

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE



FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Supersimetría escondida

Tesis para optar el grado de
Doctor en Ciencias con Mención en Física

Francisco Javier Correa Santander

Profesor guía: Dr. Mikhail Plyushchay

SANTIAGO – CHILE

Julio 2009

Resumen

En la presente tesis se revela la presencia de una supersimetría escondida en diversos modelos bien conocidos en mecánica cuántica no relativista sin grados de libertad de tipo fermiónico. Se estudian las características de esta supersimetría escondida y el significado del punto de vista físico de las integrales de movimiento asociadas a la estructura supersimétrica. Luego se introducen grados de libertad de tipo spín y se demuestra que la supersimetría se extiende y generaliza dando lugar a un nuevo tipo de supersimetría denominada tri-supersimetría, la cual refleja y explica coherentemente las propiedades del sistema asociado. Se analiza también el origen y naturaleza de la supersimetría escondida del punto de vista de la reducción dimensional y el efecto de Aharonov-Bohm.

Índice general

1. Introducción	3
2. Mecánica cuántica supersimétrica	11
2.1. Supersimetría usual y transformaciones de Darboux	12
2.2. Supersimetría no lineal y transformaciones de Crum-Darboux	17
2.3. Discusión	22
3. Supersimetría bosonizada	23
3.1. Efecto Aharonov-Bohm de estados ligados	24
3.2. Efecto Aharonov-Bohm en el plano	28
3.3. Potencial delta de Dirac	30
3.4. Potencial Pöschl-Teller	32
3.5. Potencial de Lamé	37
3.6. Potenciales finite gap	44
3.7. Discusión	52
4. Tri-supersimetría y el potencial delta de Dirac	54
4.1. Graduación $\Gamma = R$	56
4.2. Graduación $\Gamma = \sigma_3$	59
4.3. Graduación $\Gamma = R\sigma_3$	59
4.4. Identificación de los generadores	60

4.5.	Acción de las integrales de movimiento sobre los autoestados	61
4.6.	Identificación de la supersimetría	62
4.7.	Discusión	64
5.	Tri-supersimetría y sistemas finite-gap	65
5.1.	Extensiones tri-supersimétricas	66
5.2.	Supersimetría no lineal centralmente extendida $N = 4$	71
5.3.	Conjetura self-isospectral	74
5.4.	Tri-supersimetría y el Hamiltoniano de Pauli	76
5.5.	Extensiones isospectrales para el potencial asociado de Lamé	77
5.6.	Supersimetría self-isospectral en el límite del periodo infinito	83
5.7.	Discusión	87
6.	Pöschl-Teller y AdS_2	91
6.1.	Efecto Aharonov-Bohm sobre AdS_2	91
6.2.	Sistema clásico	92
6.3.	Cuantización y propiedades espectrales	95
6.4.	Reducción y tri-supersimetría	100
6.5.	Discusión	104
7.	Conclusión y perspectivas	106
	Bibliografía	112

Índice de figuras

2.1. Esquema de transformación de Darboux	14
2.2. Esquema de transformación de Darboux	15
2.3. Esquema de transformación de Crum-Darboux	19
3.1. Espectro del sistema de AB de estados ligados para flujo entero . . .	27
3.2. Espectro del sistema de AB de estados ligados para flujo semientero .	28
3.3. Relaciones entre sistemas con supersimetría bosonizada	43
3.4. Discriminante $\mathcal{D}(E)$ en un caso genérico de un potencial periódico . .	47
5.1. Estructura de las bandas del sistema self-isospectral	83
5.2. Límite de periodo infinito en sistemas self-isospectral	85
5.3. Gráficos de potenciales finite-gap y su limite de periodo infinito . . .	90
6.1. Espectro del sistema AdS ₂ con flujo de AB entero	99
6.2. Espectro del sistema AdS ₂ con flujo de AB semientero	100
6.3. Acción de los operadores $X_{3,1}^{\pm}$	102
6.4. Acción de los operadores $Y_{3,1}^{\pm}$	102
6.5. Acción de los operadores $Z_{3,1}^{-}$	103
6.6. Acción de los operadores $Z_{3,1}^{+}$	103

Capítulo 1

Introducción

Supersimetría nació originalmente como una simetría que relaciona bosones y fermiones. Dado que los bosones son las partículas mediadoras de la interacción mientras que los fermiones son los constituyentes de la materia, es natural que surga la pregunta si existe una simetría que unifica materia y radiación. En este sentido fue introducida la supersimetría en la década de los 70 [1]; en la búsqueda de una unificación no trivial entre simetrías del espacio tiempo y simetrías internas en teorías cuánticas de campos relativistas. Como una simetría fundamental, supersimetría proporcionaría un mecanismo natural para la unificación de gravedad con electromagnetismo e interacciones fuertes y débiles, aunque aún sigue esperando una confirmación experimental la cual podría tener un avance importante en dependencia de los resultados del Large Hadron Collider (LHC). Pero por otro lado, en los años 80 se predijo que en física nuclear pueden existir efectos de supersimetría [2] como una simetría dinámica, relacionando propiedades de algunos núcleos bosónicos y fermiónicos. Aunque la predicción no corresponde en forma completa a lo que se pensó inicialmente como supersimetría, existen confirmaciones experimentales de la realización de este tipo de supersimetrías en núcleos atómicos [3].

Investigando el rompimiento de la supersimetría en el nivel de teorías de cam-

pos [4], como un modelo de juguete nació la mecánica cuántica supersimétrica, la cual se ha transformado actualmente en una línea independiente de investigación, estimulando nuevos enfoques y métodos en diversas áreas de física como física atómica, física nuclear, materia condensada y física estadística [5]. La mecánica cuántica supersimétrica en su forma usual consta de un Hamiltoniano de Schrödinger con grados de libertad fermiónicos (de tipo spín) el cual se puede interpretar como el Hamiltoniano de la ecuación de Pauli [5]. En la estructura supersimétrica existen dos elementos claves; las supercargas y el operador de graduación. El operador de graduación clasifica los operadores como operadores fermiónicos o bosónicos en dependencia de sus relaciones de (anti)conmutación, como también clasifica los autoestados del Hamiltoniano como estados tipo bosón o fermión según su autovalor. Las supercargas por su parte son integrales de movimiento no triviales que producen las transformaciones de supersimetría, intercambiando estados bosónicos por fermiónicos y viceversa. Ambos elementos en conjunto con el Hamiltoniano generan una superálgebra de Lie, la cual refleja en su estructura las propiedades del espectro y la naturaleza del sistema. Como una simetría real del sistema, ya en su forma usual, supersimetría nos otorga herramientas y mecanismos para revelar las características de los sistemas que la poseen. Gracias a la supersimetría podemos construir el espectro de un sistema y también encontrar nuevos modelos con propiedades similares al sistema inicial. Cabe mencionar que básicamente las propiedades matemáticas detrás de la mecánica cuántica supersimétrica fueron estudiadas mucho tiempo atrás por Euler, Darboux y también al inicio de la mecánica cuántica, como por ejemplo Schrödinger.

Pero estas propiedades de la supersimetría no están ajenas a su carácter mismo de simetría, se sabe que tanto a nivel clásico como cuántico las simetrías están detrás de las propiedades especiales de los sistemas. En ocasiones las simetrías aparecen en una forma escondida como en el caso de rompimiento espontáneo de simetría y pueden tener además un carácter lineal o no lineal (en sentido algebraico). Las simetrías también pueden ser tanto continuas como discretas, a ellas se les pueden

asociar integrales de movimiento que las describen y también permiten clasificar e identificar la naturaleza de los sistemas. Un ejemplo bien conocido en Física es el modelo del átomo de Hidrógeno, análogo cuántico del problema de Kepler, en donde la simetría escondida asociada con el vector de Laplace-Runge- Lenz subyace la degeneración del espectro [6] y explica la existencia de trayectorias cerradas para el caso clásico.

La Física de bajas dimensiones posee peculiares propiedades, como por ejemplo, la notable equivalencia entre fermiones y bosones en teorías de campos en 2D [7] y una bosón-fermión o bosón-anyon transmutación basado en el efecto Aharonov-Bohm en sistemas planares [8]. Estas características indican que la supersimetría podría estar presente en una forma escondida en sistemas sin grados de libertad de tipo spín o fermiónicos.

Efectivamente en la década anterior se observó la existencia de un *nuevo* tipo de supersimetría; supersimetría bosonizada que, notablemente, tiene una naturaleza muy distinta a la considerada inicialmente [4], esta construída solamente por medio de grados de libertad bosónicos [9, 10]. Esta construcción no trivial esta basada en considerar el operador de reflexión o paridad como el operador de graduación y un Hamiltoniano de naturaleza *no local* que depende explícitamente del operador de reflexión. El concepto de no localidad viene de que en algunos sistemas el operador de paridad puede representarse mediante una serie infinita de ciertos generadores, como por ejemplo, del mismo Hamiltoniano de un sistema o su momento angular. Supersimetría bosonizada fue discutida de una forma muy similar a la de supersimetría usual con supercargas y Hamiltonianos no locales [10, 11] y también en un sistema parabosónico [12]. Es interesante estudiar entonces si es posible encontrar sistemas que presenten este original tipo de supersimetrías pero con un Hamiltoniano *local*. Cabe mencionar que este es uno de los enfoques principales de la tesis, sin embargo fue demostrado que existen supersimetrías bosonizadas locales que salen exactamente del sistema considerado en [11] con una elección particular del potencial cuántico. En

adición de esta supersimetría en sistemas puros bosónicos, existe una generalización no lineal de la supersimetría usual [13, 12], la cual se ha estudiado bajo diferentes aspectos como anomalía cuántica, sistemas cuasi-exactamente solubles, superficies de Riemann, simetría conforme entre otros [12, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

El objetivo de esta tesis es el estudio de supersimetrías escondidas en sistemas de mecánica cuántica. Se demostró que *sorprendentemente* sistemas bien conocidos y estudiados de mecánica cuántica presentan una supersimetría escondida, en manera diferente a la encontrada antes, aparece supersimetría bosonizada pero con un Hamiltoniano local. Sin embargo, aunque su naturaleza sea distinta a la de la supersimetría usual, comparte muchas propiedades similares, existe un operador de graduación asociado por lo que existe una reinterpretación de que cantidades son consideradas como fermiones o bosones, lo cual no contradice completamente las primeras nociones de supersimetría, bajo cierto criterio bosones y fermiones puede ser diferentes caras de una misma moneda. En supersimetría bosonizada con un Hamiltoniano local, también aparecen las supercargas, las cuales pueden ser de carácter lineal o no lineal, diferencia que aparece en dependencia de la superálgebra de Lie generada, en el caso de supersimetría no lineal en la superálgebra supersimétrica esta constituida por ciertos polinomios del Hamiltoniano.

La supersimetría bosonizada contiene tanto integrales de movimientos triviales como no triviales, que saca a la luz las principales propiedades de los sistemas estudiados. Entre los sistemas que han sido estudiados en la tesis esta el efecto de Aharonov-Bohm (AB) [20], problema que refleja propiedades puramente cuánticas y ha sido estudiado extensamente en Física, tanto a nivel teórico como en sus confirmaciones experimentales, mas aún este efecto ha sido útil para otras tópicos de diferente naturaleza, como por ejemplo anyones. Supersimetría bosonizada aparece tanto para el modelo mas simple que representa el efecto AB; el problema de AB de estados ligados [21], como también tiene lugar para el modelo 2D introducido origi-

nalmente por Aharanov y Bohm, en donde fue posible aprender que la supersimetría bosonizada tiene una estricta relación con la simetría conforme que presenta este modelo descrita anteriormente en [22] (pero sin notar la presencia de esta supersimetría escondida). Las simetrías y propiedades especiales que tienen ambos sistemas para ciertos valores del flujo magnético están *íntimamente* relacionada con la estructura de supersimetría escondida. Otro sistema simple, bien conocido en Física, es el sistema descrito por el potencial de Dirac, tanto su versión atractiva como repulsiva, para el cual todas las características de su espectro y del problema de scattering están codificadas en la estructura supersimétrica bosonizada escondida.

Bajo la investigación de sistemas con supersimetría escondida se analizó la amplia clase de sistemas finite-gap. Los sistemas finite-gap juegan un rol muy importante en Física y aparecen en diversas áreas ¹. En el caso general de un sistema periódico en mecánica cuántica el espectro tiene un número infinito de zonas permitidas (bandas) y prohibidas (gaps) de energía, tal como en el caso bien conocido del modelo de Kronig-Penney. Los sistemas finite-gap representan sistemas periódicos con un número finito de bandas y gaps en el espectro, en particular, el sistema mas simple no trivial 1-gap esta determinado únicamente por medio del potencial de Lamé. El potencial de Lamé tiene diferentes generalizaciones a sistemas de mas gaps, por lo cual este modelo que ha sido usado extensamente en física. Cabe destacar que en este potencial para valores especiales de su parámetro de acoplamiento el sistema se transforma en un sistema finite-gap, justamente para estos valores tiene lugar la supersimetría escondida. En un sistema periódico arbitrario a medida que crece la energía los gaps van disminuyendo su tamaño, de manera que cualquier sistema con periodicidad puede ser aproximado mediante un sistemas finite-gap [23]. Pero la importancia de los sistemas finite-gap no sólo radica en este punto, además para

¹Para mirar la lista en detalles de aplicaciones y referencias, nos referiremos a las secciones del Capítulo 3.

este tipo de sistemas es posible encontrar los estados físicos y energías sin necesidad de resolver ecuaciones trascendentales como en el caso de Kronig-Penney. De este punto de vista los sistemas finite-gap juegan en física del estado sólido el mismo rol que juega el átomo de hidrógeno en física atómica. La supersimetría escondida bosonizada permite estudiar los sistemas finite-gap de un nuevo punto de vista y aprender de manera intuitiva y sencilla sus propiedades espectrales, por medio de simetrías reales del sistema que se manifiestan como supercargas. Además por medio de la supersimetría escondida bosonizada se logró resolver el problema de la existencia de self-isospectralidad, que fue estudiado en diversas investigaciones en torno a supersimetría usual, dando como resultado un conocimiento detallado de la estructura de bandas de los sistemas. En el límite de periodo infinito de sistemas finite-gap la estructura de supersimetría escondida se mantiene. Los potenciales de este tipo se conocen como reflectionless (su coeficiente de reflexión es igual a cero), un caso particular de sistemas esta naturaleza es el sistema de Pöschl-Teller (PT) hiperbólico el cual, entre sus numerosas aplicaciones, aparece como ecuación de estabilidad para ecuaciones solitónicas en teorías de campo de φ^4 y sine-Gordon.

Supersimetría de naturaleza bosónica se ha encontrado en distintas clases de sistemas tanto para Hamiltonianos de Schrödinger en una y dos dimensiones como para el Hamiltoniano Bogoliubov-de Gennes en una dimensión.

En vista de los resultados obtenidos surge naturalmente la siguiente pregunta, ¿que sucede en este tipo de supersimetría bosonizada, si incluimos grados de libertad de tipo fermiónico ?. Agregando una estructura de supersimetría usual a la supersimetría escondida, es decir super-extendiendo el sistema, la estructura supersimétrica se enriquece dando lugar a nuevas integrales de movimiento que reflejan coherentemente las propiedades del nuevo sistema construido. En el estudio de mecánica cuántica supersimétrica con supersimetría escondida bosonizada, la extensión del sistema por medio de grados de libertad de tipo fermiónicos, permite la elección de *diferentes* operadores de graduación, donde cada uno de ellos clasifica en

forma diferente los operadores tipo bosón y tipo fermión. Todo esta estructura se denominó tri-supersimetría.

En la presente tesis también se estudió el significado de tri-supersimetría del sistema Pösch-Teller de un punto de vista diferente, con el objetivo de aprender cual es el origen físico de las integrales no triviales de movimiento. Para ello se analizó una partícula que se mueve en una cierta configuración espacial basada en el espacio AdS_2 y bajo la influencia del efecto AB. Así es posible reducir el sistema fijando el momento angular a un valor específico, a exactamente el sistema cuántico de PT y se observó que la integral no triviales provenientes de tri-supersimetría están relacionadas con las isometrías del sistema 2D, en particular, con su grupo de rotaciones y simetrías discretas.

Los aspectos mencionados anteriormente de la tesis están basados en la investigación realizada en los siguientes trabajos

- “*On hidden broken nonlinear superconformal symmetry of conformal mechanics and nature of double nonlinear superconformal symmetry*”, F. Correa, M. A. del Olmo and M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **628**, 157 (2005)
- “*Hidden supersymmetry in quantum bosonic systems*”, F. Correa and M. S. Plyushchay, Annals Phys. **322**, 2493 (2007)
- “*Hidden nonlinear supersymmetry of finite-gap Lamé equation*”, F. Correa, L. M. Nieto and M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **644**, 94 (2007)
- “*Peculiarities of the hidden nonlinear supersymmetry of Pöschl-Teller system in the light of Lamé equation*”, F. Correa and M. S. Plyushchay, J. Phys. A **40**, 14403 (2007)
- “*Hidden nonlinear $su(2|2)$ superunitary symmetry of $N = 2$ superextended 1D Dirac delta potential problem*”, F. Correa, L. M. Nieto and M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **659**, 746 (2008)

- “*Self-isospectrality, special supersymmetry, and their effect on the band structure*”, F. Correa, V. Jakubsky, L. M. Nieto and M. S. Plyushchay, Phys. Rev. Lett. **101**, 030403 (2008)
- “*Finite-gap systems, tri-supersymmetry and self-isospectrality*”, F. Correa, V. Jakubsky and M. S. Plyushchay, J. Phys. A **41**, 485303 (2008)
- “*Aharonov-Bohm effect on AdS_2 and nonlinear supersymmetry of reflectionless Pöschl-Teller system*”, F. Correa, V. Jakubsky and M. S. Plyushchay, Annals Phys. **324**, 1078 (2009)
- “*The Bogoliubov/de Gennes system, the AKNS hierarchy, and nonlinear quantum mechanical supersymmetry*”, F. Correa, G. Dunne and M. S. Plyushchay, Annals Phys. in press arXiv:0904.2768 [hep-th].
- “*Hidden superconformal symmetry of spinless Aharonov-Bohm system*”, F. Correa, H. Falomir, V. Jakubsky and M. S. Plyushchay, submitted to publication, arXiv:0906.4055 [hep-th].

La organización de la tesis esta realizada de la siguiente forma. La Sección 2 resume los aspectos generales de la supersimetría usual y no lineal, bajo la luz de las transformaciones de Darboux para un Hamiltoniano de Schrödinger. La sección 3 contiene los principales resultados sobre el estudio de supersimetría escondida bosonizada, es decir, sin grados de libertad fermiónicos. Se discuten distintos sistemas, sus generalizaciones, y diferentes tipos de supersimetrías bosonizadas, tanto lineal como no lineal. Las secciones 3 y 4 corresponden a las super extensiones de sistemas con supersimetrías bosonizadas mediante la adición se grados de libertad fermiónicos (de spín), dando origen a la denominada tri-supersimetría. La sección 6 esta dedicada al análisis de la supersimetría bosonizada del sistema Pöschl-Teller desde el punto de vista de el efecto de Aharonov-Bohm para una partícula no relativista sobre la superficie AdS_2 .

Capítulo 2

Mecánica cuántica supersimétrica

En esta sección discutiremos las principales propiedades de la mecánica cuántica supersimétrica. En la literatura existen diversos reviews [5] acerca este tema que cubren tanto su origen, como su relación con teorías de campos y la clasificación de la gran mayoría de sistemas que presentan una supersimetría usual. Nuestro enfoque será un poco diferente; estará dirigido hacia comprender el significado de las transformaciones de Darboux y Crum-Darboux [24, 25, 26] para la supersimetría usual y no lineal, respectivamente. Es importante aprender las propiedades de estas transformaciones para dilucidar la naturaleza de las supersimetrías bosonizadas en la Sección 3, como también la tri-supersimetría de Secciones 4, 5 y 6. Las propiedades de los operadores que conforman las transformaciones de Darboux y Crum-Darboux son determinantes para las características físicas de los sistemas relacionados entre sí. La mecánica cuántica supersimétrica ha sido extensamente estudiada los últimos años, con ella podemos clasificar distintos tipos de sistemas que aparecen en mecánica cuántica, es posible encontrar el espectro de un sistema, construir sus autofunciones y producir sistemas de características similares, mas específicamente, podemos producir nuevos sistemas casi-isospectrales.

2.1. Supersimetría usual y transformaciones de Darboux

Consideremos un Hamiltoniano de Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x), \quad (2.1)$$

y un autoestado ψ_\star correspondiente a un autovalor fijo E_\star ,

$$H\psi_\star = E_\star\psi_\star, \quad (2.2)$$

donde $u(x)$ es el potencial. En (2.1) se usaron las unidades $\hbar = 2m = 1$ que se considerarán de aquí en adelante.

Por el momento no asumimos ninguna condición de regularidad para ψ_\star . Este estado puede ser un autoestado físico o bien una solución no física de (2.1), con un nivel de energía físico E_\star para el primer caso o simplemente un autovalor no físico E_\star en el otro caso.

Una transformación de Darboux [24] es generada por un operador diferencial de primer orden

$$A_1 = \frac{d}{dx} - (\ln \psi_\star)', \quad (2.3)$$

que aniquila el autoestado ψ_\star ,

$$A_1\psi_\star = 0 \quad (2.4)$$

y relaciona H con un nuevo Hamiltoniano

$$\tilde{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{u}(x), \quad \tilde{u}(x) = u(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_\star, \quad (2.5)$$

por medio de una relación conocida como relación de intertwining

$$A_1H = \tilde{H}A_1. \quad (2.6)$$

De esta manera, en ambos Hamiltonianos para un mismo valor arbitrario de energía E se cumple

$$H\psi_E = E\psi_E, \quad \tilde{H}\tilde{\psi}_E = E\tilde{\psi}_E, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\psi}_E = \frac{1}{\sqrt{E - E_\star}} A_1 \psi_E, \quad \psi_E = \frac{1}{\sqrt{E - E_\star}} A_1^\dagger \tilde{\psi}_E. \quad (2.8)$$

Las relaciones (2.7), (2.8) tienen la simetría $H \leftrightarrow \tilde{H}$, $\psi_E \leftrightarrow \tilde{\psi}_E$, $A \leftrightarrow A^\dagger$. Esta simetría refleja la propiedad de la transformación adjunta que corresponde a la relación de intertwining

$$A_1^\dagger \tilde{H} = H A_1^\dagger \quad (2.9)$$

generada por el operador A_1^\dagger , que aniquila el estado $\tilde{\psi}_\star = 1/\psi_\star$, $A_1^\dagger \tilde{\psi}_\star = 0$ y actúa en la dirección opuesta a (2.4) relacionando \tilde{H} con H . Así, podemos observar que las fórmulas (2.8) no son válidas para $E = E_\star$ en vista de (2.4) y $A_1^\dagger \tilde{\psi}_\star = 0$. Es sencillo ver que ambos Hamiltonianos pueden ser representados en términos de los operadores A_1 y A_1^\dagger ,

$$H = A_1^\dagger A_1 + E_\star, \quad \tilde{H} = A_1 A_1^\dagger + E_\star. \quad (2.10)$$

Usualmente la transformación de Darboux es elegida de una manera tal, que aniquile un estado base físico sin nodos (en ocasiones solo es necesario requerir que no existan nodos en el intervalo del periodo de el sistema), ψ_0 con energía E_0 . En este caso los potenciales $u(x)$ y $\tilde{u}(x)$ son ambos suaves y regulares, en el caso contrario si ψ_0 tiene nodos dentro del intervalo de su periodo, entonces el nuevo potencial será un potencial con singularidades dentro del intervalo mencionado ¹.

En un caso *no-periódico*, el estado base físico sin nodos ψ_0 desaparece en los extremos de un intervalo (posiblemente infinito). Como consecuencia no hay una pareja física de este estado con la misma energía en el espectro de \tilde{H} . De hecho, el estado $\tilde{\psi}_0 = 1/\psi_0$ aniquilado por A_1^\dagger es divergente en el infinito y por lo tanto no es físico. En este caso ambos sistemas son *casi isospectrales*, el espectro es

¹De todas maneras, transformaciones de Darboux generadas con estados con nodos también encuentran algunas aplicaciones [5].

exactamente el mismo excepto el nivel de energía E_0 , que esta ausente del espectro de \tilde{H} como lo representa la Fig. (2.1).

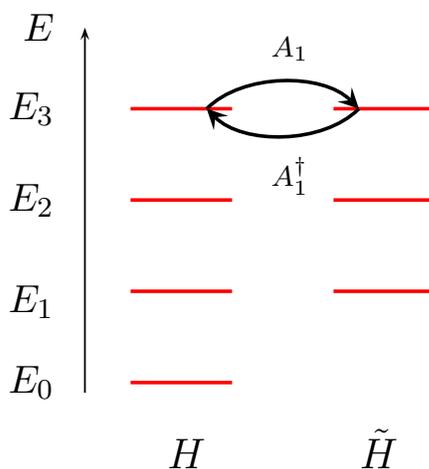


Figura 2.1: Transformación de Darboux generada por un estado base sin nodos de naturaleza no periódica. La energía E_0 esta ausente del espectro de \tilde{H} . Las flechas indican las direcciones en que actúan las transformaciones de Darboux.

Desde el punto de vista de la relación de intertwining adjunta (2.9), la transformación desde \tilde{H} a H es generada por el operador A_1^\dagger asociada con un estado $\tilde{\psi}_0 = 1/\psi_0$ que corresponde al estado no físico de \tilde{H} con autovalor E_0 . Por otro lado en correspondencia con (2.8), para $E = E_0$ se mantienen las relaciones

$$\psi_0 = A_1^\dagger \tilde{\eta}_0, \quad \tilde{\psi}_0 = 1/\psi_0 = A_1 \eta_0 \quad (2.11)$$

donde

$$\tilde{\eta}_0 = -\frac{1}{\psi_0} \int^x \psi_0^2(x) dx, \quad \eta_0 = \psi_0 \int^x \psi_0^{-2} dx \quad (2.12)$$

son soluciones no físicas, no normalizables de las ecuaciones

$$H\eta_0 = E_0\eta_0, \quad \tilde{H}\tilde{\eta}_0 = E_0\tilde{\eta}_0. \quad (2.13)$$

En el caso *periódico* con un potencial suave, una transformación de Darboux dada por un estado físico sin nodos, permite la existencia de un estado físico con la misma energía y de la misma naturaleza en el espectro de \tilde{H} y por lo tanto los sistemas son isospectrales como lo ilustra la Fig (2.2). En el Capítulo 5 profundizaremos en este tema, mostrando que ciertos sistemas isospectrales relacionados por una transformación de Darboux pueden tener una pareja de potenciales con la misma forma, pero desplazado uno con respecto al otro. Este concepto, introducido por Dunne y Feinberg [27], se conoce como self-isospectralidad.

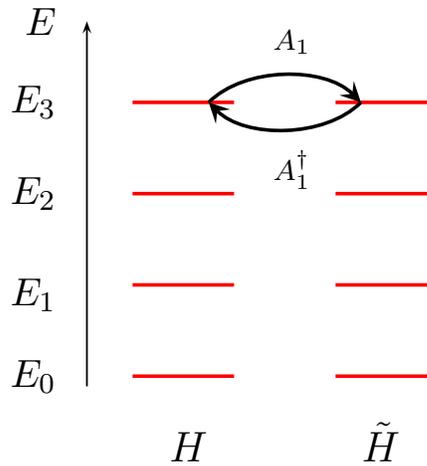


Figura 2.2: Transformación de Darboux generada por un estado base sin nodos de naturaleza periódica. Las flechas indican las direcciones en que actúan las transformaciones de Darboux.

La relación entre las transformaciones de Darboux y la mecánica cuántica supersimétrica es directa. Los Hamiltonianos H y \tilde{H} desplazados por la constante E_* son conocidos entre sí como Hamiltonianos super-pareja y forman un sistema superex-

tendido descrito por el Hamiltoniano matricial

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

donde

$$H_- \equiv H - E_\star = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x), \quad (2.15)$$

$$H_+ \equiv \tilde{H} - E_\star = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x), \quad (2.16)$$

y $W(x)$ es conocido como el superpotencial,

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_\star. \quad (2.17)$$

Así, los operadores de primer orden A_1 y A_1^\dagger escritos en términos del superpotencial adquieren la forma que usualmente se usa en la literatura

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W(x), \quad A_1^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x). \quad (2.18)$$

Con las transformaciones de Darboux (2.18), están asociados dos operadores diferenciales lineales en forma de matrices hermíticas

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = i\sigma_3 Q_1 \quad (2.19)$$

de manera que las relaciones de intertwining (2.6) y (2.9) toman la forma de leyes de conservación para las supercargas Q_a , $[Q_a, \mathcal{H}] = 0$, $a = 1, 2$. Junto con el Hamiltoniano (2.14) las supercargas generan la superálgebra lineal $N = 2$

$$[Q_a, \mathcal{H}] = 0, \quad \{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}\mathcal{H}. \quad (2.20)$$

La matriz diagonal de Pauli σ_3 aca juega el rol de operador de graduación \mathbb{Z}_2 que clasifica el Hamiltoniano como un operador bosónico $[\sigma_3, \mathcal{H}] = 0$ mientras que las supercargas como operadores fermiónicos $\{\sigma_3, Q_a\} = 0$. En general, dado un operador de graduación arbitrario Γ se cumple que

$$\begin{aligned}
[B, \Gamma] &= 0 && \text{para un operador } B \text{ tipo bosón} \\
\{F, \Gamma\} &= 0 && \text{para un operador } F \text{ tipo fermión}
\end{aligned}$$

Notablemente, como observaremos a lo largo de esta tesis, la elección del operador de graduación en ocasiones no es única.

En un caso no periódico, si ψ_\star o $1/\psi_\star$ son normalizables, existe un estado físico de dos componentes que es aniquilado por ambas supercargas el cual es el estado base de energía cero para uno de los subsistema super-pareja. Este estado es invariante bajo las transformaciones de supersimetría correspondientes generadas por Q_a y por lo tanto tenemos el caso de supersimetría exacta, no rota, que presenta un espectro como la Fig. (2.1). Los dobletes supersimétricos de estados correspondientes a energías positivas son mutuamente transformados por supercargas Q_a en correspondencia con (2.8). En el caso si ambos ψ_\star y $1/\psi_\star$ son no físicos, todos los estados supersimétricos del sistema (2.14) están organizados en dobletes supersimétricos, incluyendo los de estados de energía mas baja que tiene valor positivo distinto de cero. Este cuadro corresponde a supersimetría rota, la cual describe un par de sistemas super-pareja completamente isospectrales, como en la Fig (2.2) donde $E_0 \neq 0$.

En el caso de un sistema periódico cuántico, con un potencial suave en cierto intervalo, el sistema supersimétrico (2.14) construido sobre la base de la transformación de Darboux con un estado singlete sin nodos Ψ_0 estará caracterizado por un estado doblete con energía cero, dado por las columnas $(0, \Psi_0)^t$ y $(1/\Psi_0, 0)^t$. Ambos estados están aniquilados por las supercargas Q_a y la supersimetría $N = 2$ es no rota. Aca la pareja de super-sistemas son completamente isospectrales como en el caso no-periódico con supersimetría rota ilustrado en la Fig. (2.2) con $E_0 = 0$.

2.2. Supersimetría no lineal y transformaciones de Crum-Darboux

Sistemas (casi) isospectrales pueden estar relacionados también por operadores diferenciales de orden superior, que corresponde a la situación descrita por la generalización de las transformaciones de Darboux realizada por Crum [25].

Consideremos un operador diferencial A_n de orden n ,

$$A_n = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=1}^n c_j^A(x) \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}}, \quad (2.21)$$

que aniquila un espacio V generado por n autoestados del Hamiltoniano H , $V = \text{span} \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, los cuales no tiene que ser obligatoriamente estados físicos,

$$A_n \psi_i = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Los coeficientes c_j^A , $j = 1 \dots n$ están determinados por las autofunciones de H , ψ_j . Por ejemplo, el coeficiente $c_1^A(x)$ se puede escribir como el Wronskiano de las n funciones ψ_i [26],

$$c_1^A(x) = -\frac{d}{dx} \ln \mathcal{W}(\psi_1, \dots, \psi_n), \quad (2.23)$$

donde

$$\mathcal{W}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \mathcal{W} = \det B, \quad B_{i,j} = \frac{d^{j-1} \psi_i}{dx^{j-1}}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

En el caso general, la forma de los coeficientes viene dado por

$$c_j^A(x) = -\frac{\mathcal{W}_j}{\mathcal{W}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.25)$$

donde \mathcal{W}_j es el determinante de la matriz B modificada reemplazando la línea $\psi_1^{(n-j)}, \dots, \psi_n^{(n-j)}$ por $\psi_1^{(n)}, \dots, \psi_n^{(n)}$. En esta notación, $\mathcal{W}_0 \equiv \mathcal{W}$. Para ver más propiedades de estos operadores, son útiles las Refs. [26], [28].

