

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA



**PROPAGACION DE IMPULSIONES
NO LINEALES
EN MATERIALES GRANULARES**

FRANCISCO JAVIER SANTIBAÑEZ CALDERON

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FISICA



PROPAGACION DE IMPULSIONES NO LINEALES EN MATERIALES GRANULARES

FRANCISCO JAVIER SANTIBAÑEZ CALDERON

Profesor Tutor : Dr. Francisco Melo.
Profesor Co-Tutor : Dr. Stephane Job.
Profesores Comisión : Dr. Fernando Lund.
: Dr. Eugenio Hamm.
: Dr. Raul Cordero.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

SANTIAGO DE CHILE

JULIO 2010

“PROPAGACION DE IMPULSIONES NO LINEALES
EN MATERIALES GRANULARES”

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO DE CHILE

JULIO 2010

A mis padres.

Resumen

Este trabajo de tesis presenta un estudio experimental de la propagación de ondas no lineales de compresión en materiales granulares unidimensionales. Se realizan mediciones no intrusivas en arreglos unidimensionales de esferas elásticas que permiten cuantificar los mecanismos responsables de la disipación de la energía durante la propagación de estas ondas. Con esta información sobre las propiedades de interacción no lineal entre esferas, se llevan a cabo estudios de mitigación de impactos mediante el uso de arreglos lineales compuestos de esferas de tamaño monotónicamente decreciente, concluyendo que estos arreglos son dispositivos muy efectivos para distribuir en el tiempo la transferencia de momentum transportado por un impacto de corta duración. La sección final de este capítulo consiste en una descripción cuantitativa del fenómeno de localización de energía en sistemas granulares unidimensionales que contienen una impureza. Se detectan oscilaciones bien definidas en el contacto de la impureza y, mediante un análisis multi-escalas, se obtiene una relación para dar cuenta de la frecuencia de estas oscilaciones.

La descripción macroscópica de los fenómenos mencionados, es complementada mediante el estudio de la fuerza de interacción entre superficies rugosas. La influencia de las rugosidades de los materiales son consideradas en este trabajo y se utiliza perfilometría óptica e imágenes de microscopía electrónica para obtener información del estado de superficie de los cuerpos en estudio. Se determina la ley de fuerza que rige a escala microscópica y se relaciona con el comportamiento macroscópico descrito en el párrafo anterior.

Se utilizan los conocimientos adquiridos en las secciones anteriores para desarrollar un estudio detallado de la dinámica de un material granular con fluido intersticial. Se analiza el efecto de aumento de la velocidad de propagación de ondas en un material granular con fluido viscoso mediante el estudio de la dinámica de un contacto con fluido intersticial.

Finalmente, se desarrolla un montaje experimental que permite el estudio de propagación de ondas en materiales granulares tridimensionales sometidos a compresión hidro-estática. El componente principal del montaje fabricado es el recipiente de paredes elásticas, éste permite que los granos en el interior cambien sus posiciones cuando se someten a la compresión generada por la onda.

La investigación realizada durante esta tesis, ha generado las siguientes publicaciones:

- **F. Melo, S. Job, F.Santibañez and F. Tapia**, "Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain". Phys. Rev. E 73, 041305, 2006.
- **S. Job, F. Santibañez, F. Tapia and F. Melo**, "Nonlinear waves in dry and wet Hertzian granular chains". Ultrasonics, Volume 48, Issues 6-7, November 2008, Pages 506-514, Selected Papers from ICU 2007
- **S. Job, F. Santibañez, F. Tapia, and F. Melo**, "Wave localization in strongly nonlinear Hertzian chains with mass defect". Rapid Communications, Phys. Rev. E 80, 025602(R) (2009)
- **F. Santibañez, R. Muñoz,S. Job and F. Melo**, "Solitary waves crossings in Hertzian granular chains", En preparación.
- **F. Santibañez, S. Job, T. da Silva and F. Melo**, "Hertzian contact in rough surfaces", En preparación.
- **F. Santibañez, S. Job, T. da Silva and F. Melo**, "Elasto-Hydrodynamic deformation of a single contact with interstitial fluid", En preparación.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Materiales granulares	9
1.2. Dinámica de contactos	14
1.2.1. Teoría elástica de contactos	15
1.2.2. Viscoelasticidad en el contacto de Hertz	19
1.3. Propagación de ondas en materiales granulares	21
1.3.1. Propagación de ondas en materiales granulares 1D	21
1.3.2. Límite lineal	22
1.3.3. Límite fuertemente no-lineal	24
1.3.4. Simulaciones	29
1.4. Dinámica de un contacto con fluido intersticial	31
1.4.1. Motivación	31
1.4.2. Modelo de lubricación	32
1.4.3. Reología de fluidos	34
2. Propagación en granulares 1D	38
2.1. Motivación	39
2.2. Propagación en cadenas monodispersas	40
2.2.1. Montaje experimental	40
2.2.2. Mediciones Experimentales	44
2.2.3. Resultados	45

2.2.4. Conclusiones	47
2.3. Ondas solitarias en cadenas decrecientes	48
2.3.1. Motivación	48
2.3.2. Montaje Experimental	49
2.3.3. Mediciones experimentales	50
2.3.4. Resultados	53
2.3.5. Conclusiones	56
2.4. Ondas solitarias en cadenas con impurezas	57
2.4.1. Motivación	57
2.4.2. Montaje experimental	58
2.4.3. Mediciones experimentales	59
2.4.4. Resultados	61
2.4.5. Conclusiones	63
3. Dinámica de Contactos	64
3.1. Motivación	65
3.2. Mediciones preliminares	66
3.2.1. Constantes elásticas	66
3.2.2. Contacto entre superficies rugosas	69
3.3. Desarrollo experimental	71
3.3.1. Montaje experimental	71
3.3.2. Respuesta dinámica del sistema experimental	71
3.3.3. Procedimiento experimental	73
3.3.4. Respuesta de las rugosidades	73
3.3.5. Modelo elástico	75
3.3.6. Deformación del contacto	78
3.3.7. Constante elástica del contacto	80
3.3.8. Radio efectivo del contacto	81
3.4. Conclusiones	83

4. Ondas en granulares húmedos	85
4.1. Cadenas 1D con fluido intersticial	86
4.1.1. Motivación	86
4.1.2. Montaje experimental	87
4.1.3. Mediciones experimentales	88
4.1.4. Resultados	89
4.1.5. Conclusiones	91
4.2. Dinámica de impactos sobre un contacto mojado	92
4.2.1. Motivación	92
4.2.2. Montaje experimental	93
4.2.3. Mediciones experimentales	94
4.2.4. Resultados	97
4.2.5. Conclusiones	99
4.3. Reología de un contacto con fluido intersticial	100
4.3.1. Motivación	100
4.3.2. Montaje experimental	101
4.3.3. Mediciones experimentales	101
4.3.4. Resultados	103
4.3.5. Conclusiones	104
4.4. Conclusiones	105
5. Propagación en materiales 3D	106
5.1. Validez de la ley de Hertz en 3D	107
5.2. Condiciones de borde	109
5.3. Desarrollo experimental	110
5.3.1. Montaje experimental	110
5.3.2. Mediciones preliminares	111
6. Conclusiones generales	113

A. Desarrollo multi-escala	117
B. Experimentos con vibrómetro	121
B.1. Motivación	122
B.2. Montaje experimental	122
B.3. Mediciones experimentales	123
B.4. Resultados	125
C. Reología de fluidos	128
D. Publicaciones	130
D.1. Mitigación de impactos	131
D.2. Ondas en cadenas Hertzianas	132
D.3. Ondas en cadenas con fluido	133
D.4. Oscilaciones localizadas	134

Índice de figuras

1.1. Línea de fuerza en un material granular fotoelástico	12
1.2. Diagrama de deformación de dos esferas en contacto	16
1.3. Campo de presión y fuerza en un contacto entre esferas	18
1.4. Fuerza total para el modelo viscoelástico aplicado al contacto de Hertz	20
1.5. Diagrama del modelo elástico de una cadena de esferas	21
1.6. Relación de dispersión para una cadena de esferas en el límite lineal	23
1.7. Dependencia del potencial efectivo con la constante de integración C	27
1.8. Resultado de simulación en una cadena monodispersa	30
1.9. Diagrama de la geometría en el problema de lubricación	32
1.10. Diagrama del modelo viscoelástico de un fluido de Maxwell	34
2.1. Diagrama del montaje experimental de una cadena monodispersa . .	41
2.2. Diagrama de componentes del sensor-bola	42
2.3. Medición de un solitón en una cadena monodispersa	46
2.4. Determinación del coeficiente de restitución en cadena monodispersa	46
2.5. Diagrama del montaje experimental de una cadena decreciente	50
2.6. Datos experimentales en cadena decreciente con $q = 5,6\%$	51
2.7. Datos experimentales en cadena decreciente con $q = 8,2\%$	52
2.8. Medición de los efectos de la alineación del montaje	53
2.9. Contenido frecuencial de las señales en la cadena decreciente	54
2.10. Panel de resumen de resultados en la cadena decreciente	55
2.11. Diagrama del montaje experimental de una cadena con impureza . .	58

2.12. Datos experimentales mostrando oscilaciones localizadas	59
2.13. Proceso de filtrado de las oscilaciones localizadas	61
2.14. Ajuste de los datos experimentales de frecuencia	62
3.1. Diagrama del montaje experimental para las mediciones con ultrasonido	67
3.2. Señal de ultrasonido de una onda de compresión	68
3.3. Caracterización de la superficie por medio de imágenes	70
3.4. Diagrama del montaje experimental para el estudio de un contacto . .	72
3.5. Señales de fuerza y deformación en un contacto parcial	74
3.6. Exponente y constante elástica del modelo propuesto	75
3.7. Determinación de la constante elástica lineal del montaje	77
3.8. Determinación de la fracción de deformación del elemento no-lineal .	79
3.9. Determinación de la constante elástica no-lineal del contacto	80
3.10. Determinación del radio efectivo del contacto	81
3.11. Diagrama del modelo de múltiples radios de curvatura	82
4.1. Diagrama del montaje experimental de una cadena con fluido	87
4.2. Evolución del pulso en la cadena con fluido	89
4.3. Panel de resumen de resultados de la cadena con fluido	90
4.4. Diagrama del montaje experimental de una contacto con fluido	93
4.5. Comparación de señales y simulaciones para el aceite <i>Sylgard 184</i> .	95
4.6. Comparación de señales y simulaciones para el aceite <i>Rhodorsil 5000</i>	96
4.7. Resultados para la fuerza y la duración del impacto	97
4.8. Resultados de los parámetros elástico y viscoso del modelo propuesto	98
4.9. Diagrama del montaje experimental para el estudio de reología de fluido	101
4.10. Señales de fuerza adquiridas para dos espesores diferentes	102
4.11. Relación fuerza en función de la distancia para dos fluidos	103
5.1. Diagrama de contactos activos en un material granular	107
5.2. Diagrama de montaje experimental usado por X. Jia	109

5.3. Diagrama de montaje experimental propuesto	110
5.4. Datos experimentales de propagación de ondas en 3D	112
B.1. Diagrama del montaje experimental de un contacto con vibrómetro . .	123
B.2. Señales adquiridas en un contacto seco bajo impacto	124
B.3. Señales adquiridas en un contacto con fluido bajo impacto	125
B.4. Comparación de la rigidez del contacto mojado y seco	126
B.5. Viscosidad del fluido durante la etapa de relajación después del impacto	127
C.1. Respuesta reológica del fluido viscoelástico	129

Índice de cuadros

2.1. Ajuste de parámetros	45
3.1. Constantes elásticas medidas con ultrasonido	68
3.2. Parámetros de rugosidad determinadas con perfilometría óptica . . .	69
3.3. Constante elástica lineal determinada para cada montaje	76
4.1. Parámetros físicos de aceites de Rhodorsil	88

Capítulo 1

Introducción

1.1. Materiales granulares

Todo material compuesto por elementos similares interactuando ya sea por fuerzas débiles o por simples colisiones puede considerarse dentro de la categoría de material granular. Más precisamente, esta definición considera elementos de tamaño superior al micrómetro, tamaño para el cual las fuerzas producidas por las fluctuaciones térmicas comienzan a ser despreciables frente al peso de cada grano. Así, por ejemplo, suspensiones coloidales quedan excluidas de la categoría de material granular. Tanto en la industria como en la vida cotidiana los materiales granulares se encuentran presentes de diferentes maneras: gran parte de las materias primas producidas por nuestro país deben pasar en algún momento de su línea de producción por una fase granular. Los granos de trigo, las manzanas y los cereales en general, son ejemplos de granulares en la agricultura. A nivel mundial, muchos de los productos más utilizados son procesados en su forma granular y, por esta razón, es fundamental comprender a fondo las propiedades que definen su comportamiento.

La falta de comprensión que existe sobre cómo se deben tratar este tipo de materiales en la industria, implica la pérdida de miles de millones de dólares anuales¹, a nivel internacional. La ruptura de silos, volcamiento de camiones transportadores entre otros problemas, son efectos del comportamiento altamente complejo de los materiales granulares en condiciones de transporte y almacenamiento. Para ambas situaciones, la mayoría de los conocimientos existentes tienen base empírica no sujeta a comprobación cuantitativa.

En un material granular, los esfuerzos se transfieren de grano en grano por medio de los contactos entre éstos [1], por esta razón, es posible observar que un conjunto de granos en contacto, unos con otros, formarán una **línea de fuerza**, como se puede observar en la figura (1.1). La formación y ruptura de estas líneas de transmisión de fuerza es dependiente del grado de desorden dentro del material. La facilidad con que se puedan formar o romper estas líneas determina cómo se comportará el material cuando sea sometido a esfuerzos. Si hay espacio suficiente entre los granos de manera que (estos) puedan moverse y re-acomodarse, formarán nuevas líneas de fuerza y el material tendrá un comportamiento similar a un fluido. Por el contrario, si los granos no tienen la posibilidad de cambiar a nuevas posiciones cuando son sometidos a un esfuerzo, el comportamiento del granular será más cercano a un sólido. La compactación, es un parámetro que juega un papel trascendental en la reología del material. También, debido a que las líneas de fuerza pueden aparecer y desaparecer en función de la carga aplicada al material, la caracterización de materiales granulares en tres dimensiones debe considerar la compactación inicial y la distribución de los granos en el interior de éste.

Por otra parte, la propagación de sonido ha sido usada durante décadas para caracterizar las propiedades mecánicas y reológicas de materiales homogéneos y heterogéneos en general. Por ejemplo, la simple medición de la velocidad del sonido

¹ Ver por ejemplo: Wikipedia Post-harvest losses (grains)

de ondas longitudinales y transversas permite la evaluación no destructiva del módulo de Young y el coeficiente de Poisson, mientras que la observación detallada de las resonancias de una muestra de geometría cuidadosamente definida permite la evaluación de prácticamente todas las constantes del material incluyendo algunos mecanismos de disipación (RUS: Resonance Ultrasonics Spectroscopy). Los procesos de difusión de sonido aportan también valiosa información sobre las inhomogeneidades, tales como, microcracks, inclusiones o simples cambios bruscos de impedancia en el material. El ejemplo más notable de este hecho lo constituye la tomografía de ultrasonidos, más conocida como ecografía. En un material granular sin embargo, ninguno de estos grandes desarrollos son posibles dado el estado actual de la comprensión sobre la propagación de impulsiones en dichos materiales. Las complicaciones son múltiples y, la mayoría radica en las heterogeneidades introducidas por las redes de contactos y el carácter disipativo de éstos. Así, aunque se empleen longitudes de onda larga con respecto del tamaño de los granos, la propagación de ondas de sonido será notablemente atenuada. En el régimen opuesto, es decir, cuando las longitudes de onda son comparables al tamaño de las heterogeneidades en las redes de contacto, una componente de difusión se desarrolla notablemente a expensas de una onda coherente, dificultando el análisis. Dada la complejidad del fenómeno de propagación en un material real, en esta tesis se pretende aportar en aspectos fundamentales de este problema, haciendo abstracción de la dificultad geométrica de las redes de contacto y focalizando todo el esfuerzo, en una primera etapa, al estudio detallado de la propagación impulsiones en cadenas lineales de esferas, cuyos contactos pueden, en principio, caracterizarse con los métodos experimentales disponibles.

Esta tesis esta organizada en cinco capítulos que describen el trabajo realizado de manera autoconsistente. Primero se introduce el contacto de Hertz de manera teórica y se generaliza al caso en el que el material que constituye las esferas presenta pérdidas de energía por viscoelasticidad. A continuación, se presenta una

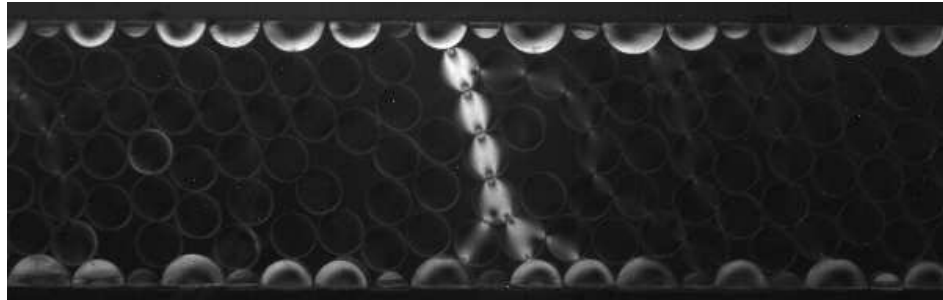


Figura 1.1: Cadena de fuerza en un material granular bidimensional formado por cilindros fotoelásticos, sometido a cizallamiento. Las partículas que brillan están sometidas a esfuerzo. Gentileza de F. Vivanco

descripción detallada de la propagación de ondas solitarias y sonido en medios unidimensionales de esferas que interactúan por medio del contacto de Hertz no disipativo. Asimismo se dan los elementos básicos para desarrollar cálculos numéricos que describen el comportamiento general de esferas interactuantes por el contacto de Hertz disipativo. Estas rutinas numéricas permiten describir en detalle configuraciones más complejas en las que los cálculos analíticos presentan dificultades considerables. Finalmente, y a fin de introducir los elementos básicos que potencialmente modifican el contacto de Hertz, se presenta la descripción de un contacto húmedo conteniendo un pequeño puente capilar entre esferas. Los efectos lubricantes y viscoelásticos del fluido se introducen, en una primera aproximación, en el marco de la teoría clásica de la viscoelasticidad lineal.

A continuación, se detalla el contenido de cada capítulo:

- **Capítulo dos:** Está dedicado al estudio experimental de la propagación de ondas en cadenas monodispersas de esferas que interactúan mediante la fuerza de contacto de Hertz. Se cuantifica el efecto de la disipación considerando el roce de las partículas con su soporte y la viscoelasticidad del material que compone las esferas. A continuación, se utiliza esta base

para estudiar la mitigación de impulsiones en cadenas Hertzianas compuestas por bolas de tamaño decreciente. Finalmente, se muestra experimentalmente la existencia de oscilaciones localizadas en una cadena monodispersa que contiene un grano de menor tamaño.

- **Capítulo tres:** Se complementa la descripción macroscópica dada en el capítulo anterior, mediante el estudio de la fuerza en el contacto entre dos superficies rugosas. Para la realización de los experimentos se utilizan materiales con distintas propiedades mecánicas y se caracteriza el estado de superficie de cada uno de ellos. Se observa la ley de fuerza experimental que se cumple cuando las deformaciones realizadas son del mismo orden que las rugosidades de la superficie.
- **Capítulo cuatro:** El objetivo de este capítulo es el estudio de los efectos introducidos por la presencia de un fluido viscoso intersticial en un material granular. Se utiliza el montaje de una cadena Hertziana monodispersa para validar las observaciones publicadas por otros autores, usando materiales granulares tridimensionales. Luego se procede al estudio de la modificación del comportamiento del contacto entre una esfera y un plano cuando se deposita una pequeña cantidad de fluido viscoso.
- **Capítulo cinco:** En este capítulo se desarrolla un montaje experimental que permite el estudio de ondas en materiales granulares tridimensionales, sometidos a compresión hidro-estática. Se utiliza este montaje para realizar experimentos preliminares con el fin de explorar los fenómenos propagativos que pueden darse en relación a los ya observados en una dimensión.

1.2. Dinámica de contactos

La dinámica de contactos se dedica a la descripción de las deformaciones y fuerzas que se producen cuando dos cuerpos sólidos entran en contacto. En la literatura se pueden encontrar una variedad de problemas resueltos (indentación de superficies esféricas sobre planos, conos sobre planos, etc.), sin embargo, aún no hay certeza sobre cuál es el modelo correcto a utilizar a la hora de calcular los tiempos de vida útil y de desgaste de materiales reales [2]. La dificultad más importante a la hora de describir un contacto entre cuerpos reales es, sin lugar a duda, considerar las rugosidades e inhomogeneidades presentes en la superficie de los cuerpos. Distintos autores han usado simulaciones de elementos discretos para recrear una superficie rugosa, modelándola como un apilamiento de capas lisas y delgadas cuyas propiedades mecánicas son diferentes para dar cuenta del efecto de las distintas escalas de deformación [3, 4, 5].

Para tomar en cuenta la interacción de los contactos entre granos, es necesario recurrir a un estudio de la elasticidad del material. En 1882 Heinrich Hertz [6] mostró, usando la geometría, que debido a la geometría de dos granos esféricos sólidos que se traslapan una distancia δ , la fuerza de repulsión generada por la deformación será proporcional a la deformación elevada a la potencia tres medios ($F \sim \delta^{3/2}$). Este tipo de interacción, es muy suave a pequeña deformación, para luego dar paso a un crecimiento rápido de la fuerza para deformaciones mayores, lo que provoca un contacto de corta duración entre las esferas. Los problemas de dinámica de contactos, han sido ampliamente estudiados, sin embargo, aún no existe un acuerdo sobre qué ley se adecua mejor a los materiales utilizados en aplicaciones tecnológicas y, por lo tanto, es necesario avanzar usando una descripción a escala de las rugosidades para encontrar las propiedades que determinan la dinámica macroscópica.

A continuación se presentará un breve desarrollo de la teoría elástica lineal de con-

tactos. Con ésta describiremos experimentos presentados en los capítulos siguientes.

1.2.1. Teoría elástica de contactos

La deformación elástica δ de un contacto entre cuerpos sólidos sometidos a compresión normal F , como se indica en la figura (1.2), se puede describir mediante el uso de las ecuaciones de la teoría de elasticidad lineal. Para lograr esto se deben conocer las deformaciones de los puntos dentro del material. Siguiendo el desarrollo de Landau [6], se localiza el plano $x - y$ sobre la región de contacto entre los cuerpos, luego se elige la dirección z tal que para cada esfera sea positivo si la deformación va hacia el centro del cuerpo. También, designaremos por $P_z(x, y)$ a la presión entre los dos cuerpos deformados en la región de contacto. Fuera de esta zona, será $P_z = (0)$. Para determinar la relación entre P_z y los desplazamientos u_z y $u_{z'}$, podemos considerar que la superficie de contacto es plana, y usar las fórmulas:

$$u_i = \int \int G_{ik}(x - x', y - y', z) P_k(x', y') dx' dy' \quad (1.1)$$

Donde, $G_{ik}(x, y)$ es el tensor de green para un medio isotrópico.

El desplazamiento debido a la acción de fuerzas normales $P_z(x, y)$ se determina por las expresiones:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1 - \nu^2}{\pi Y} \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \\ u'_z &= \frac{1 - \nu'^2}{\pi Y'} \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donde (ν, ν', Y, Y') son los cuocientes de Poisson y los módulos de Young de los dos cuerpos, respectivamente. Como $P_z(x, y)$ es nulo fuera de la región de contacto, la integración se extiende solamente a esta zona. Obsérvese que de estas

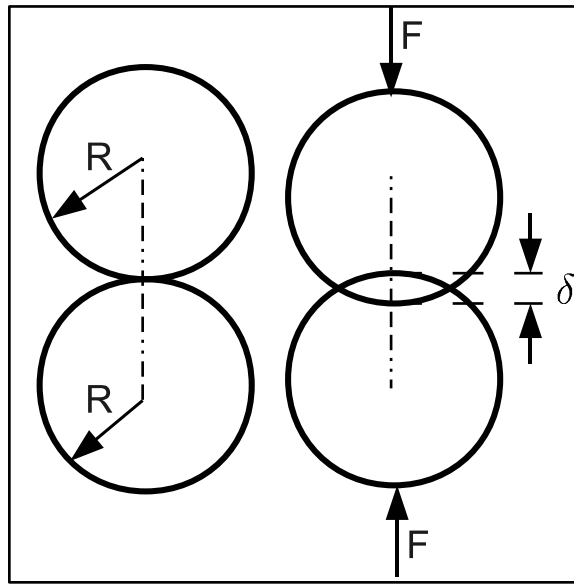


Figura 1.2: Deformación de dos esferas sometidas a una fuerza normal en la dirección de la línea que une sus centros. En la figura de la derecha, se indica la deformación δ (distancia que se acercan los centros) luego de aplicar una fuerza normal F .

ecuaciones se sigue que el cociente $u_z/u_{z'}$ es una constante igual a:

$$\frac{u_z}{u_{z'}} = \frac{(1 - \nu^2) Y'}{(1 - \nu'^2) Y} \quad (1.3)$$

Si se utilizan las expresiones (1.2) junto con la ecuación del plano de contacto, podemos obtener una ecuación integral,

$$\frac{D}{\pi} \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (1.4)$$

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu^2}{Y} + \frac{1 - \nu'^2}{Y'} \right)$$

Para resolver esta ecuación integral, resulta conveniente rescatar un resultado de la teoría de potenciales electrostáticos. Es sabido que el potencial producido por un cascaron elíptico², aplanado y cargado, (límite $c \rightarrow 0$, $z = 0$) puede ser escrito como:

²Las constantes a, b, c corresponden a los semi-ejes del cascaron

$$\varphi(x, y) = \pi \rho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} \quad (1.5)$$

Utilizando la forma general para el potencial electrostático, se tiene que:

$$\varphi(x, y) = \int \int \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (1.6)$$

Y al aplicar el mismo límite de cascarón aplanado que en el caso anterior, obtenemos:

$$\varphi(x, y) = 2c\rho \int \int \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (1.7)$$

Al comparar estas dos expresiones, se obtiene la solución a la ecuación integral (1.4). El campo de presión en la región de contacto es:

$$P_z(x, y) = P_o \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (1.8)$$

Usando este campo de presiones en la ecuación (1.4), e identificando los coeficientes de los términos x e y , se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{[(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi]}} \\ A &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{[(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi]}} \\ B &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi)\sqrt{[(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi]}} \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que la fuerza se relaciona con la deformación del material mediante (ver figura (1.3)):

$$F = \kappa \delta^{3/2} \quad (1.9)$$

Donde, $1/\kappa = (\theta + \theta') \times \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)^{1/2}$ y $\theta = \frac{3(1-\nu^2)}{4Y}$.

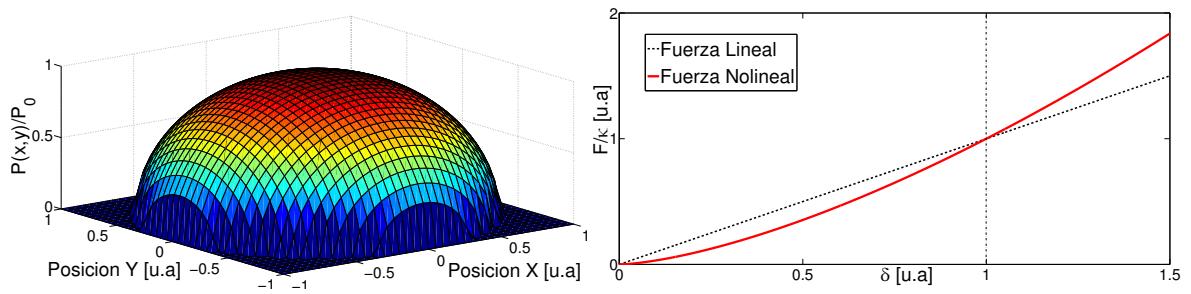


Figura 1.3: A la izquierda: Campo de presión en la zona de contacto entre dos esferas elásticas, sometidas a un esfuerzo normal. A la derecha: Gráfico de la fuerza normal de Hertz en rojo en comparación con una fuerza lineal en negro.

De la figura (1.3) es posible observar que para deformaciones suficientemente pequeñas, la fuerza no-lineal derivada por Hertz es de menor magnitud que aquella esperada para un contacto de la misma rigidez, sometido a una fuerza lineal.

1.2.2. Viscoelásticidad en el contacto de Hertz

Es posible completar el modelo para un contacto entre materiales reales, agregando la disipación interna del material [7]. El modelo utilizado para modelar la disipación en el contacto, corresponde a un elemento de Kelvin [8], donde el resorte, responde a la ley de fuerza de Hertz y un amortiguador no-lineal introduce la pérdida de energía. Para este tipo de modelos, se sabe que la disipación agrega un tiempo de relajación característico, τ , que produce un desfase entre la deformación y la fuerza.

Este modelo se basa en la descomposición del campo de presiones, en una parte elástica P_{el} y una componente derivada de la fricción interna P_f , de manera que la fuerza total actuando sobre las esferas se obtiene integrando sobre el área de contacto $F_{tot} = F_{el} + F_f$. A pesar de que la presión sobre el área de contacto es diferente a la puramente elástica, y por tanto, el área de contacto es diferente, las ecuaciones (1.2) son válidas para la componente elástica de la presión.

