}/d$ con A como constante de proporcionalidad. Con estas consideraciones podemos escribir $\varsigma(\epsilon_{US}) = B\langle P_c \rangle \sqrt{1 + A^2\epsilon_{US}^2/d^2}$. A y B , nos servirán de parámetros de ajuste de nuestros datos experimentales.

Ajustamos entonces, el cambio de viscosidad producido por el incremento de amplitud de ultrasonido, mediante la relación

$$\frac{\Delta\eta}{\eta_+} = 1 - \frac{Erfc\left(\frac{y_c(\tau_{st}-\tau)}{\tau_{st}}\varsigma(\epsilon_{US+})^{-1}\right)}{Erfc\left(\frac{y_c(\tau_{st}-\tau)}{\tau_{st}}\varsigma(\epsilon_{US-})^{-1}\right)}. \quad (3.30)$$

En la figura 3.12(b) vemos, en líneas continuas, los ajustes de tres set de datos experimentales, cada uno sometido a esfuerzos externos distintos, mediante la ecuación 3.30. Con este ajuste obtenemos un único set de parámetros $A = 5,8e3$ y $B = 0,18$ para las tres curvas cada una con distinto esfuerzo externo aplicado, lo que valida en cierta medida nuestras hipótesis.

3.7. Aplicación del método CWI

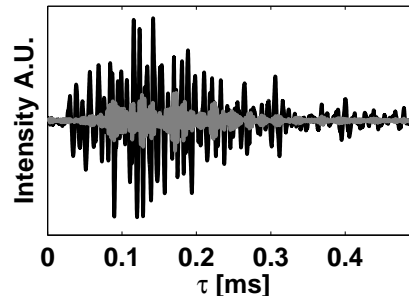


Figura 3.13: En negro vemos la señal detectada por el transductor HFR. En gris, vemos ésta misma luego de la aplicación de un filtro pasa alta.

En esta sección abordamos más en detalle el estudio de los cambios estructurales inducidos por el incremento de amplitud de la onda coherente durante el proceso de relajación de deformación (ver figuras 3.11(a) y (b)), usando el método presentado en la sección 3.1.3, llamado “Coda Wave Interferometry”. Este método fue introducido por Snieder [39, 57] y se basa en el cálculo de correlaciones por ventanas de las señales de scattering, emitidas por HFE y detectadas por HFR, para obtener información sobre las modificaciones en los caminos de propagación de las ondas. Mostramos, que a pesar del origen aleatorio de las ondas de scattering, estas contienen información, por ejemplo, sobre la deformación macroscópica del sistema. Las señales detectadas por HFR, mostradas en la figura 3.13 (negro), contienen dos componentes en frecuencia; una onda coherente de baja frecuencia de alrededor de 100KPa producida por una auto demodulación generada por las características no-lineales de la red de contactos [16] y una onda de tipo scattering o coda de alta frecuencia (320Khz), la que contiene información estructural. Para obtener la onda coda aislada de la onda coherente aplicamos

un filtro pasa alta a las señales, con lo que obtenemos la señal mostrada en gris en la figura. 3.13.

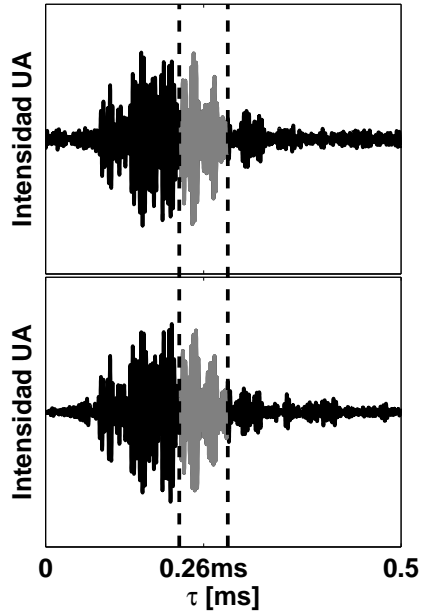


Figura 3.14: Señales de scattering antes y después del cambio estructural, en gris mostramos un par de ventanas que serán correlacionadas.

Consideremos dos señales coda, antes y después de algún pequeño cambio estructural, como se muestra en la figura 3.14. Dividiremos las señales en ventanas de ancho $10T$ centradas a un tiempo τ con un 80% de overlap, donde T es el periodo dominante de la onda difusiva. Aplicamos la correlación cruzada, definida por la ecuación 3.14, a cada par de ventanas. En la figura 3.15(a) observamos un acercamiento de la función de correlación entre las ventanas mostradas en gris en la figura 3.14. Según la teoría CWI, el máximo de correlación ocurre a un tiempo $\Delta\tau$, que puede ser interpretado como el cambio de tiempo de vuelo promedio en la ventana con tiempo central τ . Dicho esto, para el par de señales de la figura 3.14, obtenemos, como relación entre $\Delta\tau$ y τ , una recta con fluctuaciones. Esta es es mostrada en la figura

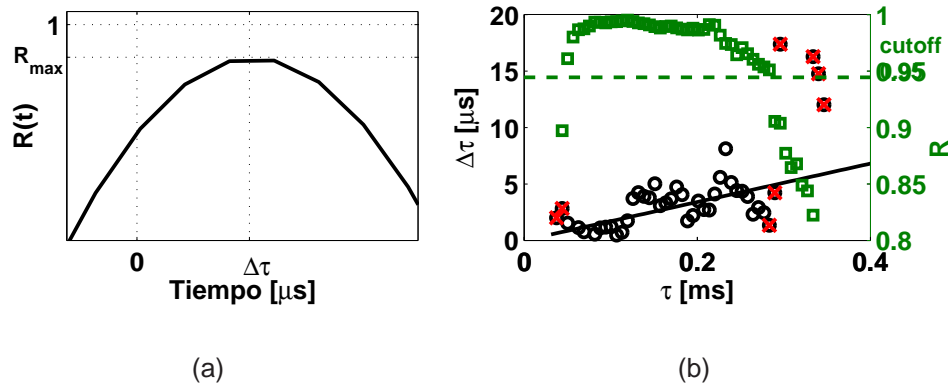


Figura 3.15: (a). función de correlación cruzada para el par de ventanas mostradas en figura 3.14. (b) $\Delta\tau$ contra τ para el par de señales mostradas en la figura 3.14, las cruces rojas indican los puntos filtrados por el máximo de correlación (green) menor que 0,95, la línea continua indica el ajuste lineal realizado a la curva $\Delta\tau$ contra τ sin considera lo puntos filtrados.

3.15(b)(círculos negros). Aquí tenemos puntos que poseen un máximo de correlación menor que 0,95(cruces rojas). Consideraremos estos puntos como ventanas decorrelacionadas y son filtrados de la curva para realizar un ajuste lineal cuya pendiente representa el cambio promedio del tiempo de vuelo sobre toda la muestra $\langle \Delta\tau/\tau \rangle$.

Cada onda coda, es obtenida por la superposición de las onda que viajan por los caminos disponibles p de largo l_p (ecuación 3.12). Cada uno de los caminos p , contribuyen a la señal completa a un tiempo dado por $\tau_p = l_p/c_p$, donde c_p es la velocidad del sonido media en el camino p . Promediando en una ventana, podemos escribir $\tau_i = l_i/c_i$, donde τ_i , l_i y c_i , son el tiempo de vuelo medio, largo medio y velocidad media, de la ventana i -ésima. Diferenciando esta última, obtenemos que $\Delta\tau/\tau = \Delta l_i/l_i - \Delta c_i/c_i$. Promediando esta relación sobre todas la ventanas, obtenemos,

$$\left\langle \frac{\Delta\tau}{\tau} \right\rangle = \left\langle \frac{\Delta l_i}{l_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\Delta c_i}{c_i} \right\rangle. \quad (3.31)$$

Por, otro lado, el cambio de longitud media se relaciona con el cambio de deformación global de la muestra [41], esto es $\langle \Delta l_i / l_i \rangle = \Delta \gamma$. Aplicando esto a la ecuación 3.31, obtenemos,

$$\left\langle \frac{\Delta \tau}{\tau} \right\rangle = \Delta \gamma - \frac{\Delta c}{c}, \quad (3.32)$$

donde c es la velocidad del sonido efectiva en el medio. La ecuación 3.32, nos dice, entonces que el cambio medio de la pendiente de la recta mostrada en la figura 3.15(b) se relaciona con el cambio global de deformación y con el cambio porcentual de velocidad.

En la figura 3.16(a) observamos un experimento típico de respuesta del sistema granular al aumento de amplitud (como los mostrados en la figura 3.11), además de una curva de reconstrucción mediante el método CWI que fue obtenida integrando numéricamente los valores de $\langle \Delta \tau / \tau \rangle$ en el tiempo. Esta curva cambia en un factor, pero no su tendencia, dependiendo del tamaño de ventana y overlap elegidos. En las figuras 3.16(b) y (c), graficamos en el eje “ x ” el tiempo transcurrido en el experimento de fluencia, en el eje “ y ” la posición del centro de cada ventana o el eje temporal de las señales y en colores representamos el máximo de correlación(a) o la diferencia entre el ajuste lineal y el desfase temporal para cada par de ventanas(b). El color blanco indica que la ventana posee un coeficiente de correlación menor que 0,95 y por lo tanto no fue considerada para realizar el ajuste lineal.

Hemos dividido el experimento en tres regiones, la región I, de baja amplitud acústica, corresponde a fluencia natural donde la deformación es debida al envejecimiento, y posee una tendencia logarítmica dada por la ecuación 3.4, En ésta región notamos que la curva de reconstrucción mediante CWI, sigue ésta misma tendencia, lo que está en acuerdo con que la velocidad del sonido en esta región es constante, tal como se muestra en las figuras 3.6 y

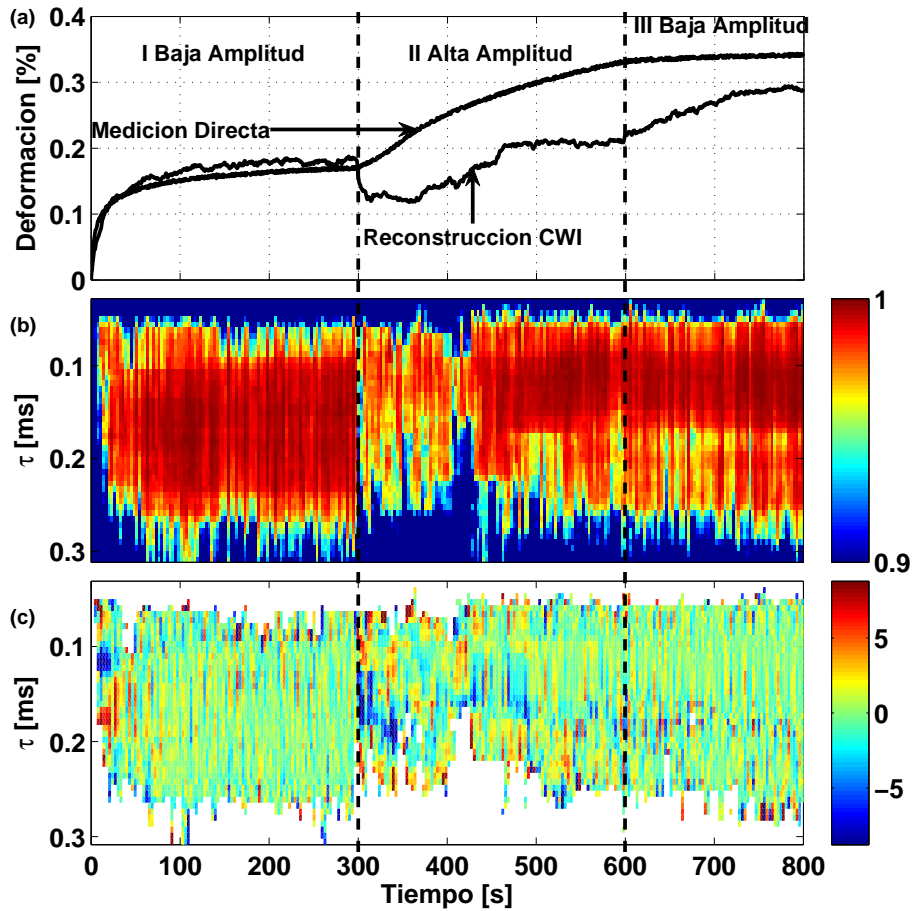


Figura 3.16: (a) Medición directa de la deformación durante el test de fluencia y reconstrucción mediante el método C.W.I. con $\sigma_{ext} = 45KPa$. En la primera y tercera región, la amplitud de la perturbación acústica es $\epsilon_{US} = 10nm$, en la segunda región la amplitud del pulso acústico es $\epsilon_{US} = 350nm$. (b) Mapa de correlaciones máximas como función de la posición de la ventana τ y del tiempo transcurrido sobre el ensayo de fluencia, 1 indica perfecta coincidencia entre el par de ventanas correlacionadas. (c) Diferencia entre la tendencia lineal y el valor de $\Delta\tau$ medido mostrados en la figura 3.15(b), el color blanco indica que la ventana fue filtrada debido a su coeficiente de correlación menor que 0.95.

3.11, por lo que se elimina el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.32, dando lugar a que nuestra curva reconstruida debe seguir a la curva de

deformación. Por otro lado, en esta región no observamos grandes pérdidas de correlación, excepto durante los primeros treinta segundos de experimento, y la dispersión de $\Delta\tau$ es pequeña. Esto implica que el proceso de fluencia natural corresponde a compresiones homogéneas de la estructura interna del granular en donde no ocurren movimientos relativos entre las partículas. En la región de alta amplitud acústica (región II), vemos un repentino decrecimiento de la curva reconstruida a tiempo $t = 300s$, el que corresponde al instante de decrecimiento en la velocidad de propagación del sonido efectiva mostrado en 3.11, además de una pérdida de correlación, más notoria en las ventanas correspondientes a tiempo τ mayores, así como un aumento en la dispersión y en el número de ventanas filtradas (puntos blancos figura 3.16(c)). Estas características nos dicen que la alta amplitud induce movimiento relativo entre las partículas y afectan mayoritariamente a las cadenas con tiempo de vuelo mayores. Por último, en la tercera región, correspondiente a baja amplitud acústica, observamos una buena correlación para las ventanas ubicadas aproximadamente en $\tau < 0,2$. Esto da cuenta de un acortamiento de las señales coda, lo que correspondería a una homogeneización de la estructura del material.

3.8. Conclusión

El test de relajación de la deformación puede ser descrito por el modelo de envejecimiento presentado en este capítulo. Durante este ensayo, la velocidad del sonido no presenta grandes variaciones, por lo que el envejecimiento está estrictamente relacionado con la viscosidad efectiva del medio, mediante dos parámetros, la tasa de crecimiento de la viscosidad y la viscosidad inicial. A presión externa y amplitud de la onda fijas, este proceso de relajación es esencialmente un proceso de envejecimiento. Por lo que, la carga

externa aplicada y la amplitud del ultrasonido actúan disminuyendo la tasa de crecimiento de la viscosidad.

Sin embargo, un cambio de amplitud repentino implica una disminución de la viscosidad y de la velocidad del sonido, por tanto un rejuvenecimiento instantáneo. Fenomenológicamente podemos decir que el sistema cambia instantáneamente desde la curva negra a la gris de la figura 3.10.

A nivel estructural este proceso, a baja amplitud de ultrasonido, corresponde a compresiones homogéneas de la red de contacto, sin destrucción de las cadenas de fuerza. Por el contrario a amplitudes altas, el apilamiento granular presenta deslizamientos tales, que la estructura de las cadenas de fuerza cambia drásticamente, generando una plasticidad adicional a la observada en la deformación natural.

Hemos observado un fenómeno de fluidificación acústica, el cual posee escasa evidencia bibliográfica a nivel de laboratorio. Este es explicado en términos de los deslizamiento generados a partir del cumplimiento del criterio de de Coulomb a nivel de contacto, el que es modificado a su vez por la propagación de una presión de vibración. Para tomar en cuenta la plasticidad en ausencia de perturbación acústica, hemos introducido una pequeña generalización al modelo propuesto por Melosh. Esta se ajusta exitosamente a nuestras curvas experimentales.