En analogía con las transformaciones de Darboux, para Crum-Darboux se cumplen las siguientes relaciones

$$A_n H = \tilde{H} A_n, \tag{2.26}$$

$$\tilde{H} = H + 2(c_1^A)' = H - 2(\ln \mathcal{W}(\psi_1, \dots, \psi_n))''. \tag{2.27}$$

En general, los espectros de H y \tilde{H} son casi idénticos, o casi isospectrales, su espectro puede diferir en n o menos autovalores físicos y depende de las funciones ψ_i escogidas para generar la transformación de Crum-Darboux, como muestra el ejemplo de la Fig. (2.3).

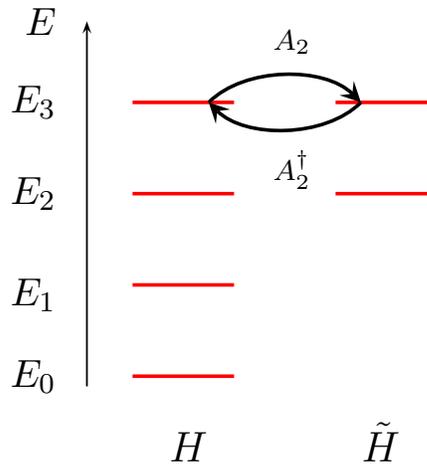


Figura 2.3: Transformación de Crum-Darboux de segundo orden, en donde el espectro de \tilde{H} difiere en dos estados en comparación a H . Las flechas indican las direcciones en que actúan las transformaciones de Crum-Darboux.

Consecuentemente para un sistema cuántico descrito por H , uno puede obtener varias parejas de Hamiltonianos \tilde{H} , escogiendo diferentes conjuntos de autoestados ψ_1, \dots, ψ_n . Sin embargo si queremos obtener una pareja de Hamiltonianos con las mismas propiedades de regularidad, es necesario elegir los autoestados en una manera especial, que discutiremos en el capítulo (5). En el caso de una transformación de

Darboux ($n = 1$), el Wronskiano \mathcal{W} de una función es la función misma y (2.26) se reduce a una relación de intertwining usual de supersimetría estándar (2.6).

Las transformaciones de Crum-Darboux pueden factorizarse en términos de una cadena consecutiva de transformaciones de primer orden de Darboux, o bien en transformaciones de segundo orden, [29]. Por lo que operador A_n puede ser factorizado en términos de operadores diferenciales de primer orden. Una representación del operador en forma factorizada [28]

$$A_n = (-1)^n \frac{\mathcal{W}_n}{\mathcal{W}_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{\mathcal{W}_{n-1}^2}{\mathcal{W}_n \mathcal{W}_{n-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{\mathcal{W}_1^2}{\mathcal{W}_2 \mathcal{W}_0} \frac{d}{dx} \frac{\mathcal{W}_0}{\mathcal{W}_1}, \quad (2.28)$$

que es equivalente a

$$A_n = L_n L_{n-1} \cdots L_2 L_1, \quad L_j = \frac{d}{dx} - \alpha_j, \quad \alpha_j = \frac{d}{dx} \ln \frac{\mathcal{W}_j}{\mathcal{W}_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.29)$$

El operador puede ser expresado también mediante el determinante

$$A_n = W^{-1}(\psi_1, \dots, \psi_n) \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_n & 1 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \cdots & \psi'_n & \frac{d}{dx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} & \psi_2^{(n-1)} & \cdots & \psi_n^{(n-1)} & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & \cdots & \psi_n^{(n)} & \frac{d^n}{dx^n} \end{vmatrix}, \quad (2.30)$$

donde el factor multiplicativo fija el coeficiente de $\frac{d^n}{dx^n}$ igual a uno. Aca, el determinante de el operador matricial $(n+1) \times (n+1)$ es definido como $\det C = \sum_{\sigma \in G_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) C_{\sigma(1),1} C_{\sigma(2),2} \cdots C_{\sigma(n+1),n+1}$, donde G_{n+1} es el conjunto de todas las permutaciones posibles de los enteros $\{1, \dots, n+1\}$.

Como generalización de los operadores de primer orden, A_n y A_n^\dagger producen relaciones de la forma (2.8) para energías $E \neq E_i$, $i = 1, \dots, n$. Si el potencial de H es un potencial suave y el Wronskiano de los estados que son modo ceros que A_n es una función sin nodos, entonces el potencial de \tilde{H} es también un potencial suave. El operador A_n puede ser usado en la reconstrucción de los autoestados $\tilde{\psi}$ de \tilde{H} que

corresponden a los autoestados $\psi \neq \psi_i$ de H con el mismo autovalor,

$$\tilde{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \quad H\psi = E\psi, \quad \tilde{\psi} = A_n\psi. \quad (2.31)$$

Estas autofunciones $\tilde{\psi}$ pueden ser representadas como

$$\tilde{\psi} = A_n\psi = \frac{W(\psi_1, \dots, \psi_n, \psi)}{W(\psi_1, \dots, \psi_n)}. \quad (2.32)$$

Este precepto falla en la reconstrucción de los estados $\tilde{\psi}_i$, el cual corresponde al estado de misma energía que ψ_i , $\tilde{H}\tilde{\psi}_i = E_i\tilde{\psi}_i$, $H\psi_i = E_i\psi_i$, donde ψ_i esta aniquilada por A_n . Las autofunciones $\tilde{\psi}_i$, aniquiladas por A_n^\dagger , estan dadas por

$$\tilde{\psi}_i = \frac{W(\psi_1, \dots, \hat{\psi}_i, \dots, \psi_n)}{W(\psi_1, \dots, \psi_n)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad A_n^\dagger\tilde{\psi}_i = 0, \quad (2.33)$$

donde el lugar bajo el símbolo “ $\hat{}$ ” esta omitido.

Para $n > 1$, la ecuación (2.26) esta detras de un generalización de orden superior (no lineal) de la mecánica cuántica supersimétrica [13, 12, 14]. Para revelar su estructura construimos nuevamente un super Hamiltoniano matricial de la forma

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \tilde{H} & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

y como generalización a las supercargas (2.19) ahora tenemos

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_n \\ A_n^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = i\sigma_3 Q_1. \quad (2.35)$$

Nuevamente a las relaciones de intertwining (2.26) es posible interpretarlas como relaciones de conmutación de las supercargas y el Hamiltoniano, por lo que las ambas supercargas son cantidades conservadas

$$[Q_a, \mathcal{H}] = 0, \quad a = 1, 2. \quad (2.36)$$

Las supercargas (2.35) y el Hamiltoniano (2.34) generan ahora una superálgebra *no lineal* $N = 2$

$$[Q_a, \mathcal{H}] = 0, \quad \{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}P_n(\mathcal{H}). \quad (2.37)$$

donde $P_n(\mathcal{H})$ es un polinomio del Hamiltoniano de orden n de la forma

$$P_n(\mathcal{H}) = \prod_{i=0}^n (E - E_i). \quad (2.38)$$

Este caso conocido como supersimetría no lineal, tiene una naturaleza similar al caso lineal, las supercargas (2.35), operadores matriciales antidiagonales, anticonmutan con σ_3 $\{\sigma_3, Q_a\} = 0$ siendo identificados como operadores fermiónicos mientras que el Hamiltoniano es un operador bosónico, $[\sigma_3, \mathcal{H}] = 0$.

2.3. Discusión

En este capítulo introducimos las nociones básicas de la supersimetría usual en su forma lineal y no lineal. Cabe destacar que este tipo de supersimetrías están basadas en las transformaciones de Darboux y Crum-Darboux, por lo tanto están asociadas con una pareja de Hamiltonianos que componen el Hamiltoniano extendido \mathcal{H} . Como veremos en el próximo capítulo, existen sistemas que presentan una supersimetría para un Hamiltoniano de forma independiente, es decir, sin relacionar necesariamente un sistema superpareja por medio de este tipo de transformaciones. Esta es la idea esencial, con otras palabras, de la supersimetría bosonizada.

Capítulo 3

Supersimetría bosonizada

En esta sección estudiaremos distintos tipos de sistemas que presentan supersimetría escondida sin grados de libertad fermiónicos. El primer ejemplo que analizaremos es el efecto Aharonov-Bohm para una partícula confinada en un círculo. Como veremos la supersimetría aparece solamente para valores especiales del flujo magnético [30]. La supersimetría escondida bosonizada también tiene lugar en el problema de AB en todo el plano [31] la cual será discutida también en este capítulo. El siguiente sistema estudiado es de una partícula en el eje real bajo la influencia del potencial delta de Dirac, tanto en su versión atractiva como repulsiva. Acá la supersimetría escondida también es de naturaleza lineal y no local y con ella es posible no solamente comprender el espectro del sistema sino también sacar información del problema de scattering [30]. A continuación se estudiará el potencial Pöschl-Teller [30] y su generalización periódica conocida como el potencial de Lamé [32] bajo la perspectiva de supersimetría escondida bosonizada no lineal. El análisis de estos sistemas permite encontrar nuevos sistemas que tienen una supersimetría no lineal pero de naturaleza ficticia [33,34]. Esta supersimetría aparece para valores especiales de los parámetros de los potenciales, valores tales que transforman los sistemas a sistemas finite-gap. Finalmente se mostrará que en el caso general de un potencial finite-gap con poten-

cial par, tiene dicha supersimetría escondida, en donde el operador de graduación es el operador de reflexión y la no linealidad del sistema dependerá del número de estados con energías no degeneradas [35,36]. La supersimetría no lineal está íntimamente relacionada con la jerarquía de ecuaciones no lineales Korteweg-de Vries.

3.1. Efecto Aharonov-Bohm de estados ligados

El efecto de Aharonov-Bohm (AB) fue descubierto teóricamente cincuenta años atrás [20]. Desde ese entonces se han encontrado varias confirmaciones experimentales [37] y se ha transformado en uno de los problemas más estudiados en física planar [38,39,40,41], para un buen review sobre este tópico nos referiremos a [21].

Como primer ejemplo de supersimetría escondida bosonizada, consideremos una partícula libre confinada a moverse en un círculo de radio unidad, luego pasaremos al efecto AB de estados ligados. La partícula en el círculo está descrita por el Hamiltoniano

$$H = -\frac{d^2}{d\varphi^2}, \quad (3.1)$$

donde φ es una variable angular $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Las autofunciones 2π -periódicas del momentum angular $p_\varphi = -i\frac{d}{d\varphi}$,

$$\psi_l(\varphi) = e^{il\varphi}, \quad p_\varphi\psi_l = l\psi_l, \quad (3.2)$$

$l = 0, \pm 1, \dots$, nos entregan una base completa del espacio de Hilbert de estados y resuelven el problema espectral

$$H\psi_l = E_l\psi_l, \quad E_l = l^2. \quad (3.3)$$

Todos los niveles de energías son positivos y doblemente degenerados, excepto el nivel $E_0 = 0$ del estado base singlete. Tal propiedad es típica de un sistema de mecánica cuántica que tiene supersimetría $N = 2$ no rota. Aunque el sistema (3.1) no tiene grados de libertad fermiónicos, es posible revelar en él una completa estructura

supersimétrica identificando una reflexión, $R\psi(\varphi) = \psi(-\varphi)$, como el operador de graduación. De hecho, esta es una integral de movimiento auto-adjunta

$$R = R^\dagger, \quad R^2 = 1, \quad [H, R] = 0, \quad (3.4)$$

que anticonmuta con el momento angular. Por lo tanto los operadores auto-adjuntos

$$Q_1 = p_\varphi, \quad Q_2 = iRQ_1, \quad (3.5)$$

generan un superálgebra $N = 2$ (2.20)

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}H, \quad [H, Q_a] = 0, \quad (3.6)$$

y son identificadas como supercargas.

Los autoestados $\psi_l^+ = \cos l\varphi$ y $\psi_l^- = \sin l\varphi$, satisfacen las relaciones $R\psi_l^\pm = \pm\psi_l^\pm$ y juegan el rol de estados tipo bosónicos y tipo fermiónicos. La peculiaridad de la supersimetría descrita en este sistema simple con un Hamiltoniano local puro bosónico, esta escondida en la naturaleza no local del operador de graduación y una de sus dos supercargas que llamamos Q_2 ¹.

Consideremos ahora una partícula cargada que se mueve en el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ puesto en el plano $z = 0$, el cual es atravesado por un campo magnético de la forma de una línea de flujo

$$B_z = \epsilon_{ij}\partial_i A_j = \Phi \delta^2(x, y) \quad \text{donde} \quad A_i = -\frac{\Phi}{2\pi r^2} \epsilon_{ij} r_j \quad (3.7)$$

es el vector potencial planar.

El Hamiltoniano de este sistema es

$$H_\alpha = \left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2 = (p_\varphi + \alpha)^2, \quad (3.8)$$

¹Es posible analizar de manera muy similar el caso de la partícula libre sobre el eje real, cambiando el operador de graduación por la reflexión de la variable que describa la línea real.

donde

$$\alpha = -\frac{e}{2\pi c}\Phi, \quad (3.9)$$

corresponde al efecto Aharonov-Bohm de estados ligados [20, 21]. Los estados (3.2) son los autoestados del Hamiltoniano (3.8) con autovalores $E_l = (l + \alpha)^2$. El operador de momento angular desplazado $p_\varphi + \alpha$ y el Hamiltoniano (3.8) pueden ser relacionados con los mismos operadores de la partícula libre ($\alpha = 0$) por medio de la transformación

$$O_\alpha = U_{-\alpha}(\varphi)O_0U_\alpha(\varphi), \quad U_\alpha(\varphi) = e^{i\alpha\varphi}. \quad (3.10)$$

En un caso genérico, la relación (3.10) tiene, sin embargo, un carácter formal debido a que el operador tipo-unitario $U_\alpha(\varphi)$ saca a los estados (3.2) del espacio de Hilbert de funciones de onda 2π -periódicas.

Cuando el parámetro α toma un valor entero $\alpha = n$, $n \in \mathbb{Z}$, el espectro revela la estructura de supersimetría $N = 2$ no rota: los estados ψ_l y $\psi_{l'}$ con $l' = -(l + 2n)$, $l \neq -n$, tienen la misma energía, mientras que el estado ψ_{-n} es el estado base singlete con energía cero, como lo muestra la Fig. 3.1. El operador twistado de reflexión

$$R_n = e^{-2in\varphi}R \quad (3.11)$$

juega áca el rol del operador de graduación, permitiéndonos encontrar las supercargas de la supersimetría escondida $N = 2$ en una forma similar a (3.5), pero con p_φ cambiado por $p_\varphi + n$. Las supercargas aniquilan el estado singlete tipo bosónico ψ_{-n} , $R_n\psi_{-n} = \psi_{-n}$. Como $U_n(\varphi)$ es un operador bien definido en el espacio de Hilbert de funciones de onda 2π -periódicas, el sistema (3.8) es unitariamente equivalente al sistema de la partícula libre.

El espectro es también degenerado en el caso no trivial del efecto AB caracterizado por valores semi-enteros del parámetro α . Cuando $\alpha = n + \frac{1}{2} \equiv j$, no existe un estado singlete de energía cero en el espectro y todas los niveles de energía son doblemente degenerados, $E_l = E_{-(l+2j)}$. Este cuadro corresponde a el de supersimetría $N = 2$

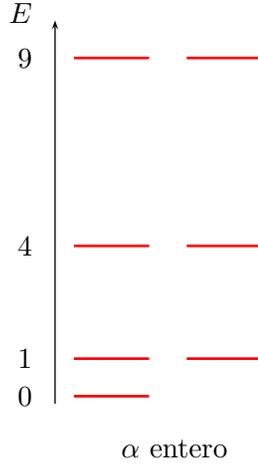


Figura 3.1: Espectro del sistema de AB de estados ligados para valores del flujo enteros, en donde sólo aparecen algunos niveles mas bajos energéticamente. Existe un número infinito de niveles doblemente degenerados con energías más altas.

de naturaleza rota. Aunque la transformación (3.10) en este caso es de un carácter formal, produce un operador de graduación bien definido, el operador de reflexión twistado $R_j = e^{-i2j\varphi} R$,

$$R_j \psi_{j,l}^{\pm} = \pm \psi_{j,l}^{\pm} \quad \text{donde} \quad \psi_{j,l}^{\pm} = \psi_l \pm \psi_{-(l+2j)}. \quad (3.12)$$

Teniendo en mente la relación (3.10), encontramos que el Hamiltoniano H_j y las supercargas

$$Q_{j,1} = p_{\varphi} + j, \quad Q_{j,2} = iR_j Q_{j,1} \quad (3.13)$$

son operadores pares e impares con respecto a R_j respectivamente y generan una superálgebra de la forma (3.6). En ambos casos $\alpha = n, j$ la supercarga local Q_1 es diagonal sobre los estados (3.2).

Una supersimetría escondida también esta presente para el modelo de AB extendido con simetría cilíndrica dado por el Hamiltoniano

$$H_{cyl,\alpha} = H_{\alpha} + p_z^2, \quad (3.14)$$

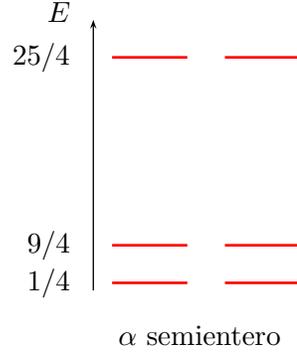


Figura 3.2: Espectro del sistema de AB de estados ligados para valores del flujo semientero, en donde sólo aparecen algunos niveles mas bajos energéticamente. Existe un número infinito de niveles doblemente degenerados con energías más altas.

donde $p_z = -i\frac{d}{dz}$, $-\infty < z < \infty$. En este sistema la supersimetría escondida $N = 2$ SUSY existe, nuevamente, solo para $2\alpha \in \mathbb{Z}$. En este caso el operador de graduación es

$$\Gamma = R_z R_\alpha, \quad \Gamma\psi(z, \varphi) = e^{-2i\alpha\varphi}\psi(-z, -\varphi). \quad (3.15)$$

Las supercargas son operadores no locales

$$Q_{\alpha,1} = (p_\varphi + \alpha) + i\Gamma p_z, \quad Q_{\alpha,2} = i\Gamma Q_{\alpha,1}, \quad (3.16)$$

$Q_{\alpha,a} = Q_{\alpha,a}^\dagger$, que generan una superálgebra de la forma (3.6).

3.2. Efecto Aharonov-Bohm en el plano

A continuación discutiremos brevemente la supersimetría escondida para el efecto AB en el plano sin grados de libertad fermiónicos. La supersimetría escondida como se discute en [31] es profundamente relacionada con la simetría de escala del sistema.

El sistema se caracteriza por una partícula que se mueve en el plano con un flujo no trivial que pasa por el origen, con el campo magnético B determinado con el

vector potencial

$$A^i = \frac{\alpha}{\hbar e} \epsilon^{ij} \frac{r^j}{r^2}, \quad \vec{r} = (x, y), \quad B = \alpha \delta(x, y), \quad (3.17)$$

así el Hamiltoniano que describe el sistema viene dado por

$$H_\alpha = \mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2 = -\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} (-i\partial_\varphi + \alpha)^2, \quad (3.18)$$

con

$$\mathcal{P}_x = -i\partial_x - \alpha \frac{y}{r^2}, \quad \mathcal{P}_y = -i\partial_y + \alpha \frac{x}{r^2}, \quad (3.19)$$

y donde usamos las coordenadas polares $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Es importante notar que como nuestro objetivo es analizar la existencia de supersimetría escondida bosonizada, es esencial tomar en cuenta y fijar las extensiones autoadjuntas sobre las cual trabajaremos, que definen diferentes propiedades del comportamiento de las funciones de onda. Esto quiere decir que en el fondo el Hamiltoniano no determina completamente la dinámica de la partícula, hasta que una vez hemos escogido su dominio de definición. Físicamente esto corresponde a realizar diferentes condiciones de impenetrabilidad en la región $x = y = 0$. Para los detalles tanto técnicos como referencias correspondientes, ver [31].

La integral *trivial* de movimiento \mathcal{R} no local de rotación en π ,

$$\mathcal{R} f(x, y) = f(-x, -y), \quad \text{or} \quad \mathcal{R} f(r, \varphi) = f(r, \varphi + \pi), \quad (3.20)$$

es unitaria, satisface la relación $\mathcal{R}^2 = 1$, y conmuta con el Hamiltoniano (3.18) por lo que la podemos identificar como un operador de graduación. Ahora podemos construir las integrales *no triviales* que juegan el rol de supercargas

$$Q_1 = \mathcal{P}_x + i\mathcal{R}(\alpha)\mathcal{P}_y, \quad \text{where} \quad \mathcal{R}(\alpha) = \begin{cases} \mathcal{R}, & \alpha \in (-1, 0) \text{ mod } 2, \\ \mathcal{R}, & \alpha \in \mathbb{Z}, \\ -\mathcal{R}, & \alpha \in (0, 1) \text{ mod } 2. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$Q_2 = i\mathcal{R}Q_1 \quad (3.22)$$

donde el signo depende del valor escogido del flujo magnético en las regiones indicadas, mientras que en el caso de flujo entero, el sistema es unitariamente equivalente a la partícula libre y ambos signos representan la misma física del problema. Todas las integrales de movimiento junto con el Hamiltoniano general una superálgebra $\mathcal{N} = 2$

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\delta_{ab}H_\alpha, \quad [H_\alpha, Q_a] = 0 \quad a, b = 1, 2. \quad (3.23)$$

Del punto de vista de las extensiones adjuntas esta supersimetría esta relacionada mano a mano con la simetría dinámica $so(2, 1)$ del sistema, ambas tienen lugar exactamente para las mismas configuraciones de las extensiones auto-adjuntas siendo bien definidas simultáneamente [31].

3.3. Potencial delta de Dirac

El potencial delta de Dirac juega un rol prominente en diversos modelos y fenómenos físicos [42, 43, 44, 45], como también se considera uno de los ejemplos más básicos al estudiar el problema de scattering en mecánica cuántica. Es por eso que es interesante investigar la presencia de una supersimetría escondida bosonizada en este modelo tan simple y bien conocido. Acaáparece una estructura supersimétrica diferente que para el efecto AB de estados ligados, pero similar a la de el problema de AB en el plano, como veremos ambas supercargas son de naturaleza no local [10, 11]. Es importante mencionar el origen de este tipo de supersimetría bosonizada, toda la estructura supersimétrica nace de la forma estudiada en [11], donde el caso de potencial delta de Dirac aparece como un caso particular no trivial.

El Hamiltoniano con potencial unidimensional delta de Dirac viene dado por

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - 2\beta\delta(x) + \beta^2. \quad (3.24)$$

En el caso del potencial atractivo con $\beta > 0$, la energía del único estado ligado

$$\psi_0(x) = \sqrt{\beta}e^{-\beta|x|} \quad (3.25)$$

es igual a cero debido al valor especial del término constante en el Hamiltoniano. Para valores de energía $E > \beta^2$ las funciones de onda

$$\psi_k^{(+)}(x) = (e^{ikx} + re^{-ikx})\Theta(-x) + te^{ikx}\Theta(x) \quad (3.26)$$

y $\psi_k^{(-)}(x) = \psi_k^{(+)}(-x)$ corresponden a estados de scattering con ondas planas que vienen desde $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. Aca

$$k = \sqrt{E - \beta^2} > 0, \quad (3.27)$$

y $\Theta(x)$ es la función escalón de Heaviside ($\Theta(x) = 0$ para $x < 0$ y $\Theta(x) = 1$ para $x > 0$), mientras que

$$r(k) = -\beta/(\beta + ik) \quad \text{y} \quad t(k) = ik/(\beta + ik) \quad (3.28)$$

son los coeficientes de reflexión y transmisión. Teniendo un estado ligado singlete de energía cero y una doble degeneración de los niveles de energía en el sector continuo, tenemos una estructura de supersimetría escondida $N = 2$ no rota. Esta puede ser encontrada explícitamente identificando una reflexión R , $R\psi(x) = \psi(-x)$ como el operador de graduación. A diferencia del caso anterior de AB en un círculo, ambas supercargas

$$Q_1 = -i \left(\frac{d}{dx} + \beta\varepsilon(x)R \right), \quad Q_2 = iRQ_1, \quad (3.29)$$

$Q_a = Q_a^\dagger$, $\varepsilon(x) \equiv \Theta(x) - \Theta(-x)$ son no locales debido a la presencia en ellas del operador de reflexión. Usando la relación

$$\delta(x)R\psi(x) = \delta(x)\psi(x) \quad (3.30)$$

es posible ver que las supercargas impares junto con el Hamiltoniano par generan juntas la superálgebra $N = 2$ (3.6).

El estado base ligado (3.25) es aniquilado por ambas supercargas y es identificado como un estado tipo bosónico, $R\psi_0(x) = \psi_0(x)$. Parametrizando los coeficientes de reflexión y transmisión como $r = i \sin \gamma e^{i\gamma}$, $t = \cos \gamma e^{i\gamma}$, $\sin \gamma = \beta/\sqrt{E}$, $\cos \gamma = k/\sqrt{E}t$

es posible aprender que la información del problema de scattering esta codificada en la estructura de los estados de ondas planas

$$\tilde{\psi}_k^{(\pm)} \equiv \cos(\gamma + k|x|) \pm i \sin kx, \quad (3.31)$$

siendo autoestados de la supercarga Q_1 lineal en derivadas,

$$Q_1 \tilde{\psi}_k^{(\pm)} = \pm \sqrt{E} \tilde{\psi}_k^{(\pm)}. \quad (3.32)$$

La substitución $\beta \rightarrow -\beta$ nos otorga el caso del potencial repulsivo, para el cual el estado análogo de (3.25) no es normalizable. Este caso esta caracterizado por una supersimetría escondida $N = 2$ con una doble degeneración del espectro continuo con $E > \beta^2$. En el límite $\beta \rightarrow 0$ los estados de scattering $\psi_k^{(+)}(x)$ y $\psi_k^{(-)}(x)$ se transforman en ondas planas con $E > 0$, y la supersimetría escondida del potencial de delta se transforma en una supersimetría escondida $N = 2$ no rota de la partícula libre en una línea.

3.4. Potencial Pöschl-Teller

Ahora consideraremos el sistema cuántico exáctamente soluble de Pöschl-Teller hiperbólico [46, 47, 48, 49, 50], el cual tiene aplicaciones en varios problemas físicos. Este aparece, por ejemplo, en una forma de ecuación de estabilidad para soluciones solitónicas (kink) en teorías de campos en 1+1D de φ^4 y sine-Gordon [51]. También describe soluciones estáticas en el modelo de Gross-Neveu [52, 53, 54] y fue usando en la investigación del fenómeno de condesación de taquiones en teorías de gauge dinámicas de cuerdas [55, 56]. Este sistema también juega un rol fundamental en el método de transformación inversa de scattering en ecuaciones de evolución no lineales [26, 57].

Una partícula cuántica que se mueve en el eje real bajo la influencia del potencial de Pöschl-Teller (PT) es descrita por el Hamiltoniano

$$H_m = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m(m+1)}{\cosh^2 x}. \quad (3.33)$$

donde m puede ser considerado como un parámetro real, pero cuando toma valores enteros $m \in \mathbb{Z}$, el sistema adquiere una naturaleza muy especial, el sistema (3.33) es *reflectionless*, es decir, el coeficiente de reflexión es igual a cero. A continuación explicaremos algunos detalles de esta propiedad y del sistema en sí, asumiendo que m toma valores enteros. En el caso $m = 0$ corresponde a una partícula libre. El Hamiltoniano (3.33) satisface la identidad

$$H_m = H_{-(m+1)}. \quad (3.34)$$

En términos de los operadores diferenciales de primer orden

$$\mathcal{D}_m = \frac{d}{dx} + m \tanh x, \quad \mathcal{D}_{-m} = -\mathcal{D}_m^\dagger, \quad (3.35)$$

el operador de segundo orden (3.33) puede ser representado en la forma

$$H_m = -\mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_m - m^2, \quad (3.36)$$

donde (3.34) puede ser reescrito equivalentemente de la forma

$$\mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m+1}\mathcal{D}_{-m-1} + (2m + 1). \quad (3.37)$$

Usando esta identidad y (3.36), uno puede chequear que se cumplen las siguientes relaciones de intertwining (2.6)

$$\mathcal{D}_m H_m = H_{m-1} \mathcal{D}_m, \quad \mathcal{D}_{-m} H_{m-1} = H_m \mathcal{D}_{-m}. \quad (3.38)$$

Estas relaciones pueden ser comprendidas del punto de vista de las transformaciones de Crum-Darboux [26]. En el caso de (3.38), el operador de primer orden \mathcal{D}_m aniquila el estado base sin nodos $\cosh^{-m} x$ del Hamiltoniano H_m con autovalor $-m^2$, por lo tanto H_{m-1} tiene el mismo espectro que H_m exceptuando el autovalor $-m^2$. Además las relaciones (3.38) reflejan la propiedad *shape-invariance* del sistema de Pöschl-Teller. La transformación de primer orden de Darboux generada por el operador

\mathcal{D}_m produce para el Hamiltoniano $H = H_m$ una pareja \tilde{H} , la cual el potencial tiene la misma forma pero con el parámetro m desplazado en uno, es decir, $\tilde{H} = H_{m-1}$.

Mediante aplicaciones repetidas de (3.38), podemos obtener relaciones de orden superior de Crum-Darboux (2.26),

$$(\mathcal{D}_{m-l} \dots \mathcal{D}_{m-1} \mathcal{D}_m) H_m = H_{m-l-1} (\mathcal{D}_{m-l} \dots \mathcal{D}_{m-1} \mathcal{D}_m), \quad (3.39)$$

$$(\mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-(m-1)} \dots \mathcal{D}_{-(m-l)}) H_{m-l-1} = H_m (\mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-(m-1)} \dots \mathcal{D}_{-(m-l)}). \quad (3.40)$$

En el caso particular $l = m - 1$, la relación (3.40) toma la forma

$$(\mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-(m-1)} \dots \mathcal{D}_{-1}) H_0 = H_m (\mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-(m-1)} \dots \mathcal{D}_{-1}), \quad (3.41)$$

la cual significa que el sistema (3.33) es casi isospectral al sistema de la partícula libre. Haciendo uso de esto, es posible obtener los estados de scattering para el sistema *reflectionless* PT (RPT) (3.33), a partir de las autoestados de ondas planas de la partícula libre

$$\psi_m^{(\pm\kappa)}(x) = \mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-m+1} \dots \mathcal{D}_{-1} \cdot \exp(\pm i\kappa x). \quad (3.42)$$

De acuerdo a (3.41) y (3.42), los valores de energía positivos del sistema (3.33), $E_{m,k} = \kappa^2$ con $\kappa > 0$, son doblemente degenerados, mientras que el estado de energía igual a cero con $\kappa = 0$ corresponde a un estado singlete

$$\psi_m^{(\pm 0)}(x) \equiv \psi_{m;m}(x) = (\mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-m+1} \dots \mathcal{D}_{-1}) \cdot 1. \quad (3.43)$$

La función $\cosh^{-m} x$ es el modo cero del operador de primer orden \mathcal{D}_m . En correspondencia con (3.36), este estado describe un estado ligado del sistema RPT con energía $E_{m;0} = -m^2$. Esta observación en conjunto con la relación (3.40) tomada para $l = 0, \dots, m - 2$ nos permite encontrar el conjunto completo de m estados ligados

del sistema RPT (3.33),

$$\psi_{m;0}(x) = \cosh^{-m} x, \quad \psi_{m;n}(x) = \mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_{-m+1}\dots\mathcal{D}_{-m+n-1} \cosh^{n-m} x, \quad n = 1, \dots, m-1. \quad (3.44)$$

La extensión de la fórmula (3.44) para $n = m$ ($l = m - 1$) reproduce el estado singlete (3.43) de la parte continua del espectro. Las energías de todos los $m + 1$ estados singletes (3.44) y (3.43) vienen dadas por

$$E_{m;n} = -(m - n)^2, \quad n = 0, \dots, m. \quad (3.45)$$

La doble degeneración en los estados del sector continuo del espectro, propiedad típica de la supersimetría usual $N = 2$, y la presencia de $m + 1 > 1$ estados singletes indican la presencia de una supersimetría no lineal en el sistema (3.33). Las supercargas correspondientes pueden ser fácilmente identificadas. Aplicando la transformación de Crum-Darboux (3.40) de orden $2m + 1$ correspondiente a $l = 2m$ y tomando en cuenta la relación (3.34), es posible encontrar que el sistema RPT (3.33) esta caracterizado por una integral local

$$\mathcal{A}_{2m+1} = \mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_{-m+1}\dots\mathcal{D}_0\dots\mathcal{D}_{m-1}\mathcal{D}_m, \quad [\mathcal{A}_{2m+1}, H_m] = 0, \quad (3.46)$$

que es un operador diferencial de orden $2m + 1$. Esta integral no trivial forma junto al Hamiltoniano H_m el Lax Pair (o Par de Lax) $(\mathcal{A}_{2m+1}, H_m)$ de la ecuación KdV de orden m . El operador \mathcal{A}_{2m+1} es un operador diferencial impar, mientras que el Hamiltoniano (3.33) es par. Identificando nuevamente el operador de reflexión R como operador de graduación y las integrales

$$Z_1 = i^{2m+1}\mathcal{A}_{2m+1}, \quad Z_2 = iRZ_1, \quad (3.47)$$

como supercargas hermíticas, encontramos que el sistema RPT esta caracterizado

por una supersimetría no lineal $N = 2$

$$[Z_a, H_m] = 0, \quad \{Z_a, Z_b\} = 2\delta_{ab}P_{2m+1}(H_m), \quad (3.48)$$

donde $P_{2m+1}(H_m)$ es un polinomio en el Hamiltoniano de orden $2m + 1$. Su forma explícita puede ser encontrada con la ayuda de la relación (3.37),

$$P_{2m+1}(H_m) = (H_m - E_{m;m}) \prod_{n=0}^{m-1} (H_m - E_{m;n})^2, \quad (3.49)$$

donde $E_{m;n}$ son las energías (3.45) de los estados singletes. Todos los estados singletes, (3.43) y (3.44) son aniquiliados por las supercargas Z_a , mientras que otros m estados modos cero de Z_a son estados no físicos [34, 36].