La suposición más fuerte se hace al introducir la presión P_f de manera que ésta sea proporcional a la tasa de desplazamientos. De hecho, reemplazando u_z y u'_z por \dot{u}_z y \dot{u}'_z , mientras que las constantes Y y ν se reemplazan por las constantes viscosas equivalentes, asociadas con la deformación volumétrica y de cizallamiento, ξ y η , correspondientemente, se obtiene,

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{9\xi\eta}{(3\xi + \eta)} \\ \nu' &= \frac{(3\xi + 3\eta)}{2(3\xi + \eta)} \\ Y'^* &= \left(\frac{1 - \nu_1'^2}{Y_1'} + \frac{1 - \nu_2'^2}{Y_2'} \right) \end{aligned}$$

Con ésto es posible escribir la fuerza disipativa como,

$$F_f = \frac{2}{E'^*} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1/2} \delta^{1/2} \dot{\delta} \quad (1.10)$$

La figura 1.4 resume el comportamiento de la fuerza total del contacto. Considerando una deformación y la tasa de deformación conocidas. (el valor numérico del tiempo visco-elástico característico, ha sido exagerado para hacer notar el efecto sobre la fuerza)

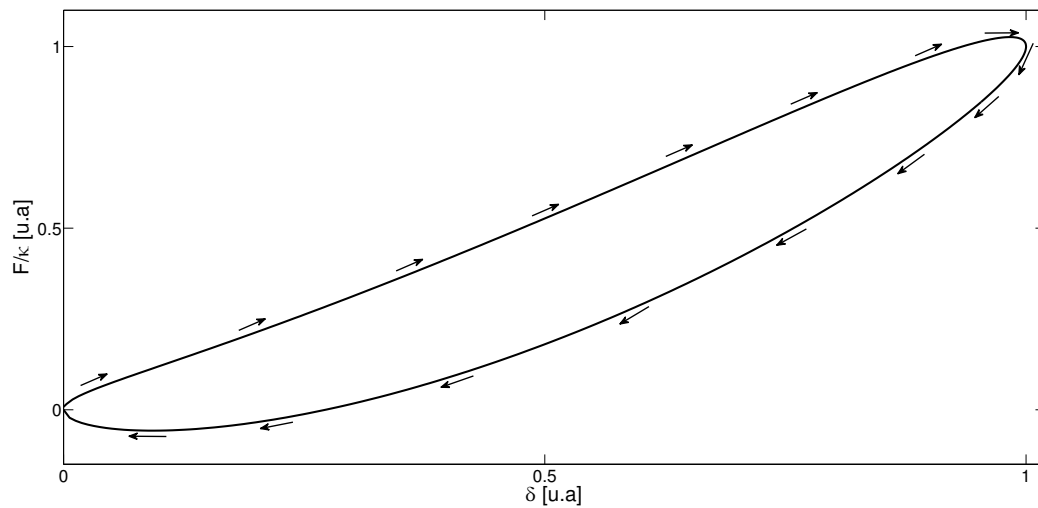


Figura 1.4: Modelo viscoelástico, las flechas indican el sentido en que se recorre la curva en un ciclo de carga y descarga del contacto.

1.3. Propagación de ondas en materiales granulares

Los métodos de propagación de ondas han sido ampliamente utilizados en los últimos años para estudiar las propiedades mecánicas de materiales sólidos y líquidos, debido a que la transmisión de energía en un material está estrechamente ligada a la estructura interna de éste. En un material granular, el estudio de la propagación de una onda mecánica implica la comprensión tanto de la dinámica que ocurre a nivel de los contactos entre granos como de los procesos globales de creación y ruptura de líneas de fuerza. En un material granular, la propagación de ondas mecánicas está limitada por la cantidad de contactos que se pueden establecer en el material, la geometría y la presión impuestas sobre éste. Además, las propiedades locales de los contactos, determinan las características de la onda que se propagará y la manera en que se disipará la energía.

1.3.1. Propagación de ondas en materiales granulares unidimensionales

La figura (1.5) muestra el modelo de una cadena de esferas elásticas de radio R en contacto. Cada una, interactúa como un resorte no-lineal mediante la ley de Hertz mientras que la masa de la partícula, dada por $m = \frac{4}{3}\rho\pi r^3$, se concentra en un punto de posición u_n . Las esferas están sometidas a una deformación estática δ_0

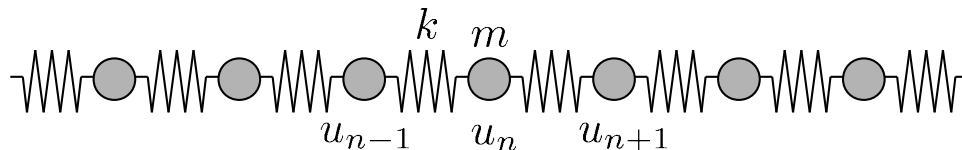


Figura 1.5: Modelo elástico de una cadena de esferas, en contacto, de constante elástica k y masa m . Se muestra la enumeración de las partículas

La ecuación dinámica que describe a este sistema se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{k}{m} \left[(\delta_0 - (u_n - u_{n-1}))^{3/2} - (\delta_0 - (u_{n+1} - u_n))^{3/2} \right] \quad (1.11)$$

De esta ecuación podemos obtener dos comportamientos límites. El primero, cuando la deformación estática δ_0 es mucho mayor al movimiento relativo de los centros de las esferas $|u_n - u_{n-1}|$, el sistema se convierte en una cadena de osciladores armónicos lineales. Mientras que el caso contrario, se obtiene un comportamiento fuertemente no-lineal.

1.3.2. Límite lineal $\delta_0 \gg |u_{n-1} - u_n|$

Usando el desarrollo $(1 + x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \dots$, se puede arreglar la ecuación (1.11) de manera que:

$$\begin{aligned} (\delta_0 - (u_n - u_{n-1}))^{3/2} &= \delta_0^{3/2} \left(1 - \frac{(u_n - u_{n-1})}{\delta_0} \right)^{3/2} \\ &= \delta_0^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(u_n - u_{n-1})}{\delta_0} + \dots \right) \\ &= \delta_0^{3/2} - \frac{3}{2} \delta_0^{1/2} (u_n - u_{n-1}) + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Operando de la misma forma para el otro término en (1.11), y restando ambos resultados, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{3}{2} \delta_0^{1/2} \frac{k}{m} [(u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1})] \quad (1.13)$$

Esta ecuación corresponde a una cadena de osciladores lineales, cuya frecuencia de resonancia es $\omega_0^2 = \frac{3}{2} \delta_0^{1/2} \frac{k}{m}$ y rigidez es $\kappa = \frac{3}{2} k \delta_0^{1/2}$. Al considerar esta cadena como infinita, es posible buscar por soluciones del tipo $u_n = A e^{i\Omega t}$, tales que $u_{n+1} = u_n e^{-i\phi}$. Por otra parte, el desfase entre la solución para dos partículas adyacentes debe ser constante y está fijado por el tamaño de éstas, es decir, $\phi = ql_0$,

donde l_0 es el largo natural del resorte, $l_0 = 2R$ y q es el vector de onda. De esta manera se encuentra la relación de dispersión:

$$\Omega = 2\omega_0 |\sin(qR)| \quad (1.14)$$

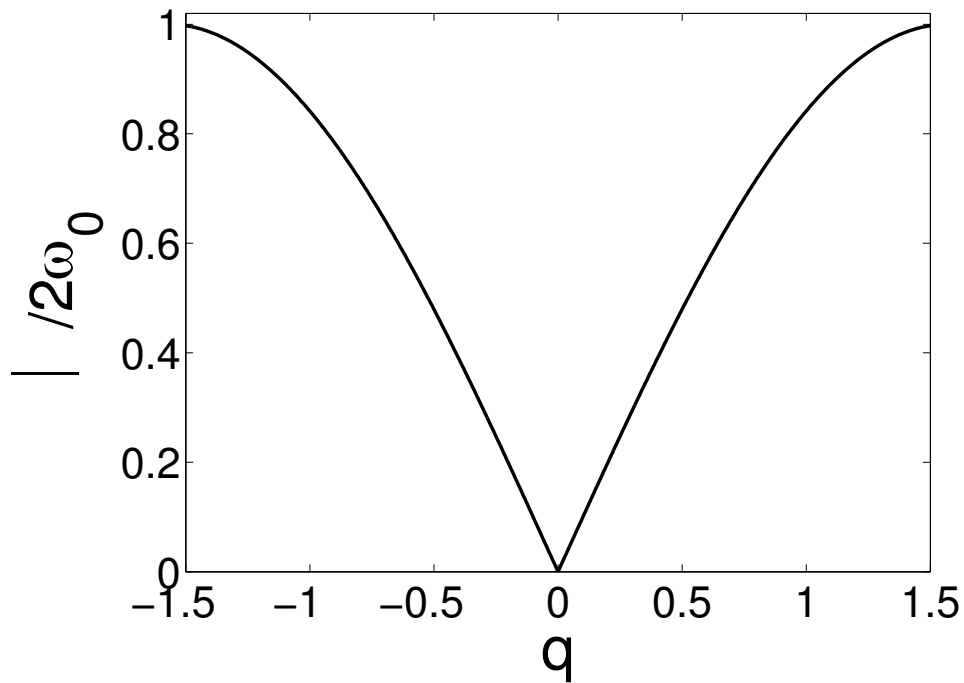


Figura 1.6: Relación de dispersión en el límite lineal para esferas fuertemente comprimidas

Como se observa en la figura (1.6), la frecuencia está limitada, esto significa que no es posible propagar ondas cuya frecuencia exceda a una frecuencia de corte Ω_c tal que $f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi} = \sqrt{\frac{3}{2m}} \frac{1}{\pi} k^{1/3} F_0^{1/6}$. Esta última relación, predice que cuando la fuerza $F_0 \rightarrow 0$, la frecuencia de corte f_c también se acerca a 0, por lo tanto, no se propagan ondas acústicas. Este límite fue llamado **vacío sónico (sonic vacuum)** por Nesterenko [9]

1.3.3. Límite fuertemente no-lineal $\delta_0 \ll |u_{n-1} - u_n|$

Para discutir este límite, es útil definir algunos parámetros característicos:

Λ = Tamaño característico de la onda en la cadena

R = Longitud característica en la cadena

u = Orden de magnitud del desplazamiento producido por el paso de la onda

Para resolver las ecuaciones diferenciales (1.11), es necesario respetar las condiciones siguientes:

- Trabajar el sistema como un continuo $\Lambda \gg R$
- Considerar que el desplazamiento inducido por la onda es pequeño $u \ll R$
- finalmente, $\delta_0 \ll |u_{n-1} - u_n|$

Límite continuo

Para transformar las ecuaciones (1.11) a un sistema continuo debemos hacer:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= u(2R_i, t) = u(x, t) \\ u_{i\pm 1}(t) &= u(2R_{i\pm 1}, t) = u(x \pm 2R, t) \end{aligned}$$

Donde, x corresponde a la posición sobre el eje de la cadena. Usando las condiciones listadas antes, podemos utilizar los siguientes desarrollos:

- Desarrollo de Taylor de $u(x \pm 2R, t)$ en el límite continuo:

$$u(x \pm 2R, t) = u(x, t) \pm 2R \frac{\partial u}{\partial x} + 2R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{4R^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{2R^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \pm \dots$$

- Desarrollo de $(1 + \chi)^{3/2}$

$$(1 + \chi)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\chi + \frac{3}{8}\chi^2 - \frac{1}{16}\chi^3 + \dots, \chi \ll 1$$

Con esto, es posible reescribir la ecuación (1.11) como:

$$u_{tt} = c^2 \left(\frac{3}{2}u_{xx} - u_x \frac{R^2}{2}u_{xxx} - \frac{R^2}{2} \frac{u_{xx}u_{xxx}}{\sqrt{-u_x}} - \frac{R^2}{16} \frac{(u_{xxx})^3}{(-u_x)^{3/2}} \right) \quad (1.15)$$

Donde, $-u_x = -\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ y $c^2 \equiv \frac{k}{m}(2R)^{5/2}$. Los tres términos de la derecha de la ecuación (1.15) son de orden $(\frac{R}{\lambda})^2$, todos los otros términos de orden superior, son despreciados.

Soluciones a perfil constante

Se debe conseguir la solución particular de la ecuación (1.15), en forma de ondas (cuya dependencia en el tiempo es removida con el cambio de variable $\xi = X - Vt$) a perfil de velocidad constante, es decir, las soluciones de la forma:

$$u(x, t) = u(\xi = X - Vt) \quad (1.16)$$

Tomando el sistema de referencia de la onda en movimiento y colocando $\Psi \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}$, la ecuación (1.15), se transforma en:

$$\frac{V^2}{c^2} \Psi_\xi = \frac{3}{2} \Psi_\xi \sqrt{\Psi} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{(\Psi \Psi_{\xi\xi}) \xi}{\sqrt{\Psi}} \right) - \frac{R^2}{16} \frac{\Psi_\xi^3}{\Psi^{3/2}} \quad (1.17)$$

Luego, mediante cambios de variable sucesivos ($\Psi = z^{4/5}$ y luego integrando en ξ , finalmente $y = (\frac{c}{V})^{1/5} z$ y $\xi = \sqrt{\frac{2}{5}} R \eta$). Se puede obtener la ecuación dinámica en su forma adimensional:

$$y_{\eta\eta} = -\frac{d}{dy} W(y) \quad (1.18)$$

$$W(y) = -\frac{5}{8} y^{8/5} + \frac{1}{2} y^2 + C y^{4/5} \quad (1.19)$$

$$y > 0$$

Solución de la ecuación dinámica

La estructura de las ecuaciones (1.18) y (1.19), es análoga a la de una partícula clásica que se mueve en un potencial. La analogía se puede interpretar de la siguiente manera.

y Coordenada de la partícula de masa³ $m = 1$

η Tiempo

$W(y)$ Potencial donde se encuentra la partícula

En este cuadro, el sistema de ecuaciones (1.18) y (1.19) son equivalentes a:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{dW}{dx} \\ W &= W(x) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Y con esto, es posible escribir el análogo a la *primera integral de movimiento* o, la conservación de la energía mecánica total del sistema:

$$\frac{1}{2}y_\eta^2 + W(y) = E_{total} \tag{1.21}$$

Siguiendo la interpretación, $\frac{1}{2}y_\eta^2$ es la energía cinética, $W(y)$, el potencial y E_{total} es la energía total del sistema.

La ecuación (1.21) permite determinar la trayectoria de la partícula a partir del conocimiento de: la forma del potencial, la energía total de la partícula y las condiciones iniciales. En la figura (1.7.a) es posible apreciar que si $C > 0,2$ no habrá puntos de equilibrio (estables o inestables) y las trayectorias no serán limitadas, cualquiera sea el valor de E_{total} . En cambio, si $0 < C < 0,2$ las trayectorias podrán o no ser delimitadas, dependiendo si E_{total} es menor o mayor que $W(y_\infty)$. Las trayectorias limitadas representan soluciones periódicas y así, una oscilación de du-

³En este sistema de dimensiones.

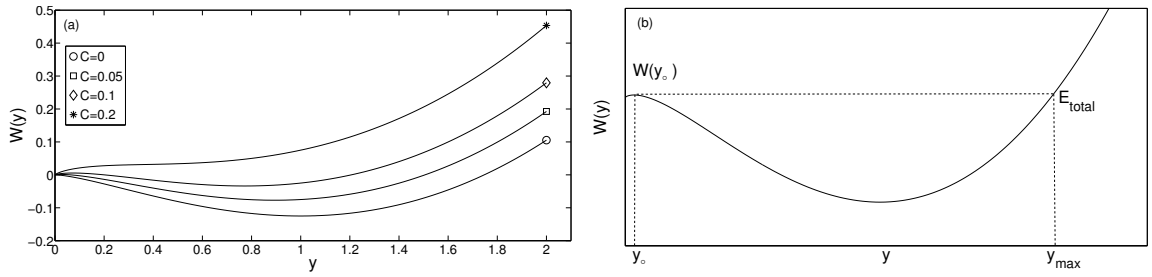


Figura 1.7: (a) Evolución del potencial, para diferentes valores de la constante C . (b) Detalle indicado las cantidades relevantes en el gráfico, con $0 < C < 5/27$

ración infinita corresponde a $W(y_\infty) = E_{total}$. La solución propuesta debe ser tal que:

- $y(\eta) = y_\infty$ cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$
- $y_\eta(\eta) \rightarrow 0$, cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$

Usando el cuadro de la analogía, podemos observar que la única solución que cumple con el criterio de ser localizada, es una tal que $0 < C < 5/27$. Para obtener la solución de manera analítica debemos considerar el caso $C = 0$, donde las soluciones son periódicas y limitar esa solución a un sólo *elemento* para cumplir con la localización de la excitación. Es posible obtener una solución a partir del problema conocido de un potencial [10]

$$\eta = \eta_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy'}{\sqrt{-2(W(y') - W(y_{max}))}} \quad (1.22)$$

Podemos analizar el caso $C = 0$, como un límite de la solución que nos interesa y ver que:

- Para y_∞ o C suficientemente pequeños, existe una solución *solitón*

- Para $y \gg y_\infty$, la solución debera coincidir con aquella descrita por $C = 0$
- Es posible hacer tender continuamente la curva para $C \neq 0$ hacia la de $C = 0$
- En el caso $C = 0$, la solución periódica no corresponde a una secuencia infinita de elementos desfasados, sino que entre dos elementos, la fuerza es nula y por tanto la velocidad del sonido también lo es. Por esta razón, los elementos no pueden interactuar entre ellos. Cada uno de estos elementos representan una **Onda Solitaria**

Ahora, podemos considerar que uno de estos elementos corresponde a la representación de un solitón, en una cadena donde F_0 es infinitamente pequeño. En el sentido en que la diferencia entre esta solución (correspondiente a $C = 0$) y aquella de la cadena bajo compresión, puede ser hecha lo suficientemente pequeña como C . Mayores justificaciones sobre cómo se adapta uno de los elementos a la solución solitón, están dadas en [9]. Para una onda que se desplaza con velocidad V_p , la solución para Ψ se escribe como:

$$\Psi = \left(\frac{5V_p^2}{4c^2} \right) \cos^4 \left(\frac{1}{\sqrt{10}R} \xi \right) \quad (1.23)$$

Cálculo de fuerza y velocidad del solitón

- Fuerza del solitón

Para calcular la evolución de la fuerza del solitón hacemos la aproximación:

$\Psi \approx \frac{\delta}{2R}$, con ésto obtenemos:

$$F \cong F_m \cos^6 \left(\frac{x - Vt}{R\sqrt{10}} \right) \quad (1.24)$$

- Velocidad del solitón

Los detalles del cálculo de V , a partir de la constante C , pueden ser encontrados en [9]

$$V \approx \left(\frac{6}{5\pi\rho} \right) \left(\frac{F_m}{\theta^2 R^2} \right)^{1/6} \quad (1.25)$$

$$\text{Con, } \theta = \frac{3(1-\nu^2)}{4Y}.$$

1.3.4. Simulaciones

Es posible resolver numéricamente las ecuaciones (1.11) mediante el uso del paquete **ODE45** de **Matlab**. Sin embargo, se requieren normalizaciones [11] para mejorar la convergencia y disminuir el tiempo requerido por el cálculo. Por esta razón se definen:

$$\begin{aligned} R_0 & \rightarrow \text{Radio de las partículas, normalización de las distancias} \\ t_0 = \frac{2R_0}{C_0} & \rightarrow \text{Normalización del tiempo.} \\ C_0 = \sqrt{\frac{Y}{3\rho(1-2\nu)}} & \rightarrow \text{Velocidad en el material bulk.} \end{aligned}$$

Utilizando los resultados entregados por la simulación⁴ se obtienen las fuerzas, deformaciones y energías para cada contacto y grano.

⁴Un vector compuesto por dos columnas, posición y velocidad, para cada partícula en la cadena

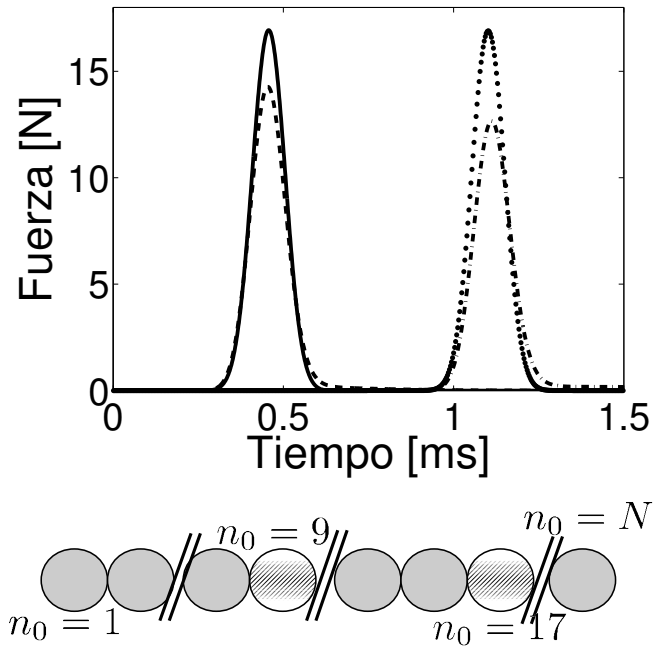


Figura 1.8: Resultado de simulaciones: La línea continua y los puntos representan la fuerza en los contactos $n_0 = 9$ y $n_0 = 17$ respectivamente, (mostradas en el diagrama inferior) sin considerar el término de disipación viscoelástica. La línea segmentada (- -) y de segmentos y puntos (-.), es la fuerza medida en los mismos contactos, considerando la disipación viscoelástica.

1.4. Dinámica de un contacto fluido intersticial

1.4.1. Motivación

En la naturaleza, los materiales granulares pueden encontrarse en variadas formas y condiciones. Entre las más comunes se encuentran las suspensiones granulares y los polvos humedecidos. Los problemas relacionados a materiales granulares húmedos se encuentran presentes en la industria y la vida cotidiana. El deslizamiento de tierra en las laderas de cerros por efecto de lluvias, es el ejemplo más impactante de la influencia que tiene la adición de un fluido en un material granular que, en su estado seco, se encontraba estable. Por otro lado, en la industria de la minería, se utilizan grandes cantidades de agua para separar los distintos tipos de materiales extraídos como producto de explotación de minas. En las industrias farmacéutica y cosmética existe un gran interés por generar cremas, a partir de suspensiones granulares estables. Por estas razones, se ha generado un campo de estudio dedicado a la caracterización de sistemas de este tipo [12, 13, 14, 15, 16].

Es posible distinguir entre sistemas granulares húmedos mediante la cuantificación de las proporciones de líquido y granos en el sistema. Si el material granular se encuentra saturado de fluido (mayor volumen de líquido que partículas sólidas) se denomina *coloide*, y en él gobiernan las leyes derivadas de la mecánica de fluidos. En el régimen contrario, es decir, donde la cantidad de material granular es mucho mayor que la de líquido, se habla de un material granular húmedo o en régimen de lubricación.

Para determinar las propiedades mecánicas de este tipo de sistemas, varios autores han recurrido al estudio de la propagación de ondas a través del material. Sin embargo, se ha observado que la presencia del fluido en la región de contacto entre granos altera dramáticamente las propiedades conocidas para el material sin

fluido [17, 18, 19, 20, 21].

El estudio que se presentará en el capítulo (4), se dedica a la caracterización de las propiedades que determinan la propagación de ondas en un material granular con fluido en la región de contacto. En la primera sección se estudia la propagación de una onda solitaria en una cadena unidimensional con fluido viscoso en la zona de contacto entre partículas. Las conclusiones derivadas de estas experiencias, dan pie para realizar el estudio de la dinámica de un contacto con fluido intersticial, sometido a un impacto. Finalmente, se estudiará la reología del fluido y se cuantificará el efecto del fluido en el contacto, mediante la realización de test a tasa de cizallamiento controlado.

1.4.2. Modelo de lubricación

Para la geometría de este problema, figura (1.9), es posible escribir y resolver las ecuaciones de movimiento y conservación de la masa [8]:

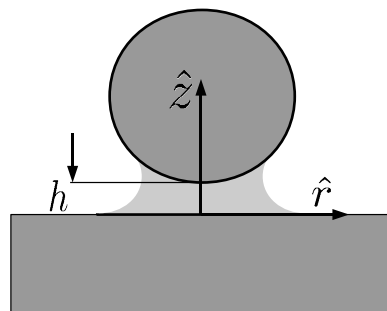


Figura 1.9: Diagrama de la geometría en el problema de lubricación de un plano enfrentado a una esfera.

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (1.27)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.28)$$

La ecuación (1.26) corresponde al movimiento según \hat{r} , la (1.27), al movimiento según \hat{z} y la (1.28) es la ecuación de continuidad.

Si se aplican las condiciones de borde siguientes, es posible resolver estas ecuaciones para la geometría esfera-plano.

$$\begin{aligned} v_r(z=0) &= v_z(z=0) = 0 \\ v_r(z=H(r)) &= 0, v_z(z=H(r)) = \dot{h} \\ P(r=b) &= P_{atm} \end{aligned}$$

Donde b , es el radio de la muestra y $H(r)$ es la ecuación de la esfera. Para resolver las ecuaciones anteriores, se utiliza un perfil de velocidad parabólico de la forma:

$$v_r(r, z) = 6u(r) \frac{z}{H(r)} \left(1 - \frac{z}{H(r)}\right) \quad (1.29)$$

Al escribir la condición de incompresibilidad, se obtiene:

$$2\pi r u(r) H(r) = \pi r^2 \dot{r} \quad (1.30)$$

Y ésta permite calcular el campo de presión usando la ecuación (1.26) con las condiciones de borde anteriores:

$$P(r) = 6\pi\eta\dot{h} \int_r^a \frac{r}{H^3(r)} dr + P_{atm} \quad (1.31)$$

Si se utiliza la aproximación parabólica para la esfera es posible obtener la fuerza:

$$F = \frac{6\pi\eta R^2}{h} \dot{h} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + V/\pi R h^2}} \right)^2 \quad (1.32)$$

En esta ecuación es posible ver que la fuerza depende del volumen, V , del fluido. En nuestro caso, el volumen del fluido es aproximadamente de $V = 2,54$ [mm^3] y el radio de la esfera es de $R = 13$ [mm], por lo tanto el segundo término en la ecuación (1.32) determina una corrección del 4,4% sobre la fuerza. Si la corrección por efecto del volumen es menor que 1%, se puede escribir:

$$F = 6\pi\eta R^2 \frac{\dot{h}}{h} = 6\pi\eta R^2 \dot{\gamma} \quad (1.33)$$

Donde, se estima la tasa de cizallamiento como: $\dot{\gamma} = \frac{\dot{h}}{h}$.

1.4.3. Reología de fluidos: Comportamiento Viscoelástico del fluido intersticial

Modelo de Maxwell

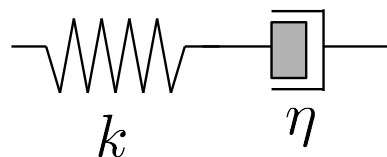


Figura 1.10: Diagrama del modelo viscoelástico de un fluido de Maxwell, considerando la restitución k y una disipación η

Para el sistema de la figura (1.10), la deformación del elemento completo, γ esta compuesto por la deformación del elemento elástico γ_{el} y del elemento disipativo γ_{η} , es decir: $\gamma = \gamma_{el} + \gamma_{\eta}$. Usando las relaciones entre la fuerza, σ y la deformación

para cada elemento se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\eta} \\ \eta\dot{\gamma} &= \tau\dot{\sigma} + \sigma\end{aligned}\quad (1.34)$$

Donde se ha introducido $\tau = \frac{\eta}{k}$ como el tiempo característico de relajación en un elemento de Maxwell. Finalmente, la solución general para este modelo es:

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \dot{\gamma}(t') dt' \quad (1.35)$$

Es posible generalizar este modelo, al caso donde existe una distribución continua de tiempos de relajación $H(\tau)$, entonces podemos reescribir la ecuación (1.35) integrando sobre todos los tiempos de relajación:

$$\sigma(t) = \int_0^{+\infty} \frac{H(\tau)}{\tau} \left[\int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \dot{\gamma}(t') dt' \right] d\tau \quad (1.36)$$

De donde se define, el módulo de relajación como:

$$G(t) = \int_0^{+\infty} H(\tau) e^{-t/\tau} \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.37)$$

Para escribir la forma general de la solución a la ecuación 1.34:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad (1.38)$$

Respuesta a una excitación oscilatoria

Si se somete al fluido a una deformación de tipo sinusoidal de amplitud γ_0 y frecuencia ω_0 :

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{i\omega_0 t} \quad (1.39)$$

Si la deformación se mantiene suficientemente pequeña, de manera que la fuerza sea proporcional a γ_0 , es decir, que se este dentro del marco de la viscoelasticidad líneal. Se puede aplicar la ecuación (1.38), entonces:

$$\sigma(t) = i\omega_0\gamma_0 \int_{-\infty}^t G(t-t')e^{i\omega_0 t'} dt'$$

Aplicando el cambio de variable $u = t - t'$, obtenemos:

$$\sigma(t) = i\omega_0\gamma_0 e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^t G(u)e^{-i\omega_0 u} du$$

Que se puede escribir de la forma:

$$\sigma(t) = G^*(\omega_0)\gamma(t) \quad (1.40)$$

Donde se ha definido G^* como el módulo de cizallamiento complejo, en función del módulo de relajación $G(t)$:

$$G^* = i\omega_0 \int_0^{\infty} G(u)e^{-i\omega_0 u} du \quad (1.41)$$

De esta definición se extrae el módulo de conservación G' y el módulo de pérdida, G'' tales que:

$$G^* = G' + iG'' \quad (1.42)$$

Otra manera útil de plantear la solución es mediante la definición de una viscosidad compleja, de tal manera que la fuerza se puede escribir como:

$$\sigma(t) = \eta^*(\omega)\dot{\gamma}(t) \quad (1.43)$$

Donde $\eta^* = \eta' - i\eta''$ y estos nuevos parámetros se relacionan al módulo de conservación y pérdida mediante:

$$\eta' = \frac{G''}{\omega_0} = \int_0^\infty G(u) \cos(\omega_0 u) du \quad (1.44)$$

$$\eta'' = \frac{G'}{\omega_0} = \int_0^\infty G(u) \sin(\omega_0 u) du \quad (1.45)$$

Capítulo 2

Propagación de ondas en materiales granulares 1D

2.1. Motivación

En este capítulo se estudiará la propagación de ondas en materiales granulares unidimensionales, cuyas partículas están apenas en contacto. La teoría mostrada en la Introducción indica que en este régimen se propagarán ondas no-lineales, llamadas ondas solitarias. Estas ondas, que se caracterizan por tener un soporte espacial compacto, se suelen distinguir del resto, debido a que viajan como un perfil que no pierde su forma durante su propagación. Esto se debe a que en la relación de dispersión, la velocidad depende sólo de la fuerza máxima con que se excita cada modo, por lo tanto, si éstos son excitados con un choque de corta duración (de espectro plano) el impulso producido viajará como un paquete compacto a través del medio. En la primera sección de este Capítulo se describirá el montaje experimental y los sensores de fuerza utilizados en éste. Además, se discutirán los mecanismos de disipación y se cuantificará el efecto de éstos en la propagación de una onda solitaria en una cadena unidimensional, monodispersa.

La segunda parte, estará dedicada al análisis de las propiedades de una cadena granular unidimensional compuesta por esferas de tamaño decreciente y la capacidad de ésta para mitigar la amplitud de impactos. Se desarrolla la aproximación balística para estudiar la propagación de ondas en cadenas cuyas partículas decrecen su tamaño suavemente.