Capítulo 4

Ultrasonido durante un test de compresión tri-axial

En mecánica de materiales, comúnmente son usados ensayos mecánicos para caracterizar propiedades reológicas de los materiales. Estos ensayos pueden ser de variados tipos, como por ejemplo; ensayos de relajación de esfuerzo o deformación, de compresión o tracción uni-axial o tri-axial, ensayos de indentación, entre otros. Cada uno de estos test exploran distintas características mecánicas del material en estudio. El estudio del comportamiento de los materiales granulares bajo test de compresión tri-axial es de gran utilidad práctica y académica, dada la cantidad de fenómenos y mecanismos involucrados. Por ejemplo, durante estos ensayos se han observado, flujos interno, cambios en la dureza efectiva, efectos de memoria mecánica, formación de bandas de cizalle, influencia de la dilatación térmica de las partículas, envejecimiento, stick-slip. Este último produce, en algunos casos, ondas mecánicas que se propagan a través del material. Esta característica posiciona a los materiales granulares consolidados como buenos candidatos para elaborar modelos y experimentos a escala sobre la generación de movimientos sísmicos[63]. Otra de las aplica-

ciones son, por ejemplo, en la construcción de caminos, se ha encontrado que se producen socavones principalmente debido a la gran compresibilidad que presenta el suelo [64]. O en la industria farmacéutica, en donde los componentes químicos usados se rompen en la medida que son empaquetados [65].

4.1. Introducción

En este capítulo nos enfocaremos en el estudio del ensayo de compresión tri-axial sobre un material granular consolidado, el que consiste en someter el material a la acción de una velocidad de deformación constante mientras la muestra es sometida a una presión hidrostática. Este ensayo nos da a conocer la relación entre el esfuerzo y la deformación sobre la dirección de compresión. Esta relación junto con mediciones del cambio de volumen, y mediciones acústicas, como la velocidad del sonido y/o correlaciones entre las señales de scattering, durante el proceso de compresión, nos generan una visión general del comportamiento mecánico del empaquetamiento granular. Esta configuración experimental nos permite además explorar los efectos de memoria mecánica mediante la aplicación de ciclos de carga y descarga en conjunto con las herramientas acústicas ya mencionadas.

Usando las curvas de esfuerzo deformación, hemos caracterizado el ángulo de fricción interna realizando compresiones a distintas presiones hidrostáticas P_0 . Desarrollamos un modelo simple, basado en una colección de deslizadores sometidos a una velocidad de compresión constante, para explicar en parte las curvas experimentales de esfuerzo deformación. Usamos el modelo de envejecimiento para obtener una caracterización completa de estas curvas. Este modelo incluso rescata alguna de las características de memoria que posee nuestro apilamiento. Por último, presentamos evidencia experimental de stick-slip en el test de compresión cuando disminuimos la fricción entre las partículas usando un lubricante.

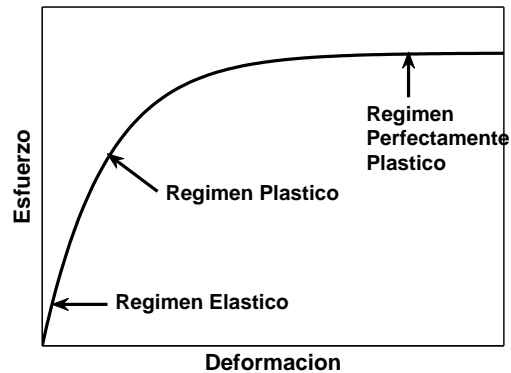


Figura 4.1: Curva de esfuerzo deformación idealizada, para materiales isotrópicos y homogéneos.

4.1.1. Compresión tri-axial en materiales granulares

Un test tri-axial es un ensayo mecánico en donde una muestra de material, típicamente cilíndrica, es confinada mediante una presión hidrostática, y luego deformada a velocidad constante en la dirección del eje de simetría del cilindro. La fuerza requerida para lograr esta deformación es medida con una celda de carga como una función del tiempo. En un material homogéneo e isotrópico observamos que la curva de esfuerzo deformación, figura 4.1, presenta tres regímenes. El primero, ocurre a pequeñas deformaciones y corresponde a una zona elástica, donde el esfuerzo incrementa linealmente con la deformación de manera reversible. El segundo, corresponde a una zona de deformaciones intermedias (régimen elasto-plástico) donde comenzamos a obtener deformaciones irreversible. Dependiendo del material, estas deformaciones irreversibles pueden ser debido a cambios a nivel de defectos en la estructura del material como movimiento de dislocaciones. El tercer régimen es una zona donde toda la deformación es irreversible, un pequeño aumento del esfuerzo produce una gran deformación. No todos los materiales recorren estos tres comportamientos, muchos presentan rupturas poco después de abandonar el régimen elástico.

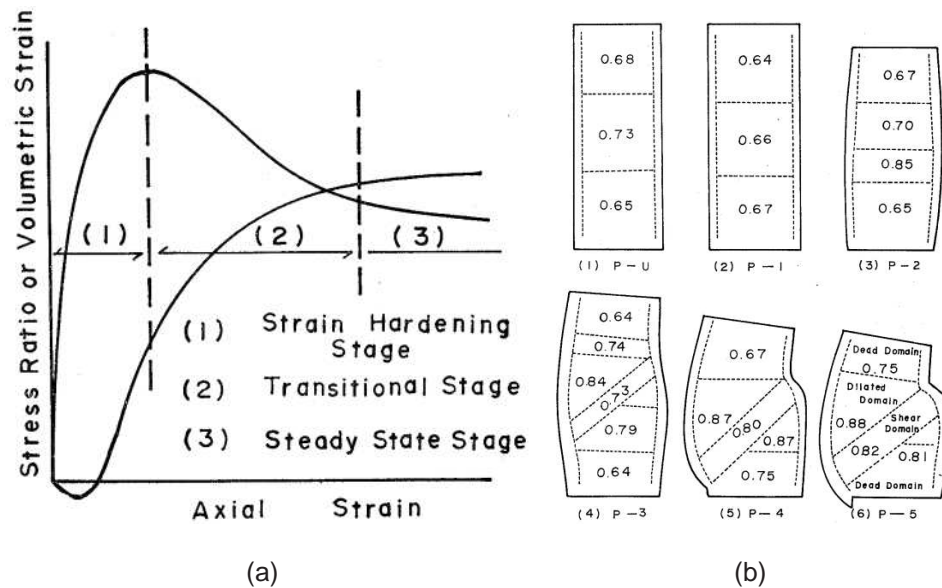


Figura 4.2: Test tri-axial en arena realizado por Oda [66]. (a) Curva de esfuerzo y cambio de volumen en función de la deformación. (b) Secciones transversales de la muestra a lo largo del eje de compresión. Las tres secciones superiores son tomadas a deformaciones progresivas durante la región I, P→3 es la sección correspondiente al máximo de la curva de esfuerzo, la sección P→4 corresponde a un punto intermedio de la región II y P→5 corresponde a la sección en la región II. Los escritos en las secciones indican el volumen vacío respecto del volumen total.

En materiales granulares, tales como arena, algunos autores han encontrado experimentalmente [66–68] y numéricamente [69] el comportamiento de la figura 4.2. En la figura 4.2(a) observamos la curva de esfuerzo deformación y el cambio de volumen durante la compresión, y en la figura 4.2(b) vemos cortes transversales a lo largo del eje de compresión de la muestra, durante la compresión. Los números impresos sobre las secciones indican porcentualmente el volumen vacío de la muestra respecto del volumen total. Observamos tres regiones demarcadas en la curva de esfuerzo-deformación. En la región (1), a pequeñas deformaciones, la compresión provoca deslizamiento en los contactos más débiles del empaquetamiento haciendo a la muestra más homogénea

en su distribución de esfuerzos internos. De esta forma, la muestra presenta una pequeña disminución de volumen. Luego de esto, los contactos comienzan a orientarse en la dirección de la deformación incrementando la fuerza global. Una vez que las cadenas de fuerza están orientadas, las partículas comienzan a fallar creando bandas de cizalle dilatando la muestra y relajando los esfuerzos internos, región (2). Finalmente, se crea un estado estacionario, en donde la fuerza y el volumen permanecen constantes. El principal mecanismo de ruptura en materiales granulares, corresponde al criterio de Mohr-Coulomb, el que define la ruptura sobre el lugar geométrico del material en donde el esfuerzo de cizalle τ supera o se iguala a $\mu_s \sigma$, donde μ_s es el coeficiente de fricción interna del material y σ es el esfuerzo normal sobre la falla.

4.1.2. Criterio de ruptura de Mohr-Coulomb

Consideremos un material granular al que se le aplica una fuerza externa, si esta fuerza es pequeña, provocará deformaciones elásticas sobre el sistema. Si la fuerza crece sobre un cierto valor crítico, la muestra se romperá en dos bloques, los que deslizarán el uno con el otro tal y como dos cuerpos rígidos. El criterio de falla de Coulomb[70] nos dice que sobre la falla se debe cumplir,

$$\tau = \mu_s \sigma + c, \quad (4.1)$$

donde τ y σ son el esfuerzo paralelo y normal a la fractura, respectivamente y μ_s y c son el coeficiente de fricción estático y el coeficiente de cohesión, respectivamente. Se ha establecido que el origen físico de la fricción en un material granular, está relacionado a la fricción entre las partículas y a la geometría de estas. Sin embargo, aún no se conoce una descripción completa de todos los mecanismos involucrados en esta. En este trabajo consideraremos que la cohesión presentada por el material granular es despreciable. Es

conveniente definir el ángulo de fricción interna como $\mu_s = \tan \phi$, de esta forma el criterio de falla incipiente de Coulomb, queda:

$$\tau = \sigma \tan \phi, \tag{4.2}$$

el ángulo ϕ es conocido como ángulo de fricción interna.

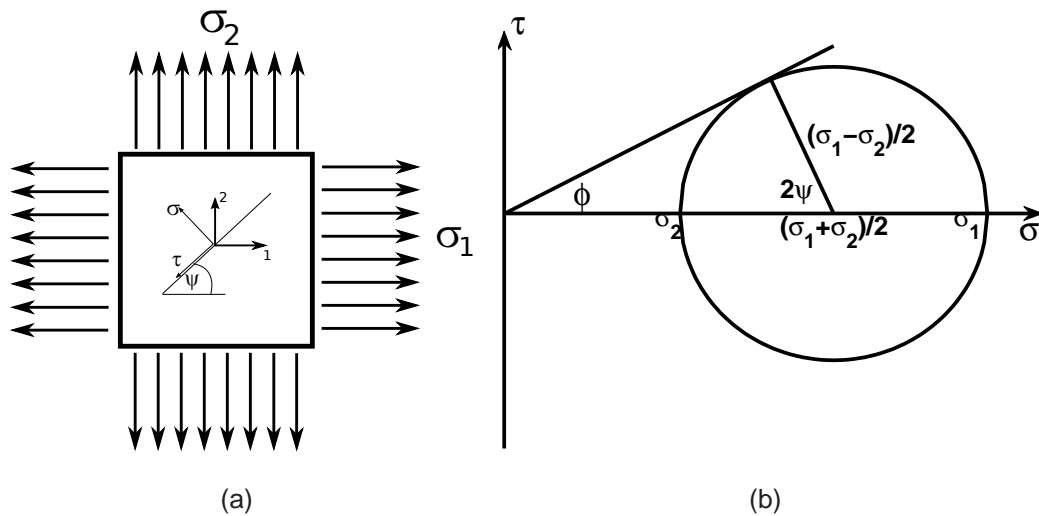


Figura 4.3: (a) Material sometido a esfuerzos principales σ_1 y σ_2 , provocando una falla incipiente con un ángulo de inclinación ψ . (b) Diagrama de Mohr-Coulomb para el esquema mostrado en (a). Los puntos pertenecientes al círculo simbolizan los valores de las fuerza normales y tangenciales sobre rectas a distintos ángulos de inclinación respecto del eje principal mayor 1.

Por otro lado, consideremos un material elástico homogéneo bidimensional, como el mostrado en la figura 4.3(a), al que aplicamos un par de esfuerzos principales σ_1 y σ_2 con $\sigma_1 > \sigma_2$. En esta situación, queremos calcular el valor de la fuerza normal σ y tangencial τ sobre una línea inclinada un ángulo ψ respecto del eje principal 1. La fuerza neta sobre dicha línea se puede escribir

como,

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sin \psi \\ \sigma_2 \cos \psi \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Cuyas componentes normales y tangenciales pueden ser expresadas por,

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sin \psi & \sigma_2 \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \\ \tau &= \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sin \psi & \sigma_2 \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix},\end{aligned}$$

respectivamente. Resolviendo esto, obtenemos:

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \psi + \sigma_2 \cos^2 \psi \quad (4.4)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \psi \cos \psi. \quad (4.5)$$

Agrupando convenientemente estas dos últimas ecuaciones podemos escribir,

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \quad (4.6)$$

La ecuación 4.6 representa un círculo, llamado “Círculo de Mohr”, en el espacio τ - σ , con centro $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ y radio $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. En la figura 4.3(b) vemos el diagrama de este círculo junto con una recta, la que simboliza el criterio de deslizamiento de Coulomb dado por la ecuación 4.2. Si la recta pasa sobre el círculo, es decir, si no existe intersección entre el círculo y la recta. Entonces, el granular es estable y no desliza. Si el círculo intercepta la recta en dos puntos, entonces, el granular falló por lo que el empaquetamiento es inestable. Si la recta pasa tangente al círculo, entonces, estamos en presencia de una falla incipiente en un ángulo $\psi = \pi/4 - \phi/2$ respecto al eje

principal mayor. Geométricamente, obtenemos una relación entre los esfuerzos principales y el ángulo de fricción interna necesarios para producir una falla, esto es:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (4.7)$$

La ecuación 4.7 permite predecir el ángulo de fricción interna conociendo los esfuerzos principales que producen la falla. O de forma contraria, si conocemos el ángulo de fricción interna, entonces, podemos predecir el ángulo de falla del granular¹. En la sección 4.3 utilizaremos este criterio para obtener el ángulo de fricción interna de nuestro empaquetamiento.

4.1.3. Modelo de envejecimiento

Durante este capítulo proponemos caracterizar las curvas de esfuerzo deformación, obtenidas a partir del ensayo de compresión triaxial, mediante el modelo de envejecimiento, dado por las ecuaciones 4.8 y 4.9, que fue introducido en la sección 3.1.1 de este trabajo y fue aplicado exitosamente al test de relajación de la deformación del capítulo 3.

$$\dot{\sigma} = -f\sigma + G\dot{\gamma} \quad (4.8)$$

$$\dot{f} = -af^2 + r\dot{\gamma}^2. \quad (4.9)$$

Para esto debemos incluir la condición de test tri-axial que consiste en $\dot{\gamma} = Cte$. Con esto y cambiando variables $f(t) = Z(t) + f_\infty$, con $f_\infty = \sqrt{r/a}\dot{\gamma} = G/\sigma_\infty\dot{\gamma}$, donde σ_∞ es el esfuerzo de saturación a grandes deformaciones, obtenemos:

$$\dot{Z} = -aZ^2 - 2af_\infty Z. \quad (4.10)$$

Realizando el cambio de variable $Z = 1/y$, encontramos,

$$\dot{y} = a + 2af_\infty y. \quad (4.11)$$

¹Ver referencias [70, 71] para una profundización del cálculo realizado en esta sección.