Los estados que corresponden al sector de scattering son autoestados de la supercarga local Z_1

$$Z_1 \psi_m^{(\pm\kappa)}(x) = \kappa E_1(\kappa) E_2(\kappa) \dots E_l(\kappa) \psi_m^{(\pm\kappa)}(x), \quad (3.50)$$

donde $E_n(\kappa) \equiv \kappa^2 + n^2$, $n = 1, \dots, m$. Los estados $\psi_m^{(+\kappa)}$ y $\psi_m^{(-\kappa)}$ con $\kappa > 0$ forman un doblete supersimétrico.

La información del problema de scattering puede ser extraída de los autoestados de la supercarga Z_1 . Tomando los límites $x \rightarrow \mp\infty$ en (3.42), se obtiene $\psi_m^{(+\kappa)}(x) \rightarrow A_l^\mp(\kappa) e^{i\kappa x}$,

$$A_l^\mp(\kappa) = (i\kappa \pm l)(i\kappa \pm (l-1)) \dots (i\kappa \pm 1). \quad (3.51)$$

Como resultado encontramos que el coeficiente de transmisión es

$$t_l(\kappa) = A_l^+(\kappa)/A_l^-(\kappa), \quad (3.52)$$

el cual puede ser presentado en la forma

$$t_l(\kappa) = \exp(-2i(\delta_{1,\kappa} + \dots \delta_{l,\kappa})), \quad e^{-i\delta_{n,\kappa}} = (n\omega - i\kappa)/\sqrt{E_{n,\kappa}}, \quad (3.53)$$

donde es posible observar que su modulo es igual a uno y por lo tanto el coeficiente de reflexión es igual a cero es decir el sistema es *reflectionless* así como lo es la partícula libre.

La integral no trivial (3.46) tiene un sentido de una integral \mathcal{D}_0 del sistema de la partícula libre H_0 transferida al sistema RPT H_m por medio de transformaciones de Crum-Darboux. De hecho, multiplicando la relación $H_0\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0H_0$ desde la izquierda por el operador $\mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_{-m+1}\dots\mathcal{D}_{-1}$, y por la derecha por $\mathcal{D}_1\dots\mathcal{D}_{m-1}\mathcal{D}_m$, usando la relación de intertwining de la izquierda de (3.41), y de la derecha su forma conjugada, obtenemos $[\mathcal{A}_{2m+1}, H_m] = 0$.

3.5. Potencial de Lamé

La ecuación de Lamé apareció primero en la solución de la ecuación de Laplace mediante separación de variables en coordenadas elipsoidales [58], una de sus aplicaciones iniciales fue en el problema cuántico del trompo de Euler [59]. Actualmente juega un rol prominente en Física apareciendo en diversas teorías como modelos cristalinos en física del estado sólido [60,61], sistemas cuánticos exacta y cuasi-exactamente solubles [62, 63], sistemas integrables y solitones [64, 57], mecánica cuántica supersimétrica [27,65], monópolos BPS [66], instantones y sphalerons [67,68], teoría clásica de campos de Ginzburg-Landau [69], Josephson junctions [70], problemas de magnetostática [71], cosmologías inhomogéneas [72], teorías de Kaluza-Klein [73], caos [74], y teorías modernas de precalentamiento despues de la inflación [75], entre otras.

Generalmente la ecuación de Lamé aparece en la literatura en Física en su forma jacobiana de la ecuación de Schrödinger unidimensional con un potencial doblemente periódico

$$H_m^L \Psi = E\Psi, \quad H_m^L = -\frac{d^2}{dx^2} + j(j+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k), \quad (3.54)$$

donde $\operatorname{sn}(x, k) \equiv \operatorname{sn} x$ es el seno elíptico de Jacobi, una función impar, con el parámetro modular k ($0 < k < 1$) y periodos real e imaginarios $4\mathbf{K}$ y $2i\mathbf{K}'$, donde

$\mathbf{K} = \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi$ es la integral elíptica completa de primera especie y $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(k')$, $k'^2 = 1 - k^2$ [58, 76].

Una notable propiedad de la ecuación de Lamé aparece para valores enteros del parámetro $j = m$, $m \in \mathbb{Z}$, en este caso el potencial se transforma en un potencial *finite-gap*; el espectro tiene exactamente m gaps de energía que separan las $m + 1$ bandas de energías permitidas. Las $2m + 1$ autofunciones asociadas con los bordes $E_i(m)$, $i = 0, 1, \dots, 2m$ de las bandas de energías permitidas

$$[E_0, E_1] \cup [E_2, E_3] \cup \dots \cup [E_{2m}, \infty] \quad (3.55)$$

están dados en términos de los polinomios de Lamé de grado m en las funciones elípticas de Jacobi $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ y $\operatorname{dn} x$. Estos polinomios tienen periodo real, $4\mathbf{K}$ o $2\mathbf{K}$ y los niveles de energías del borde de las bandas son *no degenerados*. Los estados en el interior de las zonas permitidas están descritos por funciones cuasi-periódicas de Bloch-Floquet (las cuales pueden ser expresadas en términos de las funciones theta de Riemann) de cuasi-momentum $\kappa(E)$,

$$\Psi_E^\pm(x + 2\mathbf{K}) = \exp(\pm i\kappa(E)) \Psi_E^\pm(x). \quad (3.56)$$

Cada nivel de energía es *doblemente degenerado*. Para cualquier valor no entero del parámetro m , Eq. (3.54) tiene un número infinito de zonas permitidas y prohibidas.

Cuando el parámetro modular toma sus valores límites es posible obtener dos sistemas diferentes, pero como ya sabemos relacionados por medio de transformaciones de Crum-Darboux; la partícula libre y el potencial PT. Para $k = 0$ (y m finito), el término del potencial desaparece en H_m^L y el Hamiltoniano corresponde a la partícula libre, mientras que en el límite $k = 1$ el periodo real del potencial en (3.54) tiende a infinito, $\mathbf{K} = \infty$, $\mathbf{K}' = \frac{\pi}{2}$, y el Hamiltoniano se reduce al sistema de Pöschl-Teller (3.33) más una constante.

Dado que los periodos de la función elíptica $\operatorname{sn}^2 x$ son $2\mathbf{K}$ y $2i\mathbf{K}'$, mientras $\operatorname{sech}^2 x$ tiene periodo imaginario $i\pi$, el potencial de Lamé puede ser tratado como cierta

superposición periódica de potenciales PT [?]

$$H_m^L = -\frac{d^2}{dx^2} - m(m+1) \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}'}\right)^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}'} [x - 2l\mathbf{K}]\right) + C, \quad (3.57)$$

en donde C es cierta constante.

En analogía con el sistema PT, la doble degeneración de los niveles de energía al interior de las bandas es una característica propia de un sistema cuántico supersimétrico mientras que la presencia de $2m + 1$ estados singletes del borde de las bandas indica un posible carácter inusual y no lineal [13,12,30] de una supersimetría escondida.

Debido a la naturaleza *finite-gap* de la ecuación de Lamé para valores enteros de m , este sistema también está relacionado con la jerarquía KdV, por lo que existe una integral no trivial de orden $2m + 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2m+1}^L &= \frac{1}{\operatorname{cn}^{m+1} x} \left(\frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}\right)^{2m+1} \left(\frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx}\right)^{m+1} \frac{1}{\operatorname{cn}^m x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sn}^{m+1} x} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right)^{2m+1} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx}\right)^{m+1} \frac{1}{\operatorname{sn}^m x}. \end{aligned}$$

que en el límite $k = 1$ se reduce a la forma no periódica (3.46). Así, $(\mathcal{A}_{2m+1}^L, H_m^L)$ forman un par de Lax de la correspondiente jerarquía KdV de orden m . Recordando que la ecuación de Lamé es par respecto a reflexiones, mientras que la integral de movimiento \mathcal{A}_{2m+1}^L anticonmuta con el operador de reflexión

$$[H_m^L, R] = 0, \quad \{\mathcal{A}_{2m+1}^L, R\} = 0 \quad (3.58)$$

es posible identificar como las supercargas de manera análoga a (3.47) escogiendo $Z_1 = i^{2m+1} \mathcal{A}_{2m+1}^L$ y $Z_2 = iRZ_1$. Ambas supercargas generan la superálgebra no lineal (3.48) pero ahora el cuadrado de las supercargas generan un polinomio con una estructura levemente diferente

$$P_{2m+1}(H^L) := \prod_{i=0}^{2n} (H_m^L - E_i(m)) \quad , \quad (3.59)$$

en donde el operador valuado se conoce como polinomio espectral de Lamé. De esta manera las integrales no triviales impares generan una *superalgebra polinomial* de orden $2m + 1$ siendo la simetría escondida del sistema *bosónico* (3.54).

El caso más sencillo no trivial viene dado cuando $m = 1$, que corresponde al sistema de Lamé de 1-gap en donde la integral $Z_1 = i^{2m+1} \mathcal{A}_{2m+1}^L$ se puede escribir alternativamente

$$-iZ_1 = \frac{d^3}{dx^3} + f \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}f', \quad (3.60)$$

donde

$$f := 1 + k^2 - 3k^2 \operatorname{sn}^2 x, \quad (3.61)$$

$f' = \frac{df}{dx}$. La función elíptica doblemente periódica con periodos $2\mathbf{K}$ y $2i\mathbf{K}'$ satisface la ecuación de una curva elíptica

$$(f')^2 = \frac{4}{3}(a_1 - f)(f - a_2)(f - a_3), \quad (3.62)$$

cuyas raíces características son

$$\begin{aligned} a_1 &= f(0) = 1 + k^2, & a_2 &= f(\mathbf{K}) = 1 - 2k^2, \\ a_3 &= f(\mathbf{K} + i\mathbf{K}') = k^2 - 2, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Diferenciando la Ec. (3.62) encontramos las identidades

$$f'' + 2f^2 = 2b^2, \quad D^l(D^2 + 2f)f = 0, \quad (3.64)$$

donde $b^2 = -\frac{1}{3}(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = k^4 - k^2 + 1$, $l = 1, 2, \dots$ Usando estas relaciones es posible demostrar que $Z_1^2 = P_3(H_1)$,

$$P_3(H_1) = (H_1 - E_0(1))(H_1 - E_1(1))(H_1 - E_2(1)). \quad (3.65)$$

Las energías

$$E_0(1) = k^2, \quad E_1(1) = 1, \quad E_2(1) = 1 + k^2 \quad (3.66)$$

corresponden a las autofunciones

$$\Psi_0^{(1)} = \operatorname{dn} x, \quad \Psi_1^{(1)} = \operatorname{cn} x, \quad \Psi_2^{(1)} = \operatorname{sn} x, \quad (3.67)$$

las cuales forman el subespacio de modos ceros de la supercarga Z_1 . Los estados en el interior de las zonas permitidas estan descritos por las autofunciones cuasi-periódicas

$$\Psi_E^\pm = \frac{H(x \pm \alpha)}{\Theta(x)} \exp(\mp x Z(\alpha)), \quad (3.68)$$

donde $H(x)$, $\Theta(x)$ y $Z(x)$ son las funciones de Jacobi Eta, Theta y Zeta respectivamente, mientras que el parámetro α esta relacionado con el autovalor de energía E por medio de la ecuación

$$E = \operatorname{dn}^2 \alpha + k^2, \quad (3.69)$$

para más detalles mirar [58]. Estos estados son autoestados de la supercarga

$$Z_1 \Psi_E^\pm = \pm \sqrt{P_3(E)} \Psi_E^\pm. \quad (3.70)$$

Antes de pasar a la discusión de caso general de sistemas finite gap, haremos algunos comentarios acerca de la naturaleza de la supersimetría escondida y de algunos sistemas relacionados con el sistema de Lamé.

El carácter no lineal de la supercargas locales y la supersimetría del sistema (3.54) es reminiscente de una simetría no lineal de una partícula en el potencial de Coulomb generada por el vector integral de Laplace-Runge-Lenz y de un oscilador anisotrópico con frecuencias inconmensurables [6]. A continuación clarificaremos el cuadro dinámico detrás de la supersimetría escondida teniendo en mente la analogía con el oscilador anisotrópico. Para el caso 1-gap, el Hamiltoniano (3.54) puede ser factorizado en tres maneras posibles:

$$H_1^L = A_d^\dagger A_d + k^2 = A_c^\dagger A_c + 1 = A_s^\dagger A_s + 1 + k^2, \quad (3.71)$$

en donde

$$A_d = \frac{d}{dx} - (\ln \operatorname{dn} x)', \quad A_s = \frac{d}{dx} - (\ln \operatorname{sn} x)', \quad A_c = \frac{d}{dx} - (\ln \operatorname{cn} x)', \quad (3.72)$$

que satisfacen

$$A_d \operatorname{dn} x = 0, \quad A_s \operatorname{sn} x = 0, \quad A_c \operatorname{cn} x = 0. \quad (3.73)$$

Escribiendo las ecuaciones de movimiento de Heisenberg de A_d y A_s^\dagger ,

$$i\dot{A}_d = \omega_d(x)A_d, \quad i\dot{A}_s^\dagger = -A_s^\dagger\omega_s(x), \quad (3.74)$$

$\omega_d(x) = -2(\ln \operatorname{dn} x)''$, $\omega_s(x) = -2(\ln \operatorname{sn} x)''$. Definiendo el operador $A_{s/d} = D - (\ln \operatorname{sn} x)' + (\ln \operatorname{dn} x)'$, para el cual

$$i\dot{A}_{s/d} = \omega_s(x)A_{s/d} - A_{s/d}\omega_d(x). \quad (3.75)$$

Entonces la relación

$$iA_s^\dagger A_{s/d} A_d = Q_1 \quad (3.76)$$

nos da una de las seis posibles factorizaciones de la supercarga (3.60). Los operadores A_c , A_s , $A_{s/d}$ y las frecuencias instantáneas asociadas tienen singularidades en eje real, las cuales son canceladas en los operadores H_1^L y Z_1 . Para $m > 1$ el mismo mecanismo dinámico subyace la estructura de las supercargas y sus posibles factorizaciones.

En el límite $k = 1$ sabemos que el potencial $V_n^L(x) = n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x$ se reduce al potencial de PT, mientras que para $k = 0$ obtenemos la partícula libre, ya que $V_n^L(x)$ depende de k por un factor multiplicativo. Pero además podemos desplazar el argumento del potencial de Lamé y encontrar nuevos sistemas, en particular desplazando por la mitad del periodo real $x \rightarrow x + \mathbf{K}$ obtenemos un sistema regular el cual es posible asociar con el original por medio de una transformación de Darboux usual. El esquema (3.3) describe estas diferentes relaciones.

Desplazando la ecuación de Lamé en la mitad de su periodo imaginario $x \rightarrow x + i\mathbf{K}'$ como también en un desplazamiento “diagonal”,

$$x \rightarrow x + \mathbf{K} + i\mathbf{K}', \quad (3.77)$$

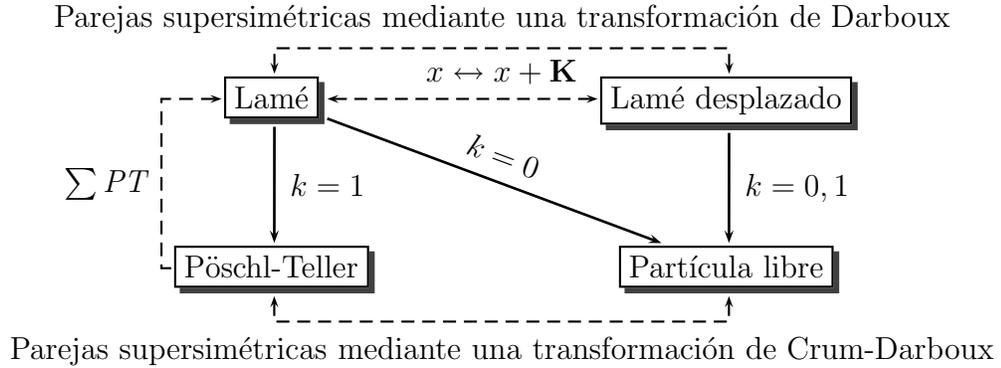


Figura 3.3: Relaciones entre sistemas con supersimetría bosonizada

se obtienen sistemas con singularidades en el eje real, resumido en la siguiente Tabla (donde también se consideraron los casos límites con $k = 0, 1$)

	$V_n^L(x)$	$V_n^L(x + \mathbf{K})$	$V_n^L(x + i\mathbf{K}')$	$V_n^L(x + \mathbf{K} + i\mathbf{K}')$
k	$n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x$	$-n(n+1)k'^2 \operatorname{dn}^{-2}(x, k)$	$\frac{n(n+1)}{\operatorname{sn}^2 x}$	$n(n+1) \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}$
$k = 1$	$-n(n+1) \operatorname{sech}^2 x$	b_2	$\frac{n(n+1)}{\sinh^2 x}$	b_4
$k = 0$	b_1	b_3	$\frac{n(n+1)}{\sin^2 x}$	$\frac{n(n+1)}{\cos^2 x}$

donde b_i , $i = 1, \dots, 4$, son algunas constantes. Los potenciales nuevos que aparece corresponden a Pöschl-Teller trigonométrico y la contraparte singular del PT hiperbólico. Las singularidades que tienen estos sistemas vienen de los polos de las funciones elípticas. Todas las supercargas de la supersimetría escondida bosonizada pueden ser obtenidas desde la supercarga (3.58) del sistema original. Sin embargo, para los potenciales singulares la supersimetría tiene una naturaleza ficticia, tal como en el modelo conforme con supersimetría no lineal [33]. En sistemas con supersimetría ficticia las supercargas conmutan con los Hamiltonianos correspondientes pero actuando sobre estados físicos producen estados no normalizables que violan las condiciones de borde y no son estados físicos. Cabe mencionar que debido a estas

razones no estudiaremos mas en detalle este tipo de sistemas.

3.6. Potenciales finite gap

En esta Sección discutiremos las propiedades generales de un sistema finite-gap periódico con un potencial suave y mostraremos que cualquier potencial n -gap *par* esta caracterizado por una supersimetría escondida no lineal $N = 2$ de orden $2n + 1$. Los sistemas finite-gap subyacen la teoría de soluciones periódicas en sistemas integrables no lineales, incluyendo las ecuaciones Korteweg-de Vries, Schrödinger no lineal, Kadomtsev-Petviashvili y sine-Gordon [77, 57, 78, 79, 80]. Tanto el potencial PT y su generalización periódica Lamé corresponden a sistemas de esta naturaleza que corroboran las importantes aplicaciones en Física. Además, siendo sistemas analíticamente solubles también tienen aplicaciones en teoría de cuerdas [81], modelos matriciales [82], teoría de Yang-Mills supersimétrica [83, 84] y la dualidad AdS/CFT [85].

Consideremos un sistema cuántico descrito por el Hamiltoniano (2.1) con un potencial periódico real y *suave* $u(x)$,

$$u(x) = u(x + 2L) \quad (3.78)$$

La correspondiente ecuación de Schrödinger estacionaria,

$$H\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (3.79)$$

es conocida en la literatura como la ecuación de Hill, para esta escogemos una base real de soluciones, $\psi_1(x; E)$, $\psi_2(x; E)$. El operador de traslación sobre el periodo $2L$, o el operador de monodromía,

$$T\Psi(x) = \Psi(x + 2L), \quad (3.80)$$

conmuta con el Hamiltoniano H ,

$$[T, H] = 0. \quad (3.81)$$

Este operador preserva un espacio vectorial 2-dimensional de soluciones de (3.79) y puede ser representado por la matriz de monodromía de segundo orden $M(E)$,

$$T\psi_a(x; E) = \psi_a(x + 2L; E) = M_{ab}(E)\psi_b(x; E). \quad (3.82)$$

El cambio de base

$$\psi_a(x; E) \rightarrow \tilde{\psi}_a(x; E) = A_{ab}\psi_b(x; E), \quad \det A \neq 0, \quad (3.83)$$

genera una conjugación de la matriz de monodromía

$$M(E) \rightarrow \tilde{M}(E) = AM(E)A^{-1} \quad (3.84)$$

pero no cambia su determinante $\det M(E) = \det \tilde{M}(E)$, ni su traza $\text{Tr}M(E) = \text{Tr}\tilde{M} \equiv \mathcal{D}(E)$, ni autovalores, dados por las soluciones de la ecuación característica

$$\det(M(E) - \mu I) = 0. \quad (3.85)$$

Escogiendo un base particular de soluciones, fijada por las condiciones

$$\psi_1(0; E) = 1, \quad \psi_1'(0; E) = 0, \quad \psi_2(0; E) = 0, \quad \psi_2'(0; E) = 1, \quad (3.86)$$

donde “'” denota derivación en la variable x . Diferenciando la relación (3.82) con respecto a x y poniendo despues $x = 0$ en (3.82) y en la relación derivada, encontramos que la forma de la matriz de monodromía en la base (3.86) es,

$$M(E) = \begin{pmatrix} \psi_1(2L; E) & \psi_1'(2L; E) \\ \psi_2(2L; E) & \psi_2'(2L; E) \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

El Wronskiano $W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$ de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.79) toma valores distintos de cero, independiente de x , en particular, en la base (3.86) es igual a uno. Así la forma explícita de la matriz de monodromía real (3.87) nos muestra que el valor de su determinante es independiente de la base y no depende tampoco de la energía, $\det M(E) = 1$, por lo que $M(E) \in sl(2, \mathbb{R})$.

El cambio $x = 0 \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ en las relaciones (3.86) nos otorga una familia uniparamétrica de las bases, $\psi_a(x; x_0, E) = A(x_0)_{ab}\psi_b(x; E)$, $A(x_0) \in sl(2, \mathbb{R})$, jugando un importante rol en la teoría de sistemas cuánticos periódicos [77]- [78]. En tal base, la matriz de monodromía incluirá una dependencia adicional en el punto x_0 , $M(E, x_0) \in sl(2, \mathbb{R})$.

Tomando en cuenta que $\det M = 1$, la ecuación característica (3.85) se reduce a $1 - \mathcal{D}(E)\mu + \mu^2 = 0$ y los autovalores, independiente de la base, de la matriz de monodromía estan dados en terminos de su traza,

$$\mu_{1,2}(E) = \frac{1}{2}\mathcal{D}(E) \pm \sqrt{\mathcal{D}(E)^2/4 - 1}. \quad (3.88)$$

La traza de la matriz de monodromía es llamada en la literatura como la función de Lyapunov, determinante de Hill o discriminante de la ecuación de Schrödinger. En correspondencia con $\det M(E) = 1$, se satisface $\mu_1\mu_2 = 1$.

Autoestados comunes de H y T estan descritos por las funciones de Bloch-Floquet, que satisfacen la relación

$$T\psi_{\pm}(x; E) = \exp(\pm i\kappa(E))\psi_{\pm}(x; E), \quad (3.89)$$

donde $\mu_{1,2}(E) = \exp(\pm i\kappa(E))$, y el cuasi-momentum $\kappa(E)$ esta dado por

$$2 \cos \kappa(E) = \mathcal{D}(E). \quad (3.90)$$

Los valores del discriminante $\mathcal{D}(E)$ definen las propiedades espectrales de la ecuación de Schrödinger periódica. Para algunas energías $E \in (E_{2i-1}, E_{2i})$, $i = 0, \dots, E_i < E_{i+1}$, $E_{-1} = -\infty$, el cuasi momentum $\kappa(E)$ toma valores complejos y $|\mathcal{D}(E)| > 2$. Las soluciones que corresponden a estos valores de energía no son físicamente aceptables debido a que divergen en $x = -\infty$ o $+\infty$. Para estos valores de energía tenemos una banda prohibida, un gap de energía, como lo ilustra la Fig. 3.4.

En el caso general, un sistema cuántico periódico tiene un número infinito de gaps. El ancho de los gaps decrece rápidamente a medida que la energía crece, mientras que la tasa de decrecimiento depende de la suavidad de el potencial. En el

caso de potenciales analíticos los gaps decrecen exponencialmente. Las energías para cual $|\mathcal{D}(E)| \leq 2$, definen las bandas permitidas o zonas permitidas. Acá, el cuasi-momentum $\kappa(E)$ toma valores reales, y los números complejos $\exp(\pm i\kappa(E))$ tienen módulo igual a uno. Todos los niveles de energía con $|\mathcal{D}(E)| < 2$ son doblemente degenerados, pero para $|\mathcal{D}(E)| = 2$ tenemos dos casos esencialmente diferentes, Para las energías E , que separan las zonas permitidas de las prohibidas el valor correspondiente del autovalor de la matriz de monodromía es *no-degenerado*, la matriz M tiene la forma de una matriz de Jordan y un estado físico singlete del borde de una banda es periódico $\exp(i\kappa(E)) = +1$, si $\mathcal{D}(E) = 2$, mientras que $\mathcal{D}(E) = -2$ un estado singlete es antiperiódico, $\exp(i\kappa(E)) = -1$. Cuando $|\mathcal{D}(E)| = 2$ el autovalor de la matriz de monodromía es doblemente degenerado, M es diagonalizable sobre los los estados linealmente independiente de Bloch-Floquet, los cuales son periódicos si $\mathcal{D}(E) = 2$ o antiperiódicos cuando $\mathcal{D}(E) = -2$. Esta segunda situación, corresponde a los puntos $E_3 = E_4$ y $E_9 = E_{10}$ en la Fig. 3.4, que representa cuando una banda prohibida desaparece.

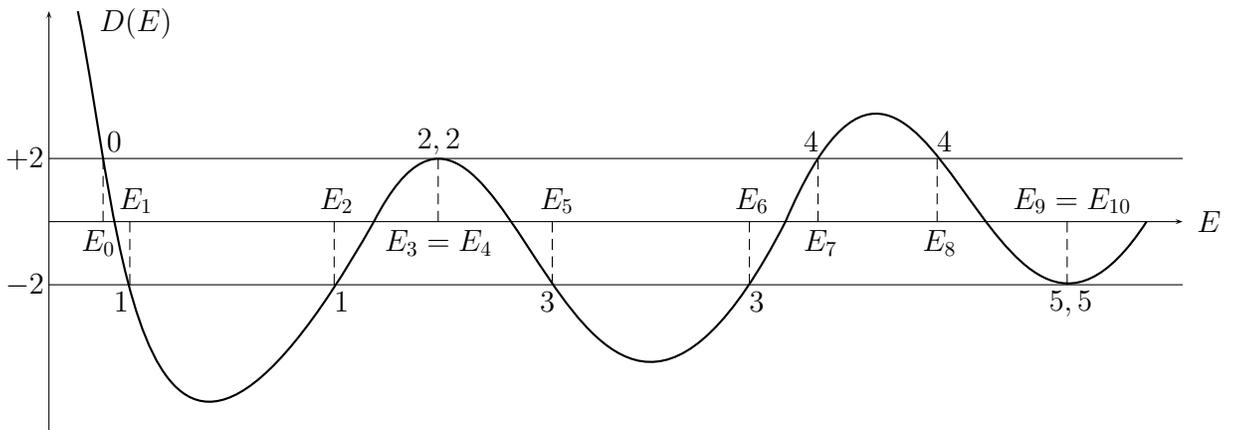


Figura 3.4: Discriminante $\mathcal{D}(E)$ en un caso genérico de un potencial periódico

Resumiendo, el intervalo $(-\infty, E_0)$ constituye la banda prohibida mas baja. Las

bandas permitidas con $|\mathcal{D}(E)| \leq 2$ están separadas por bandas prohibidas, o gaps de energía. Todos los niveles de energía en el interior de las bandas permitidas tiene una degeneración doble, mientras que los estados en los bordes son singletes.

De acuerdo con el teorema de oscilación [86], autoestados comunes de H y el operador de monodromía T con energías $E_0 < E_1 \leq E_2 < E_3 \leq E_4 < E_5 \leq E_6 < \dots$ tal que $|\mathcal{D}(E_k)| = 2$, están descritos por funciones de onda que están caracterizadas por los periodos $2L, 4L, 4L, 2L, 2L, 4L, 4L\dots$ y por el número de nodos en el periodo $2L$ igual a $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$, como se puede apreciar en la Fig. 3.4. El número impar de nodos corresponde a estados antiperiódicos, mientras que los estados periódicos tienen un número par de nodos en el periodo $2L$. Los estados singletes de los bordes de la misma banda prohibida tienen el mismo número de nodos y la misma periodicidad aunque sus nodos están en posiciones alternadas.

En algunos sistemas periódicos el número infinito de bandas se unen de tal manera que solamente un número finito de gaps permanece en el espectro. Tales potenciales se conocen como finite-gap. El caso más simple es el caso 0-gap que corresponde a una partícula libre, en donde el potencial en (2.1) es $u(x) = \text{const}$. De aquí en adelante no contaremos la banda prohibida $(-\infty, E_0)$ que siempre se presenta en cualquier sistema periódico con un potencial suave. Para la ecuación de Schrödinger (2.1) con un potencial finite-gap, el espectro y sus autofunciones pueden ser presentadas en forma analítica. En este sentido, en contraste con el modelo de Kronig-Penney, los potenciales finite-gap juegan el mismo rol en física del estado sólido como el problema de Kepler en teoría atómica. Teniendo en mente que para potenciales analíticos el tamaño de los gaps decrece exponencialmente cuando la energía crece, cualquier potencial periódico puede ser aproximado por un potencial finite gap si se desprecian los gaps más pequeños.

Supongamos que tenemos un potencial periódico $u(x)$ de naturaleza finite-gap. *Adicionalmente*, asumimos que es una función *par*,

$$u(x) = u(-x). \quad (3.91)$$

Así, el operador de reflexión es una integral no local de movimiento $[R, H] = 0$. La simetría de periodicidad y paridad implica que el sistema tiene una simetría de reflexión adicional

$$u(L + x) = u(L - x). \quad (3.92)$$

El espectro $\sigma(H)$ de un sistema finite-gap no trivial ($n > 0$), está caracterizado por la estructura de bandas

$$\sigma(H) = [E_0, E_1] \cup \dots \cup [E_{2n-2}, E_{2n-1}] \cup [E_{2n}, \infty), \quad (3.93)$$

donde $E_0 < E_1 < \dots < E_{2n}$ son las energías no degeneradas correspondientes a los $2n + 1$ estados del borde de bandas *singletes*

$$\Psi_i(x), \quad H\Psi_i = E_i\Psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n. \quad (3.94)$$

Como el operador de reflexión es una integral cada estado *singlete* $\Psi_i(x)$ tiene una paridad definida, $+1$ o -1 . Los niveles de energía en el interior de las bandas, $E \in (E_{2i}, E_{2i+1})$, $i = 0, \dots, n$, son doblemente degenerados y cierta combinación de los correspondientes estados de Bloch-Floquet son autoestados de R con autovalor $+1$ y -1 . Estas propiedades indican la presencia de una *supersimetría escondida bosonizada* $N = 2$ para cualquier sistema finite-gap, para el cual el operador R tiene que jugar el rol de operador de graduación. La presencia de $2n + 1 \geq 3$ estados *singletes* es un indicio, sin embargo, acerca de la naturaleza no lineal de la supersimetría. Las supercargas y la forma de la correspondiente superálgebra no lineal son identificadas de las propiedades de los sistemas finite-gap.

Cualquier sistema finite-gap está caracterizado por la presencia de una integral de movimiento no trivial en la forma de un operador diferencial anti-hermítico de orden $2n + 1$,

$$A_{2n+1} = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} + c_2^A(x) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} + c_3^A(x) \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}} + \dots + c_{2n}^A(x), \quad (3.95)$$

donde los coeficientes de funciones $c_i^A(x)$ son reales. La ausencia del término proporcional a $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}$ en su estructura, $c_1^A(x) = 0$, esta determinada por la condición

$$[A_{2n+1}, H] = 0. \quad (3.96)$$

Los otros coeficientes $c_j^A(x)$ están fijos en la forma de polinomios del potencial $u(x)$ y sus derivadas [80]. Así, para un potencial periódico, A_{2n+1} es un operador periódico,

$$[A_{2n+1}, T] = 0. \quad (3.97)$$

(A_{2n+1}, H) es conocido como el Par de Lax de la ecuación Korteweg-de Vries de orden n . Una posible forma del potencial n -gap esta fija por una ecuación no lineal, la cual tiene un sentido de la n -ésima ecuación de la jerarquía estacionaria KdV [57, 80]. Esta ecuación puede ser representada alternativamente como

$$\tilde{L}(J\tilde{L})^n 1 = 0, \quad \tilde{L} = \frac{d^3}{dx^3} + 2(u\frac{d}{dx} + u'), \quad (3.98)$$

donde J es el operador de integración indefinida $J = \frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ [78].