Finalmente, en la tercera sección se muestra evidencia experimental del efecto de localización de energía en una cadena monodispersa que contiene una partícula intrusiva de tamaño mucho menor al tamaño característico del resto de las esferas. El menor tamaño de la impureza, implica que su frecuencia propia será mayor que el del resto de las esferas en la cadena y, por lo tanto, estas oscilaciones estarán prohibidas de propagarse al resto de la cadena, quedando

localizadas en los contactos de la impureza. Usando un análisis multi-escalas¹, se estudia el comportamiento de la impureza y se da información cuantitativa sobre los mecanismos físicos que permiten la excitación de los modos localizados.

2.2. Propagación en cadenas monodispersas

Este capítulo está dividido en cuatro secciones, la primera servirá como introducción al montaje y método experimental que se utilizarán en los experimentos de cadenas decrecientes y localización de energía analizados en la segunda y tercera sección respectivamente. La última parte esta dedicada a un análisis de las principales conclusiones que se extraen de estos experimentos.

2.2.1. Montaje experimental

El montaje experimental de la figura (2.1) esta compuesto principalmente por una cadena monodispersa de bolas de acero ($Y = 203[\text{GPa}]$, $\nu = 0,3$) de 26 [mm] de diámetro , con un extremo libre y el otro fijo. La excitación es introducida desde el lado libre utilizando una pequeña bola de impacto, el pulso producido por el choque viaja hacia el extremo fijo y es registrado por un sensor de fuerza piezoeléctrico (PCB piezo, modelo M208A11 de sensibilidad 112,404 [mV/N]), este sensor esta fijo a un fierro de masa suficientemente grande que actúa como una pared rígida. El pulso se refleja al interactuar con la pared y se propaga en el sentido contrario, hacia el extremo libre. Dentro de la cadena se coloca un sensor, adaptado para no perturbar la propagación del pulso, en forma de esfera que permite registrar la fuerza en un contacto, de manera directa.

El sensor está formado a partir de una esfera de 26 [mm] cortada en la mitad.

¹Desarrollado en apendice (A)

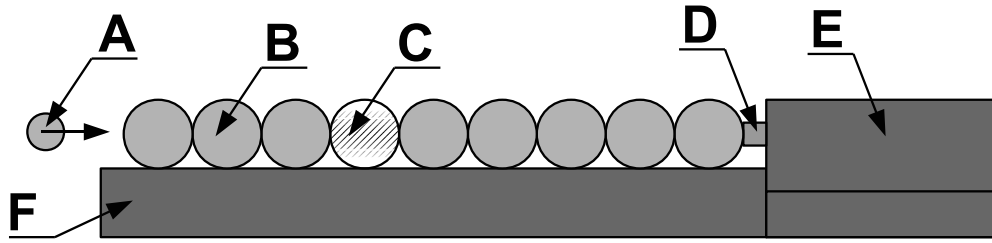


Figura 2.1: Montaje experimental: Una bola de impacto de diámetro 8 [mm] **A**, golpea una cadena monodispersa, **B**, de $n_0 = 20$ bolas de 26 [mm]. **C** corresponde a un sensor de fuerza insertado en una esfera. **D** es un sensor de fuerza al final de la cadena, se encuentra acoplado a un soporte de hierro, **E**, fijo al mesón óptico **F**.

Al lado plano de esta semi-esfera, se atornilla un sensor piezoeléctrico de fuerza marca PCB piezo, modelo 200B02 de sensibilidad 11,45 [mV/N] [22]. Sobre la superficie sensible de la cerámica piezoeléctrica, se adhiere un trozo de esfera del mismo material de la original, ésta reemplaza el contacto con la bola del contacto que se quiere medir, manteniendo las propiedades de superficie, elasticidad y curvatura del contacto original. Finalmente, se añade un anillo de hierro alrededor del sensor para compensar la masa retirada en el proceso de corte. Cada componente está detallado en la figura (2.2). Para relacionar la fuerza registrada por el sensor dentro de la bola, F_s , con la fuerza en el contacto frente a la superficie sensible, F_+ , es necesario escribir las ecuaciones dinámicas correspondientes:

$$F_+ = F_s + m_+ \partial_{tt} x_+$$

$$F_- = F_s + m_- \partial_{tt} x_-$$

$$F_s = k_s(x_+ - x_-)$$

Donde, el subíndice + (-) corresponde a la variable asociada al frente (atrás) de la superficie sensible, la fuerza del sensor se puede escribir como $F_s = k_s(x_+ - x_-)$. definiendo: $\omega_0 = \left[k_s \left(\frac{1}{m_+} + \frac{1}{m_-} \right) \right]^{1/2}$ y $\beta = \frac{m_+}{m_+ + m_-}$, es posible escribir:

$$\omega_0^2 [(1 - \beta)F_+ + \beta F_-] = \omega_0^2 F_s + \partial_{tt} F_s$$

La fuerza en el contacto sensible del sensor, F_+ , se puede relacionar a la fuerza en el otro contacto mediante la velocidad de propagación del pulso v , suponiendo que $F_- = F_+(t + t_0)$ con $t_0 = (x_+ - x_-)/v$. Finalmente, la relación entre las fuerzas está dada por:

$$F_+ = \frac{1}{\omega_0^2(1 + \beta t_0)} [\omega_0^2 + \partial_{tt}] F_s \quad (2.1)$$

Es posible estimar la diferencia entre la fuerza máxima medida por el sensor y la fuerza máxima real en el contacto, es decir, en el instante en que $\partial_{tt} F_s = 0$, considerando que $\beta \approx 0,11$ y que la velocidad de propagación del pulso varía entre 200 y 400 [m/s], el tiempo t_0 que demora la onda en cruzar por el sensor es $t_0 \approx 50$ [μ s], entonces: $\beta t_0 \approx 10^{-6}$. Por lo tanto, la diferencia entre las fuerzas máximas es menor que 10^{-4} %

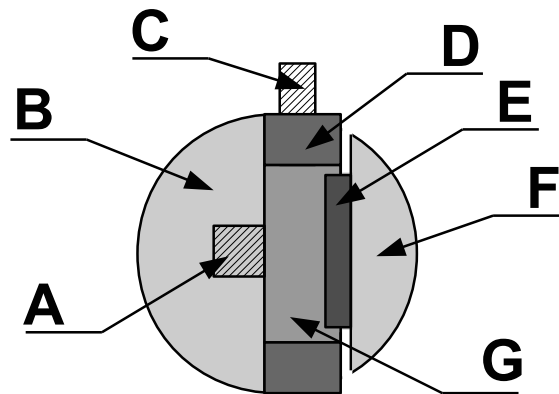


Figura 2.2: Sensor insertado en esfera: Una esfera cortada en dos (m_-), **B**, se acopla a un sensor piezoeléctrico **G**, mediante un tornillo **A**. Sobre la superficie sensible de la cerámica **E**, se pega un trozo de esfera, del mismo material y curvatura que la esfera original (m_+), **F**. Para compensar la masa faltante, se fabrica un anillo de hierro **D**. **C** es la conexión eléctrica del sensor al acondicionador de señal.

Pegamento entre el sensor y el trozo de esfera

Para adherir el trozo de esfera a la superficie sensible, se utiliza un pegamento a base de cianocrilato. Es posible determinar si el pegamento contribuye a la deformación del sensor estimando su rigidez. Para ésto, consideramos que el módulo de Young del cianocrilato es aproximadamente 6 [GPa], y que el pegamento se distribuye uniformemente sobre la superficie² con un espesor aproximado³ de 100 [μm]. Con estos datos, podemos evaluar la rigidez del contacto usando:

$$k_{\text{ciano}} = \frac{YA}{\epsilon} \approx 10,56[\text{KN}/\mu\text{m}]$$

Donde A y ϵ son el área y el espesor de la capa de pegamento, respectivamente. El resultado muestra que la capa de pegamento es 10 veces mas rígida que el sensor (1 [$\text{KN}/\mu\text{m}$]) y, por tanto, no contribuye en el proceso de deformación.

²Si el pegamento no se distribuye sobre toda la superficie, creando sectores secos, actuará como una serie de resortes conectados en paralelo entre las superficies. La rigidez total del pegamento será la suma de la rigidez de cada una de las zonas con pegamento.

³Esta estimación se hace comparando el espesor de una lámina de plástico transparente de espesor conocido con un pequeño trozo de la lámina de pegamento

2.2.2. Mediciones Experimentales

Coeficiente de restitución

La disipación de la energía en la cadena se manifiesta a través de la disminución de la amplitud de la onda al pasar de contacto en contacto. Para tomar en cuenta la disipación de energía se proponen dos mecanismos: el roce de la esfera con el riel que la soporta, y la disipación viscoelástica en la deformación de cada esfera.

- Roce cinemático: $F_s = \mu_s mg$, donde μ_s es el coeficiente de roce cinético, m es la masa de la esfera y g es la aceleración de gravedad
- Disipación viscoelástica: $F_v = \eta \partial_t F$, donde η es un tiempo de relajación propio del material y $F = \kappa \delta^{3/2}$, es la fuerza elástica

Un tercer mecanismo de disipación a considerar es el roce que se produce en la rotación durante el contacto entre las esferas. Cuando las esferas se ponen en movimiento, el roce con la superficie que las soporta genera rotación. La fuerza de roce dinámico producida por la rotación de los cuerpos puede ser escrita como $F_r = \mu_r \kappa \delta^{3/2}$ [1], donde μ_r es el coeficiente de roce en rotación. Esta fuerza introduce una corrección a la constante elástica del resorte, ya que se puede re-escribir la fuerza elástica como: $F^* = (1 + \mu_r) \kappa \delta^{3/2}$. Por lo tanto, esta fuerza no será incluida como fuente de disipación en el análisis.

Para cuantificar la energía disipada se utilizará el coeficiente de restitución, éste puede ser definido como:

$$\varepsilon = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)^{5/6} = \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Donde, U_n es el trabajo realizado por la fuerza de Hertz. $U_{n+1} - U_n$ es el trabajo realizado por las fuerzas disipativas $W_d = \int F_d d\delta$, con $F_{dis} = -\mu_s mg + \eta \partial_t F$.

Usando estas relaciones, se puede calcular el trabajo W_d :

$$W_{dis} \approx F_{dis}\delta \approx -\mu mg\delta - \eta \frac{v}{R\sqrt{10}} \kappa \delta^{5/2} \quad (2.3)$$

El factor $v/R\sqrt{10}$, proviene de la forma de la fuerza en la cadena (1.24). Finalmente, se utiliza el desarrollo de $(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \dots$ para re-escribir (2.2) en términos del trabajo dado por (2.3):

$$\varepsilon \approx 1 - C_s F^{-1} - C_v F^{1/6} \quad (2.4)$$

En esta última ecuación se han definido las constantes $C_s = \frac{5}{4}\mu mg$ y $C_v = \frac{5}{2}\eta \frac{C}{R\sqrt{10}}$, la constante C se introduce al efectuar el reemplazo $v = CF^{1/6}$, dado por la ecuación (1.25).

2.2.3. Resultados

Experimentalmente, se mide la amplitud máxima del solitón en dos puntos diferentes de la cadena, como en la figura (2.3), y se calcula el coeficiente de restitución usando (2.2). Estudiando la variación del coeficiente en función de la fuerza máxima se pueden obtener las constantes C_s y C_v mediante un ajuste de los datos, como se observa en la figura (2.4)

Los resultados obtenidos de los ajustes son:

Cuadro 2.1: Resumen de los parámetros ajustados

C	C_s	C_v	μ_r	η [μs]
182,60	0,85	$6,40 \times 10^{-3}$	0,19	0,58

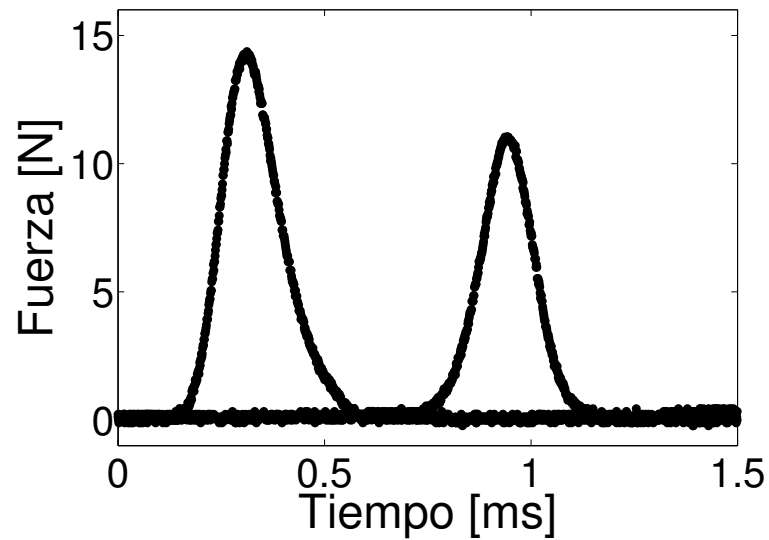


Figura 2.3: El primer pulso corresponde al solitón detectado en la posición $n_0 = 9$, el segundo está medido en $n_0 = 17$

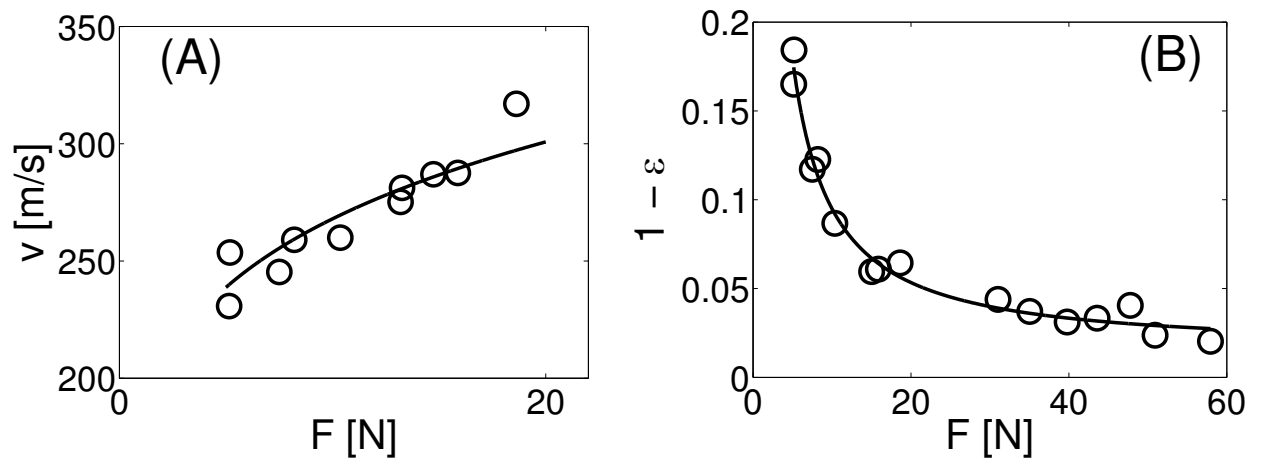


Figura 2.4: (A) Velocidad del solitón en función de la fuerza máxima. Los círculos representan los datos experimentales y la línea continua es un ajuste de la forma $v = CF^{1/6}$. (B) Ajuste para el coeficiente de restitución para la cadena usando $1 - \varepsilon = C_s F^{-1} + C_v F^{1/6}$.

2.2.4. Conclusiones

En esta sección se ha verificado experimentalmente la dependencia de la velocidad del solitón con la fuerza, obteniendo una constante de proporcionalidad experimental, $C_{exp} = 182,60$, que difiere en un 8 % de la constante esperada de la teoría: $C_T = 198,66$.

Usando el resultado anterior se determinan los mecanismos de la disipación en la cadena de esferas, comprobando que el roce con el riel y la viscoelásticidad del material, son suficientes para dar cuenta de la disipación. Analizando los parámetros obtenidos del coeficiente de restitución, se determina el coeficiente de roce $\mu_s = 0,19$ y el tiempo de relajación viscoelástico, $\eta = 0,58[\mu s]$.

Del análisis del gráfico (2.4.B) es posible ver que la disipación decae rápidamente con el aumento de la fuerza y por lo tanto, hace que el sistema sea estable y permita realizar mediciones en un amplio rango de fuerzas.

2.3. Ondas solitarias en cadenas unidimensionales decrecientes

2.3.1. Motivación

La utilización de materiales granulares para mitigar el efecto de impactos, es uno de los usos más comunes de éstos. Los sacos de arena utilizados en trincheras y la base de piedras (gravilla) sobre la que se colocan las líneas de tren, son un buen ejemplo de este tipo de usos. La fuerza aplicada sobre el material genera la conformación de cadenas de contactos, que transmiten la fuerza a través de diferentes líneas al interior del material, el efecto conjunto de todas las cadenas logra reducir la carga sobre el material a proteger, mediante la ampliación de la región afectada por la fuerza impuesta. Actualmente, se estudian cadenas diatómicas⁴ de granos para maximizar la eficiencia de este tipo sistemas [23]. El objetivo de esta sección será el estudio experimental de la propagación de ondas en un material granular compuesto de partículas cuyo tamaño decrece en la dirección de propagación de la onda.

Debido a las diferencias en el acoplamiento entre dos partículas consecutivas, la onda debe cambiar continuamente su forma cuando la energía se transfiere de una partícula a la siguiente. Es de esperar que el factor de disminución del tamaño de las partículas, q , comande la dinámica del problema, ya que para granos de densidad fija, tanto el radio y la masa dependen de este factor:

⁴Compuestas por la repetición espacial de dos granos cuyas propiedades elásticas o mecánicas son diferentes.

$$R_{i+1} = R_i - qR_i = (1 - q)R_i \quad (2.5)$$

$$m_i = \rho V_i = \frac{4}{3}\pi R_i^3 \rho$$

$$m_{i+1} = \eta R_{i+1}^3 = \frac{4}{3}\pi \rho (1 - q)^3 R_i^3 \quad (2.6)$$

El cambio de la masa y el radio de los granos, implican una modificación de la inercia y la constante elástica de acoplamiento entre ellos.

En primera aproximación se puede seguir el desarrollo propuesto por R. Doney y S. Sen [24] usando la hipótesis balística⁵ para este problema. En esta se puede obtener la velocidad máxima de dos esferas consecutivas como:

$$\frac{V_m^{n+1}}{V_m^n} = \frac{2\varepsilon}{1 + (1 - q)^3}$$

Usando este resultado, se pueden usar las relaciones entre el coeficiente de restitución ε y la fuerza máxima, mostradas en la sección (2.2.2). Así se puede obtener la relación entre la fuerza sentida en dos contactos consecutivos y la velocidad del frente de onda del pulso:

$$\begin{aligned} \frac{F_m^{n+1}}{F_m^n} &= (1 - q)^2 \left[\frac{2\varepsilon}{1 + (1 - q)^3} \right]^{6/5} \\ \frac{v_m^{n+1}}{v_m^n} &= \left[\frac{2\varepsilon}{1 + (1 - q)^3} \right]^{1/5} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.3.2. Montaje Experimental

A una cadena monodispersa de n bolas, se agregan m bolas de tamaño decreciente montadas sobre soportes como el mostrado en la figura (2.5), donde

⁵La hipótesis asume que el momentum se transfiere a través de choques entre los granos en la cadena

el ancho a y la altura h de la pieza, son calculados dependiendo del diámetro de la esfera.

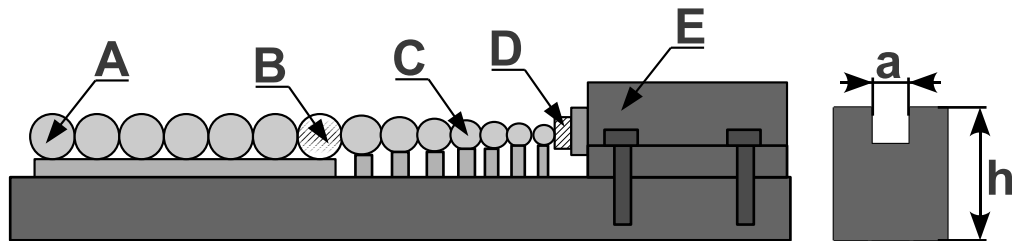


Figura 2.5: Montaje experimental: Una cadena monodispersa de n bolas **A**, se acopla a una cadena de m bolas de tamaño decreciente **C**. Se mide la impulsión mediante sensores de fuerza, **B** al comienzo y **D** al final de la cadena decreciente. Todo el sistema está montado sobre una base de hierro **E**. A la derecha, un detalle de la pieza fabricada para colocar cada bola de la cadena decreciente a la altura del eje definido por la cadena monodispersa.

2.3.3. Mediciones experimentales

En las figuras (2.6, 2.7) se muestran las señales típicas obtenidas para las cadenas con factor $q = 5,6\%$ y $q = 8,2\%$ respectivamente. Los pares (n, m) en cada una de las figuras indican, respectivamente, el número de bolas en la cadena monodispersa y el número de bolas en la cadena decreciente. Las señales corresponden al registro de la fuerza en el sensor acoplado a la pared del montaje. Es posible observar la evolución de la forma de la fuerza en la propagación a lo largo de la cadena decreciente. El incremento en el número de bolas en la cadena decreciente genera la aparición de un tren de oscilaciones que viajan detrás del pulso principal.

Debido a que no existe disponibilidad comercial de bolas de tamaño arbitrario, algunas de las bolas en la cadena decreciente no siguen la progresión determinada por el factor q . Experimentalmente, se comprueba que una variación local del valor

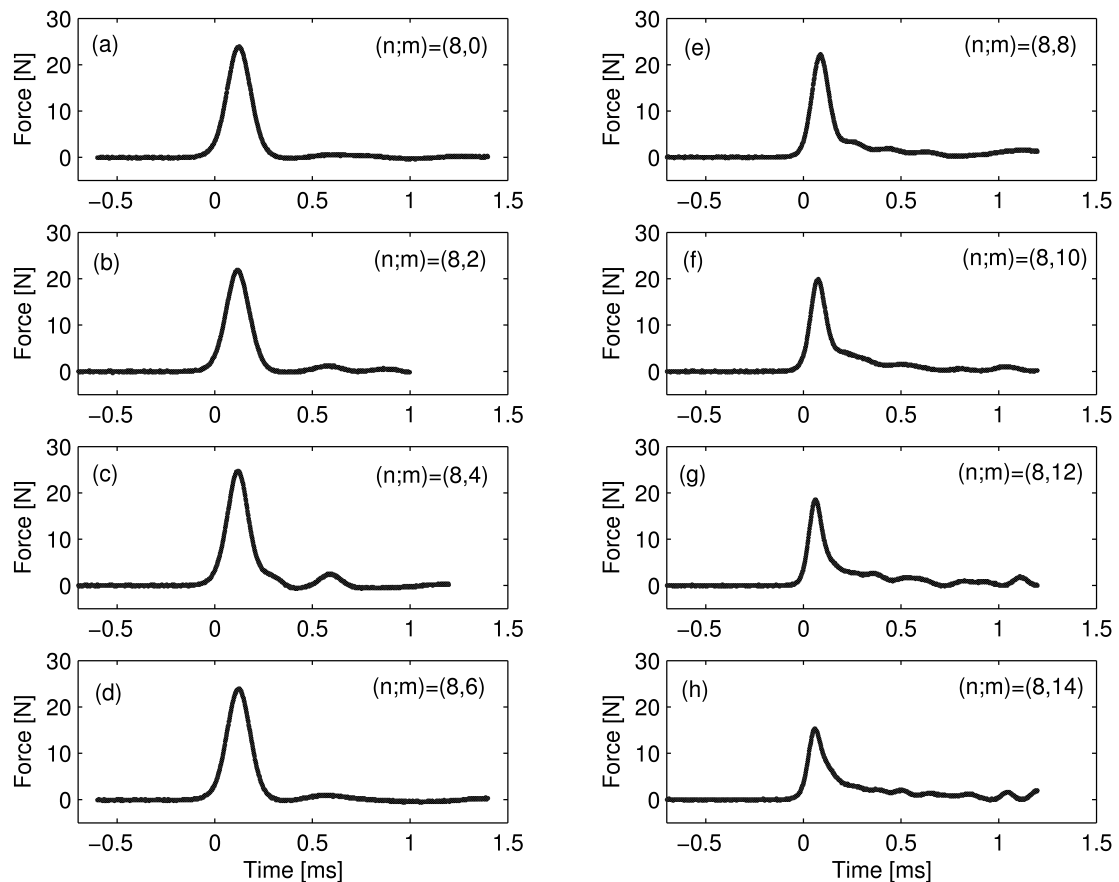


Figura 2.6: Experimentos con $q = 5,6\%$

de q no genera cambios significativos a la señal detectada al final de la cadena. Variaciones positivas del factor, se consiguen reemplazando una bola en la cadena decreciente por una de igual tamaño que la bola que la antecede. Variaciones negativas se consiguen reemplazando una bola por otra de un tamaño más grande que la bola que la antecede.

También se verifica el efecto de la alineación de las esferas en la cadena, sobre la señal que se detecta al final. Para comenzar se desplaza sistemáticamente la bola en contacto con el sensor para determinar si el pulso es sensible a la posición del contacto con esta partícula. La figura (2.8.a) muestra que para desplazamien-

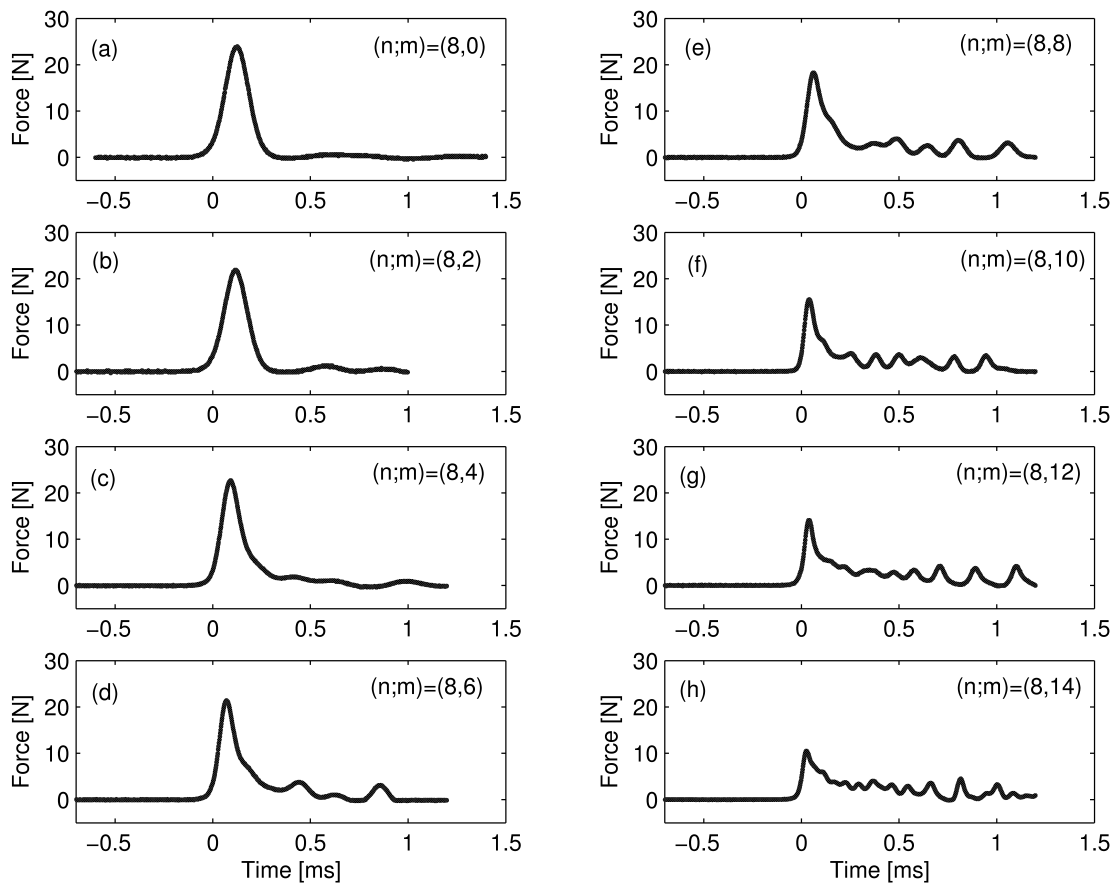


Figura 2.7: Experimentos con $q = 8,2\%$

tos menores a 1,5 [mm], la señal no se ve afectada significativamente. Este error en la alineación corresponde a equivocarse en la posición de la partícula más pequeña utilizada en un 50% de su tamaño. En las mediciones realizadas no se observa tal desplazamiento. Por otra parte, la figura (2.8.b) muestra el efecto de la alineación para una bola ubicada al centro de la cadena y que es desplazada sistemáticamente de su posición en el eje. De la misma manera que en el caso anterior, se observa que la señal que se registra al final de la cadena no se ve afectada hasta desplazamientos del orden de 1,5 [mm].

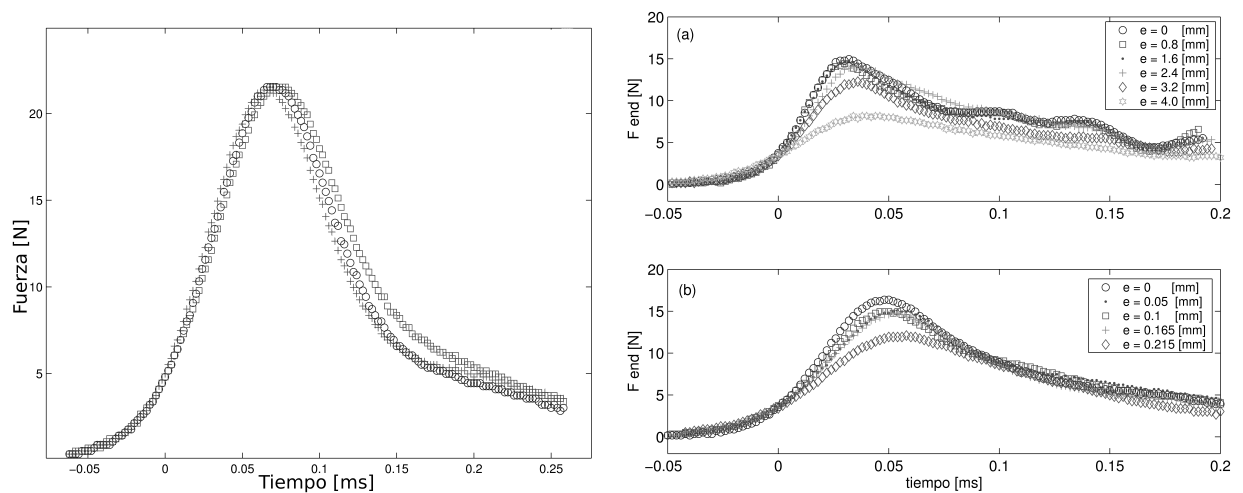


Figura 2.8: **A la izquierda:** Variación local de q : Los círculos (\circ) corresponden al valor nominal de q . Las cruces (+) representan una variación negativa de q y los cuadros (\square) una variación positiva. **A la derecha:** **(a)** Efecto de la alineación de la bola en contacto con el sensor de la pared, e corresponde a la distancia que se desplaza la bola desde el centro de la cadena. **(b)** Efecto de la alineación de una bola en el centro de la cadena decreciente, usando la misma notación para el desplazamiento.