Esta ecuación tiene como solución

$$y(t) = \frac{1}{2f_{\infty}} [(2f_{\infty}y(0) + 1)e^{2af_{\infty}t} - 1], \quad (4.12)$$

con lo que obtenemos,

$$f(t) = f_{\infty} \coth af_{\infty}(t + c), \quad (4.13)$$

donde $c = \frac{1}{2af_{\infty}} \ln \frac{f_0 + f_{\infty}}{f_0 - f_{\infty}}$. Sustituyendo la ecuación 4.13 en 4.8, obtenemos finalmente

$$\sigma(t) = G\dot{\gamma} \frac{\int_0^t \sinh^{(1/a)}[af_{\infty}(t' + c)] dt'}{\sinh^{1/a}[af_{\infty}(t + c)]}. \quad (4.14)$$

La ecuación 4.14 no es integrable analíticamente, por lo que trabajaremos esta expresión numéricamente de aquí en adelante.

4.2. Montaje experimental

Consideremos un material granular consolidado compuesto de una masa M de partículas de vidrio monodispersas de diámetro d , las que están contenidas dentro de un volumen cilíndrico de altura h y diámetro D . Usaremos dos transductores ultrasónicos como tapas rígidas del cilindro. El manto del cilindro consiste en una membrana elástica fabricada de látex, ésta permite un control independiente de la presión lateral y axial. Este sistema es sometido a una presión hidrostática constante P_0 mediante la evacuación del aire intersticial gracias a una bomba de vacío. Para evitar la circulación de aire nos aseguramos de que los contornos del cilindro estén sellados herméticamente. Nuestro apilamiento granular es comprimido a velocidad constante v en la dirección del eje de simetría del cilindro mediante un motor de paso de marca Parker, controlado mediante plataforma "LabView", figura 4.4(a). Registramos la fuerza F durante la compresión mediante una celda de carga ubicada en uno de los

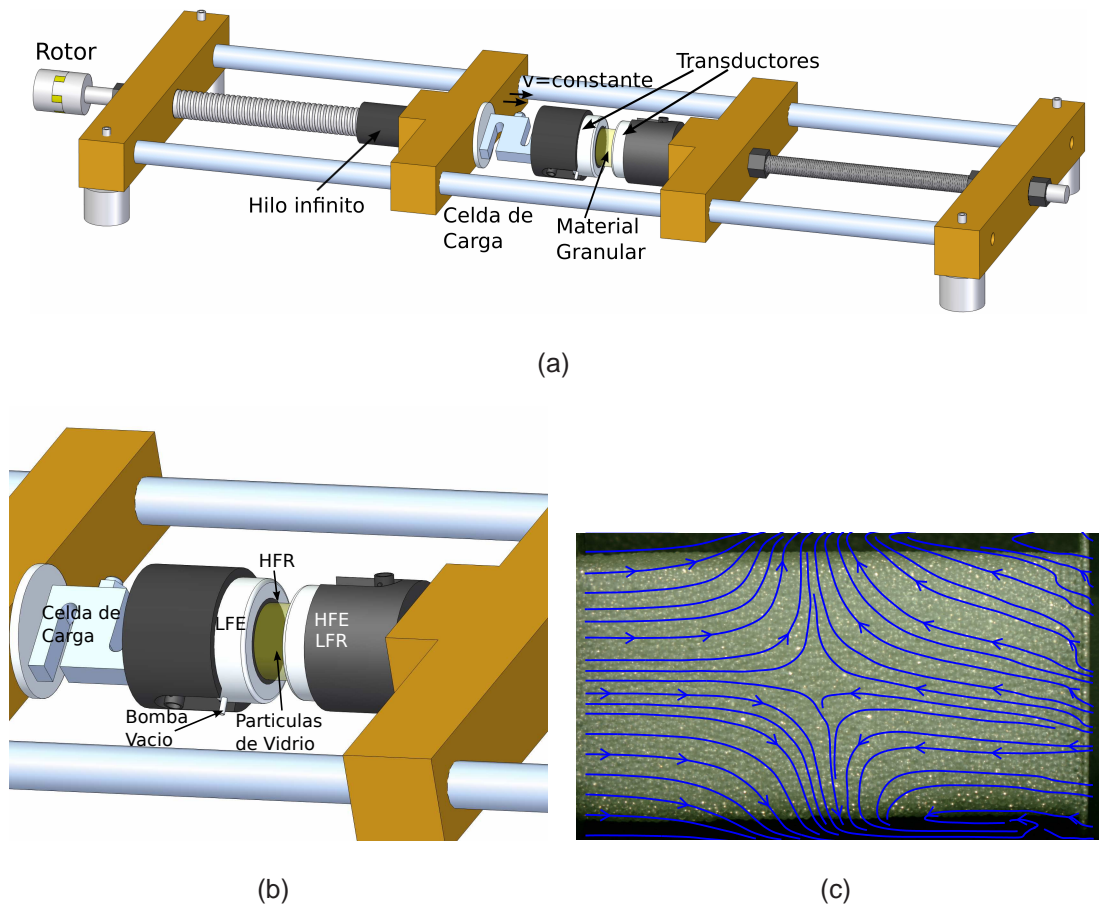


Figura 4.4: (a) y (b) Montaje experimental, la máquina comprime la muestra a velocidad constante mientras los transductores, identificados como HFE y HFR (Emisor y receptor de alta frecuencia) y LFE y LFR (Emisor y receptor de baja frecuencia), propagan sonido para testear propiedades estructurales o mecánicas durante el test, respectivamente. (c) líneas de flujo obtenidas mediante correlación cruzada de imágenes.

extremos de la muestra y mediremos directamente la deformación con ayuda de un sensor de posición inductivo. El esfuerzo en la dirección de simetría del cilindro σ_z y el esfuerzo lateral vienen dados por $\sigma_z = P_0 + F/A$ y $\sigma_r = P_0$ donde A es el área transversal de la muestra.

Usaremos un transductor de baja frecuencia (LFE), marca “Panametrics

NDT X1021”, para emitir pulsos de dos ciclos de duración a $40kHz$ cada un segundo a una amplitud ϵ_{US} , medida en unidades de distancia gracias a la calibración realizada mediante un vibrómetro láser “Polytec OFV 3001” la que es mostrada en detalle en el apéndice B. Este transductor es usado para perturbar el sistema y/o medir la velocidad del sonido junto con un receptor LFR, marca “ValpeyFisher CSO 104GP”, que puede ser intercambiado por un emisor de alta frecuencia HFE, marca “Panametrics NDT V391”, para emitir pulsos de dos ciclos de duración a una frecuencia de $320kHz$ cada 1 segundo. Este último es usado para propagar ondas de scattering o coda las que son detectadas al otro extremo de la muestra por un transductor miniatura o pinducer situado de manera oblicua a la muestra, ver figura 4.4(b).

Para obtener información respecto del campo de deformaciones de la muestra durante la compresión, tomamos fotografías a una muestra de sección cuadrada. Seccionamos dos imágenes, antes y después de un pequeño desplazamiento, en ventanas cuadradas de $64pix$ de lado. Luego, usando las ventanas análogas de ambas imágenes, buscamos el desplazamiento promedio de dicha venta ubicando el máximo de la función de correlación cruzada [72–74], definida análogamente a la ecuación 3.14. De esta manera obtenemos un campo de desplazamiento o de velocidades como una función del tiempo, tal como en [75, 76]. En la figura 4.4(c) observamos las líneas de flujo sobre la superficie de la muestra durante el proceso de compresión. Estas líneas fueron obtenidas a partir de la integral temporal de los campos de desplazamiento, es decir, sumando el campo de desplazamiento en cada par de imágenes obtenidas durante el experimento. Mediante este análisis no observamos la creación de bandas de cizalle globales sobre la superficie de la muestra, las que debieran mostrarse como discontinuidades espaciales en el campo de deformación.

4.3. Dependencia con la presión hidrostática

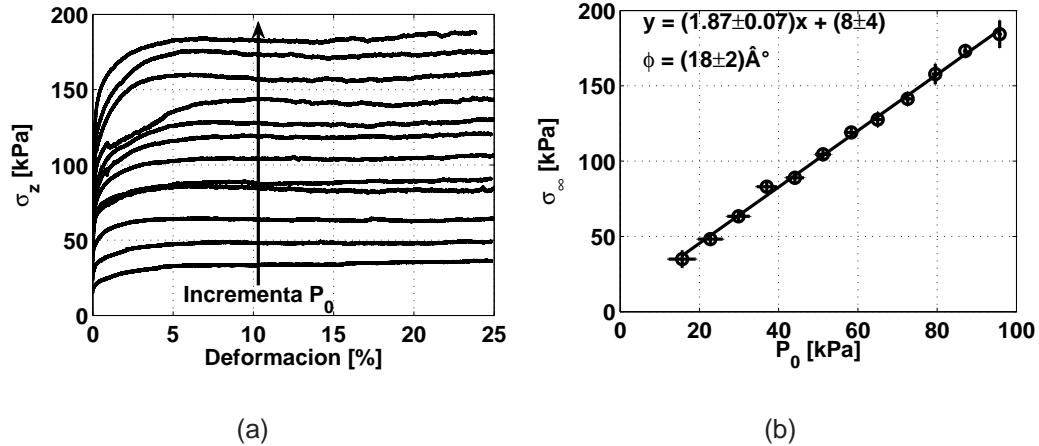


Figura 4.5: (a) Curvas de compresión tri-axial σ_z contra γ , para distintas presiones hidrostáticas aplicadas P_0 a la muestra. Notar que σ_z es la presión medida con la celda de carga más la presión hidrostática P_0 . (b) $\langle \sigma_z \rangle$ es el esfuerzo promedio sobre el plato para cada una de las curvas mostrada en (a).

Realizamos experimento de compresión tri-axial sobre una muestra constituida por partículas de vidrio de diámetro $d = 2\text{mm}$ contenidas en un volumen cilíndrico de altura $h = 6\text{cm}$ y diámetro $D = 4\text{cm}$ para distintas presiones hidrostáticas aplicadas. En la figura 4.5(a) observamos dichos experimentos. Notamos que las curvas saturan a gran deformación a un valor de esfuerzo que denotaremos por $P_0 - \sigma_\infty$, este valor crece linealmente con la presión hidrostática aplicada, figura 4.5(b). Podemos identificar los esfuerzos principales con $\sigma_1 = \sigma_z$ y $\sigma_2 = P_0$, por lo que aplicamos el criterio de Mohr-Coulomb, desarrollado en 4.1.2, para obtener el ángulo de fricción interna de nuestras partículas (ecuación 4.7), con lo que hemos obtenido $\phi = 18 \pm 2^\circ$.

Las curvas mostradas en la figura 4.5(a) son de carácter no-lineal. Sin embargo, a pequeñas deformaciones, presenta un pequeño comportamiento elástico que rápidamente se desvía de una recta debido a los reajustes

que presenta la estructura del material. A grandes deformaciones el esfuerzo satura debido a que todos los contactos están en movimiento y sólo la fricción efectiva entre las partículas generan la fuerza detectada. Estos resultados están de acuerdo con experimentos similares elaborados por otros autores [66–69, 77]. El hecho de que no observamos bandas de cizalle globales durante la compresión es compatible con la falta de una relajación del esfuerzo en la curva de esfuerzo-deformación, tal como la observada por Oda en [66], figura 4.2(a).

4.4. Dependencia con la velocidad de deformación

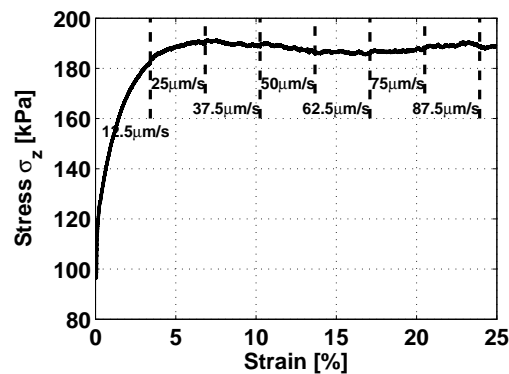


Figura 4.6: Ensayo tri-axial variando la velocidad de compresión, cada línea segmentada indica un aumento de la velocidad de compresión. Notar que no existen discontinuidades en el esfuerzo.

Algunos autores han encontrado que el proceso de compresión tri-axial es cuasi-estático [78–80], es decir, no depende de la velocidad de deformación. Para corroborar esta observación experimental, realizamos compresiones incrementando progresivamente la velocidad de compresión en forma de escalones durante el test. El resultado de esto es mostrado en la figura 4.6, en donde observamos que no existen efectos notables en la curva producto

del cambio de velocidad. Sin embargo, se han reportado experimentos y simulaciones en la literatura sobre la existencia de un régimen en donde existen fluctuaciones tipo stick-slip [63, 78, 81, 82] las que sí revelan una dependencia importante con la velocidad de compresión. Este caso será tratado más adelante en este capítulo.

4.5. Variación de la velocidad del sonido

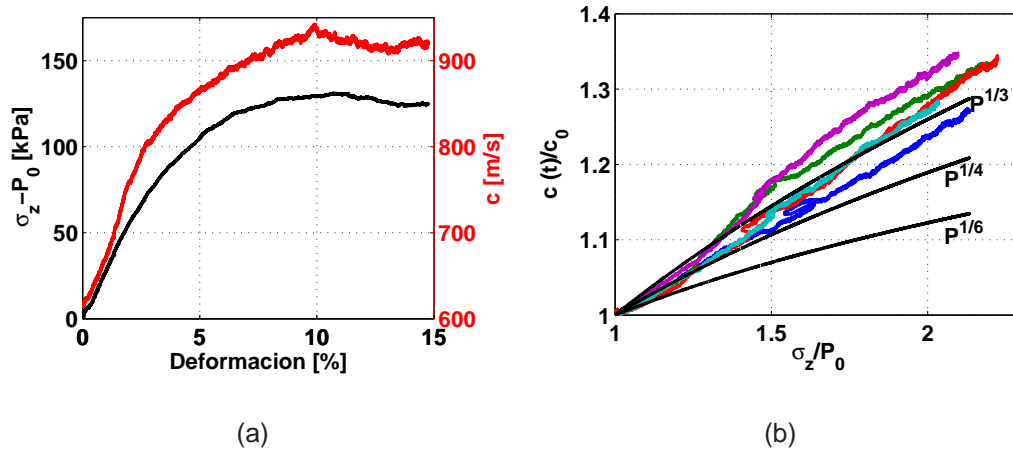


Figura 4.7: (a) Velocidad del sonido como función de la deformación. (b) Las curvas en colores muestran la velocidad del sonido como función del esfuerzo σ_z para experimentos independientes, repetido en condiciones similares. Ambas cantidades están normalizadas a sus valores iniciales, Las curvas negras muestran distintas leyes de potencia, para comparación.

Una variable importante para caracterizar la reología de nuestro apilamiento granular es la velocidad de propagación del sonido efectiva c , dado que esta se relaciona con el módulo elástico y de cizalle efectivos del medio. Un aumento o disminución de la velocidad del sonido corresponde con un aumento o disminución del módulo elástico.

Para obtener información acerca de la velocidad del sonido efectiva en el medio granular, realizamos experimentos de compresión a velocidad constante. Propagando, durante el test, ondas coherentes de frecuencia 40kHz con una duración de dos ciclos, mediante el transductor LFE, en el apéndice B mostramos el método de calibración para obtener las amplitudes de la onda en unidades de distancia. Medimos el tiempo de vuelo con ayuda de un transductor receptor ubicado al extremo opuesto del transductor LFE. Las compresiones son realizadas en un medio granular compuesto de partículas de 1mm de diámetro encerradas en un volumen cilíndrico con altura $h = 20\text{mm}$ y diámetro $D = 40\text{mm}$.