La forma de un potencial 1 -gap esta fija por esta ecuación en una única manera $u(x) = 2k^2 \operatorname{sn}^2 x$, que es exactamente el potencial de Lamé (3.54). En el caso $n > 1$ la forma del potencial $u(x)$ no esta fija únicamente, incluso si esta restringido a una clase de funciones elípticas.

Los operadores mutuamente conmutantes A_{2n+1} y H satisfacen la relación

$$-A_{2n+1}^2 = P_{2n+1}(H), \quad P_{2n+1}(H) = \prod_{j=0}^{2n} (H - E_j), \quad (3.99)$$

donde $P_{2n+1}(H)$ es un polinomio espectral dado en términos de las energías no degeneradas. Esto esta en concordancia con el teorema de Burchnell-Chaundy [28, 87], el cual dice que si dos operadores diferenciales en x , A y B , de ordenes mutuamente primos, h y g respectivamente, conmutan $[A, B] = 0$, ellos satisfacen una relación $P(A, B) = 0$, donde P es un polinomio de orden g en A y de orden h en B . La

ecuación (3.99) corresponde a una curva elíptica espectral no degenerada de género n , ($E_i \neq E_j$ for $i \neq j$), asociada con un sistema n -gap periódico [77]- [78]. Debido a estas propiedades descritas, $u(x)$ se conoce también como un potencia finite-gap algebro-geométrico.

Como consecuencia de (3.99), el operador A_{2n+1} aniquila todos los $2n + 1$ estados singletes del borde de las bandas. De hecho, de $[A_{2n+1}, H] = 0$ tenemos que $A_{2n+1}\Psi_j = \alpha\Psi_j + \beta\Phi_j$, donde Ψ_j es una solución física ($T\Psi_j = \gamma\Psi_j$, $\gamma \in \{-1, 1\}$) y Φ_j es una solución no física correspondiente a la banda de energía E_j . Actuando por la izquierda por T , obtenemos que $\gamma A_{2n+1}\Psi_j = \gamma\alpha\Psi_j + \beta T\Phi_j$ y por lo tanto $\beta(\gamma T - 1)\Phi_j = 0$. Como Φ_j no es ni periódico ni anti-periódico la última ecuación puede ser satisfecha sí y solo sí $\beta = 0$. Entonces la ecuación equation (3.99) significa que $\alpha = 0$.

Consideremos el Wronskiano de los estados singletes $W^A \equiv W(\Psi_0, \dots, \Psi_{2n})$. En el caso general el Wronskiano de s funciones linealmente independientes que forman el núcleo de un operador diferencial lineal arbitrario de orden s , $\mathcal{L} = D^s + c_1(x)D^{s-1} + \dots$, satisface la identidad de Abel $W'(x) = -c_1(x)W$ [28]. Para el operador (3.95) el coeficiente $c_1^A(x) = 0$ y debido a la independencia lineal de los estados del borde de bandas singletes encontramos que

$$W^A(x) = C \neq 0, \quad (3.100)$$

donde C es una constante.

Cuando s modos ceros linealmente independientes φ_j , $j = 1, \dots, s$, del operador \mathcal{L} son conocidos, la forma de este operador puede ser reconstruída en estos términos. Los coeficientes $c_k(x)$ estan definidos por las relaciones (2.25). Como resultado, tomando en cuenta (3.100), encontramos que los coeficientes $c_{2r}^A(x)$ son funciones *impares* mientras que los coeficientes $c_{2r+1}^A(x)$ son funciones *pares* no singulares.

Por lo tanto la integral A_{2n+1} tiene paridad impar

$$\{R, A_{2n+1}\} = 0. \quad (3.101)$$

Introduciendo los dos operadores hermíticos

$$Z = Z_1 = iA_{2n+1}, \quad Z_2 = iRZ, \quad (3.102)$$

e identificandolos como supercargas impares podemos concluir que cualquier sistema finite-gap par con un potencial suave esta caracterizado por una supersimetría escondida bosonizada $N = 2$ de orden $2n + 1$

$$\{Z_a, Z_b\} = 2\delta_{ab}P_{2n+1}(H), \quad a, b = 1, 2. \quad (3.103)$$

3.7. Discusión

Como se discutió en este capítulo la supersimetría escondida bosonizada se presenta en diversos sistemas y explican diversas propiedades de los sistemas que la presentan, en particular el espectro y la degeneración de los sistemas bosónicos. La supersimetría escondida bosonizada aparece en Hamiltonianos de tipo Schrödinger, tanto en una como dos dimensiones. En el efecto AB de estados ligados una de las supercargas tiene naturaleza local mientras que la otra es no local ya que depende explícitamente del operador de reflexión twistado. Toda esta supersimetría solamente aparece para valores especiales del flujo magnético, valores tales que reflejan una degeneración especial en el espectro. En el caso del potencial delta de Dirac la supersimetría escondida es de otra forma con respecto al modelo de AB de estados ligados ya que ambas supercargas son integrales de movimiento no locales. Usando la estructura de supersimetría escondida, encontramos una forma diferente de estudiar el problema cuántico en sí. En el sistema reflectionless PT (RPT) la supersimetría es de forma no lineal (debido a la presencia de $n > 1$ estados singletes). Cabe mencionar que en este modelo existe una deformación de la simetría conforme $so(2, 1)$, la cual proviene de la relación del sistema PT con la partícula libre por medio de transformaciones de Crum-Darboux, en particular las integrales del álgebra deforma pueden ser obtenidas mediante aplicación de estas transformaciones a las integrales dinámicas

de la partícula libre. Dada la manera en la cual la álgebra es deformada, comienzan a aparecer numerosas integrales fermiónicas que tienen su análogo en la partícula libre como una simetría $osp(2|2)$. En este capítulo también se reveló la existencia de una supersimetría escondida bosonizada par cualquier sistema finite-gap invariante bajo reflexiones con respecto al origen. Como un ejemplo en dos dimensiones también se explicó la presencia de supersimetría escondida para el modelo planar del efecto AB, donde la supersimetría bosonizada esta íntimamente relacionada con la simetría conforme.

En esta instancia es natural preguntarse si es el único tipo de Hamiltonianos que presentan supersimetría escondida. Los sistemas finite-gap para el Hamiltoniano Bogoliubov-de Gennes [88], también presentan una supersimetría escondida [89] de una naturaleza similar a la que presenta el sistema de Schrödinger finite-gap pero con la diferencia que en este caso la supersimetría esta íntimamente relacionada con la jerarquía AKNS [57]. La supersimetría en el sistema Bogoliubov-de Gennes se manifiesta en una forma no lineal donde el orden de las supercargas depende de el número de estados singletes. Las simetrías de ambos sistemas están relacionadas justamente por tri-supersimetría y supersimetría escondida en diferentes formas dependiendo el caso finite-gap del Hamiltoniano Bogoliubov-de Gennes [89]. En el próximo capítulo veremos como están relacionado el sistema del potencial de delta de Dirac atractivo y repulsivo y bajo la luz de la supersimetría escondida revelaremos la tri-supersimetría.

Capítulo 4

Tri-supersimetría y el potencial delta de Dirac

Analizaremos a continuación la extensión mediante grados de libertad fermiónicos para el sistema (3.24) con $\beta > 0$. Para ellos podemos aplicar una transformación de Darboux A_1 al Hamiltoniano (3.24) que aniquile el único estado (3.25) ligado,

$$A_1 = \frac{d}{dx} + \beta\varepsilon(x), \quad A_1\sqrt{\beta}e^{-\beta|x|} = 0. \quad (4.1)$$

Como resultado en la relación de intertwining (2.6) obtenemos

$$\tilde{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + 2\beta\delta(x) + \beta^2. \quad (4.2)$$

que corresponde al potencial de Delta repulsivo. De los argumentos descritos en la Sección 2 es claro que los sistemas (3.24) y (4.2) son casi isospectrales; el espectro de (4.2) carece de un estado ligado a diferencia de (3.24). Así podemos identificar la estructura de supersimetría usual construyendo el super Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta^2 + 2\beta\delta(x)\sigma_3, \quad (4.3)$$

e identificando las supercargas

$$Q_1 = p\sigma_1 + \beta\varepsilon(x)\sigma_2, \quad Q_2 = i\sigma_3Q_1. \quad (4.4)$$

que generan la superálgebra

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\mathcal{H}\delta_{ab}, \quad [Q_a, \mathcal{H}] = 0, \quad a = 1, 2. \quad (4.5)$$

Las identidades de las matrices de Pauli, $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$, nos dan una representación alternativa de (4.4),

$$Q_1 = \sigma_1(p + i\beta\varepsilon(x)\sigma_3), \quad Q_2 = -\sigma_2(p + i\beta\varepsilon(x)\sigma_3), \quad (4.6)$$

en donde el superpotencial (2.17) es

$$W(x) = \beta\varepsilon(x). \quad (4.7)$$

Para la superálgebra $N = 2$ (4.5) el operador de \mathbb{Z}_2 -graduación Γ ,

$$\Gamma^2 = 1, \quad [\Gamma, H] = 0, \quad \{\Gamma, Q_a\} = 0, \quad (4.8)$$

es exactamente la matriz diagonal

$$\Gamma = \sigma_3. \quad (4.9)$$

Como sabemos de la Sección (3) la elección del operador de graduación como (4.9) no es única; si elegimos como el operador de graduación el operador de reflexión R ,

$$\Gamma = R, \quad (4.10)$$

el que satisface la relaciones (4.8), podemos agregar a este sistema superextendido las integrales de movimiento que provienen de (3.29), tanto para el caso atractivo como repulsivo, en forma de operadores no locales matriciales de forma diagonal

$$\tilde{Q}_1 = p + i\beta\varepsilon(x)R\sigma_3, \quad \tilde{Q}_2 = iR\tilde{Q}_1. \quad (4.11)$$

Estos operadores son raíces cuadradas del super Hamiltoniano

$$\tilde{Q}_1^2 = \tilde{Q}_2^2 = \mathcal{H} \quad (4.12)$$

y pueden ser identificadas como operadores \mathbb{Z}_2 - impares, es decir supercargas, para la elección (4.10), pero deben ser tratados como operadores \mathbb{Z}_2 -pares en el caso de elegir (4.9). En el primer caso, las supercargas (4.11) generan otra copia de la superálgebra $N = 2$.

Pero además existe una tercera posibilidad si identificamos como el operador de graduación

$$\Gamma = R\sigma_3. \quad (4.13)$$

Con respecto a esta graduación los operadores \tilde{Q}_a son impares mientras que, notablemente, Q_a son operadores pares.

A continuación estudiaremos el conjunto completo de integrales de movimiento del sistema, tanto pares e como impares, para cada una de los tres tipos distintos de graduación.

4.1. Graduación $\Gamma = R$

Escogiendo como operador de graduación (4.10), ambos conjuntos de integrales (4.4) y (4.11) son operadores impares, fijaremos esta graduación para analizar las simetrías del sistema. Con respecto a las otras dos graduaciones, uno de los 2 conjuntos de integrales deben ser tratadas como impares, mientras que el otro conjunto como pares. Estas diferentes alternativas serán consideradas separadamente, pero finalmente veremos que para los tres casos la estructura de la supersimetría completa resultante es la misma, módulo el Hamiltoniano.

Para la graduación (4.10), las integrales (4.4) y (4.11) son generadores fermiónicos, por lo tanto es necesario calcular el anticonmutador entre ellas, dando como resultado

$$\{Q_a, \tilde{Q}_1\} = 2S_a, \quad \{Q_a, \tilde{Q}_2\} = 0, \quad a = 1, 2, \quad (4.14)$$

donde

$$S_1 = \sigma_1 \mathcal{H} - \beta \varepsilon(x) Q_2 (1 + R), \quad S_2 = i\sigma_3 S_1. \quad (4.15)$$

Los operadores Hermíticos (4.15) tienen que ser tratados como nuevas integrales de movimiento. Entonces este proceso debe continuar: es necesario calcular los conmutadores de estas integrales pares de movimiento entre ellas mismas y con los operadores impares, etc. Como resultado, obtenemos una lista completa de integrales de movimiento impares (F_1, \dots, F_8) y pares ($\mathcal{H}, R, \Sigma_1, \Sigma_2, B_1, \dots, B_4$), las cuales pueden ser representadas en términos de los operadores $Q_1, \tilde{Q}_1, S_1, \sigma_3$ y R , tal como lo muestra la Tabla (4.1).

Integrales fermiónicas	$F_1 = Q_1$	$F_2 = R\sigma_3 Q_1$	$F_3 = Q_2 = i\sigma_3 Q_1$	$F_4 = iRQ_1$
	$F_5 = iR\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$	$F_6 = iR\sigma_3 \tilde{Q}_1$	$F_7 = \sigma_3 \tilde{Q}_1$	$F_8 = \tilde{Q}_1$
Integrales bosónicas	\mathcal{H}	$\Gamma = R$	$\Sigma_1 = \sigma_3$	$\Sigma_2 = R\sigma_3$
	$B_1 = Q_1 \tilde{Q}_1 = S_1$	$B_2 = i\sigma_3 S_1 = S_2$	$B_3 = RS_1$	$B_4 = iR\sigma_3 S_1$

Tabla 4.1: Integrales de movimiento para la graduación $\Gamma = R$

Las relaciones de anticonmutación entre las integrales fermiónicas están presentadas en la Tabla (4.2).

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
F_1	$2\mathcal{H}$	$2\Sigma_2\mathcal{H}$	0	0	0	$2B_4\mathcal{H}^\lambda$	0	$2B_1\mathcal{H}^\lambda$
F_2	$2\Sigma_2\mathcal{H}$	$2\mathcal{H}$	0	0	$-2B_2\mathcal{H}^\lambda$	0	$-2B_3\mathcal{H}^\lambda$	0
F_3	0	0	$2\mathcal{H}$	$2\Sigma_2\mathcal{H}$	0	$-2B_3\mathcal{H}^\lambda$	0	$2B_2\mathcal{H}^\lambda$
F_4	0	0	$2\Sigma_2\mathcal{H}$	$2\mathcal{H}$	$2B_1\mathcal{H}^\lambda$	0	$-2B_4\mathcal{H}^\lambda$	0
F_5	0	$-2B_2\mathcal{H}^\lambda$	0	$2B_1\mathcal{H}^\lambda$	$2\mathcal{H}^\gamma$	$2\Sigma_1\mathcal{H}^\gamma$	0	0
F_6	$2B_4\mathcal{H}^\lambda$	0	$-2B_3\mathcal{H}^\lambda$	0	$2\Sigma_1\mathcal{H}^\gamma$	$2\mathcal{H}^\gamma$	0	0
F_7	0	$-2B_3\mathcal{H}^\lambda$	0	$-2B_4\mathcal{H}^\lambda$	0	0	$2\mathcal{H}^\gamma$	$2\Sigma_1\mathcal{H}^\gamma$
F_8	$2B_1\mathcal{H}^\lambda$	0	$2B_2\mathcal{H}^\lambda$	0	0	0	$2\Sigma_1\mathcal{H}^\gamma$	$2\mathcal{H}^\gamma$

Tabla 4.2: Relaciones de conmutación fermión-fermión donde $\gamma = 1 + \lambda$.

Las relaciones de conmutación entre integrales bosónicas y entre bosónicas y

fermiónicas están en las Tablas (4.3) y (4.4).

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
Γ	$-2iF_4$	$-2iF_3$	$2iF_2$	$2iF_1$	$2iF_8$	$2iF_7$	$-2iF_6$	$-2iF_5$
Σ_1	$-2iF_3$	$-2iF_4$	$2iF_1$	$2iF_2$	0	0	0	0
Σ_2	0	0	0	0	$2iF_7$	$2iF_8$	$-2iF_5$	$-2iF_6$
B_1	0	$2iF_6\mathcal{H}^\eta$	$-2iF_7\mathcal{H}^\eta$	0	0	$-2iF_2\mathcal{H}$	$2iF_3\mathcal{H}$	0
B_2	$2iF_7\mathcal{H}^\eta$	0	0	$2iF_6\mathcal{H}^\eta$	0	$-2iF_4\mathcal{H}$	$-2iF_1\mathcal{H}$	0
B_3	$-2iF_5\mathcal{H}^\eta$	0	0	$2iF_8\mathcal{H}^\eta$	$2iF_1\mathcal{H}$	0	0	$-2iF_4\mathcal{H}$
B_4	0	$-2iF_8\mathcal{H}^\eta$	$-2iF_5\mathcal{H}^\eta$	0	$2iF_3\mathcal{H}$	0	0	$2iF_2\mathcal{H}$

Tabla 4.3: Relaciones de conmutación bosón-fermión donde $\eta = 1 - \lambda$

	Σ_1	Σ_2	B_1	B_2	B_3	B_4
Σ_1	0	0	$-2iB_2$	$2iB_1$	$-2iB_4$	$2iB_3$
Σ_2	0	0	$-2iB_4$	$2iB_3$	$-2iB_2$	$2iB_1$
B_1	$2iB_2$	$2iB_4$	0	$-2i\Sigma_1\mathcal{H}^{2-\lambda}$	0	$-2i\Sigma_2\mathcal{H}^{2-\lambda}$
B_2	$-2iB_1$	$-2iB_3$	$2i\Sigma_1\mathcal{H}^{2-\lambda}$	0	$2i\Sigma_2\mathcal{H}^{2-\lambda}$	0
B_3	$2iB_4$	$2iB_2$	0	$-2i\Sigma_2\mathcal{H}^{2-\lambda}$	0	$-2i\Sigma_1\mathcal{H}^{2-\lambda}$
B_4	$-2iB_3$	$-2iB_1$	$2i\Sigma_2\mathcal{H}^{2-\lambda}$	0	$2i\Sigma_1\mathcal{H}^{2-\lambda}$	0

Tabla 4.4: Relaciones de conmutación bosón-bosón

En estas tablas introducimos el parámetro λ para incluir los otros dos casos de graduación \mathbb{Z}_2 . En presente caso $\Gamma = R$, $\lambda = 0$. El Hamiltoniano conmuta con todas las integrales fermiónicas y bosónicas. El operador de graduación $\Gamma = R$ conmuta con todas las integrales bosónicas.

4.2. Graduación $\Gamma = \sigma_3$

Para la elección del operador de \mathbb{Z}_2 -graduación $\Gamma = \sigma_3$, como notamos, las integrales (4.4) son, nuevamente, los operadores fermiónicos, pero las integrales (4.11) son operadores pares. Como resultado, ahora los operadores S_a son impares apareciendo en las relaciones de conmutación de (4.4) con (4.11). La identificación de los operadores fermiónicos y bosónicos esta presentada en la Tabla (4.5).

Integrales fermiónicas	$F_1 = Q_1$	$F_2 = -R\sigma_3 Q_1$	$F_3 = -iRQ_1$	$F_4 = Q_2 = i\sigma_3 Q_1$
	$F_5 = RS_1$	$F_6 = -S_1$	$F_7 = i\sigma_3 S_1$	$F_8 = -iR\sigma_3 S_1$
Integrales bosónicas	\mathcal{H}	$\Sigma_1 = -R$	$\Gamma = \sigma_3$	$\Sigma_2 = -R\sigma_3$
	$B_1 = -iR\sigma_3 \tilde{Q}_1$	$B_2 = -\sigma_3 \tilde{Q}_1$	$B_3 = -iR\tilde{Q}_1$	$B_4 = -\tilde{Q}_1$

Tabla 4.5: Integrales de movimiento para la graduación $\Gamma = \sigma_3$

Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación y anticonmutación de la misma forma que en el caso anterior, pero ahora con $\lambda = 1$.

4.3. Graduación $\Gamma = R\sigma_3$

La elección de $\Gamma = R\sigma_3$ es similar a la de (4.9). La diferencia con el caso anterior es que ahora las integrales (4.4) están identificadas como operadores pares, mientras que las integrales (4.11) tienen una naturaleza de operadores impares. Las integrales S_a , en conjunto con las otras dos otras integrales relacionadas, juegan nuevamente el rol de operadores impares. La identificación de todos los operadores esta dada en la Tabla (4.6).

Estos operadores satisfacen exáctamente las mismas relaciones de conmutación y anticonmutación como con la graduación (4.9), es decir $\lambda = 1$.

Integrales	$F_1 = \tilde{Q}_1$	$F_2 = -\sigma_3 \tilde{Q}_1$	$F_3 = -iR\tilde{Q}_1$	$F_4 = iR\sigma_3 \tilde{Q}_1$
fermiónicas	$F_5 = RS_1$	$F_6 = -S_1$	$F_7 = iR\sigma_3 S_1$	$F_8 = -i\sigma_3 S_1$
Integrales	\mathcal{H}	$\Sigma_1 = -R$	$\Sigma_2 = -\sigma_3$	$\Gamma = R\sigma_3$
bosónicas	$B_1 = -i\sigma_3 Q_1$	$B_2 = -R\sigma_3 Q_1$	$B_3 = -iRQ_1$	$B_4 = -Q_1$

Tabla 4.6: Integrales de movimiento para la graduación $\Gamma = R\sigma_3$

4.4. Identificación de los generadores

La identificación de los operadores fermiónicos y bosónicos esta realizada en una manera especial que garantiza que el álgebra adquiera la misma forma, módulo \mathcal{H} , para las tres diferentes posibilidades del operador de graduación. La identificación corresponde a seguir el siguiente procedimiento.

Paso 1. Elegir un operador de graduación Γ del conjunto de operadores hermíticos

$$\{R, \sigma_3, R\sigma_3\}. \quad (4.16)$$

Paso 2. Seleccionar cualquier operador fermiónico hermítico F_1 , $\{F_1, \Gamma\} = 0$, del conjunto de ocho integrales impares con las siguientes propiedades: $\{F_1, F_1\} = 2\mathcal{H}$ y $[\Sigma_2, F_1] = 0$. Acá denotamos por $\Sigma_2 \neq \Gamma$ un operador bosónico del conjunto (4.16) que conmuta con F_1 . El tercer operador de (4.16) se denota por Σ_1 . Los operadores Σ_1 y Σ_2 están definidos hasta un signo.

Paso 3. Con las relaciones de conmutación de la Tabla 3 de F_1 con Γ y Σ_1 se fijan los operadores fermiónicos F_2 , F_3 y F_4 .

Paso 4. Elegir cualquier otro operador fermiónico F_5 que satisfaga $\{F_1, F_5\} = 0$ y $\{F_5, F_5\} = 2\mathcal{H}^{1+\lambda}$.

Paso 5. Repetir el Paso 3, pero cambiando $F_1 \rightarrow F_5$ y $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ para obtener F_6 , F_7 y F_8 .

Paso 6. Con los conmutadores de la Tabla 2 es posible identificar los operadores bosónicos B_1 , B_2 , B_3 y B_4 .

4.5. Acción de las integrales de movimiento sobre los autoestados

Básicamente tenemos tres tipos de integrales de movimiento Q_a , \tilde{Q}_a , S_a , para las cuales mediante multiplicación de las integrales R y σ_3 podemos obtener el conjunto completo. Ahora analizaremos las diferencias en su naturaleza actuando estos operadores sobre los estados físicos del super Hamiltoniano \mathcal{H} , R y σ_3 .

Usando los resultados de la Sección (3.3) encontramos los estados de scattering

$$\Psi_+^{(+)}(x) = \begin{pmatrix} k \cos kx + \beta \varepsilon(x) \sin kx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_-^{(+)}(x) = \sqrt{k^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \sin kx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\Psi_+^{(-)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \cos kx - \beta \varepsilon(x) \sin kx \end{pmatrix}, \quad \Psi_-^{(-)}(x) = \sqrt{k^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin kx \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

y el estado ligado de energía cero,

$$\Psi_0^{(-)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\beta} e^{-\beta|x|} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Para simplificar las relaciones que siguen, usamos una normalización conveniente.

Las supercargas usuales (4.4) cambian la *paridad* y los subespacios *superior-inferior* de autofunciones,

$$Q_1 \Psi_{\pm}^{(\pm)} = \pm i \sqrt{k^2 + \beta^2} \Psi_{\mp}^{(\mp)}, \quad Q_1 \Psi_{\mp}^{(\pm)} = \mp i \sqrt{k^2 + \beta^2} \Psi_{\pm}^{(\mp)}, \quad (4.20)$$

$$Q_2\Psi_{\pm}^{(\pm)} = \sqrt{k^2 + \beta^2}\Psi_{\mp}^{(\mp)}, \quad Q_2\Psi_{\mp}^{(\pm)} = -\sqrt{k^2 + \beta^2}\Psi_{\pm}^{(\mp)}. \quad (4.21)$$

Las supercargas de la supersimetría *escondida* (4.11) cambian solamente la *paridad*,

$$\tilde{Q}_1\Psi_{\pm}^{(\alpha)} = \pm i\sqrt{k^2 + \beta^2}\Psi_{\mp}^{(\alpha)}, \quad \tilde{Q}_2\Psi_{\pm}^{(\alpha)} = \sqrt{k^2 + \beta^2}\Psi_{\mp}^{(\alpha)}, \quad \alpha = +, -. \quad (4.22)$$

Los operadores S_a cambian solamente los subespacios *superior-inferior* de autofunciones,

$$S_1\Psi_{\alpha}^{(\pm)} = (k^2 + \beta^2)\Psi_{\alpha}^{(\mp)}, \quad S_2\Psi_{\alpha}^{(\pm)} = \pm i(k^2 + \beta^2)\Psi_{\alpha}^{(\mp)}, \quad \alpha = +, -. \quad (4.23)$$

El único estado ligado es aniquilado por las integrales de movimiento Q_a , \tilde{Q}_a y S_a ,

$$Q_a\Psi_0^{(-)} = 0, \quad \tilde{Q}_a\Psi_0^{(-)} = 0, \quad S_a\Psi_0^{(-)} = 0. \quad (4.24)$$

Como consecuencia, este estado es aniquilado por todas las otras integrales impares F_1, \dots, F_8 y pares B_1, \dots, B_4 y, por supuesto, por \mathcal{H} al tener energía nula.

4.6. Identificación de la supersimetría

Para clarificar la naturaleza de la supersimetría generada por el conjunto completo de ocho integrales de movimiento fermiónicas y ocho integrales bosónicas, definimos las siguientes combinaciones de operadores pares,

$$P_1^{(\pm)} = \frac{1}{4}(B_1 \pm B_3) = \frac{1}{2}B_1\Pi_{\pm}, \quad P_2^{(\pm)} = -\frac{1}{4}(B_2 \pm B_4) = -\frac{1}{2}B_2\Pi_{\pm}, \quad (4.25)$$

$$J_3^{(\pm)} = \frac{1}{4}(\Sigma_1 \pm \Sigma_2) = \frac{1}{2}\Sigma_1\Pi_{\pm}, \quad (4.26)$$

donde $\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma)$ son los proyectores. Estos operadores satisfacen las relaciones

$$\left[P_1^{(\pm)}, P_2^{(\pm)} \right] = iJ_3^{(\pm)}H^{2-\lambda}, \quad (4.27)$$

$$\left[J_3^{(\pm)}, P_a^{(\pm)} \right] = i\epsilon_{ab} P_b^{(\pm)}, \quad a, b = 1, 2, \quad (4.28)$$

$$[P_a^{(+)}, P_b^{(-)}] = [J_3^{(+)}, P_a^{(-)}] = [J_3^{(-)}, P_a^{(+)}] = [J_3^{(+)}, J_3^{(-)}] = 0. \quad (4.29)$$

Las relaciones de conmutación (4.27), (4.28) corresponden a la suma directa de dos álgebras $su(2)$ deformadas. En particular, las relaciones (4.27) son muy similares a las relaciones de conmutación que satisfacen los componentes del vector de Laplace-Runge-Lenz en el problema cuántico de Kepler. Si reducimos el subespacio de energía a un valor distinto de cero $E > \beta^2 > 0$, los operadores reescalados

$$J_a^{(\pm)} = P_a^{(\pm)} / E^{1-\frac{\lambda}{2}} \quad \text{y} \quad J_3^{(\pm)} \quad (4.30)$$

generan un álgebra de Lie $su(2) \oplus su(2)$ y satisfacen las relaciones

$$J_i^{(+)} J_i^{(+)} = \frac{3}{4} \Pi_+, \quad J_i^{(-)} J_i^{(-)} = \frac{3}{4} \Pi_- \quad (4.31)$$

donde se asume suma en $i = 1, 2, 3$.

Estas relaciones nos dicen que dos autoestados comunes del Hamiltoniano con energía $E > \beta^2 > 0$ y del operador de graduación Γ con autovalor $+1$ llevan una representación de spín-1/2 para $J_i^{(+)}$, y son estados de spín-0 para $J_i^{(-)}$. Las integrales fermiónicas transforman mutuamente los estados de estos autoespacios del operador de graduación. De acuerdo con el número total de generadores fermiónicos independientes, el subespacio de energía con $E > \beta^2 > 0$ lleva una representación irreducible de la simetría superunitaria $su(2|2)$, la cual es una extensión supersimétrica de la simetría bosónica $u(1) \oplus su(2) \oplus su(2)$, donde la superálgebra $u(1)$ es generada por el operador de graduación [55]. Teniendo en mente que el Hamiltoniano aparece en una forma general del superálgebra como una carga central multiplicativa, concluimos que el sistema posee una simetría no lineal superunitaria $su(2|2)$, en el sentido de las Refs. [6, 13, 12].

Como observamos, las tres posibilidades de graduación resultan en sólo dos formas diferentes para el álgebra supersimétrica dada por las relaciones de (anti)conmutación con $\lambda = 0$ para $\Gamma = R$ y con $\lambda = 1$ para $\Gamma = \sigma_3$ y $\Gamma = R\sigma_3$. La diferencia esencial entre estas dos formas es revelada cuando observamos la reducción al estado base de energía cero. Con $\mathcal{H} = 0$, la parte bosónica de la superálgebra es reducida al álgebra $u(1) \oplus e(2) \oplus e(2)$, donde el primer término corresponde a la integral Γ , y las otras dos corresponden a dos copias de álgebras 2D Euclidianas generadas por el operador de rotación $J_3^{(+)}$, los generadores de traslación $P_a^{(+)}$, $[P_1^{(+)}, P_2^{(+)}] = 0$ y sus análogos para el subespacio con $\Gamma = -1$.

4.7. Discusión

La adición de grados de libertad tipo spín a la supersimetría bosonizada nos permite encontrar nuevas integrales de movimiento, pero además nos revela una inusual y nueva propiedad; para el mismo sistema superextendido existen diferentes operadores de graduación. Así es posible identificar, en dependencia del operador de graduación, cada generador como bosónico o fermiónico. Por otro lado la acción de las diferentes integrales de movimiento sobre los autoestados del sistema surge en diferentes cuadros completando todas las posibilidades en que las funciones de onda pueden cambiar. Todas las integrales bosónicas forman una superálgebra que cambia en dependencia del nivel de energía en el cual permanecemos, tal como en el caso del problema cuántico de Kepler, la forma no lineal de la simetría se reduce a los subespacios de energía fija $E < 0$, $E = 0$ y $E > 0$ a las álgebras de Lie $so(4)$, $so(3, 1)$ y $e(3)$, respectivamente, donde $e(3)$ es la álgebra euclídea en 3D.

Capítulo 5

Tri-supersimetría y sistemas finite-gap

En esta Sección mostraremos que un sistema cuántico periódico con un potencial suave y par admite $2^n - 1$ super extensiones isospectrales. Cada una esta descrita por una tri-supersimetría la cual se origina a partir del operador diferencial de orden superior del Par de Lax (3.95) y dos términos no singulares que la descomponen. La parte local corresponde a una supersimetría centralmente extendida no lineal espontánea y parcialmente rota. Además conjeturaremos la existencia de una tri-supersimetría self-isospectral para un sistema finite-gap, con estados singletes anti-periódicos y con la super-pareja de Hamiltonianos desplazada una con respecto a la otra en la mitad del periodo del sistema. Estudiaremos la ecuación 2-parámetrica asociada de Lamé como un ejemplo y discutiremos la estructura tri-supersimétrica en el límite cuando el periodo tiende a infinito.

Es importante recalcar que nosotros buscamos transformaciones de Crum-Darboux que sean regulares, es decir. que produzcan nuevos sistemas sin singularidades. En un sistema periódico una transformación regular puede ser obtenida si el núcleo del operador de segundo orden A_2 (el caso con $n = 2$ en (2.21)) debe estar compuesto

por estados correspondientes a los bordes de la misma banda prohibida [90]. Así el Wronskiano de estas funciones tiene un signo definido y no toma valor nulo. Cuando tenemos una transformación de Crum-Darboux de orden impar, aparte de los estados de la misma banda prohibida, es necesario que la transformación aniquile también el estado base sin nodos, así se garantiza que la pareja de potenciales será suave y sin singularidades. Para el caso del generador de supersimetría escondida bosonizada en sistemas finite-gap (3.102) la transformación de Crum-Darboux asociada aniquila todos los estados singletes. Como el Wronskiano de todos los estados singletes es una constante (3.100), la pareja de potenciales es exactamente la misma y la transformación de intertwining se reduce a la relación de conmutación entre Z y H .