2.3.4. Resultados

Las figuras (2.6, 2.7) muestran la creación de oscilaciones que viajan detrás del pulso, estas oscilaciones poseen un contenido frecuencial mayor que el pulso original que entra en la cadena decreciente (correspondiente al gráfico **(a)** en las figuras). La figura (2.9) muestra la diferencia en la composición frecuencial del pulso incidente con el pulso a la salida de la cadena. Se observa que parte de la energía empaquetada en la onda principal, es traspasada a componentes de mayor frecuencia. Este tipo de procesos es característico en sistemas donde la no-linealidad genera la interacciones entre modos de frecuencia superior.

Un análisis detallado de las características del pulso que se propaga en la cadena nos muestra que el sistema reduce efectivamente la amplitud del pulso que ingresa en la cadena decreciente, llevando parte de la energía a componentes de

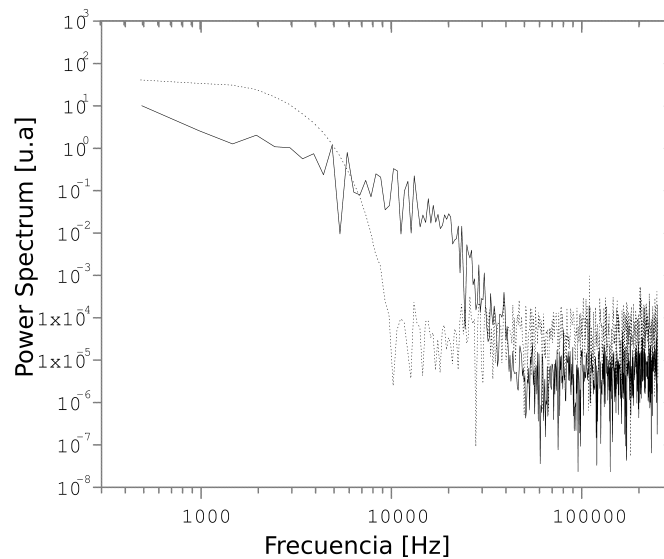


Figura 2.9: FFT de las señales: La curva continua muestra el contenido frecuencial de la señal detectada al final de la cadena decreciente (inserto (h) en las figuras (2.6, 2.7)). La línea punteada es una referencia del contenido espectral del solitón incidente (inserto (a) en las figuras (2.6, 2.7))

mayor frecuencia. La figura (2.10) muestra los resultados principales, extraídos de los datos experimentales. La conservación de la cantidad de movimiento en este sistema se manifiesta en el aumento de la velocidad del pulso (debido a que la masa de las partículas es progresivamente más pequeña). Este resultado muestra que la cadena decreciente destruye el solitón incidente y lo convierte en otro tipo de onda cuya velocidad **no** depende de la amplitud de la fuerza como en una onda solitaria ($v = CF_m^{1/6}$). El inserto **(c)** de la figura, muestra que la duración del pulso principal, también se reduce. Al mismo tiempo, la cantidad de movimiento definida como la integral de la fuerza en el tiempo: $Q = \int F dt$, puede ser analizada dividiendo la señal a la izquierda del pulso inicial para obtener la cantidad de movimiento del frente de onda y a la derecha para obtener la correspondiente de la cola de la onda. El inserto **(d)** evidencia el traspaso de la cantidad de movimiento desde el frente de onda hacia la cola. En esta figura, la cantidad de movimiento correspondiente

a la cola del pulso es cercana a cero mientras la onda se propaga por la cadena monodispersa, y crece cuando se propaga por la cadena decreciente.

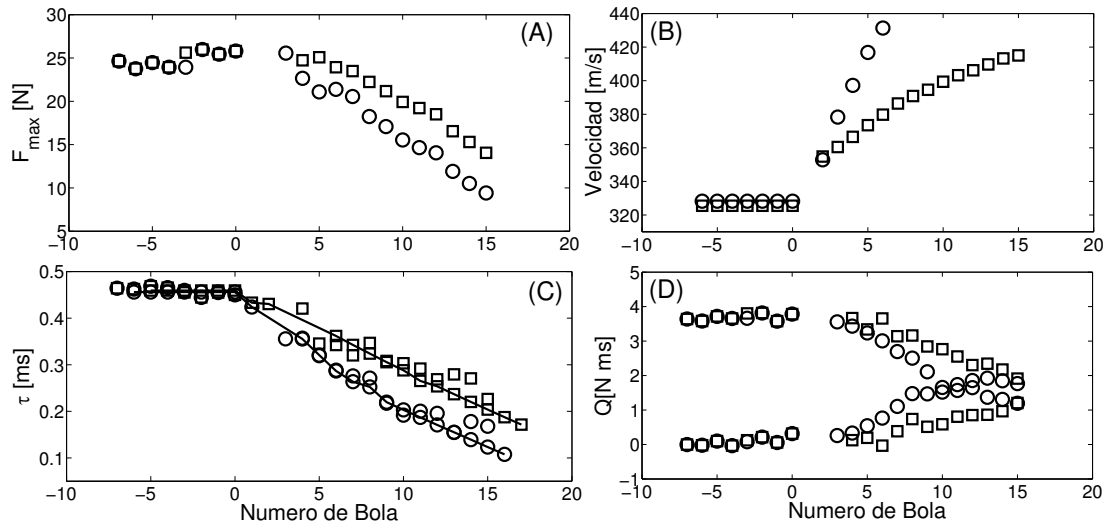


Figura 2.10: Resultados: **(a):** Evolución de la fuerza máxima del pulso en función del número de bolas en la cadena decreciente. **(b):** Velocidad del pulso en la cadena. **(c):** Duración del pulso a media altura. **(d):** Cantidad de movimiento Q en la cola y el frente de onda. Todos los insertos muestran los resultados para el factor $q = 5,6\%$ (\square) y $q = 8,2\%$ (\circ).

Las ecuaciones (2.7) predicen que la razón entre fuerzas registradas en contactos consecutivos se reduce en 5% para la cadena con $q = 8,2\%$ y en 4% para la cadena con $q = 5,6\%$. De la misma manera, la velocidad del pulso deberá aumentar en 20% y 10% en cada cadena.

2.3.5. Conclusiones

En esta sección se ha mostrado experimentalmente que una cadena de esferas cuyo tamaño decrece en la dirección de la propagación de un pulso, es capaz de atenuar la magnitud de un impacto que se inicia en el extremo con las partículas de mayor tamaño y transferir energía desde componentes de baja frecuencia a altas frecuencias.

Los resultados obtenidos están en acuerdo con la aproximación balística introducida en la motivación del problema y, es posible cuantificar la evolución de la fuerza máxima y la velocidad del pulso en la cadena. Sin embargo, esta aproximación es válida sólo cuando el factor q es pequeño, ya que se asume que el pulso se adapta automáticamente en cada cambio de impedancia entre contactos. Es claro que si la cadena decrece muy rápido esta aproximación no será válida.

Las mediciones realizadas se muestran estables al efecto de la alineación de las partículas en la cadena y a las variaciones locales del factor de decrecimiento q .

2.4. Ondas solitarias en cadenas unidimensionales con impurezas

2.4.1. Motivación

La localización de energía es un fenómeno que ha sido estudiado ampliamente en sistemas cristalinos desde los trabajos pioneros de Fermi, Pasta y Ulam [25] en los que mostraron qué sistemas de osciladores con acoplamiento no-lineal no termalizan⁶ la energía, sino que la mantienen en algunos modos bien definidos. Estas observaciones han servido como base en el estudio de la absorción de luz infrarroja en cristales y otros sistemas similares [26, 27], la motivación del trabajo presentado a continuación será: mostrar experimentalmente que es posible generar oscilaciones localizadas en la vecindad de una pequeña impureza, dentro de una cadena Hertziana monodispersa.

Para cumplir con este objetivo se estudia una cadena monodispersa de esferas de radio R_0 que incluye una impureza de radio r ($r < R_0$), en esta cadena se propaga una onda solitaria de amplitud F_0 . En un sistema lineal de osciladores, la frecuencia natural de oscilación está dada por: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, podemos hacer una primera aproximación al problema tomando, $k = k_{NL} \sim \delta^{1/2}$, usando la ley de Hertz se obtiene: $\delta^{1/2} \sim F_0^{1/3}$. También, la masa se puede expresar en términos del tamaño de la impureza considerando su densidad, ρ y masa, $m = (4/3)\rho\pi r^3$. Finalmente, se puede conseguir una relación funcional para la frecuencia⁷:

$$\omega^2 \sim \frac{F_0^{1/3}}{r^3} \Rightarrow \omega \sim F_0^{1/6} r^{-4/3} \quad (2.8)$$

⁶No distribuyen la energía en igual proporción entre los modos normales del sistema.

⁷ El desarrollo detallado de esta expresión se encuentra en el apéndice A

2.4.2. Montaje experimental

La cadena monodispersa está formada por $n_0 = 20$ bolas de 26[mm] de diámetro, al igual que en la cadena caracterizada en la sección (2.2), un extremo de la cadena está libre mientras que el otro, se limita con una pared rígida. En la mitad de la cadena se inserta una bola de radio $r \leq R_0$ (la impureza desde aquí en adelante). En la interfase de la cadena monodispersa y la impureza, se coloca el sensor-bola, éste registrará la fuerza en el contacto. También se fabrica un interruptor eléctrico que permite observar el estado del contacto mecánico entre la impureza y el sensor. Debido a la diferencia de masas, la velocidad de la impureza será mayor que la de bola anterior, por tanto se espera que se produzca una separación o ruptura del contacto.

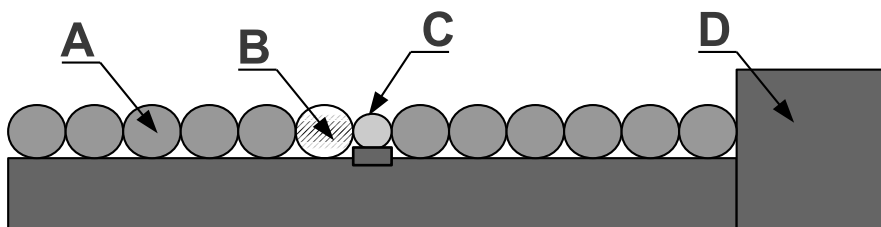


Figura 2.11: Diagrama del montaje experimental: Dentro de una cadena monodispersa de bolas de 26[mm], **A**, se inserta una impureza **C**. En el contacto entre la impureza y la cadena se coloca el sensor-bola **B**. La cadena tiene un extremo libre, por donde se inicia la excitación, y el otro extremo está limitado por una pared rígida **D**.

El interruptor eléctrico, consiste en dos cables de filamentos delgados que tocan suavemente las superficies de las bolas en contacto. Los cables están conectados a las entradas de un circuito *schmitt trigger* integrado en un chip **TTL 7414**⁸.

⁸La salida lógica de este integrado está invertida. Para volver la señal a su valor original, se conecta la salida del *trigger* a otro, dentro del mismo chip, éste vuelve a invertir la señal.

2.4.3. Mediciones experimentales

La figura (2.12) muestra una señal típica registrada por el sensor-bola. El primer pulso que se registra corresponde al paso del solitón incidente en dirección del extremo fijo. El estado del interruptor muestra que inicialmente hay contacto mecánico entre la impureza y el sensor. Luego del paso del pulso incidente, se registra una ruptura del contacto y se pueden ver algunas oscilaciones en la fuerza. El segundo pulso en amplitud, corresponde al paso del solitón reflejado por la pared, en dirección del extremo libre. Al momento de pasar a través de la impureza, ésta no está en contacto con el sensor, y por lo tanto, se mueve libre hasta impactar la superficie del sensor. Cuando se establece el contacto, se pueden registrar las oscilaciones de la impureza, al mismo tiempo que ésta transmite el pulso reflejado. Hay contacto mecánico durante todo el tiempo que dura la transmisión del impulso, al finalizar, el contacto se interrumpe brevemente y la impureza continua oscilando.

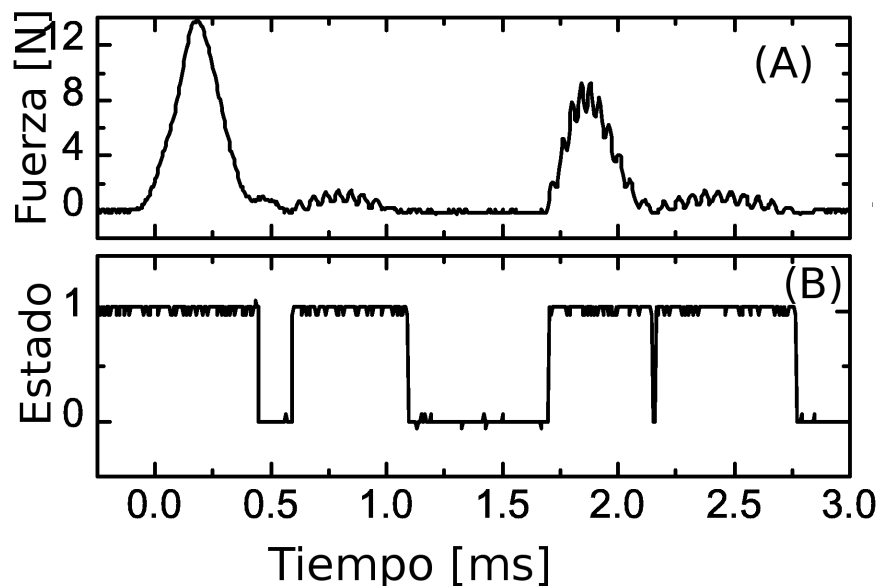


Figura 2.12: (A): Gráfico de la señal típica registrada por el sensor-bola. (B): El estado del interruptor eléctrico colocado entre el sensor-bola y la impureza. Estado 1 significa que hay contacto mecánico.

Se establece de esta manera que, para que existan oscilaciones en la impureza debe existir una separación no nula en alguno de los dos contactos de la impureza. Este argumento implica que para excitar las oscilaciones localizadas se requiere que la impureza impacte otra superficie. Para comprender este requisito, es necesario analizar el tiempo característico de la duración del contacto entre esferas. Para pequeñas deformaciones el contacto de Hertz es infinitesimalmente suave y, por lo tanto, el tiempo de interacción es largo. Si hay contacto entre la impureza y la bola que le transmite el pulso, la interacción no tendrá el contenido frecuencial suficiente para excitar las oscilaciones. Sin embargo, si hay una distancia no nula entre los contactos, la impureza deberá recorrer libremente esta distancia para luego impactar la superficie de la bola siguiente, este impacto será de menor duración que la transmisión y por esta razón se generará el contenido frecuencial necesario para excitar las oscilaciones de la esfera.

Se ha establecido que existe una fuerza mínima ($5[N]$), del solitón incidente, para generar la ruptura del contacto. También, modificando la carga estática (inclinando el montaje) se ha observado que para fuerzas suficientemente grandes siempre se puede romper el contacto.

La adquisición de los datos se realiza en dos partes: en la primera, se registra la señal completa, como se ve en la figura (2.12) y para la segunda, sólo se registra el solitón reflejado para obtener una buena resolución temporal de las oscilaciones.

2.4.4. Resultados

Para medir la frecuencia de las oscilaciones se calcula el promedio de la señal que las contiene y luego se resta a la señal original. Esto deja sólo la componente oscilante del pulso, que es analizada usando un algoritmo de transformada rápida de Fourier, *FFT*, en **Matlab**. Se guarda la frecuencia de la componente fundamental de las oscilaciones y la amplitud del promedio del pulso. Este proceso se muestra en la figura (2.13)

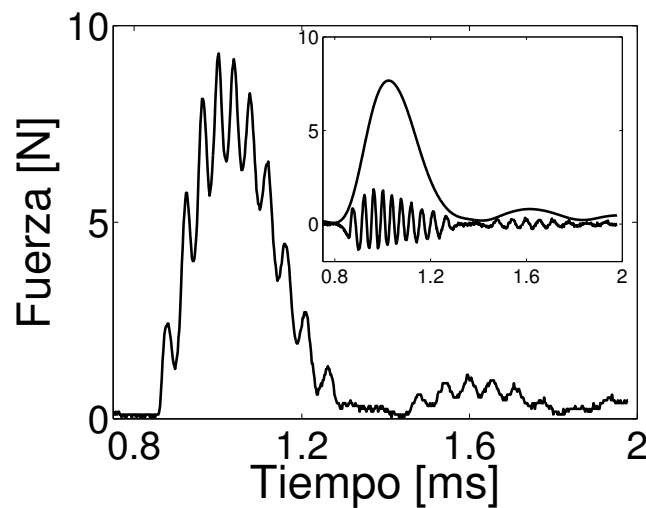


Figura 2.13: Detalle de la señal con oscilaciones en la impureza. El gráfico inserto muestra el promedio de la señal completa y el resultado de la sustracción del promedio a la señal, dejando las oscilaciones sin la componente lenta.

Con el objetivo de comprobar la dependencia obtenida en la ecuación (2.8), se realizan dos experimentos:

Exp. 1: Variación del tamaño de la impureza: $f = C_r \times \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-4/3}$, usando una fuerza incidente constante de 7 [N].

Exp. 2: Variación de la fuerza incidente: $f = C_F \times F_0^{1/6}$, usando una impureza de diámetro 3 [mm].

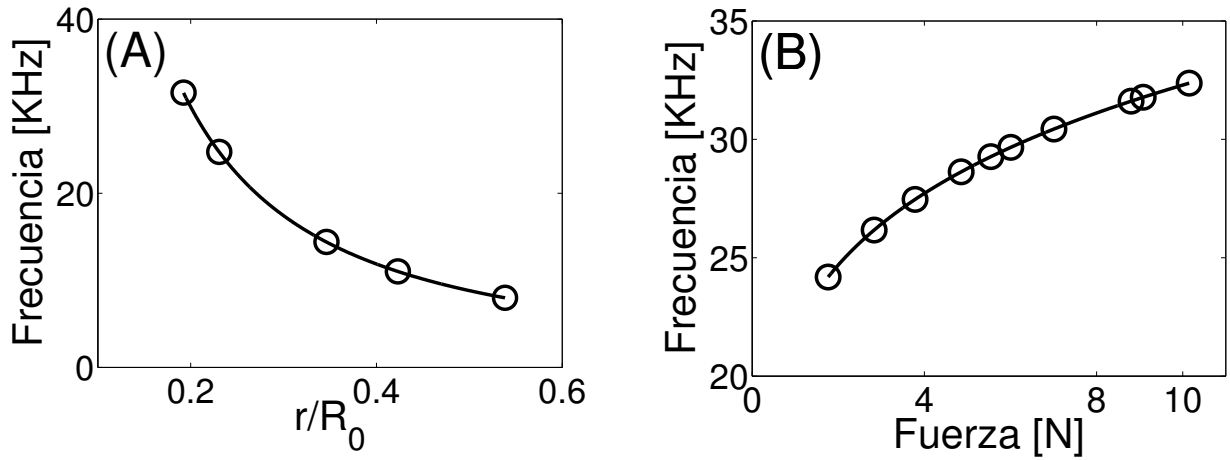


Figura 2.14: (A): Frecuencia de las oscilaciones en función de el cociente de radios r/R_0 . La línea continua corresponde al ajuste $f = C_r \times \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-4/3}$. (B): Frecuencia de las oscilaciones en función de la fuerza del solitón incidente F . La línea continua corresponde al ajuste $f = C_F \times F^{1/6}$

La figura (2.14) muestra el resultado de ambos experimentos. Se observa que en los dos casos, los datos experimentales son compatibles con las dependencias propuestas y, por tanto, se puede analizar la congruencia entre las constantes C_r y C_F obtenidas de los ajustes.

$$f = 3,503 \times 10^3 \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-4/3}$$

$$f = 2,2 \times 10^4 F_0^{1/6}$$

Si extraemos la cantidad usada como constante en cada uno de los experimentos (la fuerza en el experimento 1 o el radio en el experimento 2), obtenemos constantes que difieren en un 18%.

2.4.5. Conclusiones

En esta sección se ha puesto en evidencia la posibilidad de excitar ondas localizadas en un arreglo unidimensional de esferas que incluye una impureza e interactúan por un potencial no-lineal. Se ha mostrado que para generar las oscilaciones se requiere que en al menos uno de los contactos de la impureza esté libre.

En el apéndice (A) se muestra que es posible determinar la frecuencia de las oscilaciones localizadas, mediante la separación del movimiento en una componente lenta que representa al solitón y una componente rápida debida a las oscilaciones de la esfera.

Mediante el procesamiento de la señal obtenida por un sensor colocado en el contacto con la impureza, fue posible medir la frecuencia de las oscilaciones y determinar su dependencia con la fuerza del solitón incidente y el tamaño de la impureza. Se logra obtener la relación funcional:

$$f = C_{exp} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-4/3} F_0^{1/6}$$

La constante experimental obtenida a partir de los ajustes, difiere en un 18% de la teórica debido principalmente a que, para calcular la referencia teórica se consideran las cantidades tabuladas para las constantes elásticas y éstas difieren de los valores que corresponden a los materiales usados (ésto se ve en las mediciones realizadas con ultrasonido, mostradas en el capítulo siguiente)

Capítulo 3

Dinámica de Contactos

3.1. Motivación

Los experimentos del capítulo anterior muestran que, a nivel macroscópico, la teoría del contacto de Hertz permite realizar predicciones que están en buen acuerdo con los experimentos realizados. Sin embargo, las propiedades de los materiales utilizados tanto en estos experimentos como en aplicaciones técnicas, distan de cumplir con las condiciones impuestas por la teoría elástica. Las superficies de las esferas no conservan un radio de curvatura constante, ni son lisas. La presencia de óxidos en las capas superiores del material indican que sus propiedades elásticas no son homogéneas. A pesar de no cumplir con estas condiciones, hemos comprobado que las propiedades asociadas a la propagación de ondas en cadenas unidimensionales siguen las predicciones realizadas usando esta teoría. Por esta razón, se realizará un estudio que permita comprender cómo se comporta un contacto entre superficies rugosas a nivel microscópico y comprender así cual es el mecanismo de interacción.

En este capítulo se llevará a cabo un estudio experimental, a nivel microscópico, de la fuerza normal entre una esfera de distintos materiales metálicos y un plano de tungsteno. Se realizarán mediciones de las constantes elásticas del material valiéndose de las relaciones conocidas entre las velocidades de propagación de ondas de ultrasonido en compresión y cizallamiento, en un sólido homogéneo. Además, se caracterizará el estado de superficie de las muestras utilizadas mediante imágenes de microscopía electrónica y mediciones del perfil de superficie usando un perfilómetro óptico.

La caracterización de las muestras, permitirá medir la deformación real del contacto entre la esfera y el plano, con el objetivo de probar las relaciones conocidas de la teoría elástica lineal de Hertz.

3.2. Mediciones preliminares

Mediante los experimentos realizados en esta sección, se busca caracterizar la dinámica de un contacto entre una esfera sólida y un plano. Para lograr este objetivo hemos realizado mediciones preliminares sobre los materiales a utilizar. Usando técnicas de ultrasonido, se determina el módulo de Young y el cociente de Poisson de cada uno. Para completar la caracterización de las muestras, se realiza un estudio del estado de superficie. Utilizando un perfilómetro óptico, se ha medido la rugosidad característica de cada superficie.

3.2.1. Medición de las constantes elásticas

Mediante las relaciones entre la velocidad de propagación de ondas de compresión (y cizalle) a través de una muestra de material sólido [28], es posible determinar el módulo de Young Y y el cociente de Poisson ν de la muestra.

$$\nu = \frac{V_L^2 - 2V_T^2}{2(V_L^2 - V_T^2)} \quad (3.1)$$

$$Y = \frac{3\rho V_T^2 (V_L^2 - \frac{4}{3}V_T^2)}{(V_L^2 - V_T^2)} \quad (3.2)$$

Donde, ρ es la densidad de la muestra, V_L (V_T) es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales (cizalle). Para determinar las velocidades de propagación, se mide el tiempo de vuelo del pulso emitido hasta el transductor receptor. Para realizar las mediciones, se han tomado las siguientes consideraciones:

- 1.- La amplitud de los pulsos emitidos es tal que pueda ser detectada en el transductor receptor despreciando el ruido eléctrico, pero a la vez, suficientemente pequeña para mantener el sistema en su régimen lineal.
- 2.- Se ha cuidado la geometría de la muestra para evitar que la falta de paralelismo

entre las superficies acopladas a los transductores pueda generar la adición de modos no deseados en la onda a propagar.

- 3.- La longitud de onda del pulso emitido, es más pequeña que la distancia entre los transductores. Con ésto, se elimina la posibilidad de problemas en la medición debido a efectos de borde introducidos por ondas estacionarias.
- 4.- El sistema experimental mostrado en la figura (3.1), se encuentra sujeto con una pinza mecánica, de manera tal que, la presión sobre el sistema es siempre de la misma magnitud.

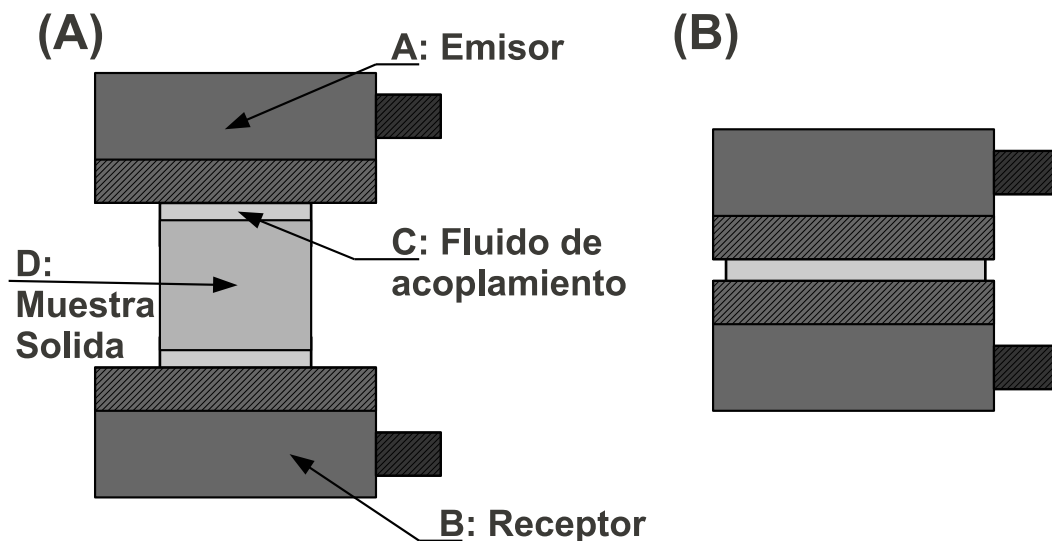


Figura 3.1: Montaje experimental para la medición de constantes elásticas mediante ultrasonido. El incerto (A) muestra los componentes del montaje: La muestra de forma cúbica **D** se encuentra entre el transductor emisor **A** y el receptor **B**. Para acoplar ambos transductores a la muestra, se utiliza un gel de aloe vera **C**. Los transductores se conectan a un equipo de pulse-receiver marca **Olympus**, modelo **5072PR**. En el incerto (B) se muestra el experimento de control realizado para determinar el tiempo de vuelo de la onda dentro del material acoplador.

El resultado de las mediciones, está resumido en el cuadro (3.1). La medición de la densidad ρ , el radio de curvatura R son datos experimentales extraídos

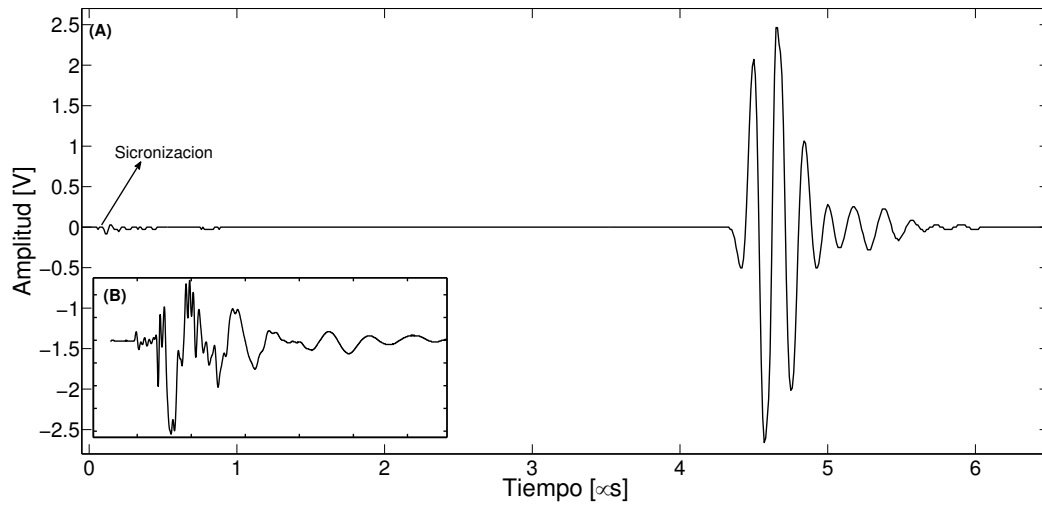


Figura 3.2: Señal obtenida de la propagación de una onda de compresión en una muestra de bronce. La Figura (A) muestra la señal completa adquirida por el transductor receptor, el inserto (B) muestra el detalle de la señal de sincronización que determina el tiempo inicial de la adquisición

de cada una de las muestras, por tanto, serán utilizados como constantes conocidas en los experimentos posteriores. La constante κ se obtiene de la teoría de Hertz:

$$\frac{1}{\kappa_H} = (\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Donde, $\theta_{1(2)} = \frac{3(1-\nu_{1(2)}^2)}{4Y_{1(2)}}$

Cuadro 3.1: Constates elásticas medidas con ultrasonido para cada material.