Obtenemos que la velocidad del sonido se modifica durante el transcurso del experimento partiendo en un valor cercano a 650m/s hasta un valor final (saturación) de aproximadamente 900m/s tal y como observamos en la figura 4.7(a). Si graficamos esta velocidad efectiva como función del esfuerzo en el eje de simetría del cilindro, σ_z , obtenemos la representación de la figura 4.7(b). En esta observamos cinco experimentos de compresión realizados en condiciones similares, es decir, igual volumen, igual velocidad de compresión, igual compactación inicial. Observamos que estas curvas crecen más rápido que la predicción realizada por la teoría de campo medio [9] ($P^{1/6}$), desarrollada en el capítulo 1. En promedio, la evolución que más se asemeja a nuestros resultados es $P^{1/3}$. Esta discrepancia podría ser explicada por variación del número de coordinación Z durante la compresión (Número de contactos promedio por partícula del granular), o variación de la compactación o debido a que la teoría de campo medio no considera por ejemplo pequeñas relajaciones de esfuerzo locales que podrían ir ocurriendo durante la compresión [14].

4.6. Variación de la compactación

Otra de las variables importantes de monitorear es la variación del volumen o la variación de la compactación del material granular, aumentos en el volumen total podrían reflejar la existencia de movimientos relativos entre las partículas constituyentes del medio. Para determinar la existencia de variaciones en la compactación del granular durante el test de compresión, realizamos mediciones del volumen de la muestra, utilizando una técnica llamada “Perfilometría por proyección de franjas”[83]. Esta consiste en proyectar sobre un plano de referencia (figura 4.8(a)) y sobre la muestra misma (figura 4.8(b)) un patrón de franjas sinusoidales.

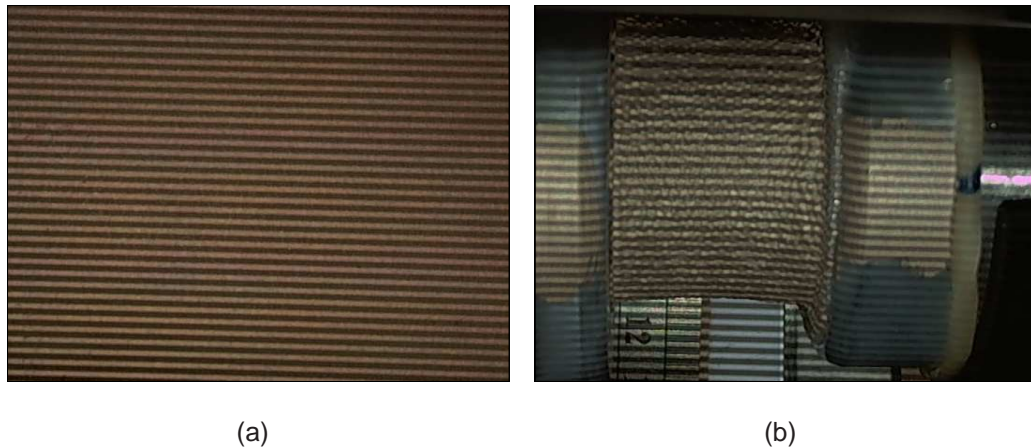


Figura 4.8: (a) Imagen del plano de referencia para aplicar el método de proyección de franjas, las franjas son sinusoidales con un periodo de 8 pixeles sobre le proyector. (b) Franjas proyectadas sobre el sistema, la superficie de látex fue pintada con pintura de plata para permitir la reflectividad de la proyección sobre las partículas.

Observamos en la figura 4.8 que al modificar la topología plana de la referencia las franjas cambian su fase sobre la imagen. Demodulando la fase espacial mediante un algoritmo llamado “FTP”, podemos obtener las dimensiones fuera del plano de la imagen y por consiguiente el volumen.

Una reconstrucción tridimensional de nuestra muestra, obtenida mediante este método, es mostrada en la figura 4.9. Esta técnica puede ser usada de manera absoluta o relativa, es decir, se pueden obtener las diferencias de fase respecto de una referencia plana o respecto de una imagen de referencia de la muestra mismo un instante antes. De esta forma, podemos obtener el volumen total o el cambio de volumen.

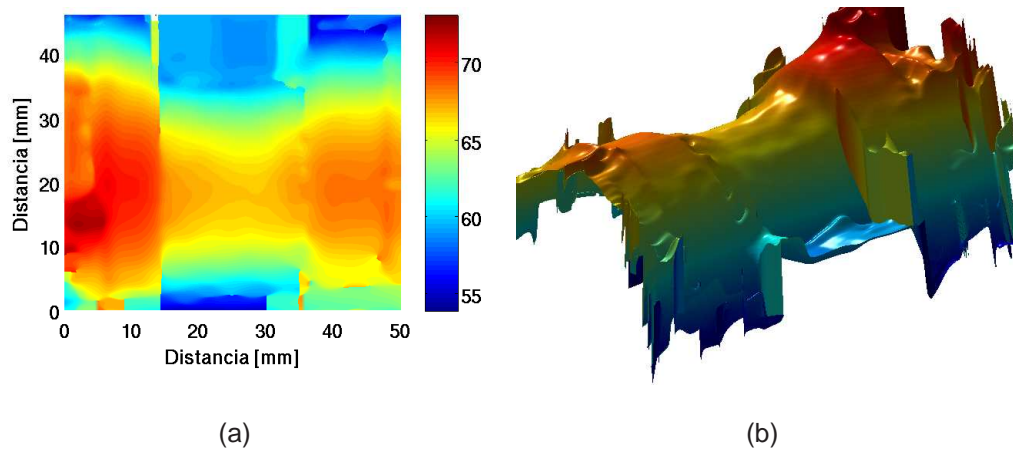


Figura 4.9: Reconstrucción tridimensional de la muestra mediante el método de perfilometría por proyección de franjas, la escala de colores en (a) está expresada en milímetros.

Mediante esta técnica podemos obtener el volumen de la muestra durante la compresión como una función del tiempo. Notamos en la figura 4.10 que los cambios porcentuales del volumen son máximo un 1% lo que es realmente pequeño comparado con la compresión total del sistema 15%. Esto nos lleva a concluir que durante el test de compresión la compactación no cambia relevantemente. Lo que ratifica la ausencia de bandas de cizalle globales. Sin embargo, es posible que existan reacomodos relativos locales entre las partículas. Resumiendo el comportamiento observado hasta ahora durante el proceso de compresión en nuestro material granular, podemos decir que:

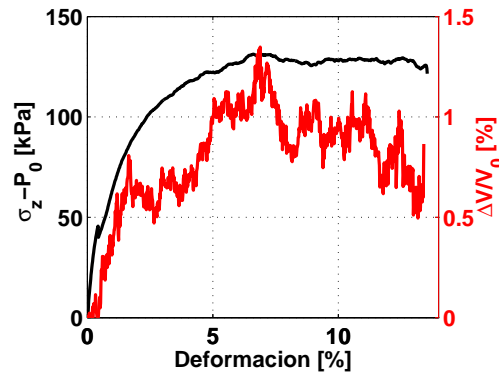


Figura 4.10: Variación porcentual del volumen obtenida mediante el método de perfilometría por proyección de franjas, notar que el volumen varía hasta un máximo de 1.5% del volumen inicial, mientras que la deformación total fue de un 15%.

- No observamos relajaciones importantes en la curva de esfuerzo deformación lo que está en acuerdo con la inexistencia de bandas de cizalle globales. Este punto es apoyado por las mediciones de flujo sobre el manto y por la falta de grandes dilataciones sobre la muestra.
- La velocidad del sonido es creciente con el esfuerzo aplicado y depende aproximadamente de $P^{1/3}$.
- El proceso de compresión triaxial es cuasi-estático por lo que no influye la velocidad de deformación.
- La compactación no cambia relevantemente durante la compactación.
- Al parecer solo accedemos a las región de la curva de esfuerzo-deformación llamada “Strain-Hardening”, según la figura 4.2

4.7. Modelo de bloque

Un modelo simple que nos ayudara a tener una visión simplificada de los mecanismos internos de disipación durante el test de compresión, consiste en un ensamble de deslizadores independientes sometidos a velocidad de compresión constantes. El desorden de los contactos es introducido suponiendo que la fuerza normal de cada uno de los deslizadores es una variable aleatoria distribuida según alguna densidad de probabilidad.

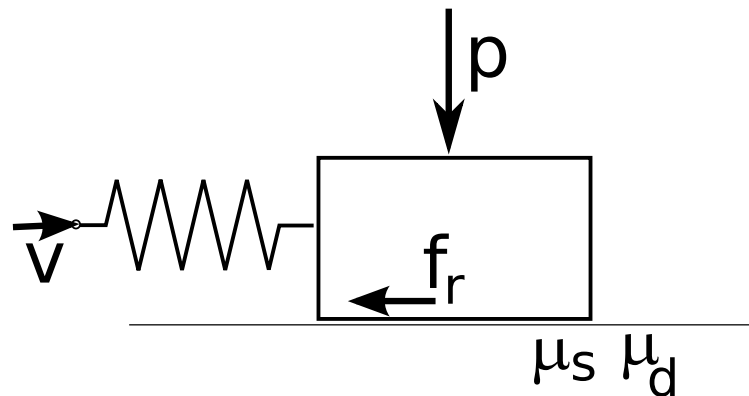


Figura 4.11: Diagrama del modelo de bloques.

Consideremos un bloque de masa M , como el que se muestra en la figura 4.11, sometido a una fuerza normal p sobre una superficie rugosa con coeficiente de fricción estático y cinético μ_s y μ_d , respectivamente. Conectamos un resorte lineal de constante de restitución k a un extremo de bloque dejando el extremo opuesto del resorte libre. Aplicamos una velocidad de deformación constante v sobre el extremo libre del resorte. Supondremos que las condiciones iniciales de nuestro bloque son $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$ y que en $t = 0$ el resorte no posee elongación.

En los primeros instantes de la compresión, el bloque no desliza y la fuerza de roce crece con el tiempo $f_r = kvt$. El bloque comienza a deslizar

cuando $f_r = \mu_s p$, esto ocurre a un tiempo $t = t_s$, dado por

$$t_s = \frac{\mu_s p}{kv}. \quad (4.15)$$

Una vez que el bloque comienza a deslizar, es decir, para el intervalo de tiempo $t_s < t < t_p$, donde t_p es el tiempo en donde el bloque deja de deslizar nuevamente, la posición del bloque sigue la ecuación de movimiento:

$$M\ddot{x} + kx = kv t - \mu_d p. \quad (4.16)$$

Esta ecuación tiene como solución

$$x(t) = A \sin[w_0(t - t_s) + \phi] + vt - \frac{\mu_d p}{k}, \quad (4.17)$$

con $w_0^2 = k/M$, $A^2 = (\Delta\mu p/k)^2 + (v/w_0)^2$, $\Delta\mu = \mu_s - \mu_d$ y $\tan(\phi) = \Delta\mu p w_0 / kv$ con $-\pi < \phi < -\pi/2$. En el régimen donde la frecuencia natural del sistema masa-resorte es mucho mayor que la escala de frecuencia impuesta por la velocidad, esto es $w_0 \gg v/d$, con d el tamaño típico del bloque, el bloque deja de deslizar cuando $\dot{x} = 0$, esto ocurre en un tiempo t_p dado por,

$$t_p = \frac{-2\phi}{w_0} + t_s. \quad (4.18)$$

En este instante la posición del resorte es,

$$x(t_p) = 2\frac{\Delta\mu p}{k} - 2\frac{v\phi}{w_0}. \quad (4.19)$$

Con esto, podemos calcular la fuerza aplicada al resorte:

$$\begin{aligned} f(0 < t < t_s) &= kv t \\ f(t_s < t < t_p) &= \mu_d p - Ak \sin[w_0(t - t_s) + \phi]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Una vez superado el tiempo t_p el bloque deja de deslizar y la fuerza vuelve a crecer linealmente hasta que la fuerza de roce nuevamente llega a su

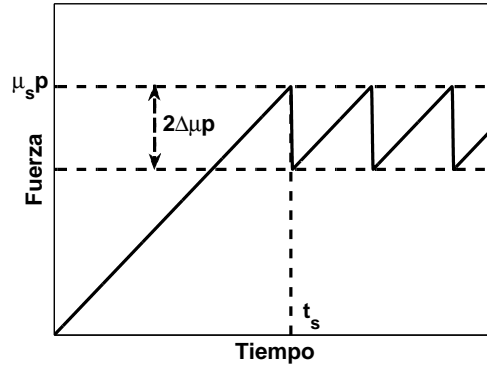


Figura 4.12: Fuerza soportada por el resorte de un deslizador, obtenida mediante la ecuación 4.20. El resorte se comprime linealmente hasta un tiempo t_s . Luego, el bloque desliza durante un tiempo $t_p - t_s$, para luego volver a comprimirse linealmente.

límite, con lo que este proceso de deslizamiento y estancamiento se repite indefinidamente. En la figura 4.12 observamos que la curva de fuerza crece linealmente hasta el tiempo t_s a un valor $\Delta\mu p$, luego decae rápidamente hasta el valor $(\mu_s - 2\mu_d)p$.

Supongamos ahora que poseemos una colección de estos deslizadores (bloques) independientes entre sí y que poseen una fuerza normal aplicada con una distribución de probabilidad dada por $\mathcal{P}(p) = 1/N\Theta(N-p)\Theta(p)$, donde $N/2$ es la fuerza normal promedio y $\Theta(x)$ es la función escalón, la cual es 1 si $x > 0$ o 0 si $x < 0$. Vamos a suponer que todos los deslizadores son idénticos, por lo que poseen constantes de restitución idénticas k , y están sometidos a la misma velocidad de deformación v . Por simplicidad, supondremos que los coeficientes de roce estático y cinético son idénticos $\mu_s = \mu_d = \mu$. Entonces, $\Delta\mu = 0$, por lo que la ecuación 4.20 se reduce a,

$$f(t) = kvt + (\mu p - kvt)\Theta\left(t - \frac{\mu p}{kv}\right). \quad (4.21)$$

La fuerza $F(t)$ puede ser obtenida a partir del promedio de $f(t, p)$ sobre todos

los deslizadores², esto es,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(p)f(t, p)dp. \quad (4.22)$$

Sustituyendo aquí la ecuación 4.21 obtenemos,

$$F(t) = \frac{1}{N} \left[kvt \int_0^N dp - kvt \int_0^N \Theta\left(t - \frac{\mu p}{kv}\right) dp + \mu \int_0^N p \Theta\left(t - \frac{\mu p}{kv}\right) dp \right]. \quad (4.23)$$

En la ecuación 4.23 la primera integral del lado derecho es trivial, la segunda y la tercera integral, son:

$$I_2(t) = \begin{cases} \frac{kvt}{\mu} & \text{si } t < \frac{\mu N}{kv}; \\ N & \text{si } t > \frac{\mu N}{kv} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$I_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{kvt}{\mu} \right)^2 & \text{si } t < \frac{\mu N}{kv}; \\ \frac{N^2}{2} & \text{si } t > \frac{\mu N}{kv}. \end{cases} \quad (4.25)$$

respectivamente. Sustituyendo esto en la ecuación 4.23 y simplificando obtenemos,

$$F(t) = \begin{cases} kvt - \frac{1}{2\mu N} (kvt)^2 & \text{si } t < \frac{\mu N}{kv}; \\ \frac{\mu N}{2} & \text{si } t > \frac{\mu N}{kv}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Identificando términos como $F/A = (\sigma_z - P_0)$, $G = h_0 k/A$ y $P_0 = N/2$, donde A es el área transversal del material, h_0 es el tamaño inicial del material, podemos escribir

$$(\sigma_z - P_0)/2 = \begin{cases} G\gamma - \frac{1}{4\mu P_0} (G\gamma)^2 & \text{si } \gamma < \frac{2\mu P_0}{G}; \\ \mu P_0 & \text{si } \gamma > \frac{2\mu P_0}{G}. \end{cases} \quad (4.27)$$

En la figura 4.13, comparamos los datos experimentales con el modelo de los bloques, mediante la ecuación 4.27, usando el módulo elástico efectivo medido desde la pendiente inicial de los datos experimentales y $\mu = 0,91$. El valor de μ fue obtenido a partir de la figura 4.5(b).

²Hemos agregado explícitamente la dependencia con la presión normal p dada su importancia en lo que resta del cálculo.