Continuando con un caso periódico, cuando ψ_0 corresponde a un estado del borde de una banda de la energía mas baja, η_0 y $\tilde{\eta}_0$ son soluciones no físicas, de naturaleza no periódica y divergentes. Cuando una transformación de Darboux es realizada con un estado sin nodos ψ_* tal que las autofunciones ψ_* y $1/\psi_*$ son soluciones no físicas (no normalizables), el nivel de energía E_* está ausente del espectro de la pareja de sistemas y los niveles de energía físico satisfacen la relación $E > E_*$.

Es importante tener en cuenta que es posible obtener transformaciones de Crum-Darboux regulares escogiendo ciertas funciones de Bloch [91, 92, 93, 94, 95]. Pero en el caso general el nuevo potencial obtenido no será una función par.

5.1. Extensiones tri-supersimétricas

Consideremos un sistema periódico n -gap, y denotamos $r \leq n$ bandas prohibidas en el espectro. $2r$ estados físicos singletes en los bordes de estas bandas prohibidas generan el espacio vectorial lineal $2r$ -dimensional, el cual denotamos como V_+ . El Wronskiano de los $2r$ estados singletes de los bordes de bandas correspondientes es una función par con periodo $2L$. Sea Q_+ un operador diferencial lineal de orden $2r$

que aniquila el espacio V_+ ,

$$Q_+ = \frac{d^{2r}}{dx^{2r}} + \sum_{j=1}^{2r} c_j^+(x) \frac{d^{2r-j}}{dx^{2r-j}}, \quad Q_+ V_+ = 0. \quad (5.1)$$

Los estados singletes del borde de las bandas pueden ser periódicos o anti-periódicos y pueden ser representados por funciones de onda reales. Así, los coeficientes de (5.1) son funciones reales. Tomando en cuenta que cualquier estado del borde de las bandas tiene una paridad definida, es posible demostrar que (5.1) es un operador par con periodicidad $2L$

$$[T, Q_+] = [R, Q_+] = 0. \quad (5.2)$$

El núcleo de la integral Z tiene la forma $\text{Ker } Z = V_+ \oplus V_-$ donde V_- es el espacio vectorial lineal $2(n-r)+1$ -dimensional del resto de los estados singletes del borde de las bandas. Entonces Z puede ser descompuesto como $Z = S^\dagger Q_+$, donde S^\dagger es un operador diferencial de orden $2(n-r)+1$ con la propiedad $S^\dagger Q_+ V_- = 0$. Hermiticidad de Z y las ecuaciones (3.95), (3.102), (5.1) nos dicen que

$$Z = S^\dagger Q_+ = Q_+^\dagger S, \quad (5.3)$$

y

$$-iS = \frac{d^{2(n-r)+1}}{dx^{2(n-r)+1}} + \sum_{j=1}^{2(n-r)+1} c_j^S(x) \frac{d^{2(n-r)+1-j}}{dx^{2(n-r)+1-j}}, \quad (5.4)$$

donde los coeficientes de funciones son reales y $c_1^S(x) = c_1^+(x)$. Por las propiedades de Z y Q_+ , también encontramos que S es un operador $2L$ periódico impar.

Ahora mostraremos que $\text{Ker } S = V_-$. Para verificar esto, es necesario notar que de acuerdo a la ecuación (2.26) y la identidad de Abel $W' = -c_1(x)W$, la igualdad $c_1^S(x) = c_1^+(x)$ obtenida directamente de (5.3) significa que la aplicación de las transformaciones de Crum-Darboux con los operadores Q_+ y S , notablemente, producen el mismo Hamiltoniano super-pareja no singular $\tilde{H} = H + 2(c_1^+)',$ satisfaciendo las

relaciones de intertwining

$$Q_+H = \tilde{H}Q_+, \quad SH = \tilde{H}S, \quad (5.5)$$

$$Q_+^\dagger\tilde{H} = HQ_+^\dagger, \quad S^\dagger\tilde{H} = HS^\dagger. \quad (5.6)$$

El Hamiltoniano \tilde{H} describe un sistema periódico con un potencial par de periodo $2L$ con n gaps en su espectro. De esta manera existe un operador diferencial hermítico \tilde{Z} de la forma (3.95) que conmuta con \tilde{H} . Las relaciones de intertwining (5.5), (5.6) no otorgan una descomposición alternativa de dos términos para \tilde{Z} ,

$$[\tilde{H}, SQ_+^\dagger] = [\tilde{H}, Q_+S^\dagger] = 0 \quad (5.7)$$

Ambos operadores SQ_+^\dagger y Q_+S^\dagger son de orden $2n+1$ y deberían coincidir con \tilde{Z} hasta un polinomio en \tilde{H} . Sin embargo estos operadores anticonmutan con el operador de reflexión R y por lo tanto

$$\tilde{Z} = SQ_+^\dagger = Q_+S^\dagger. \quad (5.8)$$

Tomemos cualquiera de los $2(n-r)+1$ estados singletes $\Psi_- \in V_-$ que no son aniquilados por Q_+ . Multiplicando la ecuación $Z\Psi_- = 0$ por Q_+ por la izquierda y usando (5.3) y (5.8), obtenemos que $SQ_+^\dagger Q_+\Psi_- = 0$. El operador $Q_+^\dagger Q_+$ es periódico en $2L$ y debido a (5.5), (5.6), conmuta con el Hamiltoniano H .

Este operador no cambia ni la energía ni el periodo de un estado singlete Ψ_- , entonces $Q_+^\dagger Q_+\Psi_- = \alpha\Psi_-$, donde α es un número distinto de cero. Por lo tanto, $SQ_+^\dagger Q_+\Psi_- = \alpha S\Psi_- = 0$, y concluimos que $\text{Ker } S = V_-$. Cambiando la notación,

$$Q_- \equiv S \quad (5.9)$$

tenemos

$$Z = Q_+^\dagger Q_- = Q_-^\dagger Q_+, \quad \tilde{Z} = Q_+ Q_-^\dagger = Q_- Q_+^\dagger, \quad (5.10)$$

y

$$\text{Ker } Q_+ \oplus \text{Ker } Q_- = \text{Ker } Z, \quad \text{Ker } Q_+^\dagger \oplus \text{Ker } Q_-^\dagger = \text{Ker } \tilde{Z}. \quad (5.11)$$

Este resultado significa la completa isospectralidad de los sistemas periódicos finite gap descritos por los Hamiltonianos H y \tilde{H} . De hecho, de acuerdo a las propiedades de las transformaciones de Crum-Darboux, la acción de los operadores Q_+ y Q_- sobre cualquier doblete de autoestados de H del interior de las bandas permitidas transforman en un doblete de autoestados de \tilde{H} con el mismo valor de energía. Los operadores adjuntos Q_+^\dagger y Q_-^\dagger actúan de la manera similar pero en la dirección opuesta. Por otro lado los estados singletes de H aniquilados por Q_+ (o Q_-) son transformados por Q_- (o Q_+) en modos ceros de Q_+^\dagger (o Q_-^\dagger) que corresponden a estados singletes de \tilde{H} de la misma energía. El mismo cuadro es válido para los estados singletes de \tilde{H} aniquilados por Q_+^\dagger (o Q_-^\dagger) y transformados por Q_- (o Q_+) en estados singletes de H .

Las relaciones de intertwining (5.5), (5.6) como también la factorización de las supercargas de la supersimetría bosonizada pueden ser reescritas en una forma compacta por medio de matrices y definiendo un Hamiltoniano extendido \mathcal{H} y los operadores \mathcal{Q}_\pm y \mathcal{Z} ,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \tilde{H} & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_\pm = \begin{pmatrix} 0 & Q_\pm \\ Q_\pm^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{Z} & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Acá las relaciones (5.5), (5.6) y (5.10) pueden ser presentadas como

$$[\mathcal{H}, \mathcal{Z}] = 0, \quad [\mathcal{H}, \mathcal{Q}_\pm] = 0, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Q}_- \mathcal{Q}_+ = \mathcal{Q}_+ \mathcal{Q}_-. \quad (5.14)$$

El triplete \mathcal{Q}_+ , \mathcal{Q}_- y \mathcal{Z} es un conjunto de integrales de movimiento para el sistema superextendido \mathcal{H} que mutuamente conmutan entre sí. Existe una base común, en

la cual \mathcal{Q}_\pm , \mathcal{Z} y \mathcal{H} son diagonales, y como todos estos operadores son auto-adjuntos, sus autovalores son reales. Se cumplen también las siguientes igualdades

$$\mathcal{Z}^2 = \mathcal{Q}_+ \mathcal{Q}_- \mathcal{Q}_+ \mathcal{Q}_- = \mathcal{Q}_+^2 \mathcal{Q}_-^2 = P_{\mathcal{Z}}(\mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{2n+1} (\mathcal{H} - E_j), \quad (5.15)$$

donde $P_{\mathcal{Z}}$ es un polinomio espectral positivamente definido y E_j son las energías de los estados singletes de los subsistemas. En correspondencia con (5.15), los estados de los bordes de las bandas del sistema extendido están organizados en dobletes supersimétricos, sobre el cual \mathcal{Z} toma valor cero. Los estados del interior de las bandas permitidas están organizados en cuadrupletes de energía, sobre el cual \mathcal{Z} toma valores distinto de cero $\pm \sqrt{P_{\mathcal{Z}}(E)}$. Las componentes diagonales de \mathcal{Q}_\pm^2 consisten en operadores diferenciales de ordenes $4r$ y $4(n-r)+2$. Uno de estos números es menor que $2n+1$. Supongamos que este es el caso del operador \mathcal{Q}_+^2 . Su componente diagonal inferior $Q_+^\dagger Q_+$ satisface la relación $[H, Q_+^\dagger Q_+] = 0$. De acuerdo a la teoría general de sistemas finite-gap, los únicos operadores que conmutan con H de orden menor que $2n+1$ son polinomios en el Hamiltoniano, y por lo tanto podemos concluir que $Q_+^\dagger Q_+$ es tal polinomio, el cual toma valores nulos sobre los $2r$ singletes que pertenecen a $\text{Ker } Q_+$. Los mismos argumentos se mantienen para la componente superior del operador \mathcal{Q}_+^2 y podemos encontrar que

$$\mathcal{Q}_+^2 = P_+(\mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{2r} (\mathcal{H} - E_j^+). \quad (5.16)$$

Haciendo uso de (5.15) y (5.16), obtenemos también

$$\mathcal{Q}_-^2 = P_-(\mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{2(n-r)+1} (\mathcal{H} - E_j^-), \quad (5.17)$$

donde $P_\pm(\mathcal{H})$ son operadores positivamente definidos y E^\pm son las energías de los estados singletes aniquilados por \mathcal{Q}_\pm . Los autovalores de \mathcal{Q}_\pm son $\pm \sqrt{P_\pm(E)}$, donde los signos de las raíces cuadradas están relacionados con el signo de de la raíz del respectivo autovalor de \mathcal{Z} en concordancia con (5.14).

En analogía con la tri-supersimetría del sistema (4.3), además de las integrales de movimiento no triviales \mathcal{Z} y \mathcal{Q}_\pm , el Hamiltoniano \mathcal{H} posee otro triplete de integrales que conmutan entre sí,

$$\Gamma_1 = \sigma_3, \quad \Gamma_2 = R, \quad \Gamma_3 = R\sigma_3, \quad (5.18)$$

las cuales satisfacen las relaciones

$$\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 = 1, \quad \Gamma_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

Cualquiera de estas integrales Γ_i puede escogerse como operador de graduación \mathbb{Z}_2 , Γ_* .

Nuevamente, cualquiera de estas integrales no triviales puede conmutar o anti-conmutar con las integrales triviales. Fijando el operador de graduación, podemos clasificar cualquier integral no trivial como bosónica o fermiónica, mientras que el Hamiltoniano y las integrales triviales (5.18) siempre son operadores bosónicos.

Para todas las posibles elecciones, una de las integrales no triviales juega el rol de un operador bosónico \mathbb{Z}_2 -pares, mientras que las otras dos integrales están clasificadas como operadores fermiónicos \mathbb{Z}_2 -impares, como lo ilustra la Tabla a continuación, que refleja las diferentes integrales de *tri-supersimetría*,

Operador de graduación	σ_3	R	$\sigma_3 R$
Integrales bosónicas	\mathcal{Z}	\mathcal{Q}_+	\mathcal{Q}_-
Integrales fermiónicas	$\mathcal{Q}_+, \mathcal{Q}_-$	$\mathcal{Z}, \mathcal{Q}_-$	$\mathcal{Z}, \mathcal{Q}_+$

5.2. Supersimetría no lineal centralmente extendida $N = 4$

Escogamos ahora el operador de graduación $\Gamma_* = \sigma_3$ para discutir la subálgebra generada por las integrales *locales* olvidando por el momento la integral no local R .

Si introducimos la notación

$$\mathcal{Q}_{\pm}^{(1)} = \mathcal{Q}_{\pm}, \quad \mathcal{Q}_{\pm}^{(2)} = i\sigma_3 \mathcal{Q}_{\pm}. \quad (5.20)$$

Estas supercargas fermiónicas junto con los operadores bosónicos \mathcal{Z} y \mathcal{H} generan la superálgebra

$$\{\mathcal{Q}_+^{(a)}, \mathcal{Q}_+^{(b)}\} = 2\delta^{ab} P_+(\mathcal{H}), \quad \{\mathcal{Q}_-^{(a)}, \mathcal{Q}_-^{(b)}\} = 2\delta^{ab} P_-(\mathcal{H}), \quad (5.21)$$

$$\{\mathcal{Q}_+^{(a)}, \mathcal{Q}_-^{(b)}\} = 2\delta^{ab} \mathcal{Z}, \quad (5.22)$$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{Q}_{\pm}^{(a)}] = [\mathcal{H}, \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}, \mathcal{Q}_{\pm}^{(a)}] = 0. \quad (5.23)$$

La superálgebra (5.21), (5.22), (5.23) está identificada como una supersimetría *no lineal* $N = 4$ centralmente extendida, en la cual \mathcal{Z} juega el rol de la carga central bosónica. La estructura básica del álgebra (5.21)–(5.23) fue discutida por Andrianov y Sokolov [96], pero fuera del contexto de sistemas periódicos finite-gap y potenciales pares.

Las supercargas $\mathcal{Q}_+^{(a)}$ aniquilan una parte de los estados del borde de las bandas mientras que la otra parte de los dobletes supersimétricos están aniquilados por las supercargas $\mathcal{Q}_-^{(a)}$. Los estados del borde de las bandas que no pertenecen al núcleo de las supercargas $\mathcal{Q}_+^{(a)}$ (o $\mathcal{Q}_-^{(a)}$) son transformados, o rotados, por estas supercargas dentro del doblete correspondiente. La carga central bosónica \mathcal{Z} aniquila todos los estados del borde de las bandas. Entonces tenemos un cuadro similar al rompimiento parcial de la supersimetría que aparece en teorías de campo supersimétricas con monopolos BPS [97].

Para aprender la naturaleza de la estructura algebraica de la tri-supersimetría en sistemas finite-gap se debe proceder de manera similar en comparación para el sistema supersimétricamente extendido del potencial de Dirac. Se deben considerar

el conjunto de integrales de movimiento creada por las combinaciones multiplicativas de las integrales triviales con no triviales, es decir,

$$\mathcal{H}, \quad \Gamma_i, \quad \Gamma_\alpha \mathcal{Z}, \quad \Gamma_\alpha \mathcal{Q}_+, \quad \Gamma_\alpha \mathcal{Q}_-, \quad (5.24)$$

donde $\alpha = 0, 1, 2, 3$, y denotamos por Γ_0 la matriz unidad 2 dimensional.

Dado que las integrales pueden conmutar o anticonmutar con cualquiera de los operadores (5.18), al identificar uno de los operadores como el operador de graduación \mathbb{Z}_2 , llamemoslo Γ_* , el conjunto de integrales se separa en ocho integrales \mathbb{Z}_2 -pares bosónicas y ocho integrales \mathbb{Z}_2 -impares fermiónicas. Aunque esta separación depende de la elección de Γ_* , la superálgebra tiene la misma estructura en los tres casos. En particular usando un precepto similar al discutido en la Sección 4.4, encontramos que la estructura de todas las relaciones de conmutación son casi idénticas a las de la Tablas (4.2), (4.3) y (4.4) módulo polinomios del Hamiltoniano, en dependencia también, del operador de graduación Γ_* escogido. Para los detalles, mirar [36].

El álgebra de los operadores bósónicos puede ser revelada construyendo los análogos de los operadores (4.25) y (4.26), los cuales es necesario reescalar de la siguiente manera

$$J_a^{(\pm)} = P_a^{(\pm)} / P_B(\mathcal{H}) \quad (5.25)$$

donde $P_B(\mathcal{H})$ es el polinomio espectral que corresponde al cuadrado de la integral no trivial bosónica, es decir puede ser el cuadrado de \mathcal{Q}_\pm o \mathcal{Z} en dependencia de cual commute con Γ_* .

Para los niveles de energía que están degenerados cuatro veces o los niveles de energía en el interior de las bandas, $E \neq E_i$, el subespacio correspondiente lleva una representación irreducible de la simetría superunitaria $su(2|2)$, que la extensión supersimétrica de la simetría bosónica $u(1) \oplus su(2) \oplus su(2)$. Si reducimos nuestro sistema extendido al subespacio correspondiente a los niveles de energía doblemente degenerados E_i , de los dobletes de estados del borde de las bandas, la parte bosónica del superálgebra se reduce a $u(1) \oplus e(2) \oplus e(2)$.

5.3. Conjetura self-isospectral

En el ámbito de mecánica cuántica supersimétrica asociada con una estructura superalgebraica lineal, la completa isospectralidad en los sistemas no periódicos esta relacionada con el rompimiento de supersimetría, que significa que el doblete de estados bases no esta aniquilado por las supercargas. En [27], Dunne y Feinberg consideraron extensiones supersimétricas de potenciales periódicos. Argumentaron que al contrario de la situación usual, la completa isospectralidad de los Hamiltoniano super-pareja puede aparecer sin violación de la supersimetría. Como un ejemplo de la situación ellos presentaron el Hamiltoniano de Lamé 1-gap, donde la extensión supersimétrica otorgada por la transformación de Darboux corresponde a las supercargas de primer orden $Q_-^{(a)}$ definidas en (5.20). El Hamiltoniano super-pareja se muestra como el original pero desplazado en la mitad del periodo. El fenómeno del desplazamiento en la mitad del periodo de los Hamiltonianos super-pareja fue llamada en [27] como self-isospectralidad.

Motivados por [27], podríamos formular la pregunta acerca de la existencia de self-isospectralidad en extensiones tri-supersimétricas de los sistemas finite-gap. La self-isospectralidad aparece si traslación de la mitad del periodo L provoca una inversión del Wronskiano

$$W^\pm(x + L) = \mathcal{C}^\pm \frac{1}{W^\pm(x)}, \quad (5.26)$$

donde \mathcal{C}^\pm son constantes distintas de cero. De hecho tal desplazamiento produce un cambio en el signo del coeficiente $c_1^\pm(x) = -(\ln W^\pm)'$ de los operadores Q_\pm y por lo tanto se transforman en sus conjugados

$$c_1^\pm(x + L) = -c_1^\pm(x), \quad Q_\pm(x + L) = Q_\pm^\dagger(x). \quad (5.27)$$

Haciendo la traslación en L en las relaciones de intertwining y comparando el resulta con sus conjugados, es posible verificar que

$$\tilde{H}(x) = H(x + L), \quad (5.28)$$

y por lo tanto la self-isospectralidad aparece.

La construcción considerada nos da una receta de como obtener parejas de sistemas tri-supersimétricos dado un Hamiltoniano n -gap. El Hamiltoniano super-pareja de H , \tilde{H} esta determinado únicamente cuando hacemos la separación de los estados singletes en dos familias disjuntas. Existen $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ separaciones distintas de acuerdo a las reglas de las transformaciones de Crum-Darboux nos aseguran un nuevo sistema regular. Como una de las separaciones es trivial, la que corresponde a elegir todos los estados singletes en donde aparece Z como una integral de movimiento para H , encontramos finalmente que existen $2^n - 1$ extensiones tri-supersimétricas dado un sistema n -gap. Todas las extensiones isospectrales puede ser obtenidas por transformaciones sucesivas de Darboux de primer y Crum-Darboux de segundo orden.

Si los estados antiperiódicos singletes estan presentes en el espectro, entre todas las posibles separaciones de los estados singletes existe una excepcional, dado por la selección de los estados singletes en familias mutuamente ortogonales de estados periódicos y antiperiódicos. A pesar de no tener una demostración, conjeturamos que esta separación “natural” nos lleva a una supersimetría self-isospectral, caracterizada por el Hamiltoniano super-pareja \tilde{H} , en ser el original pero desplazado en la mitad del periodo del sistema.

Supongamos que un sistema n -gap H con $n > 1$ tiene estados singletes antiperiódicos en su espectro, y \tilde{H} es el Hamiltoniano desplazado en la mitad del periodo, obtenido mediante transformaciones de Darboux asociadas con la separación especificada de los estados singletes. Ahora construimos una transformaciones de Crum-Darboux generadas por Q_{\pm} pero que estan asociados con una separación de los estados singletes *diferente* a la especificada anteriormente, es decir, una separación que no sea entre estados de diferente periodicidad.

En este caso desplazando en la mitad del periodo todos los operadores \tilde{Q}_{\pm} , estos generarán transformaciones de Crum-Darboux del sistema \tilde{H} . En esta manera

obtendremos un nuevo par de sistemas isospectrales H_Q y $H_{\tilde{Q}}$:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{Q_{\pm}} & H_Q \\
 \downarrow x \rightarrow x+L & & \downarrow x \rightarrow x+L \\
 \tilde{H} & \xrightarrow{\tilde{Q}_{\pm}} & H_{\tilde{Q}}
 \end{array}$$

A continuación la conjetura self-isospectral sera respaldada mediante el estudio de la tri-supersimetría de la ecuación asociada de Lamé.

5.4. Tri-supersimetría y el Hamiltoniano de Pauli

Para investigar la pregunta sobre la presencia y naturaleza de la supersimetría no lineal en sistemas periódicos finite-gap, estudiemos un modelo en 2D descrito por el Hamiltoniano de Pauli para un electrón no relativista bajo la influencia de campos eléctricos y magnéticos. Este modelo corresponde a la amplia clase de sistemas periódicos investigados por Novikov *et al.* [98]. Es bien conocido que en la ausencia de campo eléctrico, el modelo que incluye al problema de Landau como caso particular, esta caracterizado por una supersimetría con una estructura superálgebraica usual y lineal. Elegiremos campos eléctricos y magnéticos de tal forma que las componentes spín-up y spín-down de la función de onda del electrón sientan el mismo potencial periódico efectivo unidimensional pero desplazado en la mitad del periodo. Como resultado el potencial efectivo del sistema será self-isospectral. Los potenciales vector y escalar estan escogidos de manera tal que produzcan la ecuación asociada de Lamé con dos parámetros m y l .

Consideremos un electrón no relativista confinado a un plano moviendose en la presencia de un campo eléctrico, dado por un potencial escalar $\phi(x, y)$ y un campo magnético $B_z(x, y)$. El electrón está descrito por el Hamiltoniano de Pauli

$$H_e = (p_x + A_x)^2 + (p_y + A_y)^2 + \sigma_3 B_z - \phi, \quad (5.29)$$

donde se usaron las unidades usadas antes $\hbar = c = 2m = -e = 1$. Nos restringiremos a elegir que B_z y ϕ solo dependen de x . Así escogemos $A_x = 0$, $A_y = w(x)$ y entonces $B_z = \frac{dw}{dx}$ y podemos presentar la función de onda en la forma $\Psi(x, y) = e^{i\kappa y}\psi(x)$, donde κ , $-\infty < \kappa < \infty$, es el autovalor de p_y . Tomando

$$w(x) = \alpha \frac{d}{dx} \ln(\operatorname{dn}x), \quad \phi(x) = \beta w^2(x) + \gamma w(x) + \delta, \quad (5.30)$$

con la elección apropiada de los parámetros constantes α , β , γ y δ , reducimos (5.29) a un sistema periódico cuántico dado por el Hamiltoniano matricial diagonal H con componentes up (+) y down (-) de la forma $H_{m,l}^{\pm} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{m,l}^{\pm}(x)$. Acá $V_{m,l}^+(x) = V_{m,l}^-(x + L)$,

$$V_{m,l}^-(x) = -C_m \operatorname{dn}^2 x - C_l \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 x} + c, \quad (5.31)$$

$C_m = m(m + 1)$, $C_l = l(l + 1)$, m y l son números reales tales que $C_m^2 + C_l^2 \neq 0$, c es una constante. El Hamiltoniano obtenido de esta manera describe un par de sistemas asociados de Lamé que será discutido a continuación.

5.5. Extensiones isospectrales para el potencial asociado de Lamé

Ahora aplicaremos la teoría general desarrollada en las secciones anteriores a una amplia clase de sistemas finite-gap descritas por la ecuación asociada de Lamé,

$$-\psi'' - \left(C_m \operatorname{dn}^2 x + C_l \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 x} + E \right) \psi = 0, \quad (5.32)$$

que es una generalización 2-paramétrica de la ecuación de Lamé (3.54), cuando uno de los parámetros en la ecuación asociada de Lamé desaparece $l = 0$ recuperamos el sistema (3.54). Estudiaremos ahora las extensiones isospectrales basadas en la separación natural de los estados singletes en periódicos y anti-periódicos y mostraremos que nos llevan a sistemas tri-supersimétricos self-isospectral y su estructura en general.

El espectro del sistema unidimensional periódico esta gobernado por el Hamiltoniano correspondiente a (5.32)

$$H_{m,l}^- = -D^2 - C_m \operatorname{dn}^2 x - C_l \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 x} \quad (5.33)$$

consiste en bandas de valencia y zonas prohibidas las cuales estan alternadas mutuamente hasta que alcanza la banda semi-infinita de conductividad.

Como en el caso de Lamé (3.54) la configuración de las bandas depende sensiblemente de los parámetros constantes, cuando $m, l \in \mathbb{Z}$ (de ahora en adelante suponemos este caso) las bandas espectrales estan organizadas de manera que solo hay un número finito de ellas. El periodo $2L$ del potencial con $C_m \neq C_l$ in (5.33) es igual a $2\mathbf{K}$. El caso $C_m = C_l$ corresponde al sistema Lamé (3.54) pero con periodo $2L = \mathbf{K}$ caso que está discutido en detalles en [36]. El cambio de parámetros

$$m \rightarrow -m - 1, \quad l \rightarrow -l - 1 \quad (5.34)$$

deja el Hamiltoniano (5.33) invariante, por lo que sin perdida de generalidad, podemos considerar el caso $m > l \geq 0$. En este caso el sistema es m -gap.

Para empezar la construcción de la estructura supersimétrica, nos concentraremos en la separación de los estados singletes en periódicos y anti-periódicos. En un paso inicial para la construcción de los operadores Q_+ y Q_- se requiere la forma explícita de los estados del borde de bandas, o bien, combinaciones lineales de ellos.

Como sabemos de la construcción de los operadores Q_+ y Q_- , el subespacio de auto estados singletes periódicos tiene dimensión impar, mientras que el subespacio con estados anti-periódicos es par. Sobre el estos dos subespacios de estados singletes, estan realizadas dos representaciones irreducibles unitarias del algebra $sl(2, \mathbb{R})$. En concordancia con [99, 35], el espacio de $2m + 1$ estados singletes puede ser tratado como la suma de dos representaciones de $sl(2, \mathbb{R})$ de dimensión $m - l$ (espín $j_1 = \frac{1}{2}(m - l - 1)$) y $m + l + 1$ (espín $j_2 = \frac{1}{2}(m + l)$).

La periodicidad de estos subespacios depende de la paridad de $m - l$. Cuando $m - l$ es impar la representaciones de espín- j_1 (espín- j_2) estan realizadas sobre estados

$2\mathbf{K}$ -periódicos ($4\mathbf{K}$ -periódicos), cuando $m-l$ es par la periodicidad de los subespacios espín- j_1 y espín- j_2 se intercambia.

Para evadir posibles confusiones con la construcción de las supercargas cambiaremos levemente la notación. Denotaremos como $X_{m,l}^-$ el operador que aniquila el subespacio de $m-l$ autofunciones mientras que $Y_{m,l}^-$ aniquilará las $m+l+1$ funciones restantes.

Usando los resultados en (??) es posible encontrar que

$$\begin{aligned} Y_{m,l}^- &= \frac{d^{m+l+1}}{dx^{m+l+1}} + \sum_{j=1}^{m+l+1} c_j^Y \frac{d^{m+l+1-j}}{dx^{m+l+1-j}} = \frac{dn^{m+1}x}{cn^{m+l+2}x} \left(\frac{cn^2x}{dnx} \frac{d}{dx} \right)^{m+l+1} \frac{dn^l x}{cn^{m+l}x} \\ &= \prod_{j=-(m+l)/2}^{(m+l)/2} \left(\frac{d}{dx} + \left(\frac{k^2(m-l)cn^2x}{2} - j(k'^2 + dn^2x) \right) \frac{snx}{cnx dnx} \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

El índice superior del producto corresponde al primer término de la izquierda mientras que el índice superior denota el último término. Ahora podemos construir el operador $X_{m,l}^-$ haciendo la simple sustitución $l \rightarrow -l-1$ en (5.35)

$$\begin{aligned} X_{m,l}^- &= \frac{d^{m-l}}{dx^{m-l}} + \sum_{j=1}^{m-l} c_j^X \frac{d^{m-l-j}}{dx^{m-l-j}} = \frac{dn^{m+1}x}{cn^{m-l+1}x} \left(\frac{cn^2x}{dnx} \frac{d}{dx} \right)^{m-l} \frac{dn^{-l-1}x}{cn^{m-l-1}x} \\ &= \prod_{j=-(m-l-1)/2}^{(m-l-1)/2} \left(\frac{d}{dx} + \left(\frac{k^2(m+l+1)cn^2x}{2} - j(k'^2 + dn^2x) \right) \frac{snx}{cnx dnx} \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Como mencionamos anteriormente, los coeficientes de la segunda derivada mas alta de $X_{m,l}^-$ y $Y_{m,l}^-$ coinciden y permiten la construcción explícita de la super-pareja del Hamiltoniano (5.33)

$$c_1 \equiv c_1^X = c_1^Y = -\frac{W'_{m,l}}{W_{m,l}} = k^2 \frac{(C_m - C_l) snx cnx}{2 dnx} = \frac{1}{2} (m-l)(m+l+1) k^2 \frac{cnx snx}{dnx}. \quad (5.37)$$

La igualdad $c_1^X = c_1^Y$ refleja que los Wronskianos de los núcleos de $X_{m,l}^-$ y $Y_{m,l}^-$ sean iguales hasta un factor numérico que no es esencial, relacionado con la arbitrariedad

de la normalización de sus modos ceros. La parte esencial de estos Wronskianos está dado por la función sin nodos

$$W_{m,l}(x) = (\operatorname{dn} x)^{\frac{1}{2}(m-l)(m+l+1)}, \quad (5.38)$$

cuya invarianza con respecto al cambio $l \rightarrow -l - 1$ refleja justamente la igualdad indicada en los coeficientes.