Material	ρ [Kg/m ³]	ν	Y [GPa]	R [m]	κ_H [N/μm ^{3/2}]
Acero 316L	8800,0	0,2911	212,90	12,70 × 10 ⁻³	24,318
Acero 100Cr6	7794,0	0,2906	202,79	13,00 × 10 ⁻³	23,773
Bronce	8040,0	0,3595	106,83	12,70 × 10 ⁻³	14,980
Tungsteno	12745,0	0,2803	490,14	cap plano	—

3.2.2. Contacto entre superficies rugosas

Para cuantificar el efecto de las rugosidades sobre la dinámica de contactos, se caracteriza el estado de superficie de cada muestra, por medio de un perfilómetro óptico. Este método cuenta con una gran resolución en el eje vertical ($< 1[\mu\text{m}]$), mientras que la resolución horizontal está limitada por las características del sistema móvil que desplaza la muestra sobre el plano de exploración.

La figura (3.3(A)) muestra una imagen obtenida mediante microscopía electrónica, esta imagen denota la existencia de un gran número de imperfecciones sobre la superficie de la esfera y nos da una aproximación sobre qué sección de la superficie, debemos realizar el barrido con el perfilómetro. El paso siguiente es la medición del perfil de superficie con el objetivo de cuantificar el tamaño de las rugosidades observadas. Utilizando las fórmulas estándar para el análisis del perfil de superficie¹ $Z(x)$:

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |Z| dx$$

$$R_q^2 = \frac{1}{L} \int_0^L Z^2 dx$$

De estas ecuaciones, podemos determinar el valor de R_a y R_q para cada una de las muestras utilizadas:

Cuadro 3.2: Medición de la rugosidad estándar y promedio

Material	Bronce	Acero 316L	Acero 100Cr6
R_a [μm]	1,07	0,23	0,63
R_q [μm]	1,37	0,32	0,83

¹En rigor, el perfil de alturas Z es una función de las coordenadas (x, y) sobre el plano barrido por el perfilómetro.

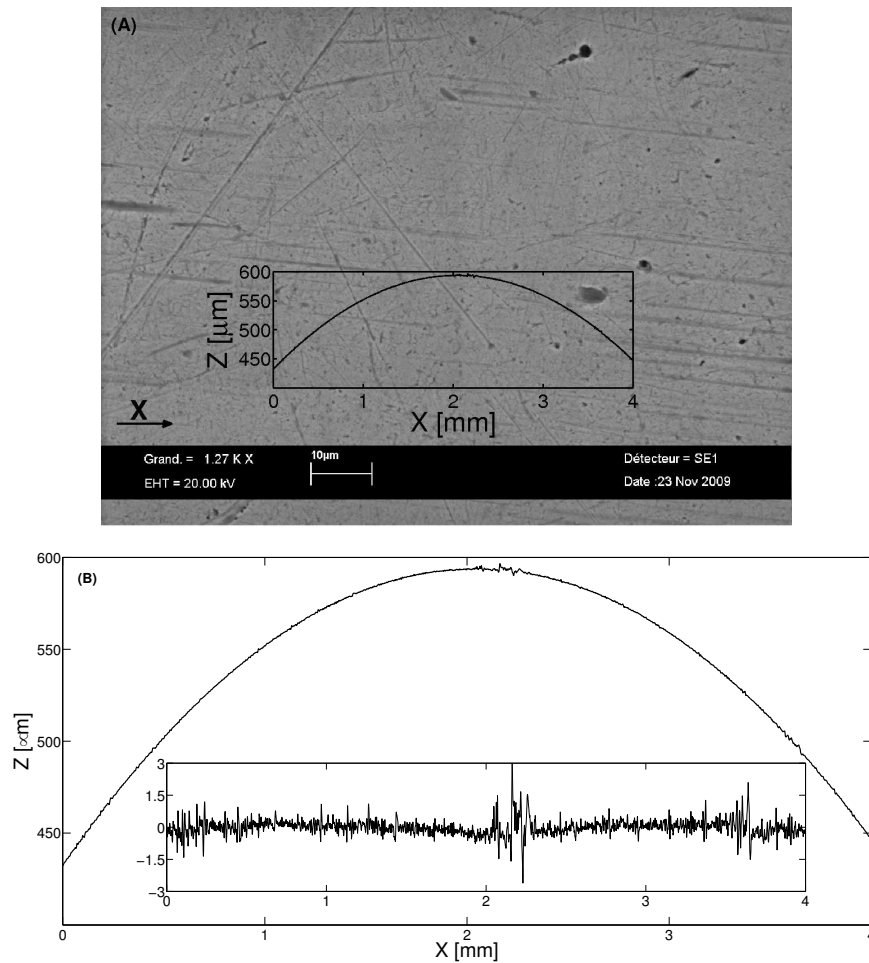


Figura 3.3: (A) La imagen realizada mediante microscopía de barrido electrónico, muestra la superficie de una esfera de acero. El gráfico inserto muestra el perfil de superficie, tomado sobre una línea en la dirección X indicada por la flecha. (B) Detalle del perfil de superficie, el gráfico inserto, muestra la diferencia entre el perfil y su valor promedio ($Z - \langle Z \rangle$).

3.3. Desarrollo experimental

3.3.1. Montaje experimental

Los elementos principales del montaje, el trozo esférico de diferentes materiales (**B** en la figura (3.4.A) y el plano de tungsteno (**C** en la figura (3.4.A)) fueron fijados al sensor de fuerza y al actuador, respectivamente, usando un adhesivo a base de cianocrilato.

Para determinar el comportamiento dinámico del contacto, se utiliza un sensor de fuerza dinámico PCB piezoeléctrico [22], modelo 200B02 de sensibilidad 11 [mV/N] (**A** en la figura (3.4.A)). La respuesta en frecuencia del sensor, se encuentra en el rango 0,001 a 75K [Hz]. Este se conecta a un acondicionador de señal PCB442C04 [29]. La deformación se mide directamente de la cerámica piezoeléctrica del actuador, mediante un strain gauge integrado en éste (**D** en la figura (3.4.A)). Finalmente, ambas señales son digitalizadas mediante un sistema de adquisición National Instruments [30].

Se espera que las deformaciones producidas por el actuador sobre el contacto, deformen algunas componentes del montaje. Por esta razón, se fabrica una prensa (**H, I** en la figura (3.4.A)) que presionan ambos soportes contra una barra de fierro rectangular (**J**), uniendo estas piezas mediante dos barras de acero de diámetro $\phi = 10$ [mm], con hilo. Esta prensa genera que ambas piezas se muevan en la misma dirección, cuando se someten a deformación.

3.3.2. Respuesta dinámica del sistema experimental

El comportamiento estático del contacto entre cuerpos sólidos ha sido estudiado anteriormente, y se conocen los detalles del comportamiento cuasi estático para este problema. Por esta razón, el presente trabajo se concentra en el problema

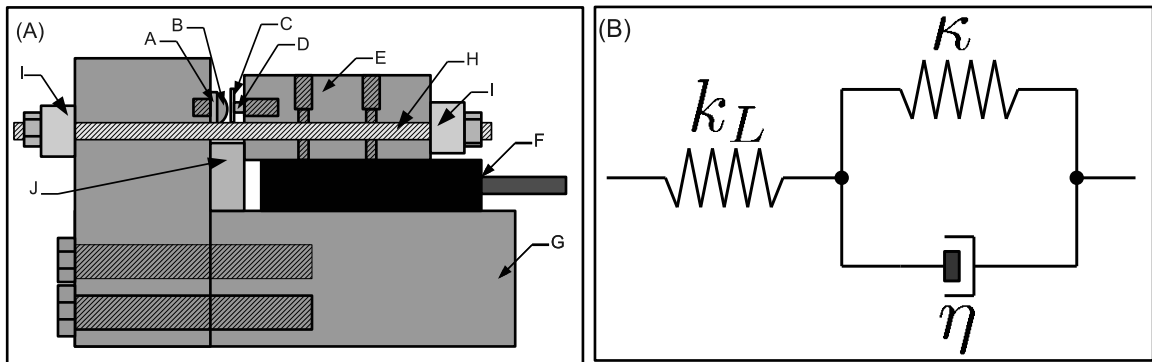


Figura 3.4: **A la izquierda:** Montaje experimental formado por 4 componentes principales, un sensor de fuerza dinámico (A) en cuyo plano sensible se pega un trozo de esfera (B) de distintos materiales. Frente a estos componentes, se encuentra un plano de tungsteno (C) pegado a un actuador piezoeléctrico (D). El actuador se encuentra montado sobre un trozo de hierro de 7 [Kg] de masa, (E), que a su vez se desliza sobre un microposicionador (F). Todos los componentes anteriores están montados sobre un soporte de hierro (G), de aproximadamente 13 [Kg] en total. Las piezas (H,I,J), forman una prensa que une el soporte vertical del sensor con la base del actuador. **A la derecha:** Modelo elástico del montaje experimental, el resorte lineal k_L , corresponde a la elasticidad del montaje, mientras que el elemento formado por el resorte no-lineal κ y el amortiguador η , reemplaza al contacto entre el cap esférico y el plano.

dinámico. La disipación juega un rol importante cuando el tiempo característico de la deformación es comparable con el tiempo de relajación viscoelástico del material. Este tiempo, característico de cada material, no se encuentra disponible en la literatura actual. Por esta razón, sería interesante introducir el método experimental utilizado en este trabajo, para medir las propiedades viscoelásticas de materiales metálicos sólidos.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento dinámico del contacto se impone un voltaje $V(t) = V_0 + \tilde{V} \sin(\omega t)$ sobre el actuador, que responde a éste con una deformación $\delta(t) = \delta_0 + \tilde{\delta} \sin(\omega t)$. De la misma manera, la fuerza medida será de la forma $F(t) = F_0 + \tilde{F} \sin(\omega t + \phi) + A(\omega_0)$, donde $A(\omega_0) = \sum_n A_n \sin(n\omega_0 + \phi_n)$,

representa los términos armónicos generados por el contacto no-lineal². Debido a que, por su arquitectura, el sensor de fuerza sólo registra la componente dinámica de la señal en aquellas mediciones donde la oscilación se realiza completamente dentro del contacto ($\delta_0 > 2\tilde{\delta}$). En el caso donde hay contacto parcial, es decir, que la deformación estática es menor que la amplitud de la oscilación, se obtiene la fuerza total en el contacto, puesto que se conoce el nivel de fuerza nula³

3.3.3. Procedimiento experimental

La preparación de las muestras a analizar comienza con el corte de una esfera sólida. Para esto, se forma un cilindro de resina plástica al rededor de la bola. Este cilindro permite colocar la muestra en la máquina y separar las dos primeras secciones, que dejan a la esfera con dos superficies planas y paralelas. Luego, se retira la resina plástica y se realizan cuatro cortes alrededor de la bola, tratando de obtener secciones de superficie esférica, con una base plana del mismo tamaño que la superficie activa del sensor de fuerza (~ 1 [cm]). Luego se limpia cada sección usando etanol, y se pule la cara plana para eliminar las rugosidades producidas por el corte. La muestra se fija al sensor de fuerza, utilizando una capa delgada de pegamento a base de cianocrilato (tiempo de secado > 1 hora).

3.3.4. Respuesta dinámica de las rugosidades

Para dar un fundamento experimental al modelo elástico propuesto en la figura (3.4), es necesario determinar si las rugosidades de la superficie introducen mo-

²Se debe notar que, en primera aproximación, la contribución de los armónicos puede ser despreciada, dado que la amplitud de las oscilaciones es mucho menor que el valor estático de la fuerza

³Se hace esta distinción debido a que se utiliza un sensor de fuerza es dinámico y no se tiene acceso a la componente continua de la señal de fuerza, provocando la pérdida de esta información cuando la deformación estática es mayor a la dinámica.

dificaciones a la ley del contacto de Hertz. Teniendo esto presente, se realiza un experimento para determinar la relación fuerza vs. deformación cuando esta última es menor que el tamaño conocido de las rugosidades. La figura (3.5) muestra las señales de deformación (A) en función del tiempo, fuerza (B) en función del tiempo y finalmente, la relación fuerza vs. deformación para un experimento donde se realiza un ciclo con contacto parcial

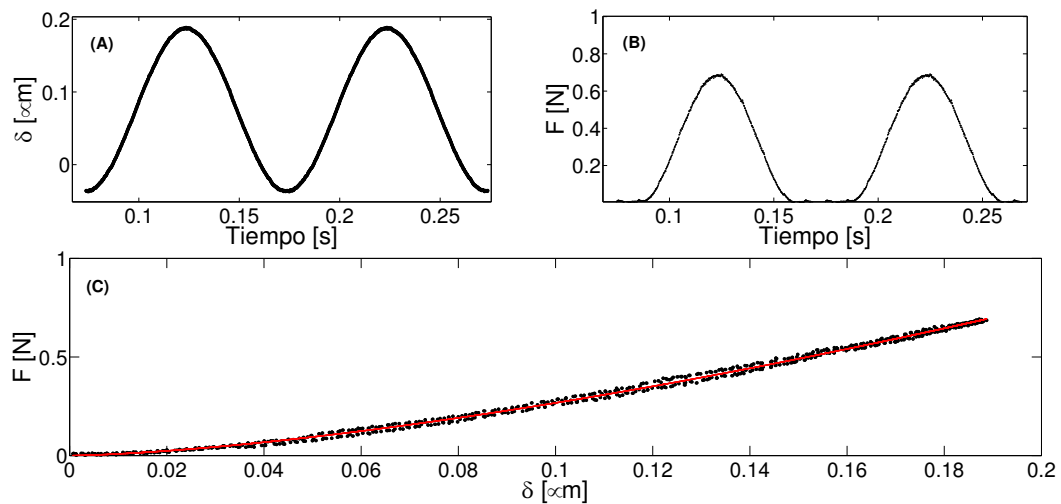


Figura 3.5: Gráficos de deformación (A) y fuerza (B) en función del tiempo. (C) muestra la relación fuerza-desplazamiento y el ajuste de una ley de potencias, usando un parámetro elástico y el exponente como parámetros libres ($F = \kappa\delta^\alpha$)

Para determinar una relación experimental que sea utilizable en la fabricación de un modelo para el contacto esfera-plano, se realiza un ajuste usando una relación general, del tipo $F = \kappa\delta^\alpha$, suponiendo que el contacto está sujeto a la deformación total impuesta⁴. Los resultados (figura (3.6)), muestran que a escala de rugosidades la relación fuerza deformación sigue la misma forma que la ley de Hertz, sin embargo, el coeficiente numérico es menor al esperado ($\bar{\alpha} \approx 3/2$ y $\kappa \approx 9$ [$\text{N}/\mu\text{m}^{3/2}$], $\kappa_{teorico} \sim 14$ [$\text{N}/\mu\text{m}^{3/2}$]).

⁴Este punto se discute y comprueba en la sección (3.3.5)

Es posible observar en la figura (3.5) que la disipación es muy pequeña, dado que no se registra una histéresis significativa en el ciclo de carga y descarga.

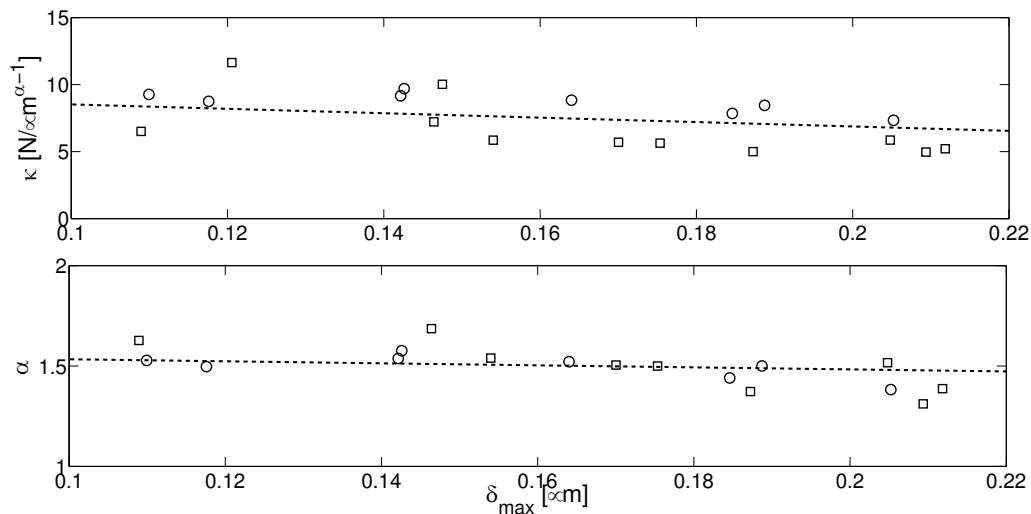


Figura 3.6: Gráfico de los parámetros obtenidos para el ajuste de los datos experimentales. Los cuadros (□) representan los resultados para acero 316L mientras que los círculos (o) representan los datos obtenidos para bronce

3.3.5. Modelo elástico del sistema

El experimento anterior provee una base para el modelo elástico planteado en la figura (3.4.B). Debido a que las rugosidades se comportan de manera relativamente similar al contacto de Hertz (misma ley de potencia, con diferente coeficiente numérico), es posible incluirlas dentro del contacto y considerar un sólo elemento. El modelo de la figura (3.4) representa al montaje experimental como un elemento elástico lineal, esta aproximación se debe a que este sistema fue construido a partir de piezas discretas, fabricadas en acero. Por tanto, es de esperar que la rigidez del montaje sea de un orden de magnitud similar al del acero. A pesar de esto, se considera que la rigidez puede depender de la fuerza con que se han ajustado los pernos y tuercas que lo componen. Por este argumento, la rigidez del

montaje k_L esta fija para cada experimento, pero puede variar de un material a otro, puesto que, cambiar de material requiere desensamblar el sistema y luego, volver a armarlo. Del modelo, se puede escribir que para la componente elástica⁵ de la fuerza se debe cumplir que:

$$F_T = k_{ef}\delta_T \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_L} + \frac{1}{\kappa_{NL}}\delta_{NL}^{-1/2} \quad (3.5)$$

En esta relación no es posible conocer, *a priori*, el valor de la deformación δ_{NL} del elemento no-lineal. Sin embargo, esta última deformación se puede entender como una fracción de la deformación total $\delta_T = \delta_L + \delta_{NL}$. Por tanto, se puede esperar que la deformación no-lineal crezca cuando la deformación total aumenta, tal que la contribución lineal supera a la parte no-lineal y que el inverso de la rigidez converja, por consecuencia hasta $1/k_L$ a mayores deformaciones. En la figura (3.7) se muestra $1/k_{ef} = \tilde{\delta}_T/\tilde{F}_T$, obtenida a partir de la determinación de las amplitudes de fuerza, \tilde{F}_T , y de deformación, $\tilde{\delta}_T$.

Cuadro 3.3: Constante elástica lineal determinada para el montaje, en cada uno de los experimentos con los distintos materiales. Se ha usado el valor de la asíntota del ajuste con el modelo (3.5)

Material	Bronce	Acero 316L	Acero 100Cr6
k_L [N/ μ m]	11,39	9,02	21,58

⁵La componente elástica se toma cuando $\dot{\delta} = 0$

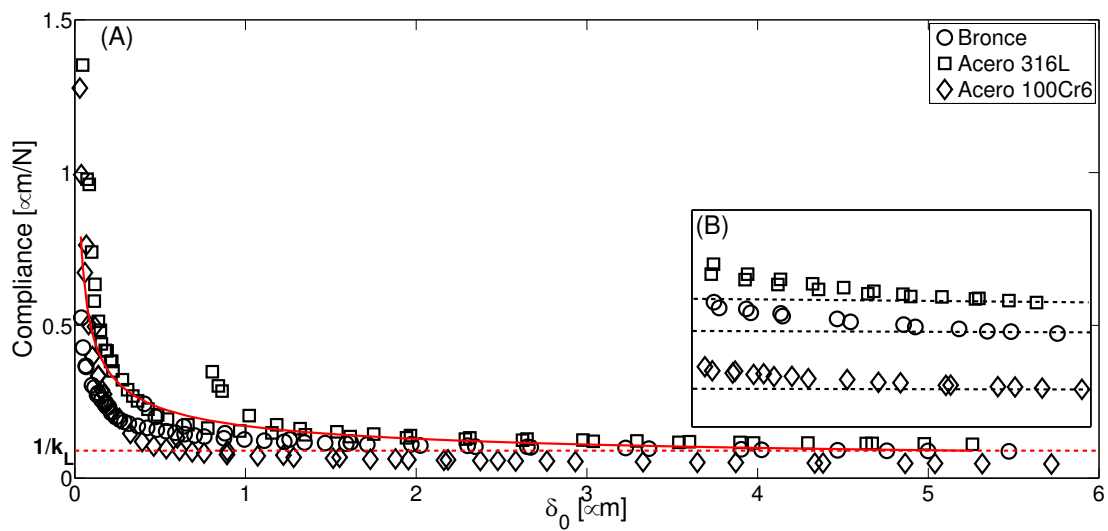


Figura 3.7: (A) Gráfico $1/k_{ef}$ en función de la deformación total. Los símbolos representan distintos materiales, la línea continua corresponde al ajuste de uno de los experimentos. (B) Detalle del ajuste al final de cada curva, el valor límite corresponde a $1/k_L$ para cada experimento

3.3.6. Deformación del contacto

En esta etapa del trabajo, sólo se analizarán los datos correspondientes al contacto parcial, debido que, al no contar con la componente F_0 de la fuerza, existe una indeterminación sobre la posición del origen exacto de la deformación. Los resultados para deformaciones mayores a la amplitud de oscilación del plano, están en proceso de ser comprobadas por otros métodos al momento de la realización de este trabajo.

El modelo elástico introducido en la figura (3.4), está compuesto por dos elementos conectados en serie: un resorte lineal que representa la deformación del montaje experimental y un elemento de Kelvin no-lineal, que representa la deformación del contacto. Para este modelo se debe cumplir que las componentes estáticas sigan:

$$F_{0T} = k_{ef}\delta_{0T} = k_{NL}\delta_{0NL} \quad (3.6)$$

Donde, F_{0T} es la fuerza estática sentida en ambos elementos por igual, δ_{0T} es la deformación estática del elemento lineal y δ_{0NL} es la deformación estática del elemento no-lineal.

Conociendo el valor experimental de k_L , extraído del ajuste en la sección (3.3.5) y la ecuación (3.6), es posible obtener la deformación del elemento lineal:

$$\delta_{0L} = \frac{k_{ef}}{k_L}\delta_{0T} \quad (3.7)$$

Con esta ecuación, es posible definir la fracción de deformación del elemento no-lineal respecto de la deformación total:

$$C = \frac{\delta_{0NL}}{\delta_{0T}} = 1 - \frac{k_{ef}}{k_L} \quad (3.8)$$

La figura (3.8), muestra que mientras se aumenta la deformación total impuesta sobre el sistema, la deformación relativa sobre el contacto disminuye. Esto se debe a que la rigidez del contacto crece como $\delta_{NL}^{1/2}$ y supera rápidamente a la rigidez del montaje, y por tanto la deformación total se concentra en el elemento más suave, es decir, el montaje. La rigidez del montaje, obtenida a partir del ajuste de los datos experimentales, se muestra en el cuadro (3.3).

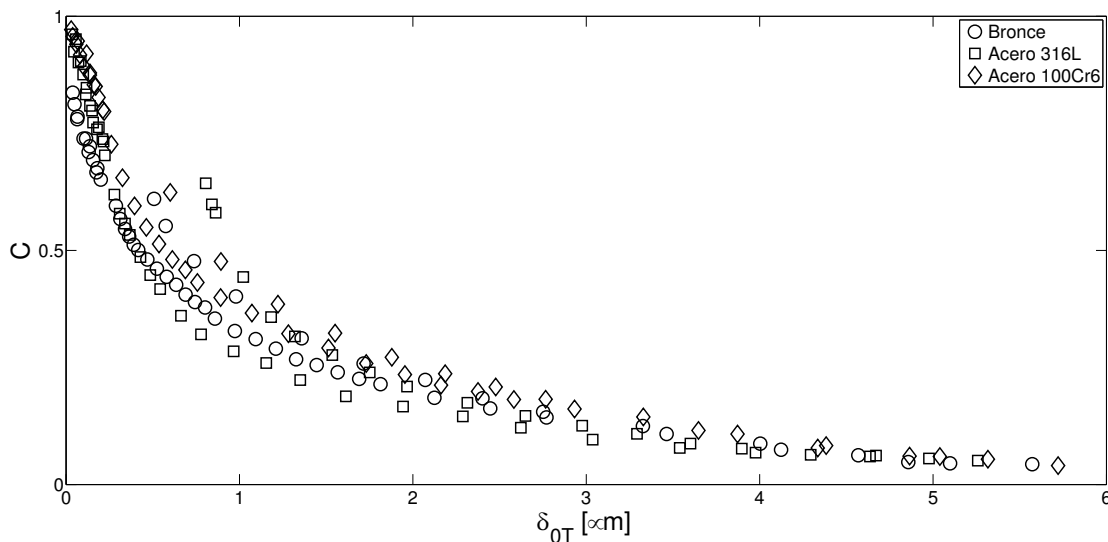


Figura 3.8: Determinación de la fracción de deformación del elemento no-lineal

Esta figura muestra que a pesar de imponer una deformación de máxima $6 \text{ } [\mu\text{m}]$ sobre el sistema, el contacto sólo deforma, como máximo, un 10%. Las mediciones realizadas permiten acceder a deformaciones menores a $1 \text{ } [\mu\text{m}]$ sobre el contacto. Por esta razón, no es posible explorar un régimen de deformaciones permanentes o aún más, un régimen donde la deformación local sea mayor a la escala de las rugosidades del material.

3.3.7. Constante elástica del contacto

Una vez conocida la deformación no lineal, es posible obtener la rigidez no lineal a partir de la relación dada por la fuerza estática:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= k_L \delta_{0L} = k_{NL} \delta_{0NL} \\
 k_L (\delta_{0T} - \delta_{0NL}) &= k_{NL} \delta_{0NL} \\
 k_L (1 - C) \delta_{0T} &= k_{NL} C \delta_{0T} \\
 k_{NL} &= k_L \left(\frac{C}{1 - C} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La constante no lineal k_{NL} contiene la dependencia en la deformación a través de la fracción de deformación C . La figura (3.9) muestra la evolución de la constante no lineal del contacto.

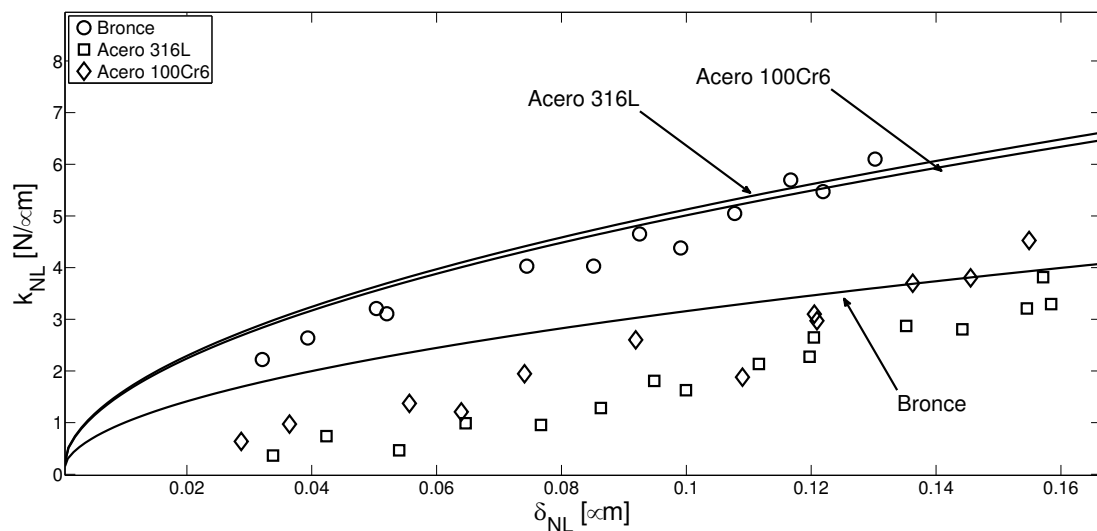


Figura 3.9: Gráfico de la constante elástica no-lineal del contacto en función de la deformación del elemento no-lineal, para los tres materiales utilizados

3.3.8. Radio efectivo del contacto

Para explicar la variación de la constante elástica del contacto, es posible echar mano a los parámetros que lo definen: $k_{NL} = \frac{3}{2}\kappa\delta^{1/2}$. Donde κ depende sólo de la geometría y las propiedades mecánicas del material. Si consideramos que es poco probable que se produzcan cambios significativos sobre las propiedades elásticas del material para deformaciones realizadas a muy baja energía⁶. Podemos pensar que cualquier variación que ocurra sobre la rigidez del contacto debe ser causada por cambios en la geometría local. Para esto, se calcula el radio efectivo (local) del contacto R_{ef} mediante la relación $R_{ef} = \kappa^2(\theta_1 + \theta_2)^2$.

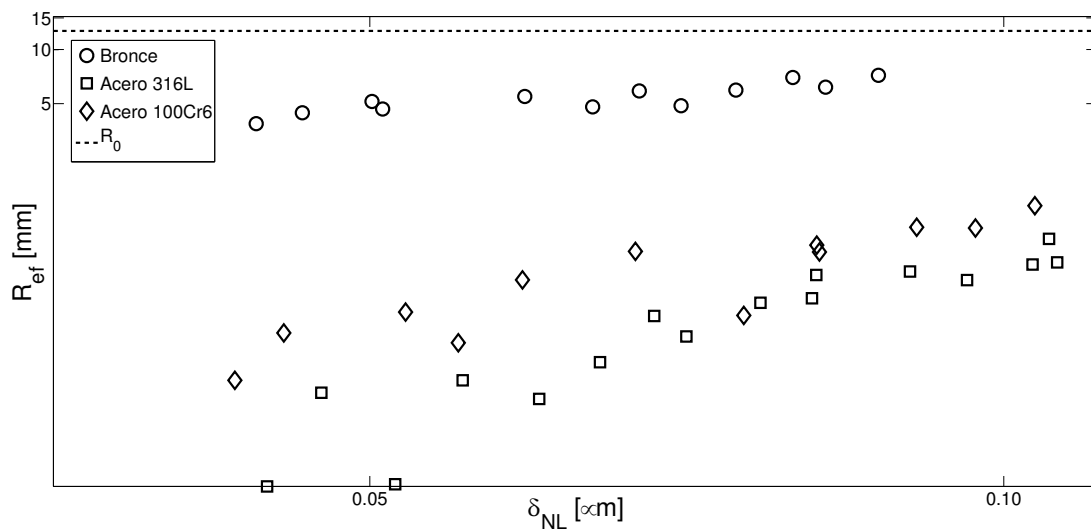


Figura 3.10: Gráfico del radio efectivo del contacto en función de la deformación. La línea punteada marca el radio de curvatura de la esfera.