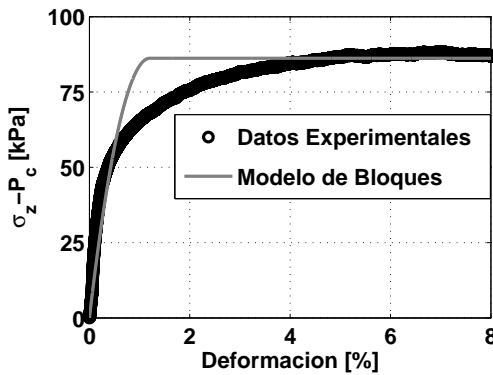


Figura 4.13: Comparación entre los datos experimentales (negro) y el modelo de bloques, representado por la ecuación 4.27, esta curva (gris) fue calculada usando el módulo G medido desde los datos experimentales $G = 14,3 MPa$, $\mu = 0,91$, el que fue obtenido desde curva de la figura 4.5(b), y $P_0 = 95 kPa$.

A pesar de que nuestro modelo experimental no calza perfectamente con los datos experimentales, éste sí nos ayuda a entender en cierta medida los fenómenos que están ocurriendo durante el proceso de compresión. Inicialmente a deformaciones pequeñas el modelo y los experimentos calzan relativamente bien. Esto es de esperar ya que uno de los parámetros usados en el modelo fue G que es la pendiente inicial de la curva esfuerzo deformación. Sin embargo, a deformaciones un poco mayores, el modelo predice esfuerzos menores que los datos experimentales, revelando la ausencia en nuestro modelo del incremento del módulo elástico con σ_z . Posteriormente los datos experimentales disminuyen su pendiente haciendo que nuestro modelo prediga un esfuerzo mayor que el medido. Esto probablemente debido a relajaciones colectivas dentro de nuestro granular lo que no puede ser reflejado por nuestro modelo dado que no consideramos interacciones entre los deslizadores.

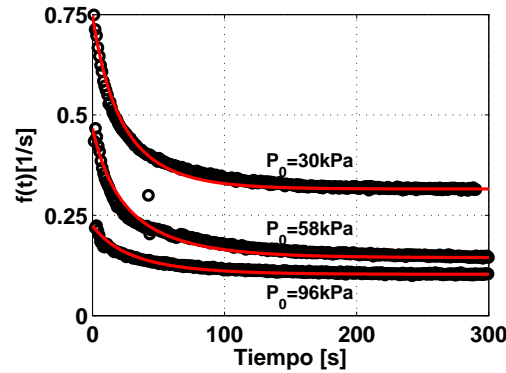


Figura 4.14: Función $f(t)$, para tres valores de la presión de confinamiento, esta función es medida gracias a la ecuación 4.28. Las líneas rojas indican los ajustes realizados mediante la ecuación 4.13.

4.8. Aplicación del Modelo de envejecimiento

Para caracterizar las curvas esfuerzo-deformación mostradas en la figura 4.5(a) acudiremos al modelo de envejecimiento propuesto en [38]. Este modelo fue desarrollado en la introducción de este capítulo y ha sido utilizado en el capítulo 3 para caracterizar las curvas de deformación durante un ensayo de relajación. Medimos la constante elástica G de cada una de las curvas de esfuerzo-deformación de la figura 4.5(a) usando sus pendientes iniciales. Sustituyendo esta constante en la ecuación 4.8, podemos calcular la función $f(t)$ a partir de los datos experimentales, mediante,

$$f(t) = \frac{G\dot{\gamma} - \dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (4.28)$$

En la figura 4.14 vemos la función $f(t)$ medida desde los datos experimentales. A partir de ésta obtenemos los valores extremos de f , $f(t = 0) = f_0$ y $f(t \rightarrow \infty) = f_\infty$, figura 4.15(a). Con esto, podemos ajustar nuestros datos experimentales con la ecuación 4.13, utilizando sólo un parámetro de ajuste, a . El parámetro r es calculado a partir de la relación $f_\infty = \sqrt{r/a\dot{\gamma}}$, figura

4.15(b). Observamos que la función $f(t)$ es monótonamente decreciente por lo que podemos decir, en el marco de este modelo, que el efecto dominante es el envejecimiento. El parámetro a y r , en promedio, crece y decrece, respectivamente, con la presión de confinamiento lo que significa que el sistema envejece más rápido a mayor presión de confinamiento.

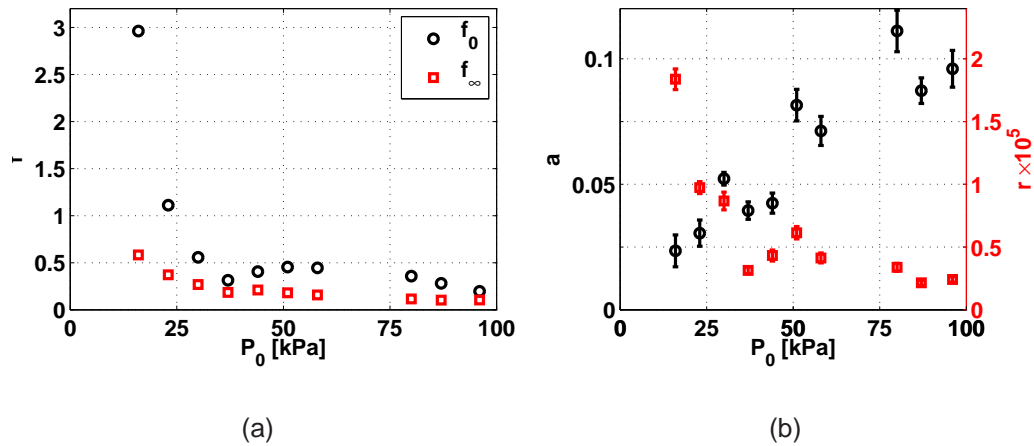


Figura 4.15: (b) Parámetros a y r , obtenidos a partir del ajuste de las curvas mostradas en la figura 4.5(a) con el modelo de envejecimiento a partir de la ecuación 4.14. (a) Fluidity de saturación f_∞ y inicial f_0 medidos mediante el promedio plateau y la pendiente inicial, respectivamente de las curvas de la figura 4.5(a).

4.9. Ciclos

Se ha establecido que los materiales granulares poseen un comportamiento denominado “Nonlinear Mesoscopic Elasticity” (NME) [23, 84]. Una de las principales características de este tipo de materiales es el fenómeno de memoria discreta que hemos evidenciado experimentalmente. Además hemos encontrado experimentalmente un comportamiento histerético en la velocidad del sonido cuando el sistema es sometido a ciclos de carga y descarga.

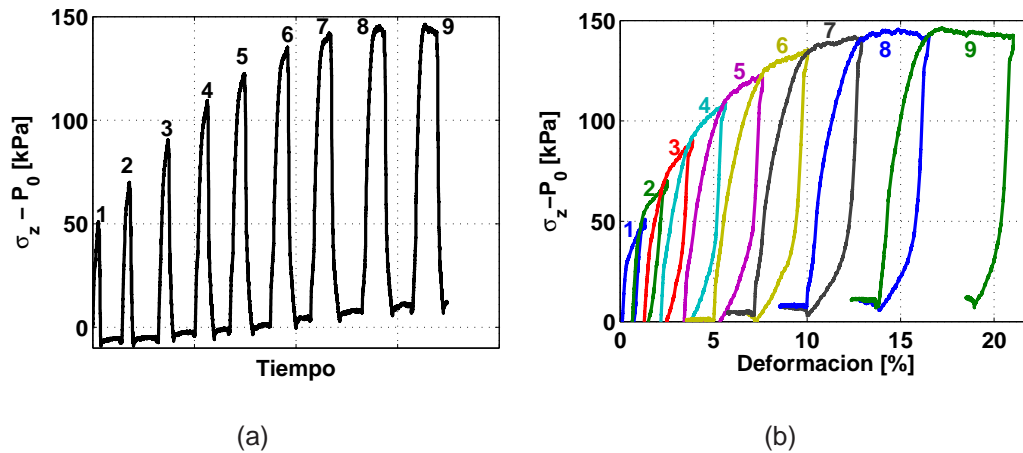


Figura 4.16: (a) Ciclos de esfuerzo a los que el material es sometido, los números identifican a cada uno de los ciclos. (b) Curva esfuerzo-deformación producida por cada uno de los ciclos.

Caracterizamos los efectos de memoria presentados por nuestro aglomerado granular realizando ciclos de esfuerzo como los mostrados en la figura 4.16(a). Estos consisten en comprimir el empaquetamiento a una velocidad de $12,5\mu s^{-1}$ hasta un cierto valor de esfuerzo para luego descargar la muestra a la misma rapidez hasta volver a un valor cercano a $\sigma_z - P_0 = 0$. Este procedimiento es repetido incrementando la amplitud del ciclo. Los números de la figura 4.16 identifican los ciclos. Observamos en la figura 4.16(b) que la curva recupera una tendencia “Global” igual a la mostrada en figuras como 4.1, este fenómeno es llamado en la literatura “Memoria Discreta” o “Memoria de punto final” [23, 84], es decir, el sistema reconoce hasta donde fue deformado en el ciclo anterior e intenta incrementar el esfuerzo rápidamente hasta llegar a esa deformación.

Resolvemos el modelo de envejecimiento, que en caso de compresión tri-axial, viene dado por la ecuación 4.14, para un ciclo en esfuerzo. Obtenemos que este modelo rescata el fenómeno de memoria discreta (figura 4.17) pero no presenta las relajaciones lentas del esfuerzo observadas al final de cada ciclo,

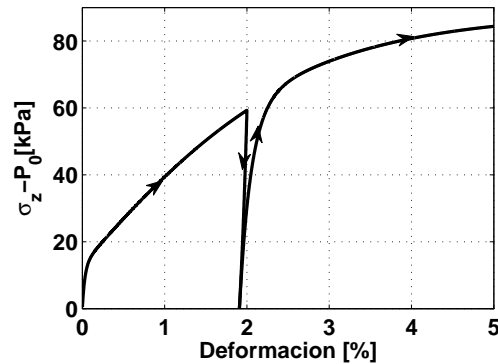


Figura 4.17: Respuesta del modelo de envejecimiento a un ciclo en esfuerzo, como los mostrados en la figura 4.16.

figura 4.16(b).

Realizamos un segundo experimento de ciclos, esta vez, ciclos en deformación. Para esto, sometemos la muestra a una compresión, a velocidad constante hasta una deformación de 4,7%, para luego iniciar ciclos en deformación incrementando su amplitud, figura 4.18(a). Los ciclos, identificados por los números del 1 al 5, son realizados en el sentido dado por las flechas rojas de la figura 4.18(b). Un nuevo fenómeno asociado a este tipo de ciclos es la aparición de histéresis en la velocidad del sonido como función del esfuerzo. En la figura 4.18(c), 4.18(d) y 4.18(e) vemos que la velocidad del sonido es levemente mayor en carga que en descarga. Esto puede ser explicado fenomenológicamente, considerando la dependencia del camino $\delta(s)$ expuesta en el capítulo 1, en donde hemos establecido que la respuesta mecánica de un aglomerado granular depende de la elección del camino de deformación normal y tangencial, $\delta(s)$. La relación entre fuerza normal y tangencial en cada contacto puede ser distinta en carga o en descarga para un mismo esfuerzo axial global, σ_z , debido a que los contactos se movilizan de manera distinta. Esto produce que los caminos de deformación normal y tangencial, producidos por

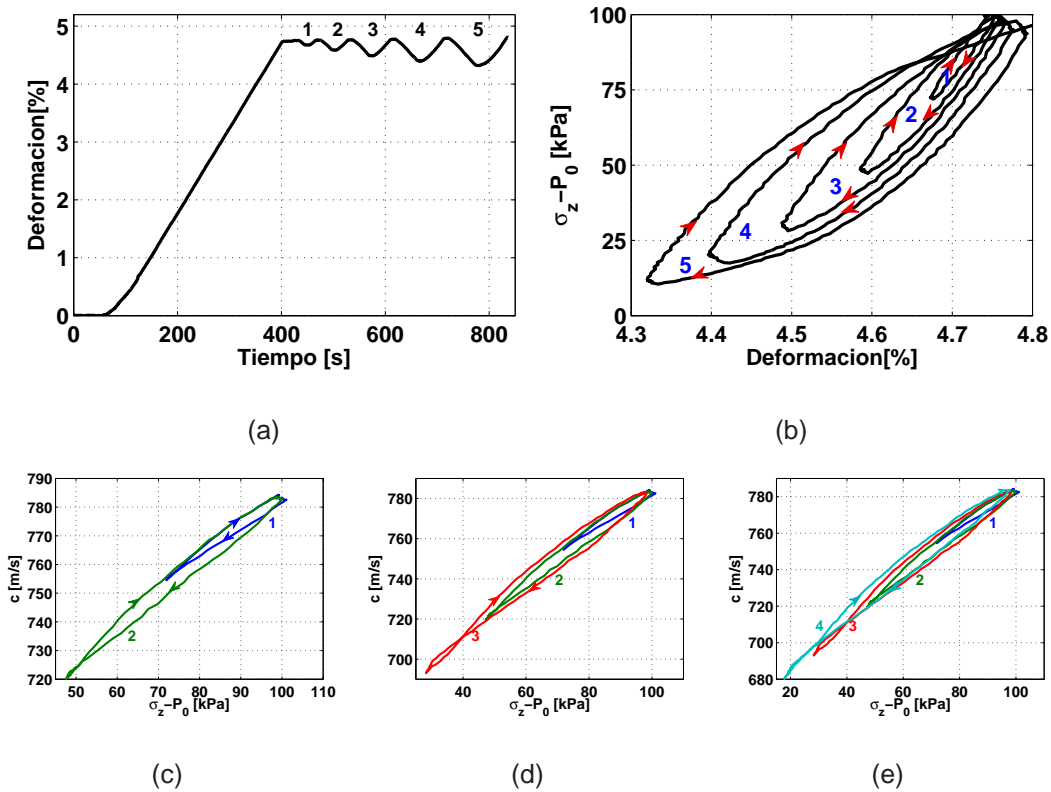


Figura 4.18: (a) Ciclos en deformación aplicados a la muestra. Los números identifican cada uno de los ciclos, los que incrementan en amplitud. (b) Respuesta del esfuerzo a la aplicación de los ciclos, la flechas rojas indican la dirección del ciclo. (c), (d) y (e) muestran la respuesta de la velocidad del sonido a cada uno de los ciclos como una función del esfuerzo.

la propagación de la onda, sean distinto en carga y en descarga estableciendo diferencias en la velocidad del sonido efectiva en el medio.