La propiedad de las funciones de Jacobi

$$\operatorname{dn}(x + K) = k' / \operatorname{dn} x \quad (5.39)$$

nos muestra que el Wronskiano $W_{m,l}(x)$ satisface la relación (5.26), y por lo tanto la conjetura funciona en este sistema, la separación natural de los estados singletes en estados periódicos y antiperiódicos nos otorga una tri-supersimetría self-isospectral para el sistema con el Hamiltoniano super-pareja $\tilde{H} \equiv H_{m,l}^+$, que es el Hamiltoniano original trasladado en la mitad de su periodo

$$H_{m,l}^+(x) = H_{m,l}^-(x + K). \quad (5.40)$$

Su forma explícita es

$$H_{m,l}^+ = H_{m,l}^- + 2c'_1 = -D^2 - C_l \operatorname{dn}^2 x - C_m \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 x}. \quad (5.41)$$

Reescalando (5.10), el generador de la supersimetría escondida bosonizada del sistema asociado de Lamé, (5.33) adquiere la siguiente forma factorizada

$$\begin{aligned} Z_{m,l}^- &= \frac{\operatorname{dn}^{-l} x}{\operatorname{cn}^{m-l+1} x} \left(\frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx} \right)^{m-l} \left(\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} \right)^{2m+1} \left(\frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx} \right)^{m+l+1} \frac{\operatorname{dn}^l x}{\operatorname{cn}^{m+l} x} \\ &= \frac{\operatorname{dn}^{-l} x}{\operatorname{sn}^{m-l+1} x} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx} \right)^{m-l} \left(\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} \right)^{2m+1} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx} \right)^{m+l+1} \frac{\operatorname{dn}^l x}{\operatorname{sn}^{m+l} x}, \end{aligned}$$

donde usamos las versiones alternativas

$$X_{m,l}^-(x) = \frac{\operatorname{dn}^{m+1} x}{\operatorname{sn}^{m-l+1} x} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn} x} \frac{d}{dx} \right)^{m-l} \frac{\operatorname{dn}^{-l-1} x}{\operatorname{sn}^{m-l-1} x} \quad (5.42)$$

y

$$Y_{m,l}^-(x) = \frac{\operatorname{dn}^{m+1}x}{\operatorname{sn}^{m+l+2}x} \left(\frac{\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x} \frac{d}{dx} \right)^{m+l+1} \frac{\operatorname{dn}^l x}{\operatorname{sn}^{m+l}x} \quad (5.43)$$

obtenidas por medio de la identidad

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^{j+1}x} \left(\frac{\operatorname{sn}^2x}{\operatorname{dn}x} D \right)^j \frac{1}{\operatorname{sn}^{j-1}x} = \frac{1}{\operatorname{cn}^{j+1}x} \left(\frac{\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}x} D \right)^j \frac{1}{\operatorname{cn}^{j-1}x}. \quad (5.44)$$

Usando la misma identidad podemos probar que

$$Y_{m,l}^-(x+K) = (-1)^{m+l+1} (Y_{m,l}^-(x))^\dagger, \quad (5.45)$$

y

$$X_{m,l}^-(x+K) = (-1)^{m-l} (X_{m,l}^-(x))^\dagger \quad (5.46)$$

Finalmente obtenemos un Hamiltoniano extendido \mathcal{H} como también las integrales hermíticas diagonales y antidiagonales,

$$\mathcal{H}_{m,l} = \begin{pmatrix} H_{m,l}^+ & 0 \\ 0 & H_{m,l}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{m,l}^-(x+K) & 0 \\ 0 & H_{m,l}^-(x) \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\mathcal{Z}_{m,l} = i^{2m+1} \begin{pmatrix} Z_{m,l}^+ & 0 \\ 0 & Z_{m,l}^- \end{pmatrix} = i^{2m+1} \begin{pmatrix} Z_{m,l}^-(x+K) & 0 \\ 0 & Z_{m,l}^-(x) \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

$$\mathcal{X}_{m,l} = i^{m-l} \begin{pmatrix} 0 & X_{m,l}^- \\ X_{m,l}^+ & 0 \end{pmatrix} = i^{m-l} \begin{pmatrix} 0 & X_{m,l}^-(x) \\ X_{m,l}^-(x+K) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

$$\mathcal{Y}_{m,l} = i^{m+l+1} \begin{pmatrix} 0 & Y_{m,l}^- \\ Y_{m,l}^+ & 0 \end{pmatrix} = i^{m+l+1} \begin{pmatrix} 0 & Y_{m,l}^-(x) \\ Y_{m,l}^-(x+K) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

las cuales representan una realización explícita de (5.12). Las integrales \mathcal{Q}_\pm están identificadas con $\mathcal{X}_{m,l}$ y $\mathcal{Y}_{m,l}$ en la siguiente manera:

$$\mathcal{Q}_- = \mathcal{X}_{m,l}, \quad \mathcal{Q}_+ = \mathcal{Y}_{m,l}, \quad \text{cuando } m-l \text{ es impar} \quad (5.51)$$

y

$$\mathcal{Q}_+ = \mathcal{X}_{m,l}, \quad \mathcal{Q}_- = \mathcal{Y}_{m,l}, \quad \text{cuando } m-l \text{ es par} \quad (5.52)$$

Como sabemos, los estados periódicos (antiperiódicos) tienen un número par (impar) de nodos en el intervalo de un período. El número máximo de nodos que pueden tener los estados aniquilados por $\mathcal{X}_{m,l}^\pm$ y $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$ no puede ser mayor que el orden de estos operadores diferenciales. Cuando $m-l$ es *par*, $\mathcal{X}_{m,l}^\pm$ aniquila $m-l$ estados del borde de bandas antiperiódicos con $1, 1, 3, 3, \dots, m-l-1, m-l-1$ nodos. Los $m+l+1$ estados del borde de bandas periódicos aniquilados por $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$ tienen $0, 2, 2, \dots, (m+l), (m+l)$ nodos. Cuando $m-l$ es *impar*, $\mathcal{X}_{m,l}^\pm$ aniquila $m-l$ estados del borde de bandas periódicos con $0, 2, 2, \dots, m-l-1, m-l-1$ nodos si $m-l > 1$ y un estado sin nodos Ψ_0^- si $m-l = 1$. Este caso corresponde cuando $\mathcal{X}_{m,l}^\pm$ es la supercarga usual de primer orden. El operador $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$ aniquila $m+l+1$ estados antiperiódicos con $1, 1, \dots, m+l, m+l$ nodos.

El cuadro general puede resumirse de la siguiente manera. Los estados del borde Ψ_0 es un modo cero de la supercarga de paridad impar, es decir, $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$ ($\mathcal{X}_{m,l}^\pm$) cuando $m-l$ es par (impar). Los estados del borde de las bandas de la misma banda prohibida se ‘atraen’ uno con otro; estos aparecen como modos ceros de una misma supercarga. Cuando el número de bandas permitidas $m+1$ está fijo y $m-l$ crece en pasos de 2, aparecen dos nuevos estados del borde de las bandas aniquilados por $\mathcal{X}_{m,l}^\pm$, con energías más altas. Cada uno de estos pares es separado por un par de modos ceros de $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$. Los $2(l+1)$ estados más altos energéticamente son modos ceros de $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$. Estas propiedades están ilustradas en la Fig. 5.1.

La integral $\mathcal{Z}_{m,l}^\pm$ refleja la degeneración de los estados de cada subsistema, mientras que $\mathcal{X}_{m,l}^\pm$ y $\mathcal{Y}_{m,l}^\pm$ revelan la self-isospectralidad del sistema compuesto. Como resultado, este está caracterizado por una degeneración cuádruple de los estados cuasi-periódicos y una degeneración doble de los estados del borde de las bandas.

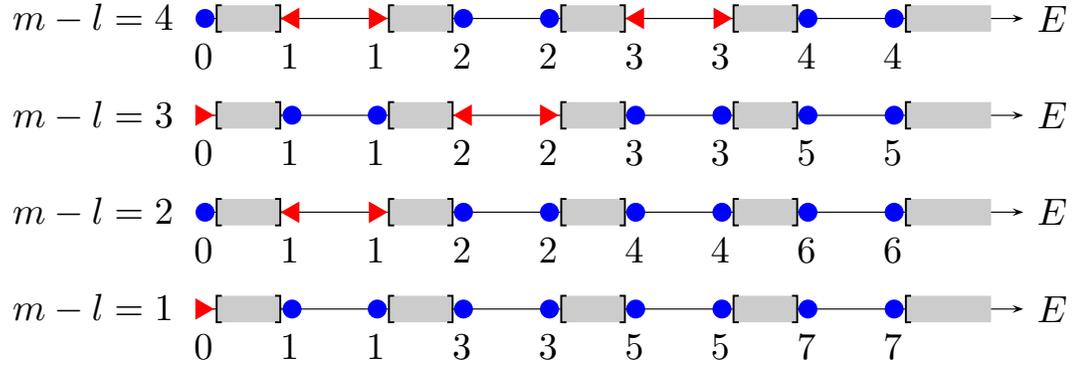


Figura 5.1: Esquema de la estructura de bandas para los sistemas self-isospectrales con $m = 4$. Los triángulos (círculos) indican los estados del borde de bandas aniquilados por $\mathcal{X}_{m,l}^{\pm}$ ($\mathcal{Y}_{m,l}^{\pm}$) y los números bajo de ellos indican su número de nodos. Los estados con un número par (impar) de nodos son periódicos (anti-periódicos)

5.6. Supersimetría self-isospectral en el límite del periodo infinito

Cuando k tiende a uno, las funciones elípticas de Jacobi dejan de ser doblemente periódicas ya que su periodo real tiende a infinito mientras que su periodo complejo tiene un valor finito $2i\mathbf{K}' = 2i\pi$; las funciones se transforman en funciones hiperbólicas

$$\operatorname{dn} x \rightarrow \operatorname{sech} x, \quad \operatorname{cn} x \rightarrow \operatorname{sech} x, \quad \operatorname{sn} x \rightarrow \tanh x. \quad (5.53)$$

En este límite, la configuración del sistema superextendido descrito por dos Hamiltonianos periódicos mutuamente desplazados (5.47) adquiere la siguiente forma

$$\mathcal{H}_{m,l} = \begin{pmatrix} H_{m,l}^+ & 0 \\ 0 & H_{m,l}^- \end{pmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathcal{H}_{m,l}^{PT} = \begin{pmatrix} \hat{H}_l^+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_m^- \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

donde los operadores resultantes representan dos sistemas con el potencial PT con

diferentes parámetros de acoplamiento, especificado por los enteros m y l ,

$$\hat{H}_m^- = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{C_m}{\cosh^2 x}, \quad \hat{H}_l^+ = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{C_l}{\cosh^2 x}, \quad (5.55)$$

Como sabemos el sistema mantiene su invarianza sobre la paridad $[R, \mathcal{H}_{m,l}^{PT}] = 0$ y dado que m y l son enteros el sistema también corresponde a un sistema finite-gap y es reflectionless. El Hamiltoniano \hat{H}_m^- (\hat{H}_l^+) posee $m + 1$ ($l + 1$) estados singletes, m (l) de ellos son estados ligados, el restante corresponde al nivel de energía mas bajo del sector de scattering. Los Hamiltonianos (5.55) son casi-isospectrales. Su espectro coincide en la parte continua $E \in [0, \infty)$ y en solamente $l + 1$ estados singletes. El Hamiltoniano \hat{H}_m^- tiene adicionalmente $m - l$ niveles de energía mas bajos. Esto indica que pasa con la estructura espectral del Hamiltoniano extendido $\mathcal{H}_{m,l}$ cuando el periodo real tiende a infinito. Los $2m + 1$ estados del borde de las bandas de $H_{m,l}^-$ se transforman en $m + 1$ estados físicos de \hat{H}_m^- , mientras que en el caso de el sistema super-pareja $H_{m,l}^+$ solamente $2l + 1$ estados del borde de las bandas convergen a funciones de ondas físicas, el resto no son funciones de onda bien definidas físicamente. Además los dobletes de estados del borde de las bandas y cuádrupletes de estados cuasi-periódicos cambian en $m - l$ estados singletes, $l + 1$ estados dobletes y en cuádrupletes de estados de scattering. En en la Figura (5.6) se representa diferentes casos de potenciales. La presencia de estados singletes da una forma diferente de la tri-supersimetría, en comparación al caso periódico donde no existían estados singletes, que discutiremos a continuación.

Tomando el límite $k = 1$, las integrales no diagonales(5.49), (5.50) se transforman

$$\mathcal{X}_{m,l} = i^{m-l} \begin{pmatrix} 0 & X_{m,l}^- \\ X_{m,l}^+ & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathcal{X}_{m,l}^{PT} = i^{m-l} \begin{pmatrix} 0 & \hat{X}_{m,l}^- \\ \hat{X}_{m,l}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

$$\mathcal{Y}_{m,l} = i^{m+l+1} \begin{pmatrix} 0 & Y_{m,l}^- \\ Y_{m,l}^+ & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathcal{Y}_{m,l}^{PT} = i^{m+l+1} \begin{pmatrix} 0 & \hat{Y}_{m,l}^- \\ \hat{Y}_{m,l}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

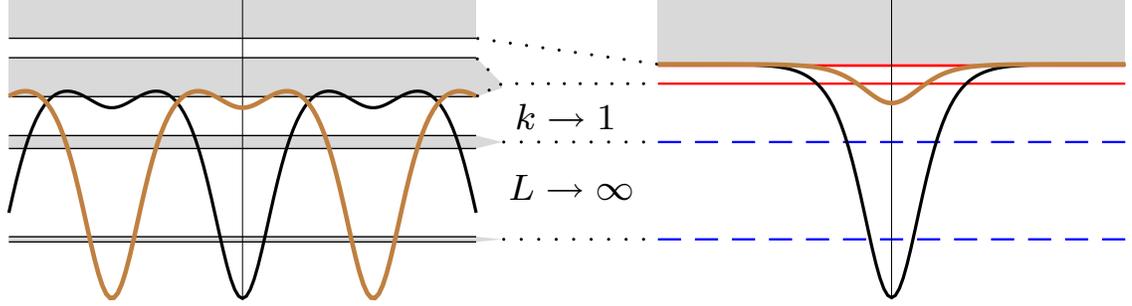


Figura 5.2: Cuadro cualitativo del límite $k = 1$ del sistema self-isospectral para $m = 3$, $l = 1$. La forma de los potenciales y bandas se muestran a la izquierda con k cercano a 1. Las líneas horizontales segmentadas en la derecha muestran los niveles de energía de los estados singletes ligados, mientras que la línea continua corresponde a un doblete de estados ligados y la línea del fondo del espectro continuo indica un doblete de estados mas bajos del sector de scattering.

donde las componentes no diagonales son

$$\hat{Y}_{m,l}^- = \mathcal{D}_{-l}\mathcal{D}_{-l+1}\dots\mathcal{D}_{m-1}\mathcal{D}_m, \quad \hat{Y}_{m,l}^+ = \mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_{-m+1}\dots\mathcal{D}_{l-1}\mathcal{D}_l, \quad (5.58)$$

$$\hat{X}_{m,l}^- = \mathcal{D}_{l+1}\mathcal{D}_{l+2}\dots\mathcal{D}_{m-1}\mathcal{D}_m, \quad \hat{X}_{m,l}^+ = \mathcal{D}_{-m}\mathcal{D}_{-m+1}\dots\mathcal{D}_{-l-2}\mathcal{D}_{-l-1}, \quad (5.59)$$

y $\hat{X}_{m,l}^+ = (-1)^{m-l}(\hat{X}_{m,l}^-)^\dagger$, $\hat{Y}_{m,l}^+ = (-1)^{m+l+1}(\hat{Y}_{m,l}^-)^\dagger$. El límite no viola las relaciones de conmutación, por lo tanto la tri-supersimetría se mantiene y tenemos

$$[\mathcal{H}_{m,l}^{PT}, \mathcal{X}_{m,l}^{PT}] = [\mathcal{H}_{m,l}^{PT}, \mathcal{Y}_{m,l}^{PT}] = [\mathcal{X}_{m,l}^{PT}, \mathcal{Y}_{m,l}^{PT}] = 0. \quad (5.60)$$

Las componentes de los cuadrados de las supercargas no diagonales

$$(\mathcal{X}_{m,l}^{PT})^2 = \begin{pmatrix} \hat{X}_{m,l}^- \hat{X}_{m,l}^+ & 0 \\ 0 & \hat{X}_{m,l}^+ \hat{X}_{m,l}^- \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{Y}_{m,l}^{PT})^2 = \begin{pmatrix} \hat{Y}_{m,l}^- \hat{Y}_{m,l}^+ & 0 \\ 0 & \hat{Y}_{m,l}^+ \hat{Y}_{m,l}^- \end{pmatrix}, \quad (5.61)$$

corresponden a integrales de movimientos de cada subsistema PT individualmente. Los resultados de la sección anterior nos sugieren que deberían ser cierto tipo de

polinomio en el Hamiltoniano, el cual es justamente el caso. Sin embargo, la situación cambia significativamente en comparación con el sistema periódico, donde podemos obtener

$$(\mathcal{X}_{m,l}^{PT})^2 = \prod_{j=0}^{m-l-1} (\mathcal{H}_{m,l}^{PT} - E_{m,j}) = P_X^{PT}(\mathcal{H}_{m,l}^{PT}). \quad (5.62)$$

acá $E_{m,j} = -(m-j)^2$, $j = 0, \dots, m-l-1$, corresponden a los $m-l$ estados singletes del sistema superextendido. El cuadrado de la segunda supercarga no diagonal puede ser factorizada usando P_X^{PT}

$$(\mathcal{Y}_{m,l}^{PT})^2 = (\mathcal{H}_{m,l}^{PT} - E_{m,m}) \prod_{j=m-l}^{m-1} (\mathcal{H}_{m,l}^{PT} - E_{m,j})^2 P_X^{PT}(\mathcal{H}_{m,l}^{PT}), \quad (5.63)$$

Considerando el caso límite de la supercarga diagonal (5.48), encontramos que corresponde exactamente a la encontrada anteriormente (3.46), en el contexto de supersimetría escondida bosonizada,

$$\mathcal{A}_{2n+1} = \mathcal{D}_{-n} \mathcal{D}_{-n+1} \dots \mathcal{D}_0 \dots \mathcal{D}_{n-1} \mathcal{D}_n. \quad (5.64)$$

Los subsistemas \hat{H}_m^- y \hat{H}_l^+ tienen integrales de movimiento impares \mathcal{A}_{2m+1} y \mathcal{A}_{2l+1} de ordenes $2m+1$ y $2l+1$, respectivamente. Por otro lado, sabemos que las componentes de la integral diagonal \mathcal{Z}^{PT} son integrales de paridad impar de orden $2m+1$ para cada subsistema. A continuación explicaremos como las integrales \mathcal{A}_{2m+1} y \mathcal{A}_{2l+1} manifiestan su presencia en el esquema tri-supersimétrico. En el límite $\mathcal{Z}_{m,l} \xrightarrow[k=1]{} \mathcal{Z}_{m,l}^{PT}$, podemos seguir la presencia de las integrales \mathcal{A}_{2m+1} y \mathcal{A}_{2l+1} en las componentes diagonales

$$Z_{m,l}^- \xrightarrow[k=1]{} \hat{Z}_{m,l}^- = \hat{X}_{m,l}^+ \hat{Y}_{m,l}^- = \mathcal{A}_{2m+1} = \mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-m+1} \dots \mathcal{D}_0 \dots \mathcal{D}_{m-1} \mathcal{D}_m, \quad (5.65)$$

$$Z_{m,l}^+ \xrightarrow[k=1]{} \hat{Z}_{m,l}^+ = \hat{X}_{m,l}^- \hat{Y}_{m,l}^+ = \hat{X}_{m,l}^- \hat{X}_{m,l}^+ \mathcal{A}_{2l+1}. \quad (5.66)$$

Cada uno de estos operadores, de mismo orden, es una integral del subsistema correspondiente y juntas aniquilan todos los estados singletes y dobletes del sistema superextendido. $(\mathcal{Z}_{m,l}^{PT})^2$ produce un polinomio de la forma

$$(\mathcal{Z}_{m,l}^{PT})^2 = (\mathcal{H}_{m,l}^{PT} - E_{m,m}) \prod_{j=0}^{m-1} (\mathcal{H}_{m,l}^{PT} - E_{m,j})^2, \quad (5.67)$$

el cual puede ser relacionado con una curva espectral hiperelíptica *degenerada* de género m , al contrario que en el sistema m -gap (5.47), cuyo polinomio espectral (5.15) corresponde a una curva espectral hiperelíptica *no degenerada* del mismo género. Esto refleja el echo que la estructura de bandas desaparece, cada par de dos estados del borde de la misma banda se transforma en un estados singlete, lo cual provoca una degeneración del polinomio espectral. Por lo tanto la degeneración no aparece en el estado mas bajo del espectro continuo. La Fig. 5.2 ilustra esta situación.

Las componentes de la integral $\mathcal{Y}_{m,l}^{PT}$ pueden ser reescritas en la siguiente forma

$$\hat{Y}_{m,l}^- = \mathcal{A}_{2l+1} \mathcal{D}_{l+1} \dots \mathcal{D}_{m-1} \mathcal{D}_m = \mathcal{A}_{2l+1} \hat{X}_m^-, \quad \hat{Y}_{m,l}^+ = \hat{X}_l^+ \mathcal{A}_{2l+1}. \quad (5.68)$$

La relación (5.63) puede ser expresada también como

$$(\mathcal{Y}_{m,l}^{PT})^2 = \mathcal{A}_{2l+1}^2 (\mathcal{H}_{m,l}^{PT}) P_X^{PT} (\mathcal{H}_{m,l}^{PT}), \quad (5.69)$$

donde en correspondencia con (5.64) $\mathcal{A}_{2l+1} = \mathcal{D}_{-l} \mathcal{D}_{-l+1} \dots \mathcal{D}_0 \dots \mathcal{D}_{l-1} \mathcal{D}_l$.

En el límite del periodo infinito, la fuerte relación entre las integrales no diagonales (5.56) y (5.57) se manifiesta por medio de la integral de paridad impar \mathcal{A}_{2l+1} de \hat{H}_l^+ , Ec. (5.68), la cual no esta presente en el caso periódico. Como consecuencia, esta integral aparece también en la estructura de la integral diagonal $\hat{Z}_{m,l}^+$, mirar (5.66).

5.7. Discusión

En este capítulo discutimos la aparición de tri-supersimetría en sistemas finite-gap. La integral de la supersimetría bosonizada puede ser factorizada en diversas

maneras lo que permite encontrar transformaciones de Crum-Darboux y así producir nuevos sistemas finite-gap y super-extender el sistema mediante los Hamiltonianos superpareja. Como en el caso de potencial delta de Dirac, en total tenemos tres integrales de movimiento no triviales y tres operadores de graduación. El en caso del sistema de Lamé asociado fue ampliamente discutido en la literatura. Dunne y Feinberg consideraron el caso $l = m - 1$ de los Hamiltonianos de Lamé asociado (5.33) como un ejemplo de una extensión self-isospectral determinada por una transformación de Darboux [27]. Khare y Shukhatme [100] determinaron que la transformación de Darboux nos entrega una extensión self-isospectral del sistema de Lamé solo en el caso de 1-gap mientras que en las otras configuraciones las extensiones son de naturaleza completamente diferente. Por otro lado, Fernández *et al* revelaron self-isospectralidad del Hamiltoniano de Lamé de 2-gap cuando una transformación de segundo orden fue aplicada [65]. Bajo la luz de los presentes resultados podemos entender todas estas investigaciones anteriores como piezas de un mosaico, el cual es completamente organizado por la estructura de tri-supersimetría y por la supersimetría self-isospectral del sistema de Lamé asociada. En particular, el sistema considerado por Dunne y Feinberg es la extensión self-isospectral $\mathcal{H}_{m,m-1}$ del Hamiltoniano de Lamé asociado, ver (5.50). Detrás de la supercarga de primer orden $\mathcal{X}_{m,m-1}$, la lista de las integrales locales pueden ser completada por la otra supercarga no diagonal $\mathcal{Y}_{m,m-1}$ y la integral diagonal $\mathcal{Z}_{m,m-1}$ la cual juega el rol de una carga central de una supersimetría extendida no lineal $N = 4$. Aunque ambas integrales $\mathcal{X}_{m,m-1}$ y $\mathcal{Z}_{m,m-1}$ aniquilan el doblete de estados bases, la tri-supersimetría esta espontáneamente rota de forma parcial, debido a que el doblete de estados bases no se anula bajo la acción de la supercarga $\mathcal{Y}_{m,m-1}$. Esto sugiere que rompimiento de supersimetría debería ser analizado teniendo en mente el conjunto completo de integrales \mathcal{Z} , $\mathcal{Q}_+^{(a)}$ y $\mathcal{Q}_-^{(a)}$, en el caso de una clase general de sistemas finite-gap. Se mostró también que incluyendo campos eléctricos y magnéticos para el movimiento de un electrón en el plano puede ser reinterpretado en términos de tri-supersimetría self-isospectral, donde las com-

ponentes up y down del electrón sienten el mismo potencial pero desplazado en la mitad del periodo del sistema.

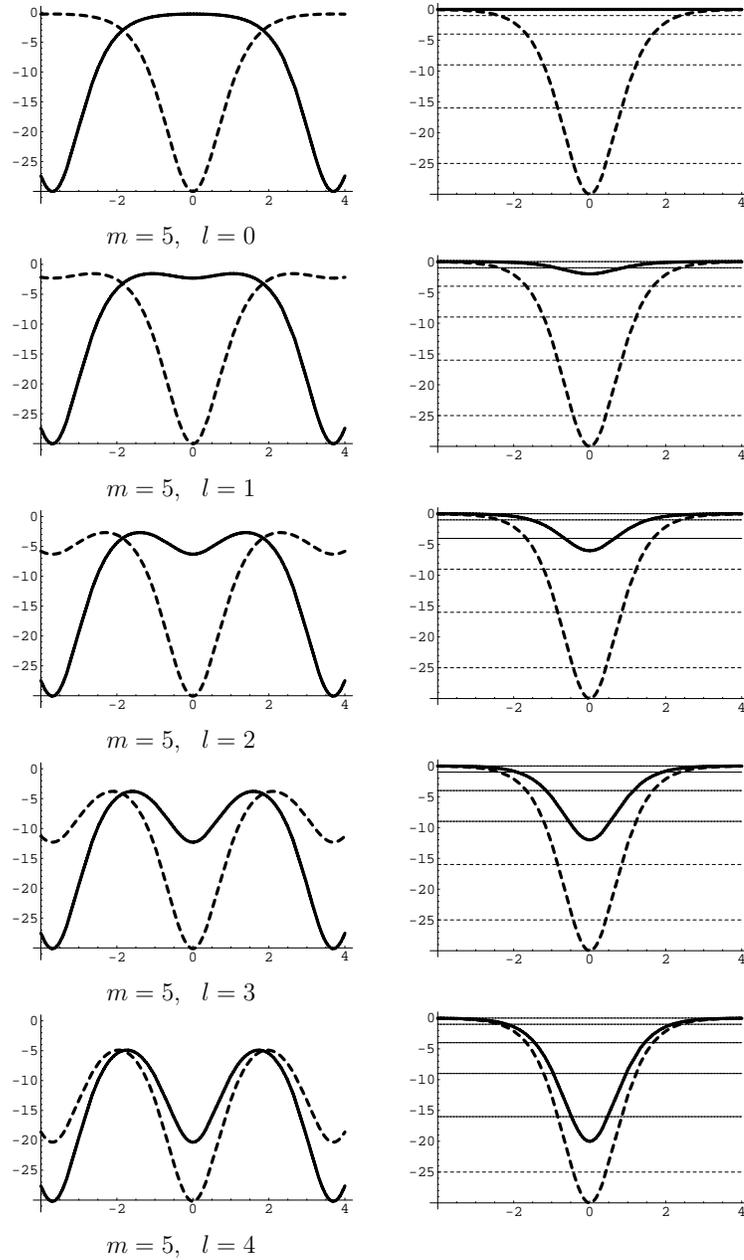


Figura 5.3: Los potenciales a la izquierda corresponden a $H_{m,l}^-$ (línea punteada) y $H_{m,l}^+$ (línea sólida) para $k^2 = 0,99$. En la derecha se muestra el límite del periodo infinito ($k \rightarrow 1$) de los potenciales. Acá los estados ligados y el estado mas bajo de scattering que comparten ambos sistemas están organizados en dobletes de energía (línea sólida), mientras que los $m - l$ estados ligados mas bajos (línea punteada) representan estados singletes.

Capítulo 6

Pöschl-Teller y AdS_2

En este capítulo mostraremos que la supersimetría escondida bosonizada no lineal del sistema RPT y la tri-supersimetría no lineal relacionada para el caso extendido se origina del problema cuántico de una partícula cargada no relativista sobre la superficie AdS_2 bajo la presencia de un vórtice singular tipo magnético. Clásicamente, la partícula realiza un movimiento libre geodésico sobre AdS_2 . El efecto AB influencia esencialmente sobre las propiedades cuánticas del sistema. Para valores semienteros del flujo, el espectro está caracterizado por una degeneración adicional doble relacionada a un automorfismo involutivo específico de la isometría de AdS_2 . El sistema revela una dinámica cuántica *reflectionless* en este caso. Estas dos propiedades relacionadas subyacen la estructura supersimétrica peculiar no lineal del sistema RPT obtenida mediante una reducción del momentum angular.

6.1. Efecto Aharonov-Bohm sobre AdS_2

Consideremos un hiperboloide de una hoja

$$x^\mu x_\mu = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = -\mathcal{R}^2 \tag{6.1}$$

embebido en espacio de Minkowski tridimensional con la métrica

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, +1), \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

Este espacio puede ser parametrizado por

$$x^1 = \mathcal{R} \cosh \chi \cos \varphi, \quad x^2 = \mathcal{R} \cosh \chi \sin \varphi, \quad x^3 = \mathcal{R} \sinh \chi, \quad (6.3)$$

y es conocido como el espacio AdS_2 de radio $\mathcal{R} > 0$ con la métrica inducida

$$ds^2 = \mathcal{R}^2 (d\chi^2 - \cosh^2 \chi d\varphi^2), \quad -\infty < \chi < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (6.4)$$

Introduciremos en este espacio el vector potencial que corresponde al efecto Aharonov-Bohm

$$A_1 = -\frac{\Phi}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad A_2 = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad A_3 = 0, \quad (6.5)$$

el cual describe un campo “magnético” de una línea de flujo a lo largo del eje x_3

$$B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda = (0, 0, \Phi \delta^2(x_1, x_2)), \quad (6.6)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ es un tensor antisimétrico $\epsilon_{123} = 1$.

6.2. Sistema clásico

Consideremos una partícula cargada *no relativista* acoplada minimalmente al campo de gauge externo $U(1)$ (6.5) y confinada a moverse en una superficie de dos dimensiones (6.1). Tomando en cuenta las Ecs. (6.3), (6.5) el Lagrangiano correspondiente de una partícula de masa igual a uno $L = \frac{1}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + \frac{e}{c} A_\mu \dot{x}^\mu$, se reduce a

$$L = \frac{\mathcal{R}^2}{2} (\dot{\chi}^2 - \cosh^2 \chi \dot{\varphi}^2) - \alpha \dot{\varphi}, \quad (6.7)$$

donde $\alpha \equiv \frac{e\Phi}{2\pi c}$, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dt$, y t es un parámetro de evolución. El último término de acoplamiento en (6.7) es una derivada total y no afecta la dinámica clásica de la

partícula que realiza un movimiento geodésico sobre AdS_2 . La forma de las trayectorias pueden ser identificadas señalando que el grupo de isometría de AdS_2 es un grupo transitivo del hiperboloide (6.1), es decir, dos puntos cualquiera de la superficie puede relacionarse uno con otro mediante una transformación $\text{SO}(2,1)$ apropiada. Los generadores de esta simetría son las integrales de movimiento

$$J_1 = -p_\chi \sin \varphi - J_3 \cos \varphi \tanh \chi, \quad J_2 = p_\chi \cos \varphi - J_3 \sin \varphi \tanh \chi, \quad (6.8)$$

$$J_3 = p_\varphi + \alpha, \quad (6.9)$$

donde $p_\chi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}}$, $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ son los momentos canónicos, $\{\varphi, p_\varphi\} = 1$, $\{\chi, p_\chi\} = 1$. Con respecto a los paréntesis de Poisson, las integrales (6.8) y (6.9) generan la álgebra (2+1)D de Lorentz

$$\{J_\mu, J_\nu\} = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} J^\lambda. \quad (6.10)$$

Su conservación viene de la forma del Hamiltoniano canónico, $H = p_\chi \dot{\chi} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$,

$$H = \frac{1}{2\mathcal{R}^2} \left(p_\chi^2 - \frac{(p_\varphi + \alpha)^2}{\cosh^2 \chi} \right), \quad (6.11)$$

que se reduce al elemento Casimir del $so(2,1)$, hasta una constante multiplicativa

$$H = -\frac{1}{2\mathcal{R}^2} \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} = J_\mu J^\mu. \quad (6.12)$$

Por medio de una calculación directa es posible mostrar que las integrales (6.8), (6.9) satisfacen la relación

$$x^\mu J_\mu = 0 \quad (6.13)$$

con x^μ dados por (6.3). Como resultado, la trayectoria de la partícula esta determinada por la intersección del hiperplano de Minkowski (6.13), $J_\mu = \text{const}$, con la superficie del hiperboloide (6.1). Su forma dependerá del valor del Casimir \mathcal{C} . Para $\mathcal{C} > 0$, $= 0$, o < 0 , la trayectoria es una elipse, una línea recta, o una hipérbola.

Debido a la métrica indefinida Lorentziana de la superficie AdS_2 , los valores del Hamiltoniano (6.11) no están restringidos desde abajo. Nosotros estaremos interesados en sistemas cuánticos reducidos a ciertos niveles de la integral J_3 , en el cual el

espectro está restringido desde abajo. Como sigue de (6.9) y (6.11) el sistema reducido describe un sistema Pöschl-Teller unidimensional. Los tres tipos de trayectorias clásicas del sistema (6.11) corresponden a un movimiento ligado periódico ($\mathcal{C} > 0$), o un movimiento no ligado ($\mathcal{C} \leq 0$) en un potencial 1D *clásico atractivo*. En particular, las trayectorias de líneas rectas sobre el hiperboloide corresponde a un movimiento de energía cero del sistema Pöschl-Teller.