En la figura (3.10), se muestra la evolución del radio efectivo en función de la deformación del contacto δ_{0NL} . Se puede ver que cuando la deformación es muy pequeña, el radio efectivo del contacto es más pequeño que el radio de curvatura de la esfera (bulk). De la misma manera, para deformaciones mayores, se obtiene que

⁶El nivel de energía no es suficiente para promover la traslación de dislocaciones, fracturas, etc.

el radio efectivo es mayor al esperado para la esfera. Es posible comprender esta idea, si se considera que la superficie de la esfera está decorada por un patrón de cúpulas semi-esféricas, las cuales también están decoradas con el mismo patrón de cúpulas más pequeñas, el patrón se repite sobre cada una de las nuevas cúpulas, como se muestra en la figura (3.11). Cada una de las capas de cúpulas, tiene un radio de curvatura que aumenta progresivamente hasta llegar al radio de la esfera. De esta manera, la interacción del plano con las distintas capas está caracterizada por un radio de curvatura efectivo, que aumenta con la profundidad de la deformación.

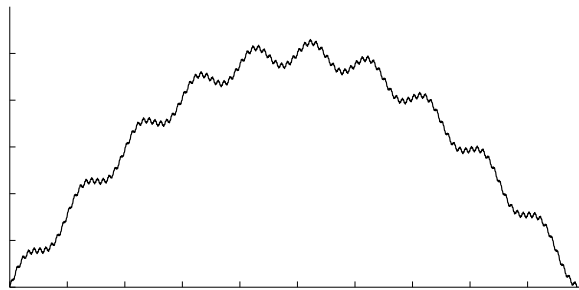


Figura 3.11: Modelamiento de un perfil rugoso mediante múltiples radios de curvatura.

Este modelo de superficie rugosa, que parece consistente con las observaciones experimentales es aceptado en tribología [31] como un modelo estandar para describir asperezas.

3.4. Conclusiones

Los experimentos realizados han permitido separar la contribución lineal proveniente del montaje experimental, de la contribución no-lineal proveniente del contacto entre la esfera y el plano. Se ha determinado que para cada uno de los materiales, existe una rigidez del montaje. Sin embargo, esta constante está fija para cada material medido. La rigidez se encuentra en el rango de 10 a 20 [N/ μ m].

Para obtener un modelo experimental del comportamiento de las rugosidades, se ha planteado una forma general para la fuerza como función de la deformación impuesta, cuando esta es inferior a los 200[nm]. El resultado del ajuste de la forma general $F = \kappa\delta^\alpha$, muestra que el exponente α varía lentamente en torno al valor 3/2 correspondiente a la ley de Hertz. Además, el coeficiente numérico κ es menor a aquel que se puede calcular usando la teoría de Hertz.

Los experimentos realizados imponiendo deformaciones mayores sobre el sistema, muestran que una vez superada la etapa del contacto parcial, la rigidez del contacto crece rápidamente con la deformación y supera a la del montaje experimental, provocando que la deformación total impuesta, se concentre en gran parte, sobre el elemento lineal, y no sobre el contacto. Sin embargo, es posible asociar este comportamiento al crecimiento del radio efectivo del contacto. Este comportamiento puede ser justificado mediante un modelo de rugosidades en capas el cual es aceptado en la comunidad de tribología como un modelo estándar.

Finalmente, es posible afirmar que si bien los datos experimentales muestran que un buen acuerdo con la ley de potencia dada por la teoría de Hertz, la constante elástica predicha por esta teoría es mayor a la extraída de los datos. A pesar de esto, los valores experimentales obtenidos se encuentran en el mismo orden de magnitud que los esperados por la teoría.

Se puede concluir que la ley de Hertz ofrece predicciones que se encuentran en el mismo orden de magnitud que las mediciones hechas en materiales reales y, por lo tanto, son compatibles con las observaciones del capítulo anterior.

Capítulo 4

Propagación de ondas en materiales granulares húmedos

4.1. Cadenas 1D con fluido intersticial

4.1.1. Motivación

Los trabajos de Davis [32] contienen evidencia analítica y experimental que muestran la compleja interacción elasto-hidrodinámica en el contacto entre dos esferas rodeadas de un fluido viscoso. Por esta razón, se espera obtener cambios significativos en la propagación de ondas en materiales granulares con fluido intersticial.

Jia [33], mostró que la velocidad de una onda de ultrasonido, propagándose en un material granular tridimensional, aumenta un 25 % cuando se introduce una pequeña cantidad¹ de fluido en viscoso. En una dimensión, Herbold y Nesterenko mostraron que puede observarse el mismo efecto en una cadena de esferas completamente sumergida en un fluido viscoso. Además, justificaron el aumento de la velocidad de la onda mediante un aumento de la rigidez del contacto y propusieron un modelo donde se agrega un término de fuerza viscosa del tipo $F_\nu = \eta \dot{\delta}_n$ a la interacción de Hertz en cada contacto. Con esto, la ecuación dinámica queda como:

$$m\ddot{u}_n = \kappa \left[\delta_n^{3/2} - \delta_{n+1}^{3/2} \right] + \eta \left(\dot{\delta}_n - \dot{\delta}_{n+1} \right) \quad (4.1)$$

Donde, η es un parámetro de fricción, proporcional a la viscosidad del fluido² μ . En esta sección se tratará de aportar evidencia experimental sobre el fenómeno de aumento en la velocidad de la onda, usando una cadena de esferas sólidas y un fluido viscoso aplicado en pequeñas cantidades³ en la región de contacto entre esferas.

¹0,06 % del volumen total del material

²Se asume que el fluido es Newtoniano, por lo tanto su viscosidad es constante

³Siguiendo el protocolo de Jia, con una fracción volumétrica cercana al 0,01 % del volumen de una esfera

4.1.2. Montaje experimental

La figura (4.1) muestra el montaje experimental basado en los experimentos desarrollados en la sección (2.2). En éste, se agrega una gota de fluido en cada contacto de la cadena a partir de la esfera $n = 5$, es decir, la cadena consiste en 5 esferas con contactos secos seguida por 14 bolas con fluido en sus contactos. La primera parte de la cadena sirve como fuente de la excitación, se inicia un pulso de la misma manera que en los experimentos anteriores, mediante el choque de una esfera pequeña contra la primera bola de la cadena monodispersa. Las 5 bolas al inicio permiten la formación de una onda solitaria que se propaga por la cadena hacia el sensor que se encuentra en contacto con la bola $n = 19$. Usando el sensor-bola se realiza la medición de la fuerza en cada contacto desde la última esfera seca hasta llegar al contacto con el sensor.

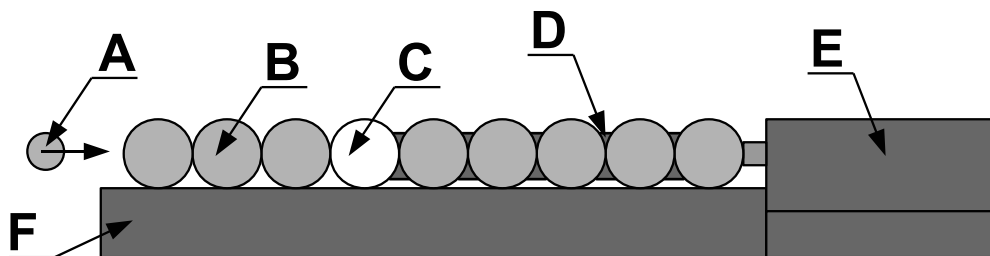


Figura 4.1: Montaje experimental: Una bola de impacto de diámetro 8 [mm] **A**, golpea una cadena monodispersa, **B**, de $n_0 = 19$ bolas de 26 [mm]. **C** corresponde a un sensor de fuerza insertado en una esfera. **D** es el fluido colocado en los intersticios de los contactos, a contar de la bola $n_0 = 5$. Un extremo se encuentra acoplado a un soporte de hierro, **E**, fijo al mesón óptico **F**.

Los experimentos se realizan usando los aceites de Rhodorsil 47v5000 y 47v10000, el cuadro (4.1) resume las propiedades físicas relevantes de estos

Cuadro 4.1: Parámetros físicos de aceites de Rhodorsil 47v5000 y 47v10000

Aceite	η [mm^2/s](25[C])	σ [mN/m]	δ (0,5[KHz])	δ (100[KHz])	α	β
47v5000	5000	21,21	$2,10 \times 10^{-4}$	$2,10 \times 10^{-4}$	-0,45	1,17
47v10000	10000	21,21	$1,10 \times 10^{-4}$	$1,10 \times 10^{-4}$	-0,56	1,18

aceites [34]. Para depositar la gota de fluido se utiliza una punta de pipeta plástica desechable que se sumerge parcialmente en el recipiente de aceite. Luego se coloca la punta de pipeta sobre el contacto donde se desea agregar el fluido y se deja que caiga una gota por efecto de la gravedad. Para todos los contactos se repite el mismo procedimiento.

Es posible ver que la tensión superficial (σ) es independiente de la viscosidad para estos aceites. Lo mismo sucede con el ángulo de pérdida (δ).

4.1.3. Mediciones experimentales

Se realizan experimentos sobre la cadena descrita en el montaje experimental, colocando el sensor-bola entre las posiciones $n = 5$ y $n = 14$, las señales de fuerza detectadas se muestran en la figura (4.2). La línea sólida de la figura corresponde a la señal en la posición $n = 5$ con la cadena sin aceite.

Los fluidos utilizados en estas mediciones fueron aceites de silicona: *Sylgard 184* (una solución no curada, parte de kit de elástomeros), *Rhodorsil 5000* y *Rhodorsil 10000*, los tres fluidos tienen propiedades refluidificantes, es decir, su viscosidad disminuye cuando se aumenta la tasa de cizallamiento aplicada. Este comportamiento puede ser modelado mediante la relación de Carreau:

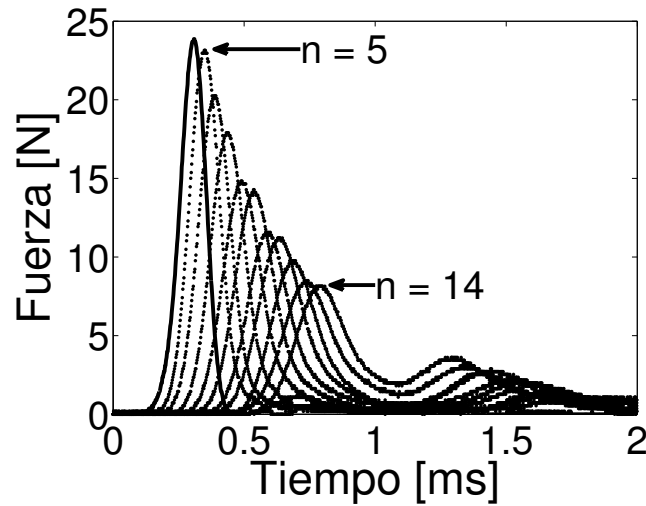


Figura 4.2: Medición experimental de la fuerza registrada en distintos contactos con fluido, usando el sensor-bola para explorar los contactos desde $n = 5$ hasta $n = 14$.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 \left[1 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right)^\beta \right]^{\alpha/\beta} \quad (4.2)$$

Estas mediciones se repiten 5 veces cada una para asegurar la estabilidad del resultado. Al finalizar cada serie de experimentos, se limpian todas las bolas usando etanol y se dejan secar al aire.

4.1.4. Resultados

El análisis de las señales obtenidas, está resumido en el panel de resultados de la figura (4.3). El inserto (a), muestra las señales obtenidas, usando Sylgard 184. Los insertos (b), (c), (d) corresponde a la fuerza máxima, la duración y el tiempo de vuelo en función del número de contacto, respectivamente.

En los insertos se muestra la comparación entre la simulación realizada para los contactos sin fluido (línea continua) y con fluido (línea segmentada con puntos sólidos). Es claro que el modelo dado por la ecuación (4.1) está en acuerdo con los

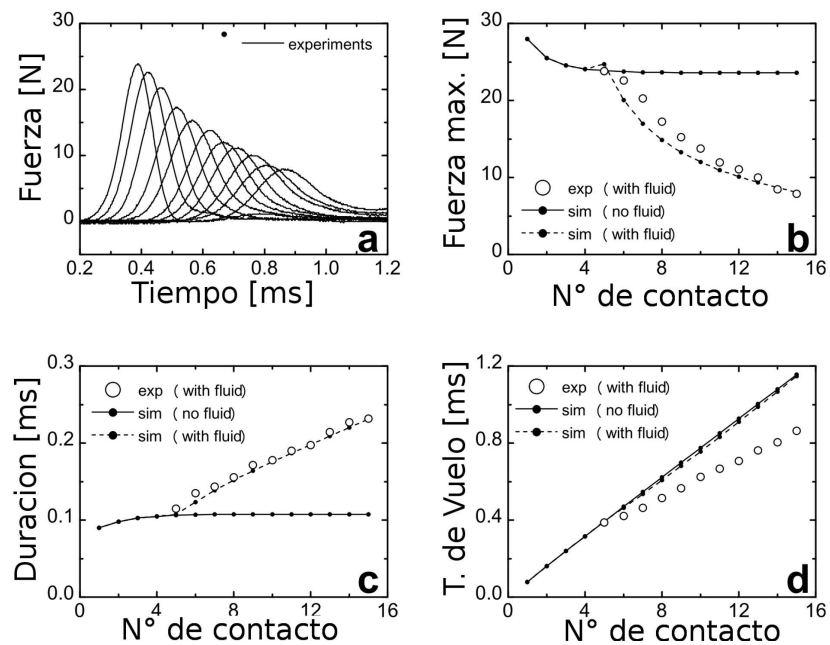


Figura 4.3: Gráfico de los resultados obtenidos en la cadena con fluido aplicado a los contactos. **(a):** Señales obtenidas para *Sylgard 184*. **(b):** Fuerza máxima en función del número de contacto con fluido. **(c):** Duración del pulso a media altura en función del número de contacto. **(d):** Tiempo de vuelo del pulso en función del número de contacto. En los insertos (b)-(d), la línea continua corresponde a la simulación realizada sin considerar fluido en los contactos, la línea segmentada con puntos sólidos es la simulación considerando el fluido como en la ecuación (4.1)

datos experimentales de la evolución de la amplitud máxima y la duración del pulso. Sin embargo, es incapaz de reproducir el aumento de la velocidad del pulso (ó la disminución del tiempo de vuelo en el inserto (d)).

Se hace necesario modificar el modelo propuesto para dar cuenta del aumento de la velocidad. Este modelo supone que el fluido permanece Newtoniano durante todo el proceso de compresión y relajación, lo cual puede no ser completamente cierto dado que la geometría del contacto entre esferas contiene un punto singular, donde el espesor de la capa de fluido debe ser nula.

4.1.5. Conclusiones

Se ha mostrado experimentalmente que la presencia de un fluido viscoso en los contactos de una cadena de esferas, cambia dramáticamente la dinámica conocida para el caso sin fluido. A pesar del aumento en la disipación del sistema (por la adición del fluido viscoso), la velocidad del pulso aumenta y se no respeta la relación conocida entre la velocidad y la fuerza máxima en una cadena seca.

La presencia del fluido en la región de contacto cambia completamente las condiciones de borde impuestas en el estudio del contacto de Hertz. El movimiento de la esfera, por efecto del pulso, genera la evacuación del fluido desde la zona de contacto y, por lo tanto, un gradiente de presión diferente de cero en el borde de esta.

Para justificar el aumento de la velocidad del pulso en la cadena con fluido, se requiere el análisis del campo de presiones al que se impone sobre el fluido y estimar si es suficiente para cambiar la dinámica lineal del fluido.

4.2. Dinámica de impactos sobre un contacto mojado

4.2.1. Motivación

Para obtener información más detallada sobre la dinámica de un contacto con fluido intersticial y verificar si existe un cambio en la dinámica del fluido durante paso de la onda, se realizan experimentos que corresponden directamente a la geometría indicada en la figura (1.9).

La dinámica del fluido se describe reemplazando la interacción de Hertz del contacto, por un término de elasticidad lineal y un termino viscoso:

$$\begin{aligned} m_s \ddot{u}_s &= \kappa_s (u_s - u_b)^{3/2} \\ m_b \ddot{u}_b &= \kappa_s (u_s - u_b)^{3/2} - (\eta \dot{u}_b + k u_b) \end{aligned} \quad (4.3)$$

En esta ecuación se considera el movimiento de una bola más pequeña, u_s de masa m_s , que golpea la parte trasera de la esfera con fluido u_b de masa m_b . Las constantes η y k representan la constante de fricción y la rigidez del contacto respectivamente.

La velocidad de la bola de impacto se relaciona con la fuerza máxima en el sensor como $F_m \sim v_s^{6/5}$ y la duración del impacto $\tau \sim v_s^{-1/5}$ [6], en el caso del contacto de Hertz. Estas relaciones se comprobarán realizando experimentos de control sin fluido. Luego, estos servirán para distinguir el efecto del fluido en el contacto.

4.2.2. Montaje experimental

El montaje mostrado en la figura (4.4) está compuesto de un soporte fabricado en duraluminio, que sostiene una bola de 26 [mm] de diámetro mediante dos hilos de nylon. El soporte está fabricado de tal manera que la bola queda alineada al centro del sensor plano fijo al soporte vertical. La bola de impacto (de 8 [mm] de diámetro) cae desde una altura controlada y golpea libre a la esfera más grande. Esto permite controlar la fuerza del impacto y se obtiene un rango dinámico comprendido entre 0 y 60 [N].

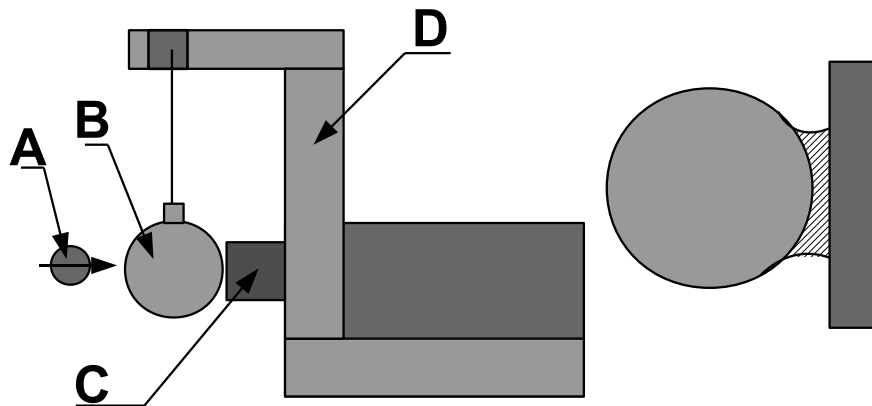


Figura 4.4: Montaje experimental: Un soporte (D) sujeta una esfera de 26 [mm] de diámetro con un hilo de nylon (B). El choque es producido con una bola de impacto de 8 [mm] de diámetro (A) y es registrado mediante el uso de un sensor de fuerza (C). En el contacto entre el sensor y la bola se coloca una gota de fluido. También entre éstos, se fija el interruptor eléctrico no mostrado en este diagrama

Siguiendo el mismo protocolo que en el experimento de la sección anterior (4.1), se coloca una pequeña gota de aceite en el contacto entre la bola y el sensor, esto corresponde al 0,01 % del volumen de la bola. Luego, se presiona suavemente la bola contra el plano para asegurar que la lámina de fluido sea delgada y que el experimento sea repetible.

En este montaje se ha agregado un interruptor eléctrico similar al usado en el experimento de localización. Este interruptor permite saber si hay contacto mecánico entre la esfera y el plano del sensor. De la misma manera que en experimentos anteriores, el estado *arriba* del interruptor indica que se ha establecido el contacto mecánico.

4.2.3. Mediciones experimentales

Las mediciones que se muestran en la figura (4.5) muestran la evolución temporal de la fuerza en el contacto para impactos de diferentes amplitudes. También se puede observar el estado del interruptor en el contacto. Las líneas sólidas corresponden a los experimentos con fluido, la línea a segmentos cortos representa a la simulación de la ecuación (4.1) y la línea de segmentos largos corresponde al experimento con el contacto sin fluido, usando un impacto de la misma amplitud.

En los datos se observa que para impactos de baja intensidad, la fuerza en el contacto oscila dando evidencia del comportamiento elástico del fluido. Con el aumento de la fuerza en el impacto, la amplitud de estas oscilaciones disminuye sistemáticamente hasta transformarse en una relajación viscosa⁴. Es claro que las simulaciones sólo capturan el comportamiento del fluido cuando el impacto es suficientemente suave de manera que el sistema se encuentra en el régimen lineal. A mayores amplitudes se puede observar una ruptura en la curva de fuerza que corresponde al momento en que se rompe el contacto mecánico entre el sensor y la bola. La discontinuidad en la señal de fuerza implica que el fluido recurre a otro tipo de mecanismo, no necesariamente lineal, para relajar la presión aplicada.

A continuación, se realiza el mismo conjunto de experimentos usando *Rhodorsil 5000* y las ecuaciones (4.3) como modelo para comparar.

⁴El sistema transita desde una oscilación sub-amortiguada hasta un sistema sobre-amortiguado

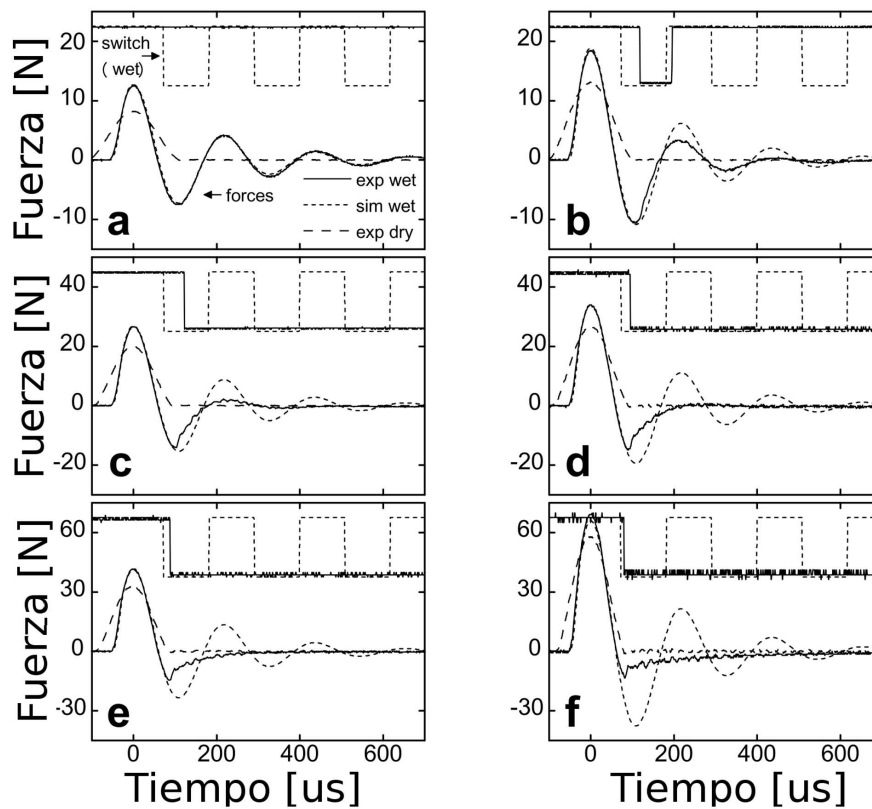


Figura 4.5: Señales experimentales típicas y simulaciones usando el modelo de Herbold. Fluido: *Sylgard 184*

Esta vez, se puede ver que el modelo concuerda con las mediciones, sin embargo, no es capaz de reproducir las oscilaciones que se producen a bajas amplitudes de impacto.

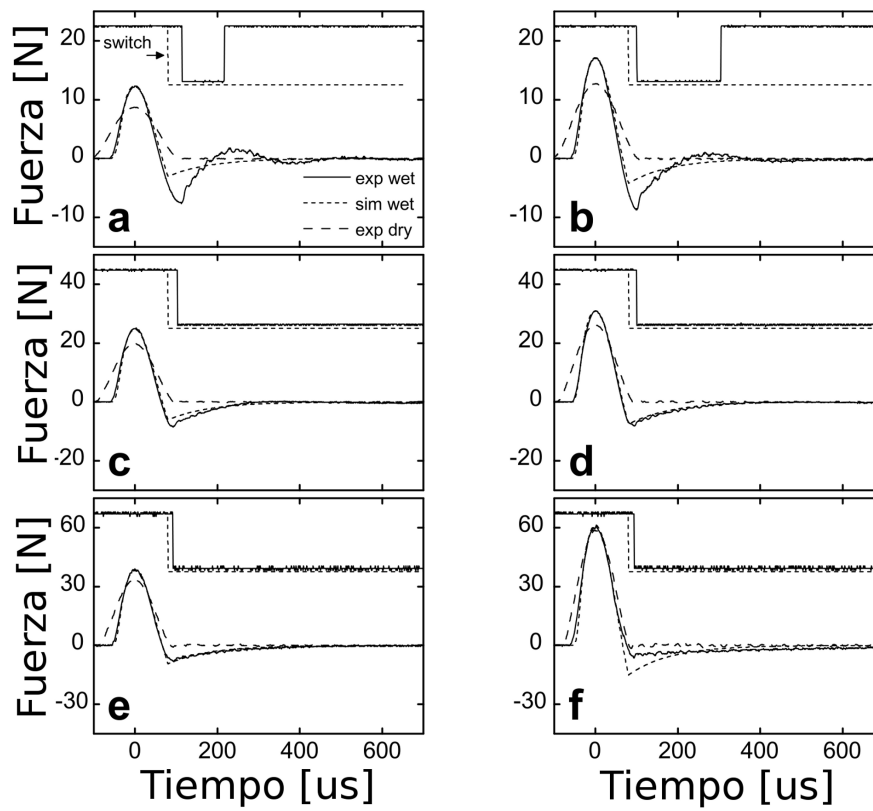


Figura 4.6: Señales experimentales típicas y simulaciones usando el modelo propuesto por la ecuación (4.3). Fluido: *Rhodorsil 500*

4.2.4. Resultados

Es posible observar que la dinámica de un contacto con fluido es significativamente diferente al caso de contacto seco. En la figura (4.7) se muestra que la fuerza máxima registrada por el sensor crece linealmente con la velocidad de impacto para el caso con fluido, mientras que en los experimentos con contacto seco se verifica la relación $F_m \sim v_s^{6/5}$. De la misma manera, la duración del pulso a media altura, sigue la ley esperada para el caso sin fluido, mientras que para los distintos fluidos utilizados no varía en el rango de fuerzas usadas en este experimento.

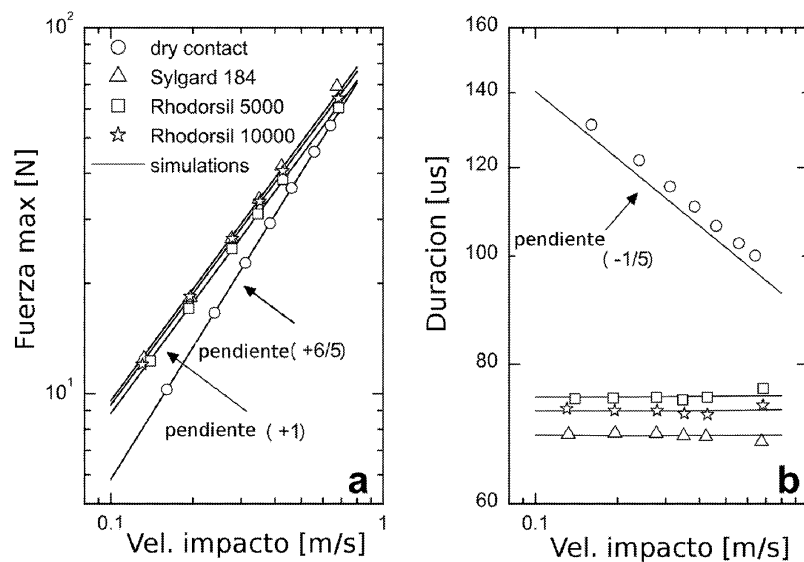


Figura 4.7: Resultados experimentales: Fuerza máxima y duración a media altura, en función de la velocidad de la bola de impacto. Se observa la diferencia entre el comportamiento del contacto seco y el contacto con fluido. Además se verifica experimentalmente las relaciones conocidas para el contacto de Hertz.

De cada conjunto de datos analizados se obtiene un par único de constantes (η, k) mediante el ajuste de las señales obtenidas. La figura (4.8) muestra los resultados obtenidos de los ajustes, tanto en la etapa de compresión del contacto como en la relajación de éste.

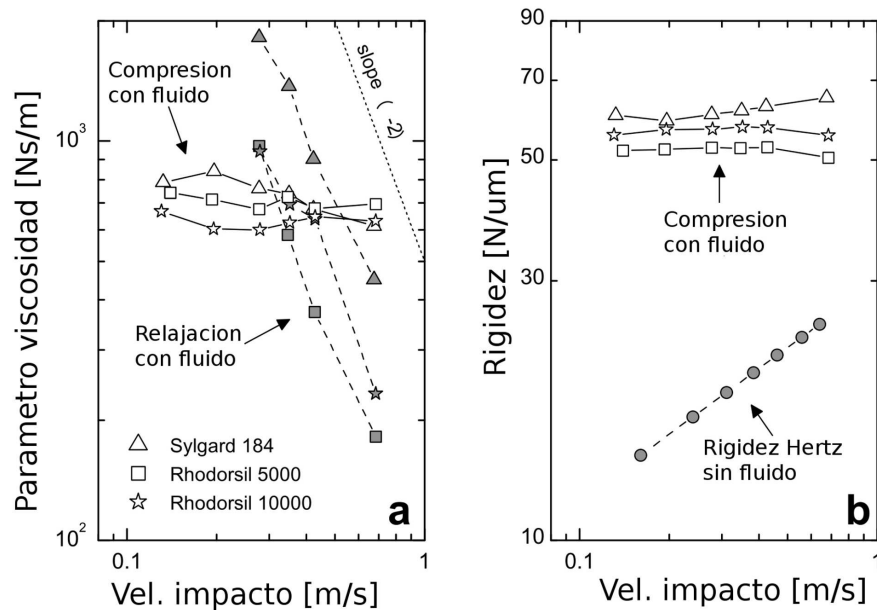


Figura 4.8: Resultados experimentales: Se muestra la variación de los parámetros η y k del modelo (4.3) en función de la velocidad de la esfera de impacto.