4.10. Aparición de stick-slip

Repitiendo nuestro experimento de compresión tri-axial en una muestra de partículas de $2mm$ de diámetro ubicadas en un contenedor cilíndrico de paredes elásticas de diámetro $4cm$ y altura $6cm$, encontramos que éste

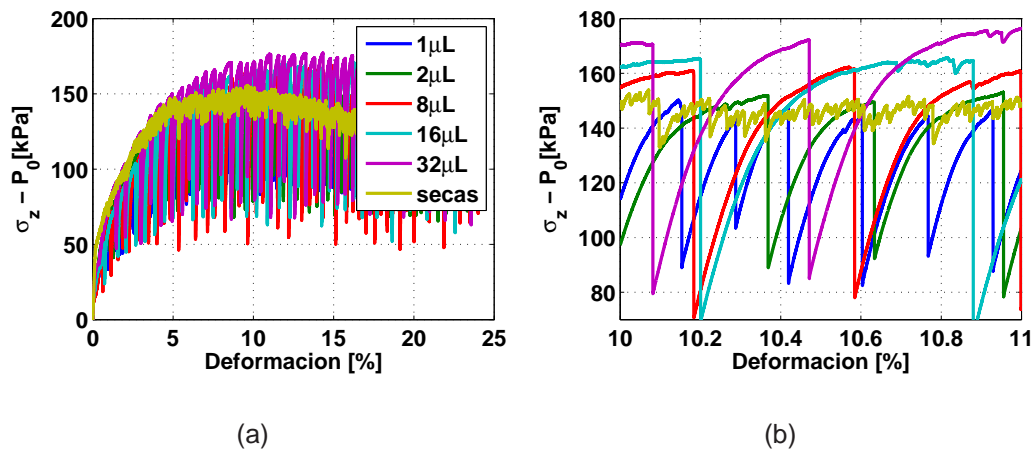


Figura 4.19: Curvas de Esfuerzo deformación para partículas de vidrio de $2mm$ de diámetro. Estas curvas presentan comportamiento tipo stick-slip. En (b) observamos un acercamiento. Notemos que las características de las oscilaciones en la curva dependen de la cantidad de aceite (Rhodosil) depositado en la muestra.

presenta fluctuaciones en el esfuerzo durante la compresión, figura 4.20(a). Estas creemos son debido a fenómenos de stick-slip, los que consisten en relajaciones rápidas de esfuerzo originadas por las pérdidas energéticas sufridas cuando la fuerza tangencial en uno o más contactos supera el límite de deslizamiento ($\mu_s N$), donde μ_s y N son, el coeficiente de roce estático entre las partículas y la fuerza normal al contacto, respectivamente. Para corroborar la idea de que las fluctuaciones de esfuerzo son debido a cambios estructurales locales, aplicamos el método de correlación por ventanas (CWI), mostrado en 3.1.3. En la figura 4.20(a) observamos que ocurren eventos de stick-slip como los mencionados anteriormente. En la figura 4.20(b) vemos el mapa de correlaciones por ventanas en donde se observa una pérdida de correlación aleatoria. Sin embargo, existe pérdidas de correlación generalizadas representadas por columnas completamente azules en el mapa y por pérdidas de correlación global (correlación cruzada entre dos señales completas)

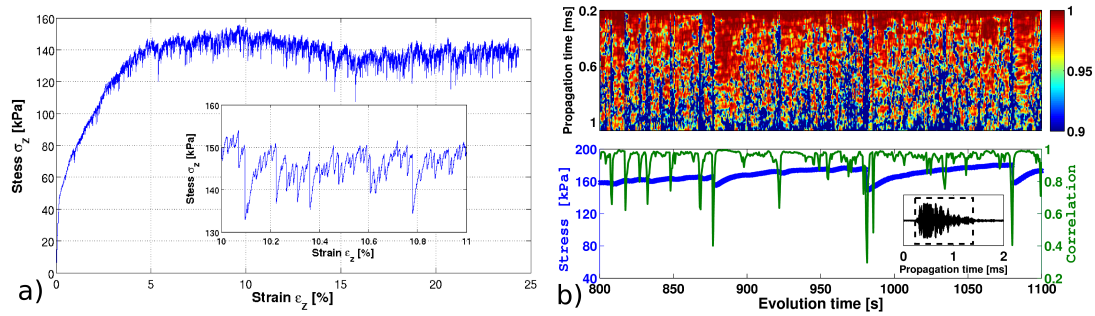


Figura 4.20: (a) Curva de esfuerzo deformación. (b)Superior, Mapa de correlación durante el test tri-axial con stick slip. rojo indica correlacion igual a 1. (b)inferior, Zoom de (a)(azul) y coeficiente de correlación global relativa (verde).

mostradas en la figura 4.20 (b inferior) en verde. Estas pérdidas de correlación coinciden perfectamente en tiempo con los eventos de stick-slip (azul).

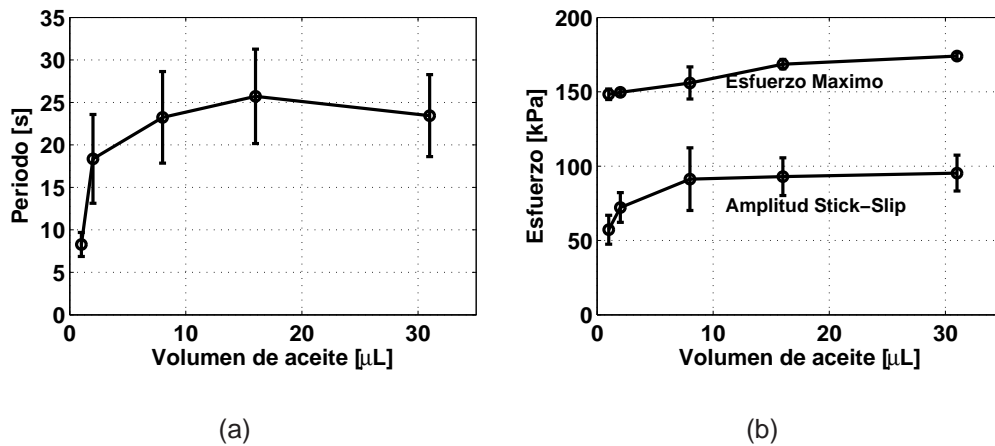


Figura 4.21: Stick-Slip como función del volumen de aceite depositado. (a) Muestra la duración media, en segundos, de la oscilación. Las barras representan la desviación estandar de esta. (b) Máximo de esfuerzo medio y amplitud media de la oscilación, igualmente las barras de error muestra la desviación estandar de dichas cantidades.

En los fenómenos de stick-slip, uno de los parámetros importantes, que controla la características de las fluctuaciones de esfuerzo, es el coeficiente

de roce [82]. Modificaremos la fricción interna del material granular añadiendo pequeñas cantidades de aceite de silicona Rhodosil 5000. Los efectos del lubricante son claramente observados en la figura 4.19. Vemos que la amplitud de las fluctuaciones y la frecuencia con las que ocurren cambia dependiendo del volumen de líquido depositado. En la figura 4.21(a) vemos la duración media o periodo de los eventos. Este periodo crece con el volumen de aceite, mostrando una saturación a grandes cantidades de líquido depositado. El máximo de oscilación y la amplitud en función del volumen de líquido también crecen con el volumen de líquido depositado (4.21(a)). En este régimen el comportamiento del material deja de ser cuasi-estático y las oscilaciones dependen de la velocidad de compresión [63, 78, 81, 85]. Existen algunos intentos interesantes para explicar este tipo de comportamiento. Por ejemplo, Rice y Ruina [86, 87] proponen que al incrementar instantáneamente la velocidad de deformación, la fuerza de cizalle posee un comportamiento transiente que incrementa su valor. Sin embargo, el valor estacionario de la fuerza de cizalle decae a un valor menor o igual que el inicial.

4.11. Efecto del ultrasonido de alta amplitud

Exploramos también el efecto que el ultrasonido de alta amplitud posee durante un test de compresión tri-axial. Para esto, cambiamos repentinamente la amplitud de excitación desde $10nm$ hasta $150nm$ o $340nm$ durante el test. En la figura 4.22(a) observamos el efecto que tiene, en el esfuerzo, el incremento de amplitud. Este efecto es muy pequeño, casi imperceptible para la curva con $\epsilon_{US} = 150nm$. Por el contrario, en la figura 4.22(b) observamos que el efecto en la velocidad del sonido es dramático cercano a un 15 % de disminución para el incremento de amplitud a $340nm$.

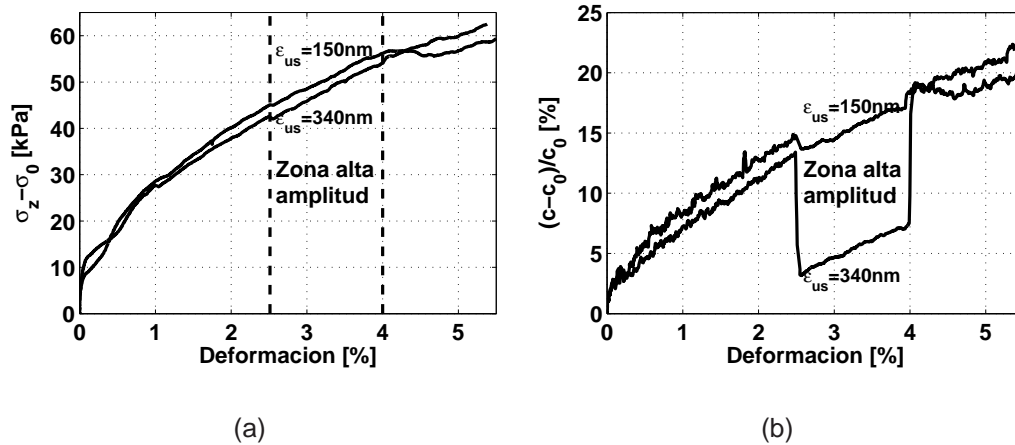


Figura 4.22: Curvas de esfuerzo y de velocidad del sonido como función de la deformación, al someter el sistema a un incremento de amplitud de la onda que es transmitida durante una compresión tri-axial.

4.12. Conclusión

En este capítulo, hemos caracterizado debidamente el proceso de compresión tri-axial en nuestro sistema, hemos obtenido una pequeña variación del volumen total de la muestra junto con un aumento de la velocidad del sonido que escala, en promedio, con $P^{1/3}$. Hemos introducido un modelo de bloques independientes. Éste, a pesar de su simpleza, permite comprender en parte lo que sucede en nuestro sistema. Aplicamos además el modelo de envejecimiento, obteniendo que el sistema envejece más lentamente a mayor presión de confinamiento P_c y que la amplitud de la función fluidity, $f_0 - f_\infty$, decrece como una función de P_c . Esto es consistente con que el sistema, a mayor presión, se encuentra más cerca del estado de jamming adjudicándose tiempos de respuesta cada vez mayores. Podemos decir que nuestro modelo de envejecimiento caracteriza, en parte, a los ciclos en esfuerzo, los que exhiben el efecto de memoria discreta. Hemos obtenido evidencia experimental de un comportamiento histerético de la velocidad efectiva de propagación del sonido,

cuando se realizan ciclos en deformación. Esta histéresis parece ser consistente con la elección de un camino de compresión o tracción distinto $\delta(s)$ en el marco de la micro-mecánica de los contactos. Además, hemos demostrado mediante correlación cruzada de la ondas de scattering que las fluctuaciones de fuerza corresponden a eventos de stick slip, los que se modifican cuando cambiamos las propiedades friccionales del medio. En cuanto a la desestabilización por ultrasonido, hemos encontrado que el aumento de la amplitud durante un test tri-axial no exhibe ninguna respuesta significativa en la curva de esfuerzo-deformación. Sin embargo, el comportamiento no lineal de la velocidad del sonido respecto a la amplitud de la onda propagada continúa presentándose al igual que en el capítulo anterior. Esto demuestra que la modificación de la velocidad del sonido efectiva en el medio no se relaciona con cambios estructurales sobre este.

Capítulo 5

Conclusiones

En el marco de la compactación en columnas de material granular bajo perturbaciones mecánicas, podemos concluir que nuestro modelo basado en una cadena de bloques con fricción, logra tomar en cuenta la aparición de dos ramas en el estado final del bloque, una meta-estable e irreversible y la otra estacionaria y reversible. En esta situación, la ramificación de la compactación está íntimamente ligada a la dinámica sumamente lenta a amplitudes de excitación pequeñas. Además, es un gran logro obtener este tipo de comportamiento mediante un modelo simplificado, utilizando solo interacción lineal elástica entre las partículas y fricción sobre las paredes del sistema.

Hemos encontrado que la interacción de los materiales granulares con las perturbaciones mecánicas, puede inducir al menos dos tipos de modificaciones reológicas, debilitamiento y plasticidad. Estos dos mecanismos físicos no están necesariamente acoplados. El debilitamiento es producido debido a la histéresis friccional originada en los micro-deslizamiento al interior de la estructura granular. En cambio la plasticidad es producto de reordenamientos a nivel de contactos o a nivel de deslizamientos relativos en las partículas, los que pueden ser activados por medio de criterio de Mohr-Coulomb

a nivel local producto del desorden en la presión interna de los contactos. Ambos fenómenos, debilitamiento y plasticidad, pueden ser modelados como procesos de envejecimiento de una variable general llamada fluidity. En este contexto, el ultrasonido produce un envejecimiento con una mayor eficiencia.

El debilitamiento observado durante el test de compresión triaxial cuando el material es sometido a un incremento de amplitud de la onda mecánica, reafirma que el debilitamiento es un fenómeno desacoplado de los cambios estructurales inducidos en el sistema. El test de compresión triaxial también puede ser visto como un envejecimiento efectivo, mayormente producido por el aumento de la disipación interna, representada por la viscosidad efectiva. Sin embargo la rigidez efectiva del medio crece con la presión aplicada.

Por otro lado, hemos evidenciado algunos fenómenos interesantes, como son el efecto de fluidificación acústica, la histéresis de la velocidad del sonido sobre los ciclos de deformación triaxial, y la aparición de eventos stick slip, los que cambian sus propiedades, tales como duración y amplitud, cuando modificamos la fricción interna añadiendo pequeñas cantidades de lubricante, mostrando un evidente origen friccional.

Además, hemos utilizado nuevas técnicas. En el análisis de la onda coda, hemos aplicado con éxito el método de correlación de ondas coda, mediante el cual hemos obtenido la deformación utilizando solo información de esta señales. Utilizando esta técnica y el modelo de difusión en conjunto, en un futuro, se puede enfocar el problema a la localización de los cambios estructurales [88].

Apéndice A

Solución de la Ecuación de Difusión con condiciones de borde mixtas

En este apéndice nos proponemos desarrollar la resolución de la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas con condiciones de borde mixtas, basándonos en el cálculo expuesto en [89], debido a que se interpreta como la solución de la aproximación de difusión de ondas de scattering propuesto en [20–22]. Calculamos la solución de la ecuación de difusión para la densidad de energía acústica U en un cilindro de altura L . Supondremos que la onda incidente es una delta de Dirak en el tiempo y en el eje axial (z) debido a que la excitación es impuesta sobre toda la cara de la muestra y comienza a difundirse después de haber viajado una distancia z_0 . Para esto nos proponemos resolver la ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(r, \theta, z, t) + \frac{1}{\tau_a}U(r, \theta, z, t) = D\nabla^2U(r, \theta, z, t), \quad (\text{A.1})$$

con condiciones de borde,

$$\frac{\partial U}{\partial z}(r, \theta, z = 0, t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$U(r, \theta, z = L, t) + C \frac{\partial U}{\partial z}(r, \theta, z = L, t) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Con la condición inicial,

$$U(r, \theta, z, t = 0) = U_0 \delta(z - z_0). \quad (\text{A.4})$$

Donde U_0 es la energía por unidad de longitud incidente en el material granular, τ_a es el tiempo de absorción inelástico, $D = v_e l^* / 3$ es el coeficiente de difusión, l^* es el camino libre medio, $C = \frac{2l^*}{3} \frac{1+R}{1-R}$ y R es el coeficiente de reflectividad que toma valores entre 0 y 1. $R = 1$ implica que toda la energía se refleja en $z = L$, lo que reduce la condición de la ecuación A.3 a $\frac{\partial U(r, \theta, z=L, t)}{\partial z} = 0$.