Debido al cuadro algebraico existente, el sistema (6.12) tiene también dos simetrías discretas. Estas no tienen un rol relevante en el caso clásico, pero juegan un rol importante a nivel cuántico en el contenido de la supersimetría que discutiremos. Estas simetrías son automorfismos involutivos de la álgebra $so(2, 1)$ (6.10),

$$R : (J_1, J_2, J_3) \rightarrow (-J_1, -J_2, J_3), \quad S : (J_1, J_2, J_3) \rightarrow (-J_1, J_2, -J_3). \quad (6.14)$$

En el espacio de Minkowski que discutimos, las simetrías (6.14) corresponden a un cambio de signo en la coordenada tipo-espacio x^3 y en una coordenada tipo-tiempo, la cual en correspondencia con la elección de la definición de S , identificamos con x^2 ,

$$R : (x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^1, x^2, -x^3), \quad S : (x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^1, -x^2, x^3). \quad (6.15)$$

En las coordenadas curvilineas estas simetrías corresponden a

$$R : (\chi, \varphi) \rightarrow (-\chi, \varphi), \quad S : (\chi, \varphi) \rightarrow (\chi, -\varphi). \quad (6.16)$$

El lagrangiano (6.7) es invariante bajo la simetría discreta R . Sin embargo, es cuasi-invariante bajo la simetría S , que provoca un cambio con un término con una derivada total, $\Delta L = 2\alpha\dot{\varphi}$, la cual no afecta al movimiento clásico. En correspondencia con tal cuasi-invarianza del Lagrangiano, para reproducir el automorfismo definido por (6.14) cuando hay un flujo de Aharonov-Bohm α distinto de cero, una transformación $\varphi \rightarrow -\varphi$ tiene que estar acompañada por una transformación canónica adicional $p_\varphi \rightarrow p_\varphi - 2\alpha$. Al nivel cuántico, la transformación unitaria correspondiente es generada por el operador

$$U_\alpha(\varphi) = \exp(-2i\alpha\varphi). \quad (6.17)$$

Este operador esta bien definido solamente en el caso cuando el flujo toma valores enteros y semienteros. Como veremos mas adelante, para $2\alpha \notin \mathbb{Z}$, la simetría discreta S esta espontáneamente rota.

6.3. Cuantización y propiedades espectrales

La cuantización canónica del sistema con una prescripción *simétricamente ordenada* de los factores que no conmutan en los análogos cuánticos de (6.8) deja los operadores

$$\hat{J}_1 = i \sin \varphi \left(\partial_\chi - \frac{1}{2} \tanh \chi \right) - \cos \varphi \tanh \chi \hat{J}_3, \quad (6.18)$$

$$\hat{J}_2 = -i \cos \varphi \left(\partial_\chi - \frac{1}{2} \tanh \chi \right) - \sin \varphi \tanh \chi \hat{J}_3, \quad (6.19)$$

$$\hat{J}_3 = -i \partial_\varphi + \alpha. \quad (6.20)$$

Ellos generan una álgebra $so(2, 1)$,

$$[\hat{J}_\mu, \hat{J}_\nu] = -i \epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{J}^\lambda. \quad (6.21)$$

Nosotros asumimos que estos operadores actúan sobre el espacio de las funciones de onda $\psi(\chi, \varphi)$, que son 2π periódicas en φ , donde estos son hermíticos con respecto al producto escalar

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \psi_1^*(\chi, \varphi) \psi_2(\chi, \varphi) d\chi d\varphi. \quad (6.22)$$

El Hamiltoniano cuántico

$$\hat{H} = -\partial_\chi^2 - \frac{\hat{J}_3^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \chi} \quad (6.23)$$

se obtiene de (6.12), donde ponemos $2\mathcal{R}^2 = 1$ y sustraímos un término constante cuántico $\frac{\hbar^2}{4}$ y tenemos

$$\hat{H} = -\hat{J}_\mu \hat{J}^\mu - \frac{1}{4}. \quad (6.24)$$

Como el Hamiltoniano (6.23) es el operador de Casimir $so(2, 1)$ desplazado, uno puede escoger una representación en la cual \hat{H} y el generador $so(2, 1)$ compacto, \hat{J}_3 , son diagonales. La ecuación de Schrödinger asociada con el Hamiltoniano (6.23) es separable en las variables χ y φ . Las autofunciones comunes de \hat{H} y \hat{J}_3 pueden ser factorizadas como

$$\Psi_{E,m}^\alpha(\chi, \varphi) = e^{im\varphi} \psi_{E,m}^\alpha(\chi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.25)$$

donde el superíndice indica el valor del flujo de Aharonov-Bohm. Así tenemos

$$\hat{J}_3 \Psi_{E,m}^\alpha(\chi, \varphi) = j_3 \Psi_{E,m}^\alpha(\chi, \varphi), \quad j_3 = m + \alpha, \quad (6.26)$$

y la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H} \Psi_{E,m}^\alpha(\chi, \varphi) = E \Psi_{E,m}^\alpha(\chi, \varphi) \quad (6.27)$$

se reduce a

$$H_{m_\alpha} \psi_{E,m}^\alpha(\chi) = E \psi_{E,m}^\alpha(\chi), \quad H_{m_\alpha} = -\frac{d^2}{d\chi^2} - \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)}{\cosh^2 \chi}, \quad (6.28)$$

donde $m_\alpha \equiv m + \alpha - \frac{1}{2}$. El Hamiltoniano reducido H_{m_α} es justamente el Hamiltoniano Pöschl-Teller (3.33) con el parámetro m y la variable x cambiada por m_α y χ respectivamente. Como los casos que corresponden a los valores del flujo de Aharonov-Bohm α_1 y $\alpha_2 = \alpha_1 + n$, $n \in \mathbb{Z}$, están relacionadas por medio de una transformación unitaria generada por el operador $U_{\alpha_2, \alpha_1}(\varphi) = e^{im\varphi}$, podemos asumir sin pérdida de generalidad el caso $0 \leq \alpha < 1$.

Definiendo las combinaciones lineales de los generadores $\hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2$ y $\hat{J}_- = \hat{J}_1^\dagger$,

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &= e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} - \left(\hat{J}_3 + \frac{1}{2} \right) \tanh \chi \right), \\ \hat{J}_- &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \chi} - \left(\hat{J}_3 - \frac{1}{2} \right) \tanh \chi \right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Estos son los operadores de escalera de la álgebra $so(2, 1)$,

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -2\hat{J}_3. \quad (6.30)$$

Entonces para los autoestados (6.25) tenemos la relación

$$\hat{J}_3(\hat{J}_\pm \Psi_{E,m}^\alpha) = (j_3 \pm 1)(\hat{J}_\pm \Psi_{E,m}^\alpha). \quad (6.31)$$

Sobre el subespacio con $j_3 = m + \alpha$, las partes que dependen de χ en los operadores de escalera \hat{J}_- y \hat{J}_+ corresponden a los operadores de intertwining (3.35). Los valores del parámetro m_α son no enteros en el caso $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

Discutamos las propiedades espectrales del sistema en dependencia del flujo magnético. Primero consideremos el caso $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Desde la forma del Hamiltoniano reducido (6.28), se obtiene que el sistema cuántico (6.23) contiene el subsistema de Pöschl-Teller con el potencial repulsivo $u(\chi) = +\gamma^2 \cosh^{-2} \chi$, $\gamma^2 > 0$. Para $\alpha = 0$ esto ocurre en el subespacio $m = 0$, donde $\gamma^2 = 1/4$. Para $0 < \alpha < 1/2$ y $1/2 < \alpha < 1$, el potencial repulsivo aparece en los subespacios con $m = 0$ y $m = -1$, donde $\gamma^2 = 1/4 - \alpha^2$ y $\gamma^2 = 1/4 - (1 - \alpha)^2$, respectivamente. El potencial repulsivo PT no tiene estados físicos con $E = 0$. De acuerdo con la Ec. (6.31), la parte continua del espectro del sistema cuántico (6.23) con $\alpha \neq \frac{1}{2}$ esta descrito por estados de scattering con $E > 0$. Los correspondientes autoestados con $E = k^2$, $k > 0$, pueden ser expresados en términos de la función hipergeométrica. Cualquiera subsistema de PT esta caracterizado por un coeficiente de reflexión distinto de cero [101]

$$|r|^2 = \frac{1}{1 + \rho^2}, \quad \rho = \frac{\sinh \pi k}{\cos \pi \alpha}. \quad (6.32)$$

Sobre los estados de scattering con $E > 0$, en concordancia con (6.24), estan realizadas representaciones irreducibles unitarias de dimensión infinita de las series principales continuas del álgebra $sl(2, \mathbb{R}) \sim so(2, 1)$ [102] con $-\hat{J}_\mu \hat{J}^\mu = E + 1/4 > 1/4$ y $j_3 = \alpha + m$, $m = 0, \pm 1, \dots$

El sistema (6.23) con $\alpha \neq 1/2$ tiene también estados ligados de ciertas energías negativas discretas. Con la ayuda de la relación

$$\hat{H} = \hat{J}_+ \hat{J}_- - (\hat{J}_3 - 1/2)^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ - (\hat{J}_3 + 1/2)^2, \quad (6.33)$$

cf. (3.36) y (3.37), una parte de los estados normalizables correspondientes son estados aniquilados por los operadores de escalera \hat{J}_- y \hat{J}_+ . Estos estados son

$$\Psi_{E,m}^{\alpha,-}(\chi, \varphi) = e^{im\varphi} \cosh^{-(m+\alpha-1/2)} \chi, \quad \hat{J}_- \Psi_{E,m}^{\alpha,-} = 0, \quad E = -(m + \alpha - 1/2)^2, \quad (6.34)$$

donde $m = 1, 2, \dots$ for $0 \leq \alpha < 1/2$ y $m = 0, 1, \dots$ para $1/2 < \alpha < 1$ y

$$\Psi_{E,m}^{\alpha,+}(\chi, \varphi) = e^{im\varphi} \cosh^{m+\alpha+1/2} \chi, \quad \hat{J}_+ \Psi_{E,m}^{\alpha,+} = 0, \quad E = -(m + \alpha + 1/2)^2, \quad (6.35)$$

con $m = -1, -2, \dots$ para $0 \leq \alpha < 1/2$ y $m = -2, -3, \dots$ para $1/2 < \alpha < 1$. Un número infinito de estados ligados con el mismo autovalor de energía son obtenidos mediante la acción de los operadores de escalera $(\hat{J}_+)^n$ y $(\hat{J}_-)^n$, $n = 1, 2, \dots$ sobre los estados (6.34) y (6.35). Cuando $\alpha = 0$ la parte discreta del espectro revela una simetría con respecto al cambio $j_3 \rightarrow -j_3$, pero no hay otra simetría de este tipo para $\alpha \neq 0$.

Sobre los estados

$$(\hat{J}_+)^n \Psi_{E,m}^{\alpha,-} \quad \text{y} \quad (\hat{J}_-)^n \Psi_{E,m}^{\alpha,+}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.36)$$

están realizadas series discretas de representaciones unitarias infinito-dimensionales de $sl(2, \mathbb{R})$ [102]. Estas representaciones están caracterizadas por un autovalor del operador de Casimir y autovalores del generador compacto \hat{J}_3 las cuales son $-\hat{J}_\mu \hat{J}^\mu = -(m+\alpha)(m+\alpha-1)$, $j_3 = m+\alpha+n$, y $-\hat{J}_\mu \hat{J}^\mu = -(m+\alpha)(m+\alpha+1)$, $j_3 = m+\alpha-n$ respectivamente. El espectro cuántico del sistema con $\alpha = 0$ esta ilustrado en la Fig. 6.1; los subespacios con j_3 y $-j_3$, $j_3 \neq 0$, están presentados simétricamente en el espectro mientras que el subespacio con $j_3 = 0$ esta impariado.

Ahora discutiremos el caso $\alpha = 1/2$. Sobre los subespacios con $m = 0$ y $m = -1$, la dinámica se reduce a la de una partícula libre, mientras que el conjunto de los Hamiltonianos (6.28) con todos los posibles valores enteros $m_{1/2} = m$ corresponden a la familia de Hamiltonianos *reflectionless* RPT (3.33) que satisfacen la identidad (3.34),

$$\hat{H}|_{j_3=\frac{1}{2}} = \hat{H}|_{j_3=-\frac{1}{2}} = H_0 = -\partial_\chi^2, \quad \hat{H}|_{j_3=m+\frac{1}{2}} = H_m. \quad (6.37)$$

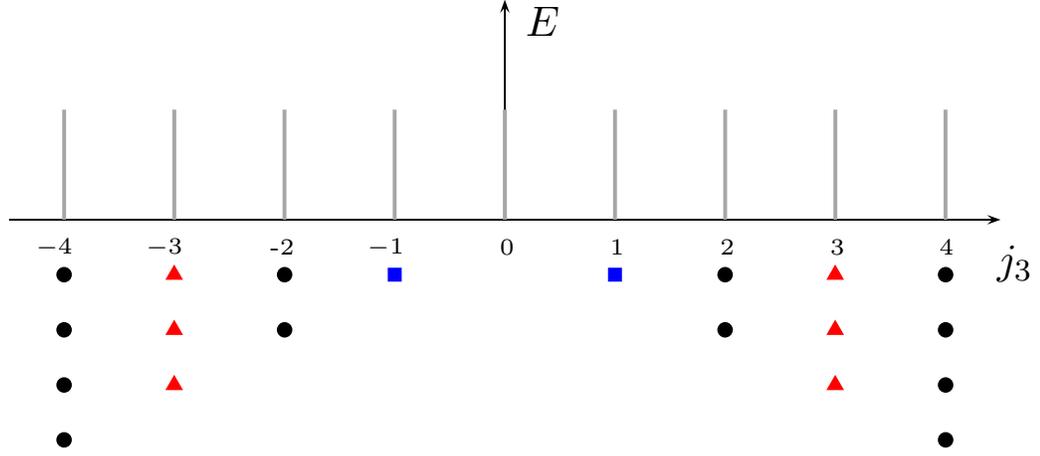


Figura 6.1: Espectro del sistema AdS₂ con flujo de AB entero ($\alpha = 0$).

Los autoestados $\Psi_{E,m}^{1/2}$ con $m = 1, 2, \dots$ y $E = \kappa^2 > 0$ del Hamiltoniano (6.24) se obtienen de los estados de ondas planas de la partícula libre $e^{\pm i\kappa\chi}$ ($m = 0$), por acción sobre estos del operador $(J_+)^m = e^{im\varphi} \mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_{-m+1} \dots \mathcal{D}_{-1}$. Esto corresponde exactamente a la relación (3.42). Los estados de scattering con autovalores negativos de m son producidos por la acción del operador hermítico conjugado $(J_-)^m$, $m = 1, 2, \dots$, sobre $e^{\pm i\kappa\chi}$. En comparación con el caso $\alpha \neq 1/2$, el sistema tiene estados adicionales con $E = 0$, sobre los cuales están realizadas representaciones unitarias de dimensión infinita de $sl(2, \mathbb{R})$. Estos estados tienen la forma de autovectores de (6.36) construidos sobre los autoestados de la forma (6.34) y (6.35) con $\alpha = 1/2$, en la cual $m = 0$ y $m = -1$ respectivamente. Los estados normalizables de energía negativa están construidos de la misma manera sobre los autoestados (6.34) y (6.35) con $m = 1, 2, \dots$ y $m = -2, -3, \dots$. En este caso, todos los niveles de energía del espectro que muestra la Fig. (6.2), tiene degeneración doble con respecto a la reflexión $j_3 \rightarrow -j_3$, Fig. 6.2 .

En término de los operadores de escalera, el automorfismo S (6.14) toma la forma

$$S : (\hat{J}_{\pm}, \hat{J}_3) \rightarrow (-\hat{J}_{\mp}, -\hat{J}_3). \quad (6.38)$$

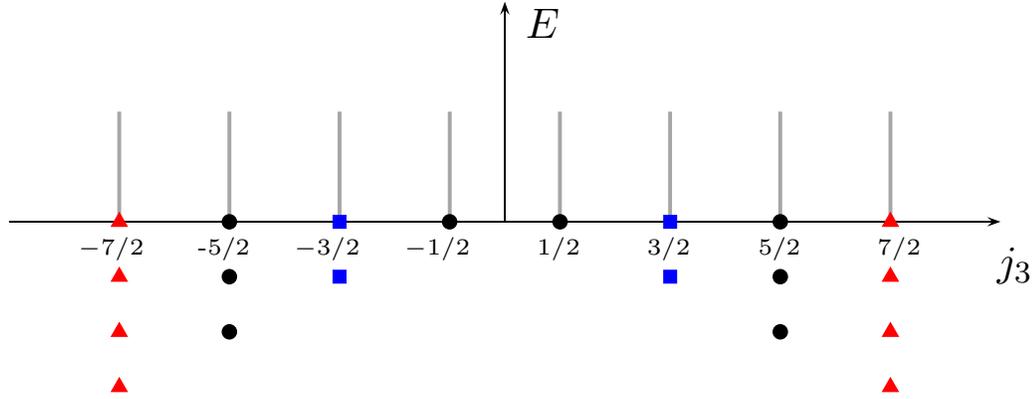


Figura 6.2: Espectro del sistema AdS_2 con flujo de AB semientero ($\alpha = 1/2$).

Bajo esta transformación, la álgebra (6.21) y el Hamiltoniano (6.24) son invariantes.

Las propiedades descritas de los estados del sistema cuántico nos dicen que esta simetría discreta está espontáneamente rota excepto para los casos cuando el flujo de Aharonov-Bohm toma valores enteros y semi-enteros. En el caso $\alpha = 0$ o $\alpha = 1/2$, la simetría discreta transforma mutuamente la mitad de las representaciones infinito-dimensionales de $so(2, 1)$ realizadas sobre los estados del espectro discreto, incluyendo los estados con $E = 0$ cuando $\alpha = 1/2$.

6.4. Reducción y tri-supersimetría

Ahora identificaremos los análogos exactos de las relaciones de intertwining de Crum-Darboux y veremos como aparece la estructura tri-supersimétrica bajo la apropiada reducción del sistema AdS_2 con la presencia del flujo semi-entero ($\alpha = 1/2$) de Aharonov-Bohm.

Teniendo en mente la factorización (6.25), introducimos la notaciones $|m\rangle = e^{im\varphi}$ y $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1^* \psi_2 d\varphi$, de manera que $\langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}$. Tomando en cuenta la forma explícita de los operadores de escalera (6.29), obtenemos los únicos elementos

matriciales distintos de cero de \hat{J}_\pm y \hat{H} ,

$$\langle m-1 | \hat{J}_- | m \rangle = -\mathcal{D}_m, \quad \langle m | \hat{J}_+ | m-1 \rangle = \mathcal{D}_{-m}, \quad (6.39)$$

$$\langle m | \hat{H} | m \rangle = -\mathcal{D}_{-m} \mathcal{D}_m - m^2, \quad (6.40)$$

que corresponden a (3.35) y (3.36). Entonces, recordando (6.39) y (6.40), la relación de intertwining de Crum-Darboux (3.39) es justamente el elemento matricial de la relación $[(\hat{J}_-)^{l+1}, \hat{H}] = 0$, $l = 0, 1, \dots$,

$$\langle m-l-1 | \hat{J}_-^{l+1} \hat{H} | m \rangle = \langle m-l-1 | \hat{H} \hat{J}_-^{l+1} | m \rangle. \quad (6.41)$$

La relación de intertwining (3.40) esta dada por conjugación Hermítica, o, alternativamente, es producida por el mismo operador tomando entre los estados $\langle -m-1 |$ y $| -m+l \rangle$ usando la identidad (3.34). La relación (6.41) tomada para $l = 2m$ (o, su Hermítica conjugada) junto con la identidad (3.34) produce la Ec. (3.46) que corresponde a la integral no trivial de orden impar del sistema RPT H_m .

Así hemos identificado el origen de las relaciones de intertwining asociadas con el Hamiltoniano RPT (3.33). Desde la conmutatividad de los operadores $\mathcal{X}_{m,l}$ y $\mathcal{Y}_{m,l}$ con el Hamiltoniano $\mathcal{H}_{m,l}$ es reducida a las relaciones de intertwining, uno puede verificar que los elementos matriciales de los operadores \hat{J}_\pm^r , con la elección apropiada de los enteros $r > 0$, corresponden a los operadores $X_{m,l}^\pm$, $Y_{m,l}^\pm$ y $Z_{m,l}^\pm$ que componen las integrales $\mathcal{X}_{m,l}$, $\mathcal{Y}_{m,l}$ y $\mathcal{Z}_{m,l}$. En correspondencia con la simetría discreta (6.38) tenemos

$$-(-i)^{m-l} \langle l | \hat{J}_-^{m-l} | m \rangle = -i^{m-l} \langle -l-1 | \hat{J}_+^{m-l} | -m-1 \rangle = X_{m,l}^-, \quad (6.42)$$

$$-(-i)^{m+l+1} \langle -l-1 | \hat{J}_-^{m+l+1} | m \rangle = -i^{m+l+1} \langle l | \hat{J}_+^{m+l+1} | -m-1 \rangle = Y_{m,l}^-, \quad (6.43)$$

$$(-i)^{2m+1} \langle -m-1 | \hat{J}_-^{2m+1} | m \rangle = i^{2m+1} \langle m | \hat{J}_+^{2m+1} | -m-1 \rangle = Z_{m,l}^-, \quad (6.44)$$

$$(-i)^{2l+1} \langle -l-1 | \hat{J}_+^{m-l} \hat{J}_-^{m+l+1} | l \rangle = i^{2l+1} \langle l | \hat{J}_+^{m+l+1} \hat{J}_-^{m-l} | -l-1 \rangle = Z_{m,l}^+. \quad (6.45)$$

Los operadores $X_{m,l}^+$ y $Y_{m,l}^+$ se obtiene por conjugación hermítica de (6.42) y (6.43). Estas relaciones están ilustradas en las Figuras 6.3–6.6 para $m = 3$, $l = 1$.

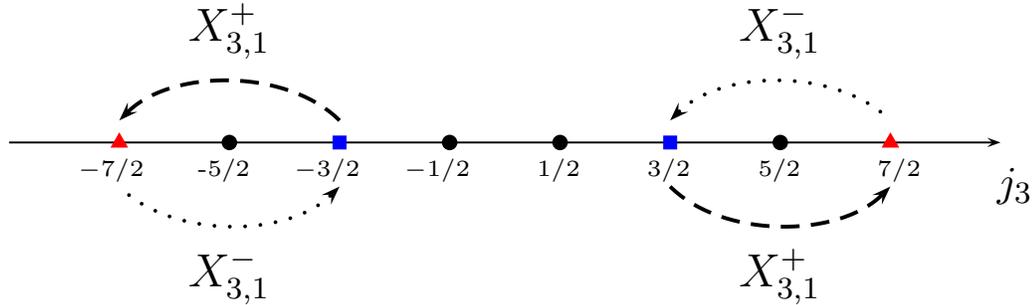


Figura 6.3: Acción de los operadores $X_{3,1}^{\pm}$ en correspondencia con (6.42).

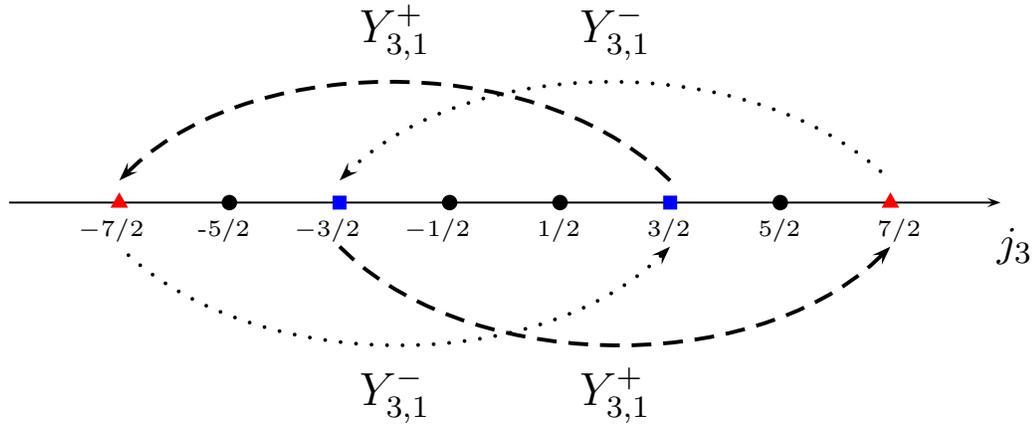


Figura 6.4: Acción de los operadores $Y_{3,1}^{\pm}$ en correspondencia con (6.43).

Para reproducir las relaciones que corresponden a (5.62) con la ayuda de (6.42)–(6.45), usaremos las identidades

$$\hat{J}_+^n \hat{J}_-^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\hat{H} + \left(\hat{J}_3 - k - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \equiv P_n(\hat{H}, \hat{J}_3), \quad \hat{J}_-^n \hat{J}_+^n = P_n(\hat{H}, -\hat{J}_3), \quad (6.46)$$

que viene de la álgebra $so(2, 1)$ y la Ec.. (6.33).

Por ejemplo, poniendo en la primera identidad $n = 2m+1$ y calculando elemento diagonal matricial entre los estados $\langle m|$ y $|m\rangle$ reproducimos el caso de la componente inferior de la tercera relación de (5.62), es decir, $(Z_{m,l}^-)^2 = P_{2m+1}(H_m)$, donde el

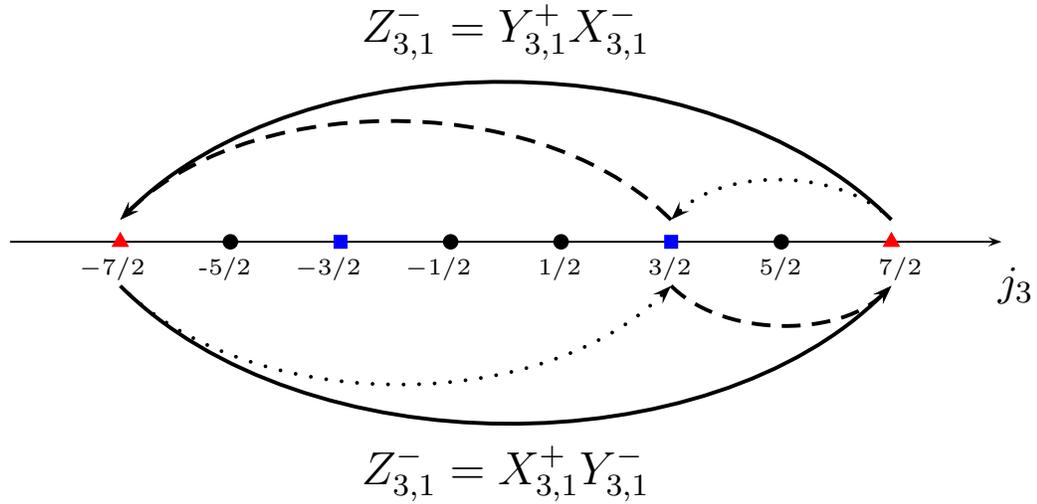


Figura 6.5: Acción de los operadores $Z_{3,1}^-$ en correspondencia con (6.44).

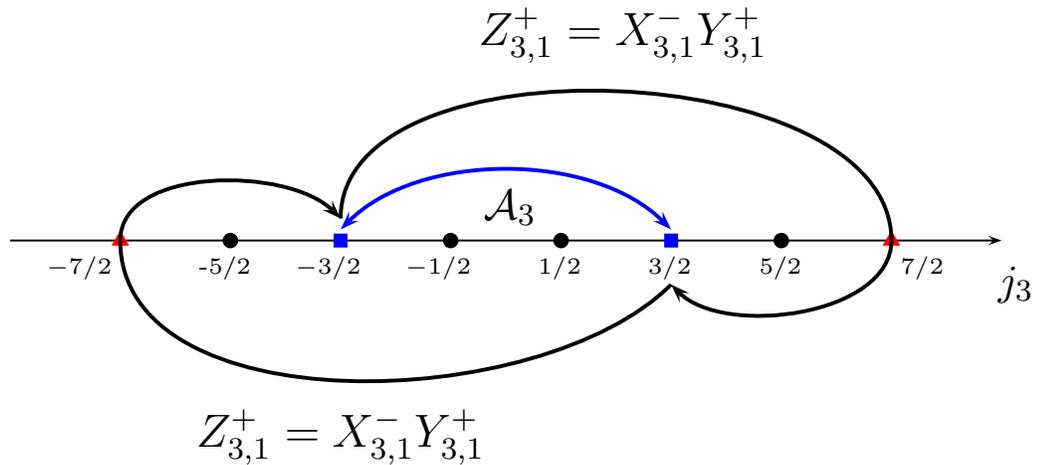


Figura 6.6: Acción de los operadores $Z_{3,1}^+$ en correspondencia con (6.45).

polinomio es dado por la Ec. (3.49).

Por lo tanto la reducción del sistema AdS_2 con flujo de Aharonov-Bohm semi-entero ($\alpha = 1/2$) a un subespacio $j_3 = m + \frac{1}{2}$ reproduce la supersimetría no lineal bosonizada del sistema RPT. Sobre el espacio de Hilbert compuesto por los dos au-

toespacios $j = m + \frac{1}{2}$ y $j = l + \frac{1}{2}$ con $m \neq l$ revelamos la estructura tri-supersimétrica del sistema extendido RPT (5.54). El punto clave para la estructura supersimétrica no trivial y no lineal acá lo juega los automorfismos involutivos (6.38) del álgebra $so(2, 1)$, la cual esta realizada como una simetría del espacio de Hilbert de un sistema cuántico de dos dimensiones.

6.5. Discusión

En el presente capítulo mostramos que la supersimetría bosonizada del sistema reflectionless PT y la estructura tri-supersimétrica de un par de sistemas RPT tienen un origen en el efecto AB y una partícula no relativista sobre AdS_2 . Ambas estructuras supersimétricas están basadas sobre dos automorfismos del álgebra $so(2, 1)$ de la isometría AdS_2 con generadores corregidos por el flujo magnético α . Sobre uno de estos automorfismos, R , corresponden a una reflexión de una coordenada tipo espacio de el espacio de Minkowski. Otro automorfismo, S , corresponde a una reflexión de una de las coordenadas tipo tiempo del espacio. La simetría discreta no está rota solamente en los casos de valores del flujo entero y semientero

En el caso de flujo semientero la dinámica de cualquier onda parcial sobre AdS_2 es gobernada por el potencial RPT, el cual se anula en dos subespacios $j_3 = \pm \frac{1}{2}$. La dinámica cuántica 2D sobre AdS_2 es reflectionless. Este no es el caso para otros valores del flujo. Para $\alpha \neq \frac{1}{2} + n$, la dinámica de algunas ondas parciales está sujeta a un potencial repulsivo. Entonces esta información es transmitida a todas las sectores de ondas parciales por medio de los operadores de escalera $so(2, 1)$, que juegan el rol de generadores de las transformaciones de Crum-Darboux. Así la dinámica 2D deja de ser reflectionless en este caso.

Para valores semienteros del flujo, todo el espectro del sistema cuántico 2D adquiere una degeneración doble adicional relacionada con la simetría del Hamiltoniano $\hat{J}_3 \rightarrow -\hat{J}_3$ generada por S . Tal degeneración está ausente para el sector de ondas par-

ciales que no esta pareado $j_3 = 0$ en el caso de flujo entero. Esta degeneración doble está detrás de la existencia de la estructura supersimétrica no lineal y no trivial en el sistema RPT, apareciendo después de una reducción de un generador $so(2, 1)$ compacto \hat{J}_3 . El generador de la otra simetría discreta, R , se transforma entonces al operador de \mathbb{Z}_2 -graduación de la supersimetría escondida bosonizada del sistema RPT. Los generadores de supersimetría del sistema reducido corresponden a ciertas potencias de los operadores de escalera $so(2, 1)$ del sistema original con flujo semientero.

Capítulo 7

Conclusión y perspectivas

En esta tesis se estudiaron diferentes modelos de mecánica cuántica que presentan una supersimetría escondida bosonizada con Hamiltoniano local, el efecto en esta supersimetría al introducir grados de libertad de tipo fermiónico y el origen de la supersimetría bosonizada en el modelo de PT del punto de vista de reducción dimensional.

A continuación resumiremos los resultados y proyecciones de los distintos modelos estudiados.

El efecto AB de estados ligados es un sistema simple y de carácter fundamental en la mecánica cuántica [21] ya que representa fielmente las peculiaridades cuánticas del efecto AB. En este sistema existen propiedades especiales para ciertos valores del flujo magnético, el cual no ejerce ningún tipo de fuerza sobre la partícula misma ya que para esta la región donde tiene lugar el flujo magnético es inaccesible. Para valores enteros del flujo magnético el sistema es unitariamente equivalente a la partícula libre en el círculo (es decir sin la presencia del flujo magnético) y el espectro del sistema tiene una degeneración doble para todos los estados, excepto para el estado base de energía igual a cero. Aunque este sistema no está relacionado de ninguna manera con la estructura de mecánica cuántica supersimétrica usual, la forma de

su degeneración corresponde a la tratada usualmente en supersimetría exacta. Dada la ausencia de una supersimetría usual que explique estas propiedades uno podría esperar la existencia de una supersimetría en forma *escondida*. Efectivamente para estos valores del flujo magnético existe una supersimetría escondida de forma bosonizada en donde el operador de graduación es el operador de forma de una reflexión mas una fase no trivial que depende de la coordenada angular. Las supercargas aniquilan el estado de base *singlete* de energía cero y transforman mutuamente todos los estados de degeneración doble. En el caso que el flujo magnético toma valores semienteros, el estado *singlete* desaparece del espectro y todas las energías están doblemente degeneradas, la cual corresponde a la naturaleza de supersimetría rota. Nuevamente en este modelo, para estos valores del flujo, tiene asociada una supersimetría bosonizada escondida que refleja la particular forma del espectro para estos valores. Cabe mencionar que para otros valores del flujo (distintos de entero y semientero) no hay una degeneración especial en el espectro y no existe una supersimetría escondida bosonizada.