La figura (4.8.a) muestra que durante la compresión del contacto, el parámetro de viscosidad del modelo se mantiene constante, sin embargo, durante la relajación éste parámetro disminuye siguiendo el comportamiento de reofluidificante del aceite. La constante elástica obtenida de los ajustes, muestra el comportamiento que se esperaba de la sección anterior. El caso con fluido es, considerablemente, más rígido que el contacto de Hertz. Sin embargo, en estos experimentos no se registra variación de la rigidez del contacto con la velocidad de impacto, esto puede deberse a que el contacto se encuentra saturado de fluido y cualquier cambio en la constante elástica es compensada por la gran cantidad de fluido.

4.2.5. Conclusiones

En esta sección se ha mostrado experimentalmente que la dinámica de un contacto con fluido es significativamente diferente a aquella descrita por la teoría elástica de Hertz. Las mediciones de fuerza realizadas para el contacto con fluido muestran que éste tiene una dinámica que depende de la amplitud del impacto y que además se observa que el sistemas experimental verifica las relaciones conocidas para el contacto de Hertz en el caso sin fluido.

La determinación de las constantes η y k relacionadas a la viscosidad y la elasticidad del contacto en presencia del fluido, propuestas en el modelo (4.3), muestran que el contacto es significativamente mas rígido cuando hay fluido. Además, el parámetro de viscosidad decrece con el aumento de la amplitud de impacto. Esto indica que el fluido puede estar en un régimen no-lineal o refluidificante donde la viscosidad disminuye con la tasa de cizallamiento aplicada.

Para determinar si el fluido realmente está en el régimen no-lineal, es necesario tener una estimación de la tasa de cizallamiento a la que se somete el fluido. Para ello se diseña un montaje complementario al presentado en esta sección. Este nuevo montaje incluye un vibrómetro láser capaz de medir la velocidad de la esfera de 26 [mm] durante el impacto con el plano del sensor. Los resultados y los detalles del procedimiento experimental se muestran en el apéndice (B).

Los resultados de los experimentos realizados con este nuevo montaje, muestran que efectivamente la tasa de cizallamiento a la que está sujeto el fluido durante la relajación corresponden al régimen no-lineal y es posible ubicar estas viscosidades en la curva dada por el fabricante de los fluidos [34]. Debido a que el vibrometro sólo permite la medición de la velocidad, no se tiene acceso a la distancia inicial entre la esfera y el plano, lo cual impide controlar la tasa de cizallamiento.

4.3. Reología de un contacto con fluido intersticial

4.3.1. Motivación

Los experimentos de la sección anterior entregan un buen panorama sobre los efectos macroscópicos que ocurren durante la compresión y relajación del contacto con fluido viscoso intersticial. Además, queda claro que el fluido domina la dinámica del contacto. Sin embargo, no permiten tener acceso a la variable natural para este tipo de sistemas, la tasa de cizallamiento⁵ $\dot{\gamma} \sim \dot{h}/h$.

Para completar la descripción realizada en las dos secciones anteriores, se utilizará el montaje experimental mostrado en la sección (3.3.1). Esta vez, se realizará un barrido en distancias, determinando el punto de contacto entre el plano móvil y la superficie curva del sensor de fuerza para determinar el punto $h = 0$. Usando el mismo protocolo de la sección de contacto seco, se impone una deformación estática sobre la cerámica piezoeléctrica y se produce una oscilación de pequeña amplitud alrededor de ésta. De esta forma, se impone una deformación controlada $h(t) = h_0 + \tilde{h} \cos(\omega_0 t)$ sobre una capa de fluido de espesor h_0 , permitiendo determinar la tasa de cizallamiento en todo momento.

La dinámica dada por la teoría lubricación mostrada en la sección (1.4.2), es bien conocida en el campo de la tribología [35], en ésta se distinguen: un régimen de lubricación completa, donde el espacio entre los sólidos se llena completamente de fluido y las tasas de cizallamiento impuestas sobre el fluido, son suficientes para mantener los esfuerzos proporcionales a las tasas de deformación (régimen lineal). Un segundo comportamiento intermedio, donde el fluido se puede comportar como un fluido no-Newtoniano y variar su viscosidad en función de la carga aplicada y finalmente, el régimen elasto-hidrodinámico donde el campo de presiones que se genera sobre el fluido, es suficiente para generar deformaciones locales sobre las

⁵Según la estimación hecha por Oswald [8]

superficies de los cuerpos sólidos.

4.3.2. Montaje experimental

El dispositivo experimental será el mismo que se ha descrito en la sección (3.3.1), sin embargo, en estos experimentos, se utilizará para imponer una separación entre el cabezal esférico y el plano de la cerámica piezoeléctrica. La figura (4.9) muestra los detalles del montaje utilizado.

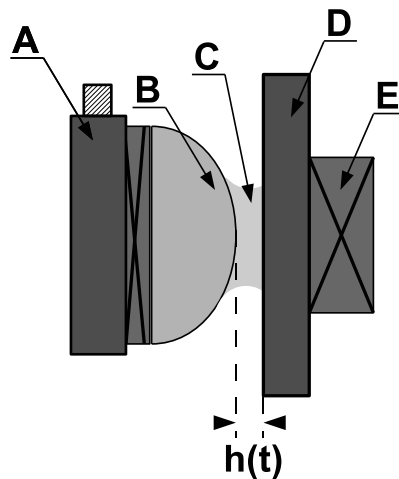


Figura 4.9: Montaje experimental: El fluido intersticial (C), se coloca entre el plano (D) de la cerámica piezoeléctrica (E) y el cabezal esférico (B) del sensor de fuerza (A). Usando la cerámica, se impone una distancia entre los elementos, de la forma $h(t) = h_0 + \tilde{h} \cos(\omega_0 t)$.

4.3.3. Mediciones experimentales

La figura (4.10) muestra dos señales típicas registradas, la señal de la izquierda corresponde a un espesor de fluido del orden de la amplitud de las oscilaciones mientras que el de la derecha, corresponde a un espesor mayor.

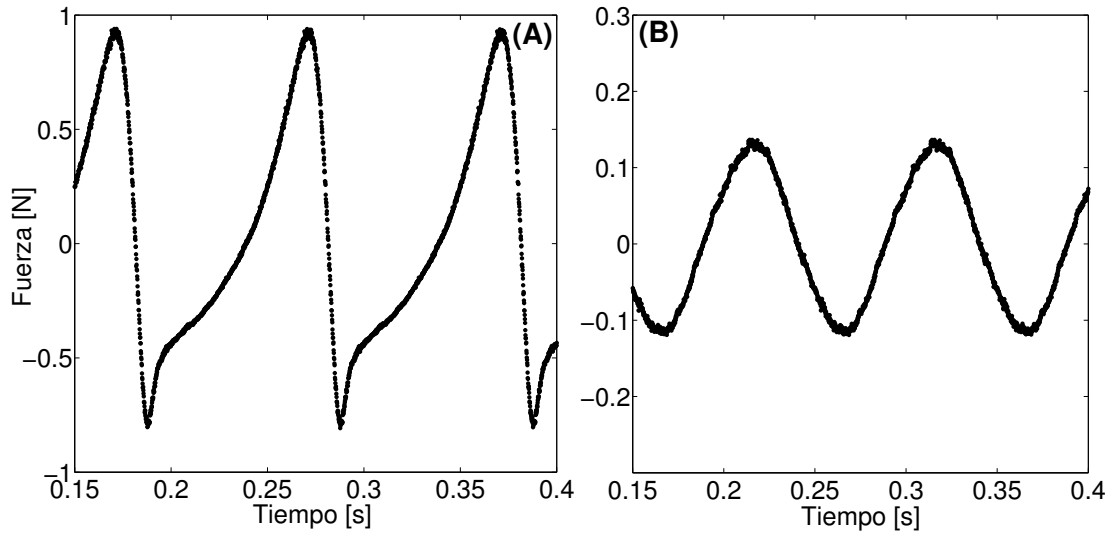


Figura 4.10: Señales típicas de fuerza en función de tiempo para dos espesores diferentes. **(A)** Corresponde a un espesor menor al espesor crítico. **(B)** Espesor mayor al espesor crítico

Dada la forma del movimiento impuesto con la cerámica, se puede estimar la tasa de cizallamiento⁶ como:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{\dot{h}}{h} \\ &= \frac{\omega_0 \tilde{h} \cos(\omega_0 t)}{h_0 + \tilde{h} \sin(\omega_0 t)}\end{aligned}$$

En el límite de gran espesor ($h_0 \gg \tilde{h}$), se obtiene $\dot{\gamma} \approx (\omega_0 \tilde{h}/h_0) \cos(\omega_0 t)$. En el caso contrario, cuando ($h_0 \sim \tilde{h}$) se tiene un término proporcional a $\tan(\omega_0 t)$. Se puede observar en la figura (4.10) que la dependencia temporal de las señales experimentales se cumple en ambos límites.

⁶La fase relativa de la fuerza con respecto a la deformación es independiente de la adquisición, sin embargo, debe determinarse al momento de seleccionar la fase asignada a la deformación.

4.3.4. Resultados

En la figura (4.11), se muestra la medición del máximo de la componente fundamental en función del espesor h_0 de la capa de fluido. Las líneas solidas en la figura representan la curva teórica⁷ dada por la ecuación (1.32)

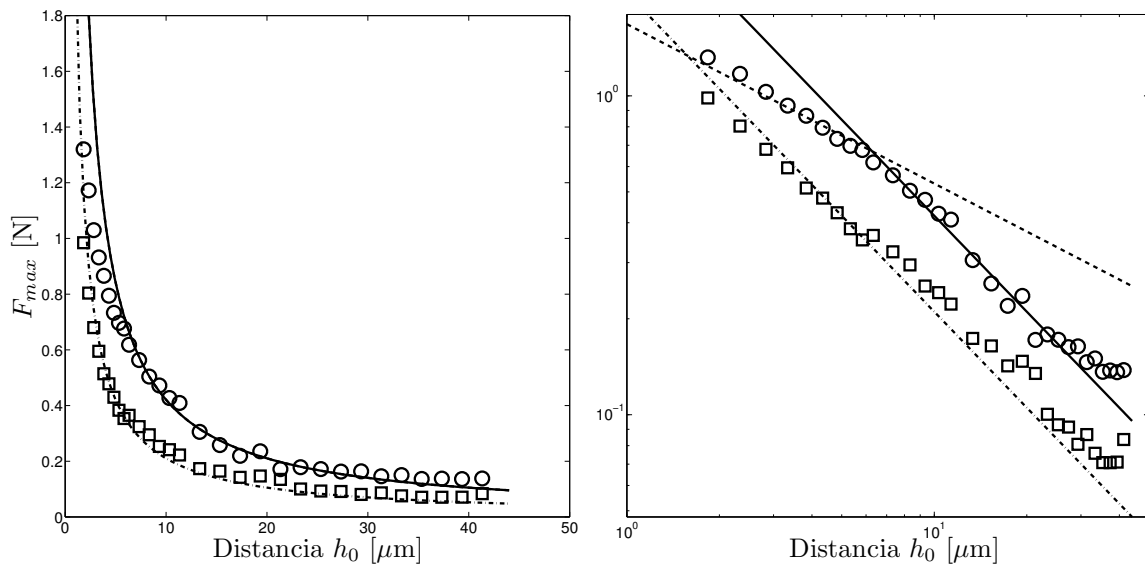


Figura 4.11: Resultados: Fuerza en función de la distancia. Los círculos (\circ) corresponden a experimentos realizados con aceite *Rhodorsil 47v10000*, los cuadros (\square) con *Rhodorsil 47v5000*. La línea sólida corresponde al ajuste de la ecuación (1.32), la línea segmentada es el ajuste de el mismo modelo usando la viscosidad dada por la relación de Carreau según (4.2). La línea a segmentos y punto es el modelo (1.32) para el aceite *Rhodorsil 47v5000*

De la figura es posible observar que existe un buen ajuste de los datos experimentales y el modelo de lubricación presentado en la introducción. El espesor crítico está definido a partir de la tasa de deformación crítica:

$$h_c = \frac{\dot{h}}{\dot{\gamma}_c}$$

⁷Para ajustar esta ecuación se utiliza el volumen como parámetro de ajuste, sin embargo, corresponde a una corrección menor al 5%

En el apéndice (C) se muestra el comportamiento de las componentes en fase y en cuadratura de fase con respecto a la tasa de deformación, relacionadas con la componente elástica y viscosa de la fuerza, respectivamente.

4.3.5. Conclusiones

En esta sección se ha mostrado que el fluido está expuesto a una dinámica que transita desde un comportamiento Newtoniano hacia un régimen no-lineal donde la viscosidad depende de la tasa de deformación.

Las mediciones preliminares mostradas en el apéndice (C) muestran las características viscoelásticas del fluido. Es posible observar que el régimen no-lineal del fluido, donde la componente viscosa de la fuerza decrece con el aumento de la frecuencia, es compatible con los resultados de la figura (4.11). En esta última, se manipula el valor de la tasa de cizallamiento a través del espesor de la capa ($\dot{\gamma}_c \sim \dot{h}/h \sim 1/h_0$), mientras que en los resultados del apéndice (C) se maneja cambiando el valor de frecuencia de oscilación ($\dot{\gamma}_c \sim \dot{h}/h \sim 2\pi f/h_0$). Por lo tanto ambos resultados son compatibles y muestran que el fluido transita hacia el régimen no-lineal durante la aproximación de la esfera hacia el plano.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se han mostrado una serie de evidencias experimentales que justifican el aumento de la velocidad de propagación de ondas en un material granular húmedo, mediante el tránsito del fluido desde el régimen Newtoniano al No-Newtoniano, o no-lineal, durante el proceso de aproximación de las superficies sólidas. Este cambio de comportamiento implica que el fluido, inicialmente considerado como un fluido simple, puramente viscoso, agregará una componente elástica a la fuerza de repulsión en respuesta a la compresión ejercida por los sólidos.

La componente elástica del fluido está directamente relacionada con la microestructura de éste. Los aceites de silicona que se utilizaron en los experimentos descritos están fabricados a partir de cadenas de polímeros. Si el tiempo característico en que se realiza la sollicitación de fuerza sobre el fluido es menor que el tiempo de relajación viscoelástico $\tau = \eta/G$, el fluido no tendrá tiempo para relajar el esfuerzo como un fluido puramente viscoso y, ésto generará un alargamiento en las cadenas de polímero que lo componen, aportando una rigidez extra al problema.

Si bien los fluidos de distintas viscosidades, que fueron utilizados en este trabajo, están compuestos por número enorme de cadenas de polímero, el módulo elástico de cada uno de ellos es similar. Esto se debe a que la viscosidad determinada por el fabricante, se genera mediante la manipulación de las propiedades de polimerización de los monómeros en el fluido, y por lo tanto, se aumenta la viscosidad, no mediante la adición de nuevas cadenas que aumentarían la rigidez del fluido, sino que a través del alargamiento de las cadenas existentes, manteniendo constante la rigidez.

Capítulo 5

Propagación de ondas en materiales granulares 3D

5.1. Validez de la ley de Hertz en 3D

En los capítulos anteriores se han discutidos los mecanismos físicos que determinan la propagación de ondas en materiales granulares unidimensionales. En este tipo de sistemas, la fuerza que se aplica en los contactos entre dos partículas está en la misma línea que la dirección de propagación de la onda. En este caso, todas las esferas del arreglo participan en la propagación.

En materiales con dimensionalidad mayor a 1, incluso en aquellos con estructura perfectamente formada, se pueden encontrar contactos que no participan en la transferencia de la impulsión. Si el sistema presenta una pequeña dispersión de tamaños, se podrán encontrar series de contactos que no están perfectamente alineadas y esto genera la aparición de fuerzas tangenciales. El diagrama mostrado en la figura (5.1) grafica el argumento anterior.

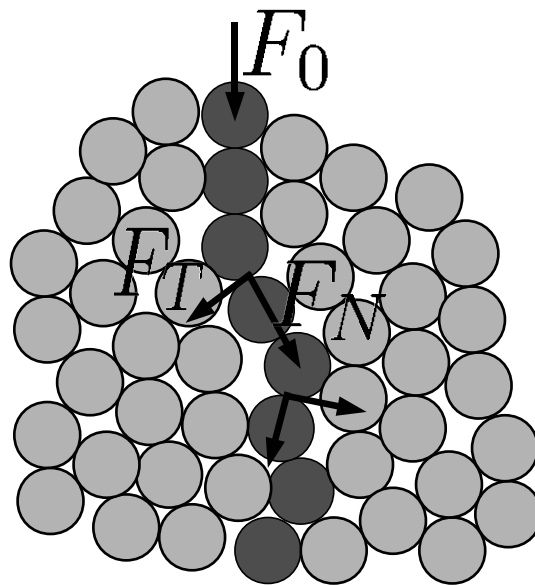


Figura 5.1: Diagrama de contactos activos y descomposición de fuerzas en una cadena no alineada.

Incluso considerando que la interacción local sea Hertziana, se ha comprobado mediante experimentos [36] que el efecto colectivo generado por el desorden de los contactos en un material granular bidimensional, genera un cambio en la propagación de ondas en este material. Estas observaciones han sido replicadas mediante simulaciones numéricas [37]. Todos estos trabajos muestran que la relación que se cumple entre la velocidad de propagación de la onda y la fuerza en las cadenas unidimensionales ($v \sim F_m^{1/6}$) cambia a una ley de potencia con exponente 1/4.

La relación entre la longitud de onda y el tamaño de los granos es determinante en la forma de propagación. Para realizar la deducción de la forma de onda no-lineal presentada en la introducción, se impone el desarrollo de longitud de onda larga. Esto implica que la longitud de onda es mucho más grande que el tamaño característico de los granos en la cadena. El caso en que ambas longitudes son comparables, fue investigado por Jia [33, 38, 39, 40] en sistemas granulares secos y con fluido intersticial. De estos trabajos se puede concluir que cuando el tamaño de las partículas es comparable a la longitud de onda, el efecto generado por el desorden se ve acentuado y se refleja en la observación de dos componentes de la onda que se propaga en el granular. Una componente coherente de baja frecuencia, relacionada a la respuesta colectiva del medio efectivo a la impulsión, seguida por una larga cola de ondas de mayor frecuencia, ligadas a las variaciones locales del material a escala de los granos.

5.2. Condiciones de borde y experimentos anteriores

Los experimentos clásicos realizados para estudiar la propagación de ondas en un material granular tridimensional, consideran un recipiente de paredes rígidas, lleno de partículas. Estos sistemas se conectan en un modo de *entrada/salida* donde una excitación se introduce por un lado del recipiente y se mide una señal de salida, por el lado contrario. Así Liu y Nagel [41] utilizan una placa plana, conectada a un vibrador, dentro de un recipiente rectangular para introducir una excitación que luego es detectada en diferentes lugares del material, usando un acelerómetro de tamaño similar a un grano. Los experimentos de Jia se valen de un recipiente cilíndrico con transductores de ultrasonido en las tapas, como en la figura (5.2). Ambos montajes están sujetos a la relación de longitud de onda de la excitación con el tamaño finito del recipiente. Además, el tamaño finito de los recipientes se manifiesta a través de la aparición de líneas de fuerza que apoyan parte del peso (o carga) del material sobre las paredes del contenedor. La presencia de esas cadenas de fuerza puede significar que una que se propague a través de ésta será desviada desde el material hacia la pared y reflejada por ésta de vuelta hacia el material, convertida en una onda cuyas propiedades sólo son resultado del proceso de reflexión.

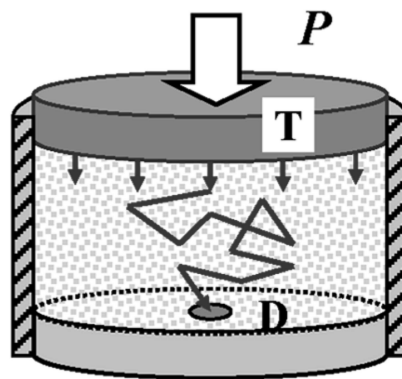


Figura 5.2: Diagrama de montaje usado por Jia en [33].

5.3. Desarrollo experimental

5.3.1. Montaje experimental

La figura (5.3) muestra un diagrama del dispositivo experimental desarrollado. Está diseñado de manera que una excitación incidente cruza el material granular y es detectado en un sensor de fuerza piezoeléctrico acoplado a una pared rígida. El material granular está contenido dentro de un recipiente elástico de gran volumen, conectado a una bomba de vacío. Este sistema, permite controlar la presión hidrostática sobre el material mediante el uso de llaves de paso que regulan el flujo de aire desde y hacia el contenedor. El rango dinámico capaz de explorar este sistema, está comprendido entre 0 y 1 [atm].

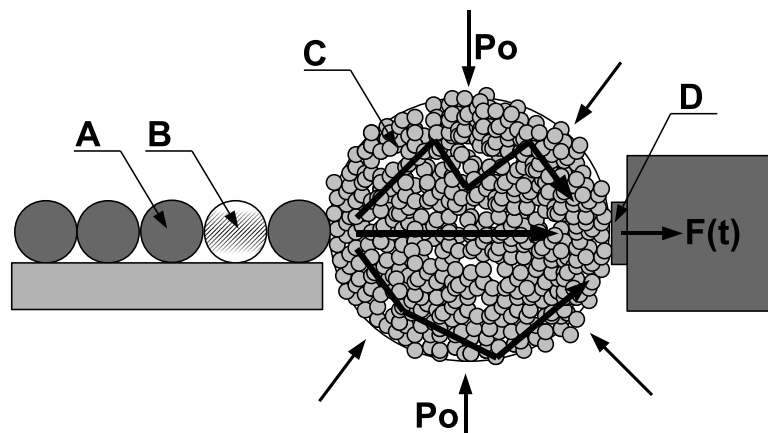


Figura 5.3: Montaje Experimental: Una cadena monodispersa (A) de esferas de acero, de diámetro $\phi = 26$ [mm], se acopla a un recipiente elástico que contiene esferas de vidrio de 5 [mm] de diámetro (C). Se inicia un impulso en el extremo libre de la cadena monodispersa, el cual, es registrado por el sensor-bola (B), antes de ingresar al recipiente y, a su llegada al extremo contrario usando un sensor de fuerza dinámico acoplado a una pared rígida (D).

Las paredes elásticas del contenedor, permiten que las partículas puedan desplazarse hacia afuera de contenedor (si pueden contrarrestar el efecto de la

presión) y así impedir la formación de cadenas de fuerza apoyadas en las paredes del recipiente y que reflejen la onda hacia el interior de éste.

5.3.2. Mediciones preliminares

La figura (5.4) muestra la señal de fuerza obtenida para dos configuraciones experimentales similares. En la fila superior se ven las señales a la entrada (A.1) y salida (B.1) del recipiente de granos, cuando esta sometido a una baja diferencia de presión. Se puede observar que la amplitud del pulso disminuye considerablemente, además, la señal a la salida contiene una oscilación de muy baja frecuencia, que no corresponde a la frecuencia característica del pulso incidente. En el caso de las figuras (A.2 y B.2) se observa el mismo experimento, realizado bajo mayor diferencia de presión, se observa que la señal contiene una oscilación de baja frecuencia, diferente a la obtenida en el caso anterior y además, se hace más notoria la presencia de oscilaciones de contenido frecuencial similar al del pulso incidente. Estas oscilaciones de menor amplitud, deben corresponder a la onda que se propaga a través del material, mientras que la oscilación de menor frecuencia está relacionada a una respuesta del sistema que resulta del acoplamiento de los granos y el recipiente elástico.

Debido a que el sistema de adquisición disponible en esta etapa, permite registrar solo una de las señales con la resolución temporal adecuada, se pierde información sobre la otra. Se planea reemplazar este sistema de adquisición para proseguir con la medición de los parámetros relevantes en este experimento.

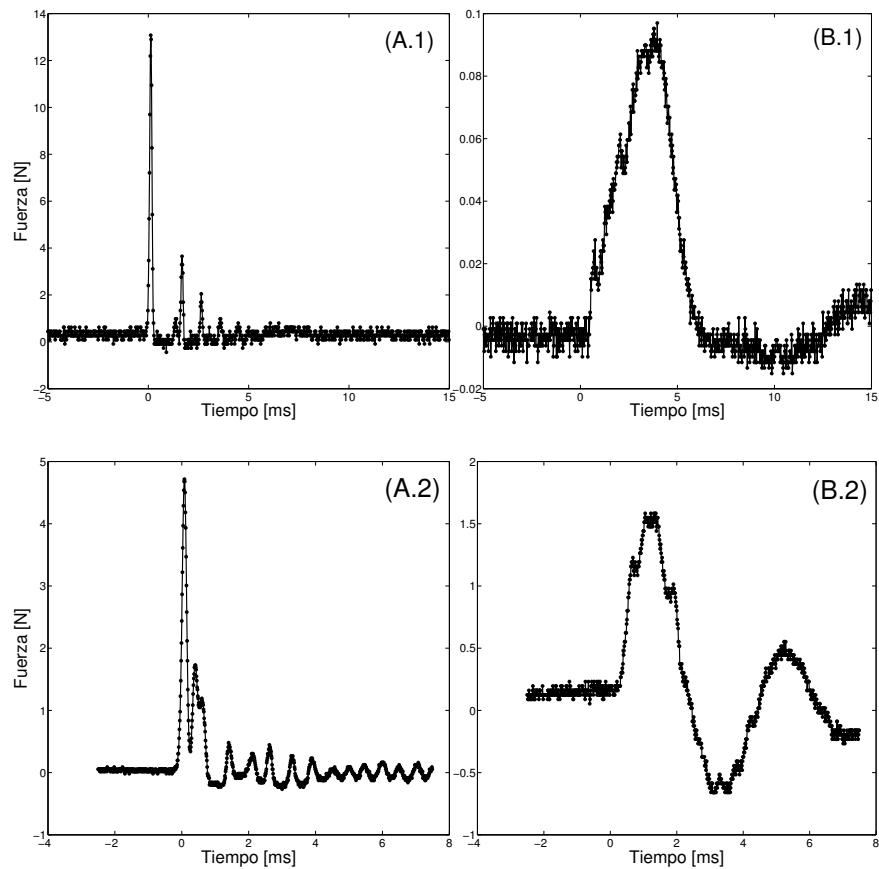


Figura 5.4: Señales experimentales de la fuerza en función del tiempo, la columna **A** corresponde a la fuerza registrada en el sensor-bola, mientras que la columna **B**, muestra la fuerza medida en el sensor acoplado a la pared rígida. La fila superior corresponde a un experimento hecho con el recipiente a presión atmosférica ($\Delta P = 0$ [atm]), la fila inferior corresponde al sistema sometido a la presión máxima posible con el equipo de vacío ($\Delta P \approx 0,9$ [atm]).

Capítulo 6

Conclusiones generales y perspectivas

Los trabajos experimentales realizados en esta tesis, muestran que la compleja dinámica involucrada en la propagación de ondas en materiales granulares, puede ser analizada realizando simples abstracciones que permiten asociar los mecanismos que ocurren a nivel de un contacto, con el comportamiento colectivo de un conjunto de granos.

En la primera parte de este trabajo se estudio la propagación de ondas en un material granular unidimensional y se cuantificaron los mecanismos responsables de la disipación de energía en el proceso de propagación. Se mostró que el roce entre la superficie que soporta los granos y el comportamiento viscoelástico de éstos, son los principales responsables de la disipación. Previo a este trabajo, se intentó realizar una cadena de péndulos suspendidos con hilos delgados para minimizar el efecto del roce, sin embargo la alineación del sistema no permitía que los experimentos fuesen poco repetibles. Por esta razón se optó por el montaje donde las esferas se colocan sobre un soporte plástico y se incluye el efecto del roce. Los experimentos siguientes, comprueban el comportamiento altamente no-lineal de la cadena de esferas en contacto. Se mostró experimentalmente la capacidad que tienen las cadenas de partículas de tamaño decreciente para atenuar la magnitud de un impacto, además, se mostró que la descripción balística es adecuada cuando el tamaño de las esferas decrece suavemente. Finalmente, se utiliza el sistema unidimensional para dar evidencia experimental de la localización de la energía en la vecindad de una partícula intrusa en una cadena monodispersa. Mediante un análisis multi-escalas, fue posible capturar la dependencia de la frecuencia de las oscilaciones de la impureza con su tamaño y la amplitud del pulso incidente. Se encontró que el mecanismo natural de excitación de las oscilaciones localizadas usado por el sistema, corresponde a la ruptura del contacto mecánico de la impureza con alguna de las esferas adyacentes.

La descripción macroscópica de la interacción entre granos, según la ley de Hertz, requiere que éstos tengan una superficie suave y homogénea. Sin embargo, los materiales utilizados en estos experimentos, y en las aplicaciones reales en general, distan mucho de cumplir con estas condiciones. Por esto, el tercer capítulo se dedicó a la determinación de la ley de interacción entre un plano liso y una esfera rugosa. Se cuantificó el estado de la superficie de los materiales utilizados mediante el uso de un perfilómetro óptico y se midieron las propiedades mecánicas de los materiales de manera independiente, usando las relaciones conocidas para la propagación de ondas de sonido en sólidos. Con estos parámetros conocidos, se determinó que la interacción efectiva entre la superficie rugosa y el plano, corresponde a la misma ley de potencia obtenida por Hertz con un coeficiente numérico menor (contacto más suave) que el esperado por la teoría elástica del contacto.

A la descripción de la propagación de ondas en materiales granulares secos, se agrega evidencia experimental que explica el fenómeno de aumento de la velocidad de propagación de ondas en materiales granulares mojados. Estas observaciones fueron realizadas por otros autores, usando ondas de ultrasonido en materiales granulares tridimensionales húmedos y también en cadenas unidimensionales sumergidas en un fluido viscoso. El trabajo descrito en esta sección muestra que es suficiente con que el fluido ocupe la región de contacto entre esferas para la observación de este fenómeno. Además, mediante el análisis de impactos sobre el contacto lubricado entre una esfera y un plano, se observó un cambio completo de la dinámica del contacto en presencia del fluido. Esta experiencia se complementa con otros dos montajes que permiten evidenciar que el mecanismo responsable del cambio de la velocidad en la cadena, es el aumento de la rigidez del contacto causado porque la dinámica del fluido transita desde un comportamiento Newtoniano hacia uno no-lineal durante la compresión del contacto. Este efecto, pone en evidencia las propiedades viscoelásticas del fluido, las cuales indican que ante una excitación suficientemente rápida, el fluido se comporta efectivamente co-

mo un resorte lineal.