Dado que la onda es impuesta sobre toda el área de la muestra, entonces, la densidad de energía no depende de la coordenada r , y supondremos que no depende de θ , debido a la simetría cilíndrica. Por lo tanto, podemos escribir $U(r, \theta, z, t) = U_0 U(z, t)$, esta suposición reduce las ecuaciones A.1, A.2, A.3, A.4 a:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(z, t) + \frac{1}{\tau_a} U(z, t) = D \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(r, \theta, z, t) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z = 0, t) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$U(z = L, t) + C \frac{\partial U}{\partial z}(z = L, t) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$U(z, t = 0) = \delta(z - z_0) \quad (\text{A.8})$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por separación de variable usando $U(z, t) = T(t)Z(z)$, sustituyendo esto en A.5 obtenemos

$$T(t) = e^{-\frac{t}{\tau_a}} e^{-\frac{D\beta^2}{L^2}t} \quad (\text{A.9})$$

$$Z(z) = A \sin \frac{\beta}{L} z + B \cos \frac{\beta}{L} z \quad (\text{A.10})$$

Aplicando las condiciones de borde A.6 y A.7 obtenemos que $A = 0$ y β_n es el n -ésimo cero de la igualdad

$$\tan \beta_n = \frac{L}{C\beta_n} \quad (\text{A.11})$$

Si las funciones $\cos \beta_n z/L$ definen un espacio vectorial completo, entonces, la solución general a este problema es:

$$U(z, t) = e^{\frac{-t}{\tau_a}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-D\beta_n^2}{L^2}t} \cos \frac{\beta_n}{L}z \quad (\text{A.12})$$

El siguiente paso es demostrar la sentencia anterior, para esto supondremos que podemos escribir una función $f(z)$ como una combinación lineal de los autovectores dados por $X_n = \cos \beta_n z/L$ con los β_n definidos como los ceros de la relación A.11, esto es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\beta_n}{L}z \quad (\text{A.13})$$

El n -ésimo y m -ésimo autovector cumplen las relaciones

$$\frac{d^2 X_n}{dz^2} + \frac{\beta_n^2}{L^2} X_n = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d^2 X_m}{dz^2} + \frac{\beta_m^2}{L^2} X_m = 0 \quad (\text{A.15})$$

Multiplicando la primera por X_m y la segunda por X_n y luego restándolas, obtenemos

$$X_n \frac{d^2 X_m}{dz^2} - X_m \frac{d^2 X_n}{dz^2} + \frac{\beta_m^2}{L^2} X_n X_m - \frac{\beta_n^2}{L^2} X_n X_m = 0 \quad (\text{A.16})$$

integrando a ambos lados de la ecuación

$$\frac{1}{L^2}(\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^L X_n X_m dz = \int_0^L X_m \frac{d^2 X_n}{dz^2} dz - \int_0^L X_n \frac{d^2 X_m}{dz^2} dz \quad (\text{A.17})$$

Integrando por partes la primera y segunda integral del lado derecho,

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m \frac{d^2 X_n}{dz^2} dz &= X_m \frac{dX_n}{dz} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dX_m}{dz} \frac{dX_n}{dz} dz \\ \int_0^L X_n \frac{d^2 X_m}{dz^2} dz &= X_n \frac{dX_m}{dz} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dX_m}{dz} \frac{dX_n}{dz} dz \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Usando esto en la ecuación A.17 queda

$$\frac{1}{L^2} (\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^L X_n X_m dz = X_m \frac{dX_n}{dz} \Big|_0^L - X_n \frac{dX_m}{dz} \Big|_0^L \quad (\text{A.19})$$

A partir de la condición de borde A.7 y A.6, podemos escribir

$$C \frac{dX_r}{dz} \Big|_L + X_r \Big|_L = 0 \rightarrow \frac{dX_r}{dz} \Big|_L = -\frac{1}{C} X_r \Big|_L \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{dX_r}{dz} \Big|_0 = 0 \quad (\text{A.21})$$

Sustituyendo esto en la ecuación A.19 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} (\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^L X_n X_m dz &= -\frac{1}{C} X_m \Big|_L X_n \Big|_L + \frac{1}{C} X_n \Big|_L X_m \Big|_L \\ \frac{1}{L^2} (\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^L X_n X_m dz &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Esta última ecuación nos dice que, para $n \neq m$ el producto interno entre nuestras auto-funciones es nulo.

Por otro lado, multiplicando por X_n la ecuación A.14 y luego integrando a ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n^2}{L^2} \int_0^L X_n^2 dz &= - \int_0^L X_n \frac{d^2 X_n}{dz^2} dz \\ &= -X_n \frac{dX_n}{dz} \Big|_0^L + \int_0^L \left(\frac{dX_n}{dz} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Por definición,

$$\begin{aligned}\frac{\beta_n}{L} X_n &= \frac{\beta_n}{L} \cos \frac{\beta_n}{L} z \\ \frac{\beta_n^2}{L^2} X_n^2 &= \frac{\beta_n^2}{L^2} \cos^2 \frac{\beta_n}{L} z \\ \frac{dX_n}{dz} &= -\frac{\beta_n}{L} \sin \frac{\beta_n}{L} z \\ \left(\frac{dX_n}{dz} \right)^2 &= \frac{\beta_n^2}{L^2} \sin^2 \frac{\beta_n}{L} z \\ \frac{\beta_n^2}{L^2} X_n^2 + \left(\frac{dX_n}{dz} \right)^2 &= \frac{\beta_n^2}{L^2}\end{aligned}$$

Integrando, obtenemos

$$\frac{\beta_n^2}{L^2} \int_0^L X_n^2 dz + \int_0^L \left(\frac{dX_n}{dz} \right)^2 dz = \frac{\beta_n^2}{L} \quad (\text{A.24})$$

Sumando esta última con la ecuación A.23 obtenemos

$$2 \frac{\beta_n^2}{L^2} \int_0^L X_n^2 dz = \frac{\beta_n^2}{L} - X_n \frac{dX_n}{dz} \Big|_0^L \quad (\text{A.25})$$

reemplazando la ecuación A.20 y A.21, obtenemos

$$2 \frac{\beta_n^2}{L^2} \int_0^L X_n^2 dz = \frac{\beta_n^2}{L} + \frac{1}{C} X_n^2 \Big|_0^L \quad (\text{A.26})$$

Elevando al cuadrado la condición A.20 y sustituyendo la definición de x_n , encontramos

$$C^2 \left(\frac{dX_n}{dz} \right)^2 \Big|_L = X_n^2 \Big|_L = \frac{C^2 \beta_n^2}{L^2} \sin^2 \beta_n = \cos^2 \beta_n \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo esto en la ecuación A.26, obtenemos

$$\begin{aligned}2 \frac{\beta_n^2}{L^2} \int_0^L X_n^2 dz &= \frac{\beta_n^2}{L} + \frac{\cos^2 \beta_n}{C} \\ &= \frac{\beta_n^2}{L} + \frac{C \beta_n^2}{L^2} \sin^2 \beta_n \\ \int_0^L X_n^2 dz &= \frac{L}{2} + \frac{C}{2} \sin^2 \beta_n\end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

En resumen, si $n \neq m$, el producto interno de X_n con X_m es nulo. si $n = m$, el producto interno viene dado por la ecuación A.28. Por lo tanto, el conjunto de funciones X_n forman una base completa, lo que nos lleva a escribir nuestra solución genera como la ecuación A.12. Se debe cumplir entonces que

$$\delta(z - z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \beta_n z / L = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n \quad (\text{A.29})$$

Multiplicando por X_m e integrando

$$\int_0^L \delta(z - z_0) X_m dz = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L X_n X_m dz \quad (\text{A.30})$$

Si $n \neq m$, la integral de la derecha es nula. Entonces,

$$\int_0^L \delta(z - z_0) X_n dz = B_n \int_0^L X_n^2 dz. \quad (\text{A.31})$$

De aquí obtenemos que:

$$B_n = \frac{2 \cos \frac{\beta_n}{L} z_0}{C \sin^2 \beta_n + L} \quad (\text{A.32})$$

Luego

$$U(r, \theta, z, t) = 2U_0 e^{\frac{-t}{\tau_a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\beta_n}{L} z_0}{C \sin^2 \beta_n + L} e^{\frac{-D\beta_n^2}{L^2} t} \cos \frac{\beta_n}{L} z \quad (\text{A.33})$$

Calculamos ahora el flujo energético transmitido en la dirección axial $J(t) = -D \frac{\partial U}{\partial z}(r, \theta, z = L, t)$, esto es:

$$J(t) = \frac{2U_0 D}{C} e^{\frac{-t}{\tau_a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_n \cos \frac{\beta_n}{L} z_0}{C \sin^2 \beta_n + L} e^{\frac{-D\beta_n^2}{L^2} t} \quad (\text{A.34})$$

Apéndice B

Calibración transductor LFE

El transductor que usamos como LFE es de marca Panametrics de tipo NDT X1021, posee una frecuencia central de $50Khz$. Para obtener la amplitud de las deformaciones impuestas por el transductor LFE, calibramos este, con la ayuda de un Vibrómetro Doppler marca POLYTEC OFV 3001.

B.1. Montaje Experimental

Usaremos una pieza de acrílico transparente como soporte para nuestro transductor LFE, dispondremos la pieza de acrílico de forma que la superficie activa del transductor esté en contacto directo con una de las caras de la pieza de acrílico, como se muestra en la figura B.1. Esto nos permite acceder con el vibrómetro al movimiento real de centro del piezo-eléctrico del transductor mientras aplicamos una presión de compresión (σ_{ext}) constante a éste. Mediremos la amplitud máxima del movimiento del transductor cuando es excitado por un pulso de dos ciclos a una frecuencia de $40khz$ para varios valores de σ_{ext} .

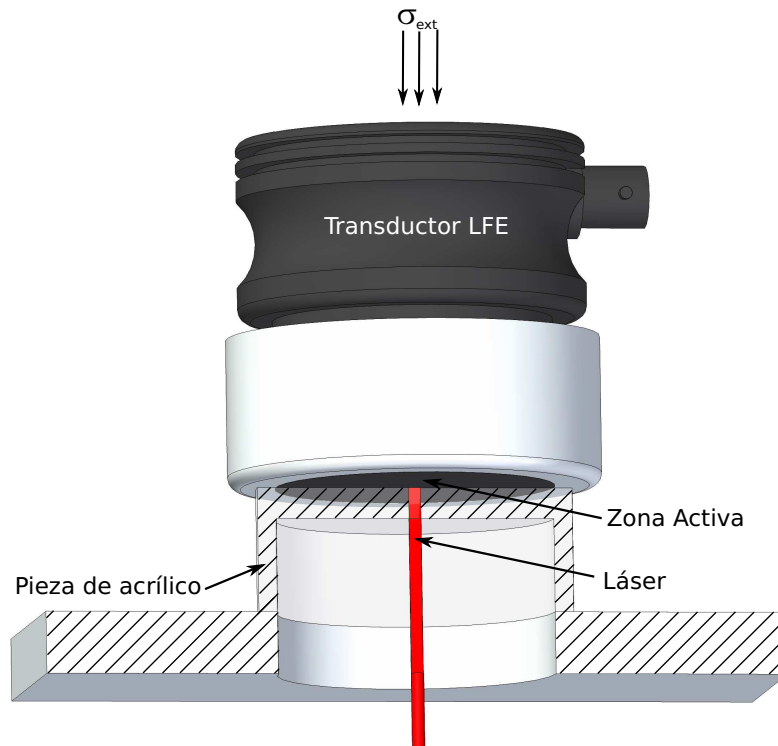


Figura B.1: Montaje experimental. Una carga σ_{ext} es aplicada entre el transductor y la pieza de plástico, el vibrómetro láser está apuntado verticalmente hacia el centro de la superficie activa del transductor.

B.2. Resultados

En la figura B.2(a), vemos como reacciona el transductor a la señal de dos ciclos a $40kHz$, impuesta por el generador de ondas, notemos que esta tiene una duración del orden de $0,6ms$, mucho más larga que la duración del pulso incidente. La convolución del pulso incidente con la respuesta en frecuencia del transductor, modifica la frecuencia central del movimiento del transductor, dejándola en $36kHz$ con un ancho de banda de un $0,7\%$ B.2(b).

Las curvas de calibración en la figura B.3 muestran que la relación entre amplitud en nanómetros y la amplitud impuesta por el generador, es lineal con un intercepto nulo y una pendiente que se incrementa con la presión aplicada,

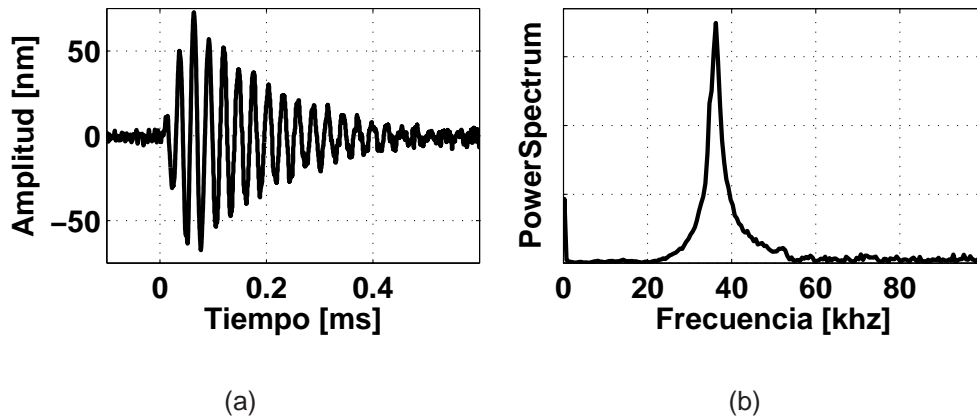


Figura B.2: (a) Señal típica obtenida desde el vibrómetro, representa el movimiento del centro de la superficie activa del transductor. (b) Power Spectrum de la señal mostrada en (a), la frecuencia central es de 36kHz y el ancho de banda a media altura es de $0,7\%$.

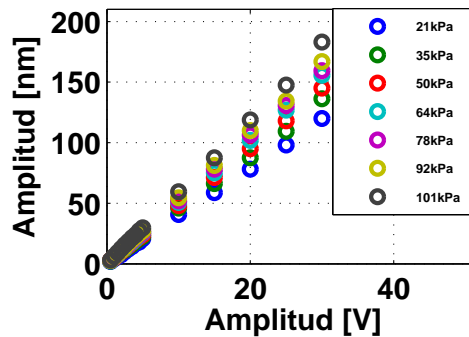


Figura B.3: Curvas de calibración para el transductor LFE para un pulso de 2 ciclos a 40 KHz para distintas presiones aplicadas.

dado que en nuestros experimentos del capítulo 3 y 4 trabajamos siempre sobre una presión de 100kPa establecida por el vacío al interior del sistema granular, usaremos la conversión dada por la curva negra de la figura B.3, la que corresponde a una presión aplicada de 101kPa . Esta curva ajusta con la siguiente recta:

$$y = (5,98 \pm 0,08) \frac{nm}{V} x \tag{B.1}$$

con un coeficiente de correlación lineal $r = 0,9994$, donde x es la amplitud de la onda impuesta por el generador en volts e y es la amplitud de la onda medida por el vibrómetro en nm .