Un poco distinto es el caso del efecto AB en el plano, en este problema la supersimetría existe para todos los valores del flujo y tiene una naturaleza diferente que depende de la elección del dominio de definición. Aunque el sistema presenta características especiales para valores del flujo semienteros (en este caso varía la elección del operador de graduación [31]), la supersimetría en este caso esta ligada con la simetría conforme del sistema y estan simultáneamente bien definidas dentro del contexto de extensiones autoadjuntas. Una pregunta interesante en este ámbito es si una supersimetría escondida bosonizada puede presentarse en sistemas de campo relacionados. El sistema simple que podría corresponder a esta generalización es el modelo (2+1) dimensional de un bosón acoplado mínimamente a un campo de Chern-Simons [103, 104, 105]. Si la supersimetría bosonizada de esta naturaleza se presenta en este sistema, entonces la versión superextendida de esta supersimetría, por la adición de grados de libertad fermiónicos podría estar descrita por una es-

estructura superconforme $osp(2|2)$ [18, 19, 33], relacionada con tri-supersimetría.

Supersimetría escondida en forma bosonizada también esta presente en el Hamiltoniano de Schrödinger con el potencial delta de Dirac. En analogía con el caso de AB de estados ligados, el caso de potencial atractivo tiene una estructura de supersimetría exacta, la cual es fielmente representada por la supersimetría escondida. En esta supersimetría ambas integrales son no locales ya que dependen explícitamente del operador de reflexión (que es el operador de graduación). En el caso repulsivo al ausencia del estado ligado base singlete permite asociar a este sistema un espectro de la forma de supersimetría rota, propiedad tal que también es reflejada coherentemente por una supersimetría escondida bosonizada. Además las supercargas contiene información relevante del problema de scattering; sus autoestados tienen en forma codificada los coeficientes de transmisión y reflexión. Aunque esta información también puede ser obtenida de los autoestados del Hamiltoniano mismo, del punto de vista de supersimetría escondida nos presenta una forma alternativa de estudiar el problema. Es interesante buscar una generalización de esta supersimetría bosonizada para sistemas de muchas partículas con interacciones de tipo potenciales delta de Dirac. Eventualmente la supersimetría podría otorgar nuevas perspectivas de como estudiar el sistema y analizar sus propiedades físicas.

Una forma distinta de supersimetría escondida bosonizada fue revelada en el potencial de Pöschl-Teller hiperbólico para valores especiales del parámetro de acomplamiento, valores que justamente transforman el sistema en un sistema *reflectionless*. En este caso la supersimetría es de carácter no lineal, donde el orden de la superálgebra correspondiente no lineal depende del número de estados singletes del sistema. Es este sentido la supersimetría escondida manifiesta consecuentemente el tipo de degeneración del espectro, considerando también que la supercargas aniquila todos los estados singletes del Hamiltoniano, mientras que los estados de scattering doblemente degenerados son autoestados de las supercargas con autovalor no nulo y de donde es posible aprender la naturaleza reflectionless del sistema. Existe una familia

infinita N -paramétrica de sistemas reflectionless que se pueden obtener mediante la transformación inversa de scattering, en donde Pöschl-Teller es un caso particular,. Este tipo de sistemas es un potencial ejemplo de sistemas con supersimetría escondida bosonizada, investigando los sistemas en este contexto será posible aprender mas acerca de sus simetrías y propiedades espectrales.

La ecuación de Klein-Gordon con masa en el fondo de una métrica de agujero de gusano se reduce a la forma de un Hamiltoniano unidimensional con el potencial de Pöschl-Teller [106]. En interesante estudiar cual es la relevancia de la supersimetría escondida bosonizada para este modelo y para que valores de los diferentes parámetros en [106] tiene lugar esta simetría no trivial. En este sentido, también será atractivo analizar las conexiones de esta naturaleza para campos escalares propagándose en el fondo de un agujero negro, como el descrito en [107, 108].

Como la generalización periódica del potencial de Pöschl-Teller aparece el sistema de Lamé y Lamé asociado. Todos estos sistemas pertenecen a la familia de modelos conocidos como finite-gap, es decir, sistemas con un numero finito de bandas, o sistemas reflectionless en el límite del periodo infinito. Como sistema finite-gap, existe una integral no trivial no lineal la cual proviene de la jerarquía estacionaria KdV la cual puede ser trata como supercarga de una supersimetría escondida bosonizada no lineal en el caso de un potencial finite-gap par. Estas supercargas, como en el caso de PT, aniquilan todos los estados singletes del sistema, que en el caso periódico corresponden a los estados del borde de las bandas. En la estructura supersimétrica esta codificada toda la información relevante de la estructura de las bandas y subyace además la existencia de un nuevo tipo de supersimetría; tri-supersimetría. Esta supersimetría tiene una forma superextendida con respecto a la supersimetría bosonizada ya que nace al introducir grados de libertad de tipo spín al sistema. La nueva estructura no trivial produce también la aparición de tres tipos de operadores de graduación, clasificando entonces de maneras distintas todos los generadores como bosónicos o fermiónicos. Un problema abierto del punto de vista de sistemas

finite-gap es investigar la existencia de supersimetría bosonizada en sistemas que no tengan una paridad fija y también estudiar la extensión de las simetrías considerando grados de libertad fermiónicos, tal como aparece tri-supersimetría para potenciales pares. Esto ayudaría a tener una completa descripción de los sistemas finite-gap sus propiedades espectrales, supersimetría y la jerarquía KdV, Además al relajar la condición de potenciales finite-gap regulares, se puede analizar una variedad más amplia de potenciales como por ejemplo la familia de potenciales Treibich-Verdier [109]. Otro punto interesante a estudiar esta relacionado con la presencia de supersimetría escondida con sistemas de varias partículas. Una posible aproximación al problema es considerar el modelo de mecánica conforme. Este sistema puede obtenerse como límite de sistemas finite-gap y por lo tanto para ciertos valores especiales de la constante de acoplamiento el sistema tiene una supersimetría escondida, aunque de naturaleza ficticia [33]. Por otro lado se podría estudiar el significado este especie de simetrías del punto de vista agujeros negros de Reissner-Nordström [110].

En forma mas general, conocida la relación entre supersimetría bosonizada y la jerarquía de KdV y el Hamiltoniano de Schrödinger y la jerarquía AKNS [57] y el Hamiltoniano Bogoliubov-de Gennes, será interesante investigar también otros sistemas integrables que estén relacionados con modelos físicos. A partir de la conocida relación entre gravedad cuántica en 2 dimensiones y sistemas integrables por medio de la jerarquía Kadomtsev-Petviashvili (KP) sería interesante investigar este modelo y la existencia de supersimetría.

Resumiendo en general, los problemas abiertos son

- La existencia de un nuevo tipo de (super)simetría en diferentes modelos físicos en busca de una interpretación de sus simetrías y propiedades.
- En vista de la clase de simetrías escondidas discutidas anteriormente, surge naturalmente la pregunta si existe un análogo de las simetrías escondidas, para sistemas de distinta naturaleza, tanto a nivel de mecánica cuántica no relati-

vista, sistemas de campos, entre otros.

- Es interesante también analizar significado de estas simetrías escondidas para distintos modelos que se relacionen con sistemas que posean supersimetría bosonizada de forma manifiesta, y el efecto de estas en sus propiedades físicas.
- Buscando una interpretación mas general de los temas expuestos en la tesis, es atractivo investigar la conexión entre la existencia de supersimetría escondida y la integrabilidad de los sistemas en consideración, como también la búsqueda de una relación mas profunda entre sistemas integrables y supersimetría.

Bibliografía

- [1] Y. A. Golfand and E. P. Likhtman, “Extension Of The Algebra Of Poincare Group Generators And Violation Of P Invariance,” JETP Lett. **13**, 323 (1971); P. Ramond, “Dual Theory For Free Fermions,” Phys. Rev. D **3**, 2415 (1971); A. Neveu and J. H. Schwarz, “Factorizable Dual Model Of Pions,” Nucl. Phys. B **31**, 86 (1971); D. V. Volkov and V. P. Akulov, “Possible universal neutrino interaction,” JETP Lett. **16** 438 (1972) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **16** (1972) 621]; “Is The Neutrino A Goldstone Particle?,” Phys. Lett. B **46**, 109 (1973); J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations In Four-Dimensions,” Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974); “Supergauge Invariant Extension Of Quantum Electrodynamics,” *ibid.* B **78**, 1 (1974).
- [2] F. Iachello, “Dynamical Supersymmetries In Nuclei,” Phys. Rev. Lett. **44**, 772 (1980); A. B. Balantekin, I. Bars and F. Iachello, “U(6/4) Dynamical Supersymmetry In Nuclei,” *ibid.* **47**, 19 (1981); “U(6/4) Supersymmetry In Nuclei,” Nucl. Phys. A **370**, 284 (1981); F. Iachello, “Dynamic Supersymmetries of Differential Equations with Applications to Nuclear Spectroscopy,” Phys. Rev. Lett. **95**, 052503 (2005).
- [3] A. Metz *et al.*, “Evidence for the Existence of Supersymmetry in Atomic Nuclei,” Phys. Rev. Lett. **83**, 1542 (1999); “ One neutron transfer reaction spectroscopy of ^{195}Pt as a detailed test of the U(6/12) supersymmetry,” Phys. Rev.

- C **61**, 064313 (2000); J. Gröger *et al.*, “Nuclear structure of ^{196}Au : More evidence for its supersymmetric description,” *Phys. Rev. C* **62**, 064304 (2000).
- [4] E. Witten, “Dynamical Breaking Of Supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **188**, 513 (1981).
- [5] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics,” *Phys. Rept.* **251** (1995) 267, [arXiv:hep-th/9405029]; G. Junker, *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics* (Springer, Berlin, 1996).
- [6] J. de Boer, F. Harmsze and T. Tjin, “Nonlinear finite W symmetries and applications in elementary systems,” *Phys. Rept.* **272**, 139 (1996), [arXiv:hep-th/9503161].
- [7] S. R. Coleman, “Quantum Sine-Gordon Equation As The Massive Thirring Model,” *Phys. Rev. D* **11**, 2088 (1975); S. Mandelstam, “Soliton Operators For The Quantized Sine-Gordon Equation,” *Phys. Rev. D* **11**, 3026 (1975); M. Stone (Ed.), *Bosonization*, Singapore, World Scientific (1994).
- [8] F. Wilczek, “Quantum Mechanics Of Fractional Spin Particles,” *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982); F. Wilczek and A. Zee, “Linking Numbers, Spin, And Statistics Of Solitons,” *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2250 (1983); A. M. Polyakov, “Fermi-Bose Transmutations Induced By Gauge Fields,” *Mod. Phys. Lett. A* **3**, 325 (1988); G. W. Semenoff, “Canonical Quantum Field Theory With Exotic Statistics,” *Phys. Rev. Lett.* **61**, 517 (1988).
- [9] M. S. Plyushchay, “Supersymmetry without fermions,” arXiv:hep-th/9404081.
- [10] M. S. Plyushchay, “Deformed Heisenberg algebra, fractional spin fields and supersymmetry without fermions,” *Annals Phys.* **245**, 339 (1996), [arXiv:hep-th/9601116].

-
- [11] J. Gamboa, M. Plyushchay and J. Zanelli, “Three aspects of bosonized supersymmetry and linear differential field equation with reflection,” Nucl. Phys. B **543**, 447 (1999), [arXiv:hep-th/9808062].
- [12] M. Plyushchay, “Supersymmetries in pure parabosonic systems,” Int. J. Mod. Phys. A **15**, 3679 (2000), [arXiv:hep-th/9903130].
- [13] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe and V. P. Spiridonov, “Higher derivative supersymmetry and the Witten index,” Phys. Lett. A **174**, 273 (1993), [arXiv:hep-th/9303005]; A. A. Andrianov, M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, “Polynomial SUSY in quantum mechanics and second derivative Darboux transformation,” Phys. Lett. A **201**, 103 (1995), [arXiv:hep-th/9404120].
- [14] S. M. Klishevich and M. S. Plyushchay, “Nonlinear supersymmetry, quantum anomaly and quasi-exactly solvable systems,” Nucl. Phys. B **606**, 583 (2001), [arXiv:hep-th/0012023].
- [15] S. M. Klishevich and M. S. Plyushchay, “Nonlinear supersymmetry on the plane in magnetic field and quasi-exactly solvable systems,” Nucl. Phys. B **616**, 403 (2001), [arXiv:hep-th/0105135].
- [16] S. M. Klishevich and M. S. Plyushchay, “Nonlinear holomorphic supersymmetry, Dolan-Grady relations and Onsager algebra,” Nucl. Phys. B **628**, 217 (2002), [arXiv:hep-th/0112158].
- [17] S. M. Klishevich and M. S. Plyushchay, “Nonlinear holomorphic supersymmetry on Riemann surfaces,” Nucl. Phys. B **640**, 481 (2002), [arXiv:hep-th/0202077].
- [18] C. Leiva and M. S. Plyushchay, “Superconformal mechanics and nonlinear supersymmetry,” JHEP **0310**, 069 (2003), [arXiv:hep-th/0304257].

-
- [19] A. Anabalon and M. S. Plyushchay, “Interaction via reduction and nonlinear superconformal symmetry,” *Phys. Lett. B* **572**, 202 (2003). [arXiv:hep-th/0306210].
- [20] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [21] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm effect*, Springer-Verlag (1989).
- [22] R. Jackiw, “Dynamical symmetry of the magnetic vortex,” *Annals Phys.* **201**, 83 (1990).
- [23] V. G. Baryakhtar, E. D. Belokolos, O. V. Dmytriiev, “Exactly solvable model of electron in the Lamé potential and singularities of the electron thermodynamic potential, .ArXiv:cond-mat/0611496.
- [24] G. Darboux, *Compt. Rend. Acad. Sc. (Paris)* **94**, 1456 (1882) .
- [25] M. M. Crum *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **6**, 121(1955).
- [26] V. B. Matveev and M. A. Salle: *Darboux transformations and solitons* (Springer, Berlin, 1991).
- [27] G. V. Dunne and J. Feinberg, “Self-isospectral periodic potentials and supersymmetric quantum mechanics,” *Phys. Rev. D* **57**, 1271 (1998), [arXiv:hep-th/9706012].
- [28] E. L. Ince, *Ordinary differential equations* (Dover, 1956).
- [29] A. A. Andrianov, F. Cannata, J. P. Dedonder and M. V. Ioffe, “Second order derivative supersymmetry, Q deformations and scattering problem,” *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 2683 (1995), [arXiv:hep-th/9404061].

-
- [30] F. Correa and M. S. Plyushchay, “Hidden supersymmetry in quantum bosonic systems,” *Annals Phys.* **322**, 2493 (2007), [arXiv:hep-th/0605104].
- [31] F. Correa, H. Falomir, V. Jakubský and M. S. Plyushchay, “Hidden superconformal symmetry of spinless Aharonov-Bohm system,” arXiv:0906.4055 [hep-th].
- [32] F. Correa, L. M. Nieto and M. S. Plyushchay, “Hidden nonlinear supersymmetry of finite-gap Lamé equation,” *Phys. Lett. B* **644** (2007) 94, [arXiv:hep-th/0608096].
- [33] F. Correa, M. A. del Olmo and M. S. Plyushchay, “On hidden broken nonlinear superconformal symmetry of conformal mechanics and nature of double nonlinear superconformal symmetry,” *Phys. Lett. B* **628**, 157 (2005), [arXiv:hep-th/0508223].
- [34] F. Correa and M. S. Plyushchay, “Peculiarities of the hidden nonlinear supersymmetry of Pöschl-Teller system in the light of Lamé equation,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 14403 (2007). [arXiv:0706.1114 [hep-th]].
- [35] F. Correa, V. Jakubský, L. M. Nieto and M. S. Plyushchay, “Self-isospectrality, special supersymmetry, and their effect on the band structure,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 030403 (2008), [arXiv:0801.1671 [hep-th]].
- [36] F. Correa, V. Jakubský and M. S. Plyushchay, “Finite-gap systems, tri-supersymmetry and self-isospectrality,” *J. Phys. A* **41**, (2008) 485303. [arXiv:0806.1614 [hep-th]].
- [37] A. Tonomura et al, , “Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 792 (1986); N. Osakabe et al, “Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a

- toroidal magnetic field confined by a superconductor,” *Phys. Rev. A* **34**, 815 (1986) .
- [38] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields,” *Phys. Rev. D* **12**, 3845 (1975).
- [39] J. F. Schonfeld, “A mass term for three-dimensional gauge fields,” *Nucl. Phys. B* **185**, 157 (1981) .
- [40] G. A. Goldin, R. Menikoff and D. H. Sharp, “Representations of a local current algebra in nonsimply connected space and the Aharonov-Bohm effect,” *J. Math. Phys.* **22**, 1664 (1981) .
- [41] M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **392** 45, (1984).
- [42] C. N. Yang, “Some exact results for the many body problems in one dimension with repulsive delta function interaction,” *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1312 (1967); “S matrix for the one-dimensional N body problem with repulsive or attractive delta function interaction,” *Phys. Rev.* **168**, 1920 (1968); C. N. Yang and C. P. Yang, “Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction,” *J. Math. Phys.* **10**, 1115 (1969).
- [43] C. R. Hagen, “Spin dependence of the Aharonov-Bohm effect: A Review,” *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 3119 (1991) .
- [44] C. Manuel and R. Tarrach, “Perturbative Renormalization In Quantum Mechanics,” *Phys. Lett. B* **328**, 113 (1994); S. K. Adhikari and T. Frederico, “Renormalization group in potential scattering,” *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4572 (1995).

- [45] R. Jackiw, in M. A. B. Bég Memorial Volume, ed. by A. Ali and P. Hoodbhoy (World Scientific, Singapore, 1991). “Delta function potentials in two-dimensional and three-dimensional quantum mechanics.”
- [46] G. Pöschl and E. Teller, “Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators”, *Z. Physik* **83**, 143 (1933).
- [47] H. B. Thacker, C. Quigg and J. L. Rosner, “Inverse scattering problem for quarkonium systems. 1. One-dimensional formalism and methodology,” *Phys. Rev. D* **18**, 274 (1978).
- [48] W. Kwong and J. L. Rosner, “Supersymmetric Quantum mechanics and inverse scattering,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **86**, 366 (1986).
- [49] A. O. Barut, A. Inomata and R. Wilson, “Algebraic treatment of second Pöschl-Teller, Morse-Rosen and Eckart equations,” *J. Phys. A* **20**, 4083 (1987).
- [50] A. K. Grant and J. L. Rosner, “Supersymmetric quantum mechanics and the Korteweg-de Vries hierarchy,” *J. Math. Phys.* **35**, 2142 (1994). [arXiv:hep-th/9304139].
- [51] J. Goldstone and R. Jackiw, “Quantization of nonlinear waves,” *Phys. Rev. D* **11** 1486 (1975);
R. Jackiw, “Quantum meaning of classical field theory,” *Rev. Mod. Phys.* **49**, 681 (1977) .
- [52] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, “Semiclassical bound states in an asymptotically free theory,” *Phys. Rev. D* **12** 2443, (1975).
- [53] J. Feinberg, “Kinks and bound states in the Gross-Neveu model,” *Phys. Rev. D* **51**, 4503 (1995), [arXiv:hep-th/9408120]; “All about the static fermion bags in the Gross-Neveu model,” *Annals Phys. (NY)* **309**, 166 (2004), [arXiv:hep-th/0305240].

-
- [54] G. Basar and G. V. Dunne, “A Twisted Kink Crystal in the Chiral Gross-Neveu model,” *Phys. Rev. D* **78**, 065022 (2008), [arXiv:0806.2659 [hep-th]].
- [55] A. Sen, “Stable non-BPS bound states of BPS D-branes,” *JHEP* **9808**, 010 (1998), [arXiv:hep-th/9805019]; “Tachyon condensation on the brane antibrane system,” *JHEP* **9808**, 012 (1998), [arXiv:hep-th/9805170].
- [56] B. Zwiebach, “A solvable toy model for tachyon condensation in string field theory,” *JHEP* **0009**, 028 (2000), [arXiv:hep-th/0008227];
J. A. Minahan and B. Zwiebach, “Field theory models for tachyon and gauge field string dynamics,” *JHEP* **0009**, 029 (2000), [arXiv:hep-th/0008231].
- [57] S. P. Novikov *et al.*, *Theory of Solitons* (Plenum, New York, 1984);
F. Gesztesy and H. Holden, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003).
- [58] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Course of Modern Analysis* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980).
- [59] H. A. Kramers and G. P. Ittmann, “Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels,” *Z. Physik* **53**, 553 (1929); “Zur Quantelung der asymmetrischen Kreisels, II” *ibid.* **58**, 217 (1929); S. C. Wang, “On the separability of Schrödinger equation for the asymmetrical top,” *Phys. Rev.* **33**, 123 (1929); “On the asymmetric top in quantum mechanics,” *ibid.* **34**, 243-252 (1929).
- [60] B. Sutherland, “Some exact results for one-dimensional models of solids,” *Phys. Rev. A* **8**, 2514 (1973).
- [61] Y. Alhassid, F. Gursey and F. Iachello, “Potential Scattering, Transfer Matrix, And Group Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **50**, 873 (1983); H. Li and D. Kusnezov, “Group Theory approach to Band Structure: Scarf and Lamé Hamiltonians,”

- ibid.* **83**, 1283 (1999); H. Li, D. Kusnezov, and F. Iachello, *J. Phys. A* **33**, 6413 (2000).
- [62] A. V. Turbiner, “Quasiexactly Solvable Problems And $Sl(2)$ Group,” *Comm. Math. Phys.* **118**, 467 (1988); *J. Phys. A* **22**, L1 (1989).
- [63] F. Finkel, A. Gonzalez-Lopez, M. A. Rodriguez, “A New Algebraization of the Lamé Equation” *J. Phys. A* **33**, 1519 (2000), math-ph/9908002
- [64] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, “Quantum Integrable Systems Related To Lie Algebras,” *Phys. Rep.* **94**, 313 (1983).
- [65] D. J. Fernandez, J. Negro and L. M. Nieto, “Second-order supersymmetric periodic potentials,” *Phys. Lett. A* **275**, 338 (2000).
- [66] R. S. Ward, “The Nahm equations, finite-gap potentials and Lamé functions,” *J. Phys. A* **20**, 2679 (1987); P. M. Sutcliffe, “Symmetric monopoles and finite-gap Lamé potentials,” *ibid.* **29**, 5187 (1996) .
- [67] G. V. Dunne and K. Rao, “Lamé instantons,” *JHEP* **0001**, 019 (2000), [arXiv:hep-th/9906113].
- [68] N. S. Manton and T. M. Samols, “Sphalerons On A Circle,” *Phys. Lett. B* **207**, 179 (1988); J. Q. Liang, H. J. W. Muller-Kirsten and D. H. Tchrakian, “Solitons, bounces and sphalerons on a circle,” *ibid.* **282**, 105 (1992); Y. Brihaye, S. Giller, P. Kosinski and J. Kunz, “Sphalerons and normal modes in the (1+1)-dimensional Abelian Higgs model on the circle,” *ibid.* **293**, 383 (1992).
- [69] R. S. Maier and D. L. Stein, “Droplet Nucleation and Domain Wall Motion in a Bounded Interval,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 270601 (2001). [arXiv:cond-mat/0108217].

- [70] J.-G. Caputo, N. Flytzanis, Y. Gaididei, N. Stefanakis and E. Vavalis, “Stability analysis of static solutions in a Josephson junction.” *Supercond. Sci. Technol.* **13**, 423 (2000). arXiv:cond-mat/0010335.
- [71] H.-J. Dobner and S. Ritter 1998 “Reliable computation of eigenvalues of the magnetostatic integral operator,” *Math. Comput. Modelling* **27**, 1 (1998).
- [72] R. Kantowski and R. C. Thomas, “Distance-Redshift in Inhomogeneous $\Omega_0 = 1$ Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Cosmology,” *Astrophys. J.* **561**, 491 (2001). arXiv:astro-ph/0011176.
- [73] S. k. Nam, “Mass gap in Kaluza-Klein spectrum in a network of brane worlds,” *JHEP* **0004**, 002 (2000), [arXiv:hep-th/9911237].
- [74] M. Brack, M. Mehta and K. Tanaka, “Occurrence of periodic Lamé functions at bifurcations in chaotic Hamiltonian systems,” *J. Phys. A* **34**, 8199 (2001).
- [75] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman and J. F. J. Salgado, “Analytic and numerical study of preheating dynamics,” *Phys. Rev. D* **54**, 7570 (1996), [arXiv:hep-ph/9608205]. P. B. Greene, L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, “Structure of resonance in preheating after inflation,” *ibid.* **56**, 6175 (1997); D. I. Kaiser, “Resonance structure for preheating with massless fields,” *ibid.* **57**, 702 (1998), [arXiv:hep-ph/9707516]; F. Finkel, A. Gonzalez-Lopez, A. L. Maroto and M. A. Rodriguez, “The Lamé equation in parametric resonance after inflation,” *ibid.* **62**, 103515 (2000), [arXiv:hep-ph/0006117]; P. Ivanov, “On Lamé equation of a particular kind”. *J. Phys. A* **34**, 8145 (2001), math-ph/0008008.
- [76] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, (Dover, 1965).

- [77] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov, “Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite zone linear operators, and Abelian varieties,” *uss. Math. Surv.* **31** (1976) 59.
- [78] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’skii, A. R. Its, and V. B. Matveev, *Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations*, (Springer, Berlin, 1994).
- [79] I. Krichever and S. P. Novikov, “Periodic and almost-periodic potentials in inverse problems,” *Inverse Probl.* **15**, R117 (1999) .
- [80] F. Gesztesy and R. Weikard, “Elliptic algebro-geometric solutions of the KdV and AKNS hierarchies - an analytic approach,” *Bull. of the Amer. Math. Society* **35** (1998) 271; F. Gesztesy, H. Holden, *Soliton equations and their algebro-geometric solutions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003).
- [81] M. R. Douglas and S. H. Shenker, “Strings in less than one-dimension,” *Nucl. Phys. B* **335**, 635 (1990).
- [82] L. Chekhov and A. Mironov, “Matrix models vs. Seiberg-Witten/Whitham theories,” *Phys. Lett. B* **552**, 293 (2003), [arXiv:hep-th/0209085].
- [83] N. Seiberg and E. Witten, “Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory,” *Nucl. Phys. B* **426**, 19 (1994). [Erratum-ibid. *B* **430**, 485 (1994)], [arXiv:hep-th/9407087].
- [84] R. Donagi and E. Witten, “Supersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems,” *Nucl. Phys. B* **460**, 299 (1996), [arXiv:hep-th/9510101].
- [85] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan and K. Zarembo, “Classical / quantum integrability in AdS/CFT,” *JHEP* **0405**, 024 (2004), [arXiv:hep-th/0402207]; N. Beisert, V. A. Kazakov, K. Sakai and K. Zarembo, “The al-

- gebraic curve of classical superstrings on $AdS_5 \times S^5$,” *Commun. Math. Phys.* **263**, 659 (2006).
- [86] W. Magnus and S. Winkler, *Hill’s equation* (Wiley, New York, 1966).
- [87] J.L. Burchnall and T.W. Ch aundy, “Commutative ordinary differential operators,” *Proc. London Math. Soc. Ser. 2* **21**, 420 (1923).
- [88] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, (Addison-Wesley, Redwood City, 1989).
- [89] F. Correa, G. V. Dunne and M. S. Plyushchay, “The Bogoliubov/de Gennes system, the AKNS hierarchy, and nonlinear quantum mechanical supersymmetry,” arXiv:0904.2768 [hep-th].
- [90] B. F. Samsonov, “New features in supersymmetry breakdown in quantum mechanics,” *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 1563 (1996), [arXiv:quant-ph/9611012]; “New possibilities for supersymmetry breakdown in quantum mechanics and second order irreducible Darboux transformations,” *Phys. Lett. A* **263**, 274 (1999), [arXiv:quant-ph/9904009].
- [91] D. J. Fernandez, B. Mielnik, O. Rosas-Ortiz and B. F. Samsonov, “The phenomenon of Darboux displacements,” *Phys. Lett. A* **294**, 168 (2002), [arXiv:quant-ph/0302204].
- [92] B.F. Samsonov, M.L. Glasser, J. Negro and L.M. Nieto, “Second-order Darboux displacements,” *J. Phys. A: Math. Gen. A* **36**, 10053 (2003) .
- [93] D. J. Fernandez C., B. Mielnik, O. Rosas-Ortiz and B. F. Samsonov, “Nonlocal supersymmetric deformations of periodic potentials,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 4279 (2002). [arXiv:quant-ph/0303051].

- [94] D. J. Fernandez C. and A. Ganguly, “New supersymmetric partners for the associated Lamé potentials,” *Phys. Lett. A* **338**, 203 (2005) . [arXiv:quant-ph/0502172].
- [95] D. J. Fernandez C. and A. Ganguly, “Exactly solvable associated Lamé potentials and supersymmetric transformations,” *Annals Phys.* **322**, 1143 (2007). [arXiv:quant-ph/0608180].
- [96] A. A. Andrianov and A. V. Sokolov, “Nonlinear supersymmetry in quantum mechanics: algebraic properties and differential representation,” *Nucl. Phys. B* **660**, 25 (2003). [arXiv:hep-th/0301062].
- [97] M. Faux and D. Spector, “A BPS interpretation of shape invariance,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 10397 (2004). [arXiv:quant-ph/0401163].
- [98] S. P. Novikov, “Two-dimensional Schrödinger operators in periodic fields”, *J. Sov. Math.* **28**, 1 (1985).
- [99] A. Ganguly, “Associated Lamé equation, periodic potentials and $sl(2, R)$,” *Mod. Phys. Lett. A* **15**, 1923 (2000); [arXiv:math-ph/0204026]. “Associated Lamé and various other new classes of elliptic potentials from $sl(2, R)$ and related orthogonal polynomials” *J. Math. Phys.* **43**, 1980 (2002) .
- [100] A. Khare and U. Sukhatme, “New solvable and quasi exactly solvable periodic potentials,” *J. Math. Phys.* **40**, 5473 (1999); “Some exact results for mid-band and zero band-gap states of associated Lamé potentials,” *J. Math. Phys.* **42**, 5652 (2001).
- [101] S. Fluegge, *Practical Quantum Mechanics*, (Springer, 1994), p. 94.
- [102] V. Bargmann, “Irreducible unitary representations of the Lorentz group,” *Ann. Math.* **48**, 568 (1947).

-
- [103] R. Jackiw and S. Y. Pi, “Soliton solutions to the gauged nonlinear Schrödinger equation on the plane,” *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2969 (1990).
- [104] O. Bergman and G. Lozano, “Aharonov-Bohm scattering, contact interactions and scale invariance,” *Annals Phys.* **229**, 416 (1994). [arXiv:hep-th/9302116].
- [105] P. A. Horvathy and P. Zhang, “Vortices in (abelian) Chern-Simons gauge theory,” *Phys. Reports*, in press, arXiv:0811.2094 [hep-th].
- [106] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, “Static wormhole solution for higher-dimensional gravity in vacuum,” *Phys. Rev. D* **75**, 024002 (2007). [arXiv:hep-th/0607062].
- [107] R. Aros, C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Quasinormal modes for massless topological black holes,” *Phys. Rev. D* **67**, 044014 (2003.) [arXiv:hep-th/0211024].
- [108] J. Oliva, D. Tempo and R. Troncoso, “Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity,” arXiv:0905.1545 [hep-th].
- [109] A. Treibich and J.-L. Verdier, “Revetements tangentiels et sommes de 4 nombres triangulaires,” *C. R. Acad. Sci. Paris* **311**, 51 (1990); “Revetements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires,” *Duke Math. J.* **68**, 217 (1992).
- [110] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P. K. Townsend and A. Van Proeyen, “Black holes and superconformal mechanics,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4553 (1998) [arXiv:hep-th/9804177]. J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo, J. C. Perez Bueno and P. K. Townsend, “Superconformal mechanics and nonlinear realizations,” *Phys. Rev. D* **59**, 084015 (1999) [arXiv:hep-th/9810230]. G. W. Gibbons and P. K. Townsend, “Black holes and Calogero models,” *Phys. Lett. B* **454**, 187 (1999) [arXiv:hep-th/9812034].