Apéndice C

Suma de dos Variables Aleatorias Independientes Distribuidas Normalmente

Consideremos dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2 distribuidas normalmente con varianza σ_1 y σ_2 y media μ_1 y μ_2 , respectivamente. Si sus respectivas distribuciones de probabilidad son $\mathcal{P}_1(X_1)$ y $\mathcal{P}_2(X_2)$, entonces, la probabilidad de que la variable aleatoria $X = X_1 + X_2$ tome un valor entre X y $X + dX$ viene dada por:

$$\mathcal{P}(X)dX = \mathcal{P}_1(X_1)\mathcal{P}_2(X_2)dX_1dX_2 \quad (\text{C.1})$$

La media de la variable aleatoria X es calculada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} X\mathcal{P}(X)dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_2\mathcal{P}_2(X_2) \int_{-\infty}^{\infty} dX_1X_1\mathcal{P}_1(X_1) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dX_1\mathcal{P}_1(X_1) \int_{-\infty}^{\infty} dX_2X_2\mathcal{P}_2(X_2) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

En la ecuación C.2, la primera integral de cada término es unitaria porque representa la probabilidad total, y la segunda integral de cada término, representa μ_1 y μ_2 , respectivamente, por lo que:

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 \mathcal{P}_2(X_2) + \mu_2 \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \mathcal{P}_1(X_1) \\ \mu &= \mu_1 + \mu_2\end{aligned}\quad (\text{C.3})$$

Ahora queremos calcular la varianza de la variable X , Por definición $\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \mu^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sigma^2 - \mu^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \mathcal{P}(X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 (X_1 + X_2)^2 \mathcal{P}_1(X_1) \mathcal{P}_2(X_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 (X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2) \mathcal{P}_1(X_1) \mathcal{P}_2(X_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 \mathcal{P}_2(X_2) \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 X_1^2 \mathcal{P}_1(X_1) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \mathcal{P}_1(X_1) \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 X_2^2 \mathcal{P}_2(X_2) \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 X_2 \mathcal{P}_2(X_2) \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 X_1 \mathcal{P}_1(X_1).\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

Las segundas integrales de los dos primeros términos de la ecuación C.4, son $\sigma_1^2 - \mu_1^2$ y $\sigma_2^2 - \mu_2^2$, respectivamente. El tercer término de esta expresión es $2\mu_1\mu_2$. Entonces obtenemos,

$$\sigma^2 - \mu^2 = (\sigma_1^2 - \mu_1^2) \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 \mathcal{P}_2(X_2) + (\sigma_2^2 - \mu_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \mathcal{P}_1(X_1) + 2\mu_1\mu_2. \quad (\text{C.5})$$

Las integrales en la ecuación C.5 corresponden a la probabilidad total, por lo que esta ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 - \mu^2 &= (\sigma_1^2 - \mu_1^2) + (\sigma_2^2 - \mu_2^2) + 2\mu_1\mu_2 \\
 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2) \\
 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\mu_1 + \mu_2)^2 \\
 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \mu^2 \\
 \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que la variable $X = X_1 + X_2$ se distribuye normalmente con media $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y varianza $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Apéndice D

Publicaciones

Bibliografía

- [1] R. Pohlman and E. Lehfelddt. *Influence of ultrasonic vibration on metallic friction*. Ultrasonics, **4**, 178–185, 1966.
- [2] O. Zik, J. Stavans, and Y. Rabin. *Mobility of a sphere in vibrated granular media*. Europhys. Lett., **17**, 315–319, 1992.
- [3] G. A. Caballero-Robledo and E. Clement. *Rheology of a sonofluidized granular packing*. Eur. Phys. J. E, **30**, 395–401, 2009.
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshits. *Theory of elasticity*. Teoreticheskaia fizika. Pergamon Press, 1959.
- [5] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [6] R. D. Mindlin. J. Appl. Mech., **71**, 259, 1949.
- [7] K. L. Johnson. *Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces*. Proc. R. Soc. A., **230**, 531–548, 1955.
- [8] A. N. Norris and D. L. Johnson. *Nonlinear elasticity of granular media*. J. Appl. Mech., **64**, 39–49, 1997.
- [9] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. Schwartz. *Granular packings: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics*. Phys. Rev. E, **70**, 061302, 2004.

- [10] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky. *Ultrasound propagation in externally stressed granular media*. Phys. Rev. Lett., **82**, 1863–1866, 1999.
- [11] S. Griffiths, A. Rescaglio, and F. Melo. *Ultrasound propagation in wet and airless non-consolidated granular materials*. Ultrasonics, **50**, 139–144, 2010.
- [12] B. Gilles and C. Coste. *Low-frequency behavior of beads constrained on a lattice*. Phys. Rev. Lett., **90**, 174302, 2003.
- [13] I. Agnolin, J.-N. Roux, P. Massaad, X. Jia, and P. Mills. *Sound wave velocities in dry and lubricated granular packings: numerical simulations and experiments*. Technical Report arXiv:0901.2995, 2009. Comments: Powders & Grains (2005), Stuttgart : Allemagne (2005).
- [14] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. M. Schwartz. *Why effective medium theory fails in granular materials*. Phys. Rev. Lett., **83**, 5070–5073, 1999.
- [15] X. Jia. *Ultrasound propagation in disordered granular media*. In *MRS Proceedings*, volume 627, 2000.
- [16] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnede. *Self-demodulation of elastic waves in a one-dimensional granular chain*. Phys. Rev. E, **70**, 056603, 2004.
- [17] V. Tournat and V. E. Gusev. *Nonlinear effects for coda-type elastic waves in stressed granular media*. Phys. Rev. E, **80**, 2009.
- [18] V. Tournat and V. E. Gusev. *Acoustics of unconsolidated “model” granular media: An overview of recent results and several open problems*. Acta Acust. United Acust., **96**, 208–224, 2010.

- [19] X. Jia, J. Laurent, Y. Khidas, and V. Langlois. *Sound scattering in dense granular media*. Chin. Sci. Bull., **54**, 4327–4336, 2009.
- [20] J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz. *Internal-reflection of diffusive light in random-media*. Phys. Rev. A, **44**, 3948–3959, 1991.
- [21] R. L. Weaver and W. Sachse. *Diffusion of ultrasound in a glass bead slurry*. J. Acoust. Soc. Am., **97**, 2094–2102, 1995.
- [22] J. H. Page, H. P. Schriemer, A. E. Bailey, and D. A. Weitz. *Experimental test of the diffusion-approximation for multiply scattered sound*. Phys. Rev. E, **52**, 3106–3114, 1995.
- [23] R. A. Guyer and P. A. Johnson. *Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence for a new class of materials*. Phys. Today, **52**, 30–36, 1999.
- [24] P. A. Johnson and X. Jia. *Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering*. Nature, **437**, 871–874, 2005.
- [25] T. Divoux, H. Gayvallet, and J.-C. Géminard. *Creep motion of a granular pile induced by thermal cycling*. Phys. Rev. Lett., **101**, 148303, 2008.
- [26] J. B. Knight, C. G. Fandrich, C. N. Lau, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. *Density relaxation in a vibrated granular material*. Phys. Rev. E, **51**, 3957–3963, 1995.
- [27] P. Ribière, P. Richard, P. Philippe, D. Bideau, and R. Delannay. *On the existence of stationary states during granular compaction*. Eur. Phys. J. E, **22**, 249–253, 2007.
- [28] E. Ben-Naim, J. B. Knight, E. R. Nowak, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. *Slow relaxation in granular compaction*. Physica D, **123**, 380–385, 1998.

- [29] E. R. Nowak, J. B. Knight, M. L. Povinelli, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. *Reversibility and irreversibility in the packing of vibrated granular material*. Powder Technol., **94**, 79–83, 1997.
- [30] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. *Density fluctuations in vibrated granular materials*. Phys. Rev. E, **57**, 1971–1982, 1998.
- [31] H. A. Janssen. *Experiments on corn pressure in silo cells - translation and comment of janssen's paper from 1895*. Granular Matter, **8**, 59–65, 1895.
- [32] S. Murayama, K. Michihiro, and T. Sakagami. *Creep characteristics of sands*. Soils and Foundations, **24**, 1–15, 1984.
- [33] G. R. McDowell and A. Humphreys. *Yielding of granular materials*. Granular Matter, **4**, 1–8, 2002.
- [34] G. R. McDowell and J. J. Khan. *Creep of granular materials*. Granular Matter, **5**, 115–120, 2003.
- [35] G. R. McDowell. *Micromechanics of creep of granular materials*. Geotechnique, **53**, 915–916, 2003.
- [36] G. R. McDowell. *Micromechanics of creep of granular materials*. Geotechnique, **54**, 427–428, 2004.
- [37] V. B. Nguyen, T. Darnige, A. Bruand, and E. Clement. *Creep and fluidity of a real granular packing near jamming*. Phys. Rev. Lett., **107**, 138303, 2011.
- [38] C. Derec, A. Ajdari, and F. Lequeux. *Rheology and aging: A simple approach*. Eur. Phys. J. E, **4**, 355–361, 2001.

- [39] R. Snieder. *The theory of coda wave interferometry*. Pure Appl. Geophys., **163**, 455–473, 2006.
- [40] H. J. Melosh. J. Geophys. Res., **84**, 7513–7520, 1979.
- [41] J. P. Poirier. *Creep of crystals: High-temperature deformation processes in metals, ceramics, and minerals*. Cambridge Earth Science Series. Cambridge University Press, 1985.
- [42] P. Oswald. *Rheophysics: the deformation and flow of matter*. Cambridge, 2009.
- [43] J. C. Géminard, W. Losert, and J. P. Gollub. *Frictional mechanics of wet granular material*. Phys. Rev. E, **59**, 5881–5890, 1999.
- [44] J. C. Géminard and H. Gayvallet. *Thermal conductivity of a partially wet granular material*. Phys. Rev. E, **64**, 041301, 2001.
- [45] A. Y. Malkin. *Rheology fundamentals*. Fundamental Topics in Rheology. ChemTec Publishing, 1994.
- [46] A. P. Deshpande, J. M. Krishnan, and K. P. B. Sunil, editors. *Rheology of complex fluids*. Springer, 2009.
- [47] R. R. Hartley, P. Behringer, S. Henkes, D. Bi, and B. Chakraborty. *Logarithmic strengthening of granular materials with shear rate*. In *Powders and Grains 2009*, pages 553–556, 2009.
- [48] X. Jia. *Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media*. Phys. Rev. Lett., **93**, 154303, 2004.
- [49] D. Sornette and A. Sornette. *Acoustic fluidization for earthquakes?* Bull. Seismol. Soc. Amer., **90**, 781–785, 2000.

- [50] H. J. Melosh and P. Goetz. *The rheology of acoustically fluidized debris: Experiments and application to crater slumping*. Lunar and Planetary Science, **XIII**, 511–512, 1982.
- [51] G. S. Collins and H. J. Melosh. *Acoustic fluidization and the extraordinary mobility of sturzstroms*. J. Geophys. Res.-Solid Earth, **108**, 2473, 2003.
- [52] H. J. Melosh. *Dynamical weakening of faults by acoustic fluidization*. Nature, **379**, 601–606, 1996.
- [53] R. Snieder. *Coda wave interferometry and the equilibration of energy in elastic media*. Phys. Rev. E, **66**, 046615, 2002.
- [54] R. Snieder and J. Page. *Multiple scattering in evolving media*. Phys. Today, **60**, 49–55, 2007.
- [55] D. Maserà, P. Bocca, and A. Grazzini. *Coda wave interferometry method applied in structural monitoring to assess damage evolution in masonry and concrete structures*. Journal of Physics: Conference Series, **305**, 012108, 2011.
- [56] A. Gret, R. Snieder, and J. Scales. *Time-lapse monitoring of rock properties with coda wave interferometry*. J. Geophys. Res.-Solid Earth, **111**, B03305, 2006.
- [57] R. Snieder, A. Gret, H. Douma, and J. Scales. *Coda wave interferometry for estimating nonlinear behavior in seismic velocity*. Science, **295**, 2253–2255, 2002.
- [58] R. Snieder and M. Hagerty. *Monitoring change in volcanic interiors using coda wave interferometry: Application to arenal volcano, costa rica*. Geophys. Res. Lett., **31**, 2004.

- [59] R. Snieder and M. Vrijlandt. *Constraining relative source locations with coda wave interferometry: Theory and application to earthquake doublets in the hayward fault, california*. J. Geophys. Res., **110**, –04301, 2005.
- [60] X. Jia, T. Brunet, and J. Laurent. *Elastic weakening of a dense granular pack by acoustic fluidization: Slipping, compaction, and aging*. Phys. Rev. E, **84**, 020301, 2011.
- [61] L. Bonneau, B. Andreotti, and E. Clement. *Surface elastic waves in granular media under gravity and their relation to booming avalanches*. Phys. Rev. E., **75**, 016602, 2007.
- [62] Y. Khidas and X. Jia. *Probing the shear-band formation in granular media with sound waves*. Phys. Rev. E, **85**, 051302, 2012.
- [63] F. Adjemian and P. Evesque. *Experimental study of stick-slip behaviour*. Int. J. Numer. Anal. Methods. Geomech., **28**, 501–530, 2004.
- [64] H. A. Rondón Quintana, T. Wichtmann, T. Triantafyllidis, and A. Lizcano Peláez. *Comportamiento de un material granular no tratado en ensayos triaxiales cíclicos con presión de confinamiento constante y variable*. Ingeniare. Revista chilena de ingeniería, **16**, 461–472, 2008.
- [65] A. Ezaoui, T. Lecompte, H. Di Benedetto, and E. Garcia. *Effects of various loading stress paths on the stress-strain properties and on crushability of an industrial soft granular material*. Granular Matter, **13**, 283–301, 2011.
- [66] M. Oda. *Deformation mechanism of sand in triaxial compression test*. Soils and Foundations, **12**, 45–63, 1972-12-15.
- [67] S. Fukushima and F. Tatsuoka. *Strength and deformation characteristics*

- of saturated sand at extremely low pressures.* Soils and Foundations, **24**, 30–48, 1984-12-15.
- [68] F. Tatsuoka, M. Sakamoto, T. Kawamura, and S. Fukushima. *Strength and deformation characteristics of sand in plane strain compression at extremely low pressures.* Soils and Foundations, **26**, 65–84, 1986-03-15.
- [69] M. A. Sayeed, K. Suzuki, and M. M. Rahman. *Strength and deformation characteristics of granular materials under extremely low to high confining pressures in triaxial compression.* IJCEE-IJENS, **11**, 2011.
- [70] R. M. Nedderman. *Statics and kinematics of granular materials.* Cambridge University Press, 2005.
- [71] S. Timoshenko. *Theory of elasticity.* Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1951.
- [72] M. Sjödahl. *Accuracy in electronic speckle photography.* Appl. Opt., **36**, 2875–2885, 1997.
- [73] H. Bruck, S. McNeill, M. Sutton, and W. Peters. *Digital image correlation using newton-raphson method of partial differential correction.* Experimental Mechanics, **29**, 261–267, 1989.
- [74] P. Bing, X. Hui-min, X. Bo-qin, and D. Fu-long. *Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation.* Measurement Science and Technology, **17**, 1615, 2006.
- [75] E. Hamm, F. Tapia, and F. Melo. *Dynamics of shear bands in a dense granular material forced by a slowly moving rigid body.* Phys. Rev. E, **84**, 041304, 2011.

- [76] T. G. Murthy, E. Gnanamanickam, and S. Chandrasekar. *Deformation field in indentation of a granular ensemble*. Phys. Rev. E, **85**, 061306, 2012.
- [77] A. Mehta. *Granular physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [78] F. Adjémian and P. Evesque. *Different regimes of stick-slip in granular matter: From quasi-periodicity to randomness*. In A. Tzanis, editor, *EGS General Assembly Conference Abstracts*, volume 27 of *EGS General Assembly Conference Abstracts*, page 6691, 2002.
- [79] F. E. Richart, J. R. Hall, and R. D. Woods. *Vibrations of soils and foundations*. Civil Engineering. Prentice-Hall, 1970.
- [80] J. H. Atkinson and P. L. Bransby. *The mechanics of soils: an introduction to critical state soil mechanics*. University series in civil engineering. McGraw-Hill Book Co., 1978.
- [81] K. A. Alshibli and L. E. Roussel. *Experimental investigation of slip-stick behaviour in granular materials*. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., **30**, 1391–1407, 2006.
- [82] E. Aharonov and D. Sparks. *Stick-slip motion in simulated granular layers*. J. Geophys. Res.-Solid Earth, **109**, 2004.
- [83] S. S. Gorthi and P. Rastogi. *Fringe projection techniques: Whither we are?* Opt. Lasers Eng., **48**, 133–140, 2010.
- [84] R. A. Guyer and P. A. Johnson. *Nonlinear mesoscopic elasticity: The complex behaviour of rocks, soil, concrete*. John Wiley & Sons, 2009.
- [85] P. Evesque and F. Adjémian. *Stress fluctuations and macroscopic stick-slip in granular materials*. Eur. Phys. J. E, **9**, 253–259, 2002.

- [86] A. Ruina. *Slip instability and state variable friction laws*. J. Geophys. Res., **88**.
- [87] J. R. Rice and A. L. Ruina. *Stability of steady frictional slipping*. J. Appl. Mech, pages 343–349, 1983.
- [88] C. Pacheco and R. Snieder. *Time-lapse travel time change of multiply scattered acoustic waves*. J. Acoust. Soc. Am., **118**, 1300–1310, 2005.
- [89] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press, 1962.