Finalmente, se desarrolla un montaje experimental que permitirá continuar la expansión de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, hacia un material granular tridimensional, ya sea seco o con fluido intersticial. Se discuten las características principales de este montaje y las ventajas que presenta en relación a los usados comúnmente en experimentos de propagación de ondas en materiales granulares. La base de este montaje ya está siendo utilizada para estudiar la emisión de ondas acústicas desde un material granular bajo presión hidroestática, sometido a un test de compresión uniaxial.

Perspectivas

Las descripciones microscópicas de la dinámica del contacto han permitido aclarar los mecanismos de transmisión de energía entre granos, sin embargo aun resta verificar si la disipación viscoelástica de energía cumple las mismas propiedades en la escala de las rugosidades del material. También, el estudio de un contacto con fluido entrega suficiente evidencia experimental para sugerir la aparición de deformaciones elasto-hidrodinámicas de los sólidos debido al campo de presiones generado en el fluido. Finalmente, se pretende hacer uso del montaje propuesto para realizar la caracterización de las ondas que se propagan en un material granular tridimensional sometido a compresión hidroestática. Estas son las proyecciones principales del trabajo presentado.

Apéndice A

Desarrollo multi-escala para oscilaciones localizadas

Se puede escribir la ecuación dinámica del contacto en la impureza como:

$$\ddot{\delta}_i + \ddot{x}_1 = \frac{k}{m} \left(\delta_i^{3/2} - \delta_f^{3/2} \right) \quad (\text{A.1})$$

Donde x_1 es la posición del centro de masa de la impureza, y $\delta_{i(f)}$ son las deformaciones en los extremos de la impureza. Si $\ddot{x}_i \rightarrow 0$ por ser considerada una variable lenta, podemos dividir la dependencia temporal de δ_i en dos escalas de tiempo, la primera se refiere al pulso, \bar{t} , y la otra, sólo a las oscilaciones localizadas, t . Podemos escribir:

$$\delta_i = \delta_i(\bar{t}) + \delta_i(t)$$

$$\delta_f = \delta_f(\bar{t}) + \delta_f(t)$$

Y reemplazando en la ecuación (A.1) :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_i(\bar{t}) + \ddot{\delta}_i(t) &= \frac{k}{m} \left((\delta_i(\bar{t}) + \delta_i(t))^{3/2} - (\delta_f(\bar{t}) + \delta_f(t))^{3/2} \right) \\ &= \frac{k}{m} \delta_i^{3/2}(\bar{t}) \left(1 + \frac{\delta_i(t)}{\delta_i(\bar{t})} \right)^{3/2} - \delta_f^{3/2}(\bar{t}) \left(1 + \frac{\delta_f(t)}{\delta_f(\bar{t})} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Es posible expandir: $(1 + x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \dots$, entonces :

$$\ddot{\delta}_i(\bar{t}) + \ddot{\delta}_i(t) = \frac{k}{m} \left(\delta_i^{3/2}(\bar{t}) + \frac{3}{2} \delta_i^{1/2}(\bar{t}) \delta_i(t) - \delta_f^{3/2}(\bar{t}) - \frac{3}{2} \delta_f^{1/2}(\bar{t}) \delta_f(t) \right) \quad (\text{A.2})$$

Plantemos la hipótesis: $\ddot{\delta}_i(t) \gg \ddot{\delta}_i(\bar{t})$, $\delta_f(\bar{t}) = \delta_i(\bar{t} - \tau)$ y $\delta_i(t) \approx \delta_f(t)$, entonces la ecuación (A.2) resulta:

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_i(t) &= \frac{3k}{2m} \left(\delta_i^{1/2}(\bar{t})\delta_i(t) - \left(\delta_i(\bar{t}) - \tau \frac{\partial \delta_i(\bar{t})}{\partial \bar{t}} \right)^{1/2} \right) \\ &= \frac{3k}{2m} \left(\frac{\tau}{\delta_i^{1/2}(\bar{t})} \frac{\partial \delta_i(\bar{t})}{\partial \bar{t}} \right) \delta_i(t)\end{aligned}$$

Y a la vez, esta ecuación define la frecuencia angular ω como:

$$\omega^2 = \frac{3k}{2m} \left(\frac{\tau}{\delta_i^{1/2}(\bar{t})} \frac{\partial \delta_i(\bar{t})}{\partial \bar{t}} \right) \quad (\text{A.3})$$

$\delta_i(t)$ Puede ser escrita en términos de la fuerza, usando: $F = k(R, r)\delta_i^{3/2}$, y luego, reemplazando esta ecuación en (A.3) :

$$\omega^2 = \tau \frac{k^{2/3}}{m} F^{-2/3} \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} \quad (\text{A.4})$$

Con,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{t}} = \frac{dF}{d\bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}$$

Donde $\bar{x} = \frac{x-vt}{r\sqrt{10}}$, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{t}} = \frac{6v}{r\sqrt{10}} F \left(\frac{1 - \cos^2 \bar{x}}{\cos^2 \bar{x}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

Y reemplazando este resultado en la ecuación (A.4)

$$\omega^2 = \frac{6v\tau}{r\sqrt{10}} \frac{k^{2/3}}{m} F^{1/3} \left(\frac{1 - \cos^2 \bar{x}}{\cos^2 \bar{x}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Usando, $v\tau = 2r$, podemos escribir la ecuación (A.4) como:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12}{\sqrt{10}}} \frac{k^{1/3}}{m^{1/2}} F^{1/6} \left(\frac{1 - \cos^2 \bar{x}}{\cos^2 \bar{x}} \right)^{1/4} \quad (\text{A.7})$$

Y ahora, usando la forma explícita de $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ y $k = \frac{1}{2\theta} \frac{1}{1/R+1/r}$ podemos expresar la frecuencia como una función del radio de la impureza.

$$f = \alpha \left(\frac{r}{R} \right)^{-4/3} F^{1/6} \left(1 + \frac{r}{R} \right)^{-1/6} \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12}{\sqrt{10}}} \frac{1}{(2\theta)^{1/3}} \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho}} R^{-2/3} \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Experimentos en contacto con fluido: Adición de Vibrómetro láser

B.1. Motivación

Los resultados del trabajo realizado en la sección (4.2) indican que el fluido colocado en la región de contacto entre el plano y la esfera puede estar en un régimen no-lineal. Para verificar si esto es efectivo, se modifica el montaje experimental agregando un vibrómetro láser que medirá la velocidad de la bola de 26 [mm] durante la colisión con el sensor de fuerza. Para realizar la medición se debe efectuar un corte sobre la bola, de manera que la bola tenga una superficie plana donde reflejar el láser. Con el objetivo de evitar efectos de rotación por la modificación del centro de masa, se realiza un corte simétrico sobre la esfera (como lo muestra el detalle a la derecha en la figura (B.1))

B.2. Montaje experimental

La medición de la velocidad mediante el uso del vibrómetro láser requiere hacer incidencia normal del rayo láser sobre la superficie plana, creada sobre la esfera. Con el objetivo de aumentar la ganancia de la señal recibida por el modulo decodificador del vibrómetro, se limpia y pule la superficie plana. La medición también es sensible a alineación de la superficie, respecto a la línea definida por el láser, pequeñas rotaciones sobre el eje perpendicular al de incidencia del láser, generan que la señal se pierda y no se pueda registrar la velocidad. Considerando esto, se agrega un microcontrol de rotación en la parte superior del soporte donde se suspende la esfera. Con éste, es posible regular el ángulo de la bola y mejorar la señal recibida en el decodificador.

Tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores, se logran realizar mediciones con, al menos, 70 % de calidad de la señal recibida por el vibrómetro. También es importante mencionar que todos los filtros del decodificador se desactivan para realizar la adquisición de datos. Se opta hacer ésto para evitar la modifi-

cación de las señales adquiridas por los equipos electrónicos.

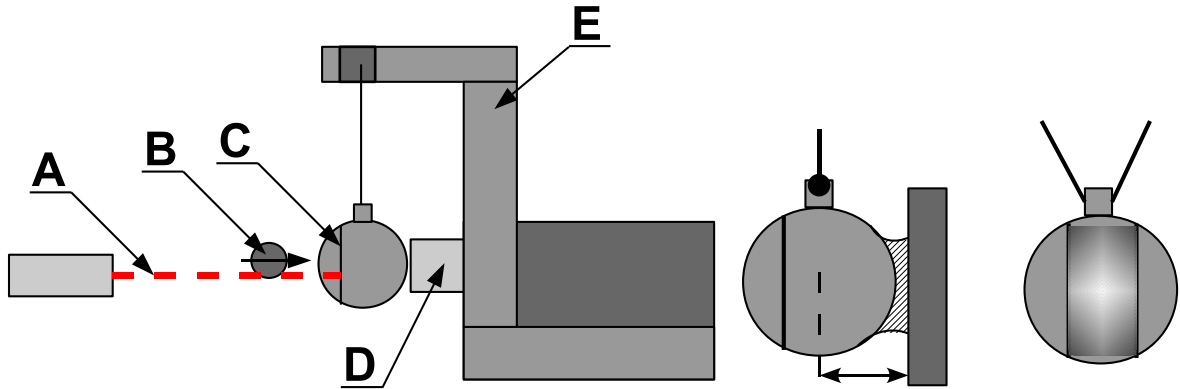


Figura B.1: Montaje experimental: **A:** Vibrómetro láser para medir la velocidad de la bola, **B:** Una bola de impacto de diámetro 8 [mm] golpea una bola cortada **C**, colocada en contacto con un sensor de fuerza, **D**. La bola está colgada de un soporte fabricado a partir de la pared que fija al sensor de fuerza, **E**. **A la derecha**, un detalle de la esfera cortada para reflejar el láser y el menisco de fluido que se forma entre la esfera y el plano del sensor

B.3. Mediciones experimentales

Siguiendo el procedimiento detallado anteriormente para agregar el fluido, se realizan los mismos experimentos descritos en la sección (4.2.3). La figura (B.2) muestra cuatro adquisiciones realizadas sobre el contacto sin fluido con diferentes velocidades de la bola de impacto. Usando las mismas velocidades se adquieren cuatro impactos para el contacto con fluido, las señales adquiridas se muestran en la figura (B.3). En ambos casos se ha integrado numéricamente la velocidad para obtener la deformación del contacto¹.

¹Debido a que sólo se tiene acceso a la velocidad, existe arbitrariedad sobre la elección de la constante de integración.

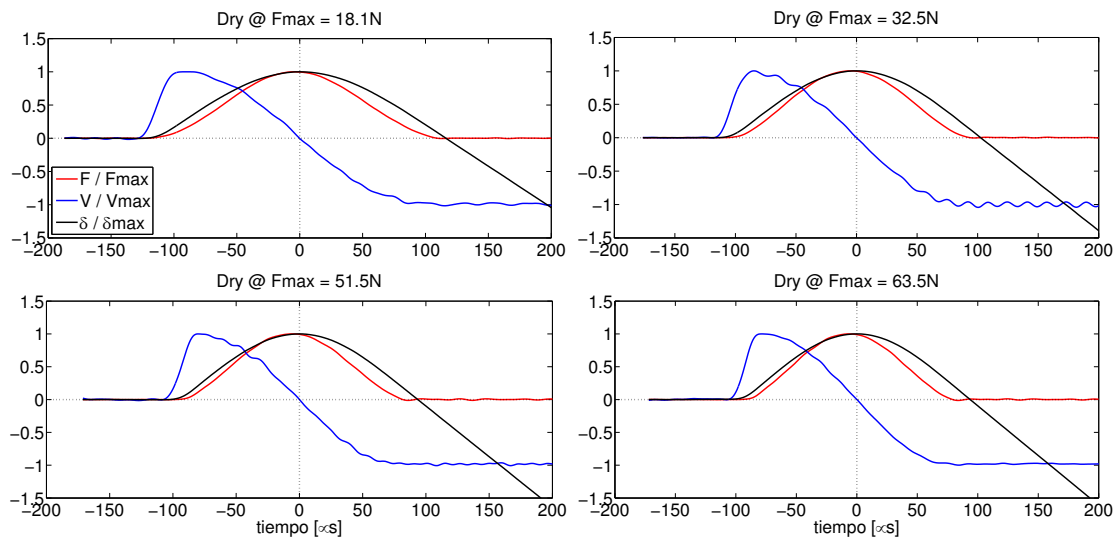


Figura B.2: Señales adquiridas en un contacto seco bajo impacto con distintas velocidades del impactador

En esta figura se puede observar que el momento en que la fuerza llega a a su valor máximo, la velocidad no es nula. Si el sistema fuese puramente elástico no debería existir desfase entre estas señales. Sin embargo, no es posible atribuir este tiempo de desfase sólo a la viscoelásticidad del contacto, debido a que la mediciones se realizan con dos instrumentos diferentes (sensor de fuerza conectado a un acondicionador de señales y un vibrómetro láser conectado al módulo decodificador) parte del desfase puede ser originado por éstos. A pesar de que se debe tener en cuenta esta condición, se observa que el desfase aumenta con la fuerza del impacto, lo que apunta en el sentido de la disipación viscoelástica.

La figura correspondiente al contacto con fluido muestra que, para fuerzas pequeñas el contacto ejerce una *atracción* de la bola hacia el sensor, dada por la parte negativa de la señal de fuerza. Para fuerzas más grandes, sólo se aprecia una relajación viscosa de la fuerza. En el último inserto se pueden observar oscilaciones de pequeña amplitud sobre la señal de relajación de fuerza. Estas pueden corresponder a las oscilaciones libres del sensor de fuerza luego de recibir un im-

pacto, para este caso, de amplitud suficiente para excitar un modo normal de oscilación.

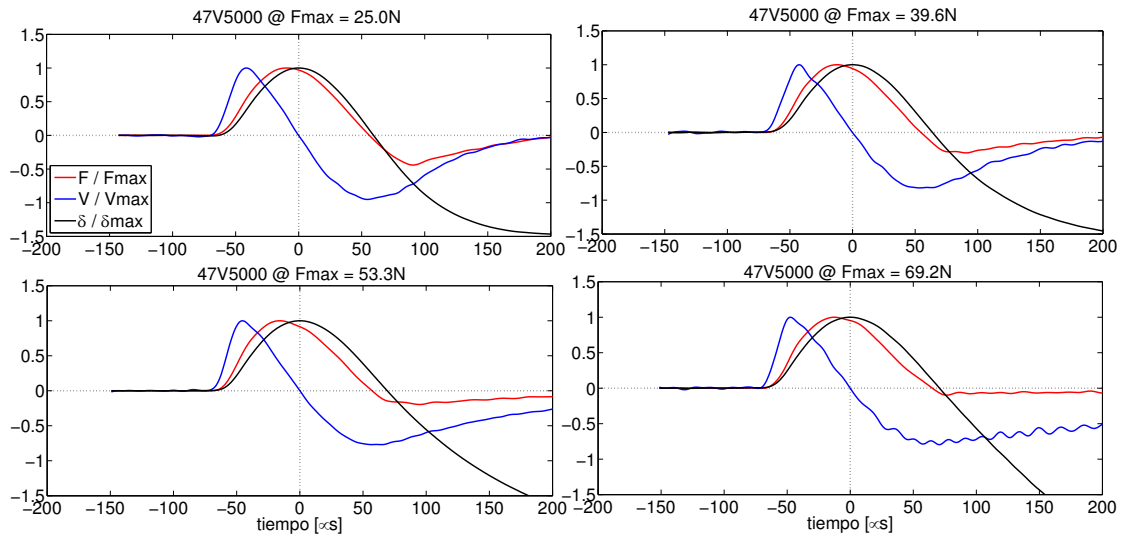


Figura B.3: Señales adquiridas en un contacto con fluido bajo impacto con distintas velocidades del impactador

B.4. Resultados

La figura (B.4) muestra las relaciones fuerza-deformación para los experimentos con fluido. La línea roja continua corresponde a la medición experimental, mientras que la línea segmentada azul es un ajuste realizado con los datos sin fluido usando la ley de Hertz. La figura muestra un cambio evidente en la rigidez y la evolución de la fuerza en el contacto con fluido.

Finalmente, la figura (B.5) muestra las viscosidades de los distintos fluidos utilizados en función de la tasa de cizallamiento estimada. Se puede observar que en todos los casos, los experimentos se realizaron a tasas de cizallamiento mayor al

valor crítico y, por lo tanto, los fluidos se encuentran en el régimen no-Newtoniano².

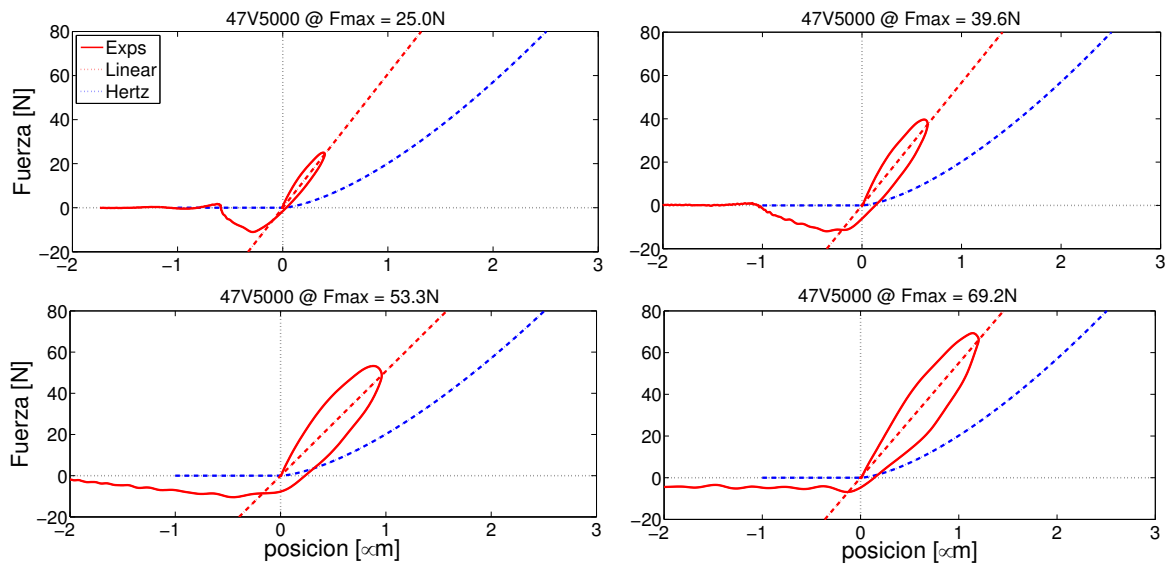


Figura B.4: Comparación de la rigidez del contacto mojado y seco

²En estos fluidos, corresponde a shear-thinning o comportamiento reofluidificante [34].

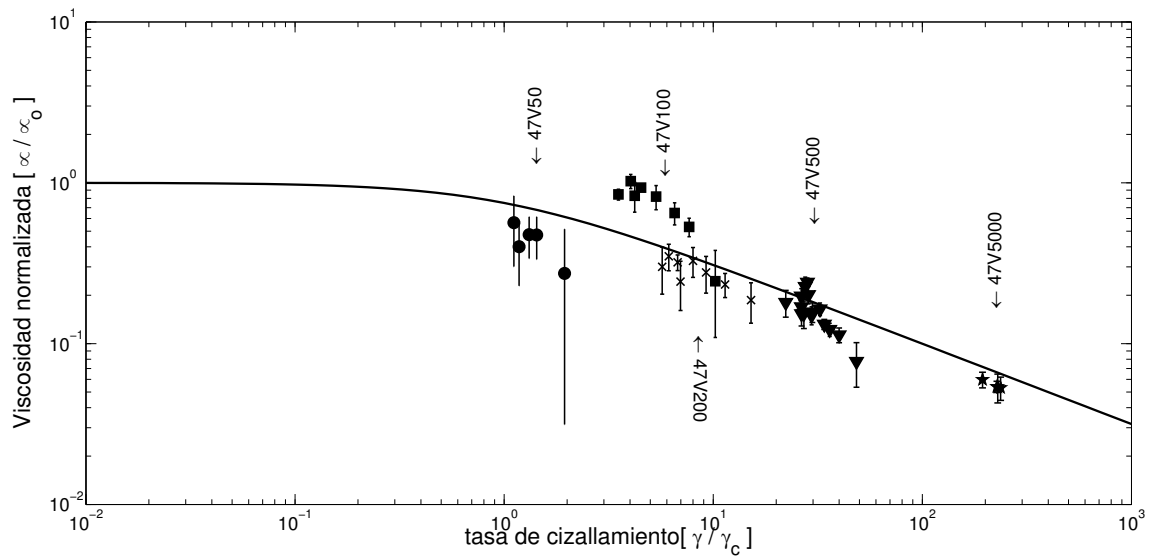


Figura B.5: Resultados: viscosidad estimada

Apéndice C

Reología de fluidos

Mediante el análisis de la fase que existe entre la deformación impuesta y la fuerza media en el sensor, es posible caracterizar la reología del fluido. Para hacer ésto, se impone un espesor suficientemente grande para asegurar que la tasa de cizallamiento se mantiene en un rango donde el fluido es lineal, luego se realiza un barrido en la frecuencia de oscilación del plano.

La figura (C.1) muestra¹ las componentes elástica y viscosa de la fuerza medida. A partir de las relaciones mostradas en la introducción, es posible escribir la fuerza como una parte en fase (y otra en cuadratura de fase) con respecto a la deformación. Estas componentes se relacionan al módulo de conservación y al módulo de pérdida del fluido.

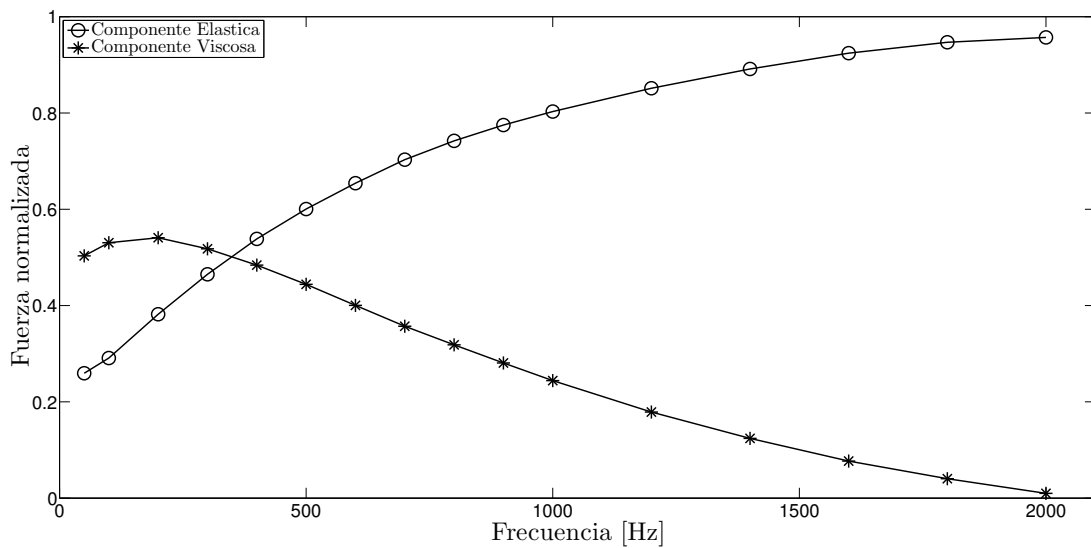


Figura C.1: Componentes elástica (en fase (○)) y viscosa (en cuadratura de fase (*)) de la fuerza medida para un espesor fijo de fluido.

¹Los datos son parte de un estudio experimental de la deformación elasto-hidrodinámica de un contacto lubricado entre una esfera y un plano. El resultado de la figura es preliminar.

Apéndice D

Publicaciones

D.1. Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain.

Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain

Francisco Melo,¹ Stéphane Job,² Francisco Santibanez,¹ and Franco Tapia¹

¹*Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile, and Center for Advanced Interdisciplinary Research in Materials (CIMAT), Avenida Ecuador 3493, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile*

²*SUPMECA, 3 rue Fernand Hainaut, 93407 Saint-Ouen Cedex, France*

(Received 26 December 2005; published 27 April 2006)

We present an experimental study of the mechanical impulse propagation through a horizontal alignment of elastic spheres of progressively decreasing diameter ϕ_n ; namely, a tapered chain. Experimentally, the diameters of spheres which interact via the Hertz potential are selected to keep as close as possible to an exponential decrease, $\phi_{n+1} = (1-q)\phi_n$, where the experimental tapering factor is either $q_1 \approx 5.60\%$ or $q_2 \approx 8.27\%$. In agreement with recent numerical results, an impulse initiated in a monodisperse chain (a chain of identical beads) propagates without shape changes and progressively transfers its energy and momentum to a propagating tail when it further travels in a tapered chain. As a result, the front pulse of this wave decreases in amplitude and accelerates. Both effects are satisfactorily described by the hard-sphere approximation, and basically, the shock mitigation is due to partial transmissions, from one bead to the next, of momentum and energy of the front pulse. In addition when small dissipation is included, better agreement with experiments is found. A close analysis of the loading part of the experimental pulses demonstrates that the front wave adopts a self-similar solution as it propagates in the tapered chain. Finally, our results corroborate the capability of these chains to thermalize propagating impulses and thereby act as shock absorbing devices.

DOI: [10.1103/PhysRevE.73.041305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.041305)

PACS number(s): 83.80.Fg, 05.45.-a, 62.50.+p

I. INTRODUCTION

Granular materials are useful for shock protection, and cast iron shots are a well-known example of a system effectively used in the damping of contact explosive loading [1]. Recent numerical results have demonstrated that new features can still be developed, such as impulse thermalization [2–5] or shock confinement [6] in one-dimensional granular media. Indeed, the propagation of an impulse through a chain of monodisperse elastic spheres exhibits interesting nonlinear physics [1]. When the spheres in the chain barely touch one another, the energy of an impulse initiated at one end of the chain propagates as a solitary-wave of well-defined velocity and width, as described by the pioneering work of Nesterenko [1,7–10] and as confirmed later by other authors [11–14]. When small dissipative effects such as viscoelastic restitution or solid friction (mainly thwarted rotation between beads and friction between beads and walls of the setup) are taken into account the solitary-wave only attenuates in amplitude and spreads [14,15]. Under static loading, the chain still supports solitary-wave solutions [1,11,13], in addition to dispersive linear sound waves of weak amplitudes. In the presence of a gradient of static loading (e.g., a vertical chain under gravity), it has been proved that propagation of an impulse is controlled by dispersion and extra dispersion introduces a coupling between quasisolitary and oscillatory propagating modes [16–19]. However, dispersion does not allow the possibility of distributing the energy of a solitary-wave uniformly, neither throughout a finite length vertical chain [17] nor in a horizontal linear chain [13]. In regard to energy propagation in the absence of dispersion, Pöschel and Brilliantov [15] considered a one-dimensional chain of spheres with a restitution coefficient that was velocity independent. By keeping constant the size of the beads at both ends of the chain they showed that the energy transmission is

optimal when the mass distribution is an exponentially decreasing function. Similarly, Nesterenko and co-worker have shown [1,7,8] that the momentum of a pulse is totally transmitted when it passes through a sharp decrease of bead size and is partially reflected in the reverse case.

Here, we investigate experimentally the effect of shock mitigation occurring in an unloaded chain of exponentially decreasing bead size. This effect, recently predicted by Sen and co-workers [2–5], is due to the progressive delay on the transmission of a fraction of the energy of the pulse when propagating in a sequence of increasing stiffness contacts defined by the sequence of smaller beads. Consistently, excepting the reflection of the pulse at the rigid end of the chain, there is no detectable reflected wave propagating backward while the pulse propagates down toward the smaller extremity of the tapered chain. Experimental evidence of this effect has been observed by Nakagawa and co-workers [20], when an impulse is introduced in a tapered chain in which the beads are initially barely in contact and the chain is let to expand after the impulse propagation, the last beads being initially at some distance of a wall sensor. This configuration is suitable to measure the speed of beads by imaging techniques and the force due to the ejection of the last bead colliding with a wall sensor. In our experiment the beads always keep in contact, which allows us to adopt a complementary point of view and focus on the shape and speed of the wave instead of that of beads. The main advantage is that the wave picture is better realized and energy transfer from the front pulse to a propagating tail is fully visualized.

This article is organized as follows. In Sec. II, we describe our main experimental considerations and present force measurements acquired in two different chains, whose tapering factor is either $q_1 \approx 5.60\%$ or $q_2 \approx 8.27\%$. Similarly, the acceleration of the front pulse is characterized as it propagates

TABLE I. Bead diameters.

Chain	Bead n	01–16	17	18	19	20	21	22	23
1	ϕ_n [mm]	26.00	24.00	23.00	22.00	21.00	20.00	19.00	18.00
2	ϕ_n [mm]	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.65	16.00	14.00
Chain	Bead n	24	25	26	27	28	29	30	
1	ϕ_n [mm]	16.65	16.00	15.00	14.00	13.00	12.00	11.00	
2	ϕ_n [mm]	13.00	12.00	11.00	10.00	9.00			

toward the decreasing end of the chain. Effects of misalignments and tapering factor variations are investigated as well. Section III is devoted to a brief summary of the main theoretical aspects and discussion. We show that the ballistic approximation in conjunction with the effect of small restitution coefficient is well suited to capture the acceleration and decrease of the force amplitude of a pulse traveling through the tapered chain.

II. EXPERIMENTAL OBSERVATIONS

Beads are high-carbon chrome-hardened AISI 52100 steel roll bearing. The density is $\rho=7780$ kg/m³, Young's modulus is $Y=203\pm 4$ GPa, the Poisson ratio is $\nu=0.3$, and the yield stress is $\sigma_Y\approx 2$ GPa, [21]. We have carefully checked that the bead deformation always keeps elastic behavior in all our experiments. Assuming that the contact surface between two beads of radius R is a disk of area $A=2\pi(\theta RF)^{2/3}$ (where θ is defined in III) [22], we estimate that yield stress occurs for a compression force greater or equal to $F_Y\approx 3790$ N, which corresponds to an overlap $\delta_Y\approx 46$ μ m, for beads of 26 mm diameter. This threshold is smaller for smaller beads.

A solitary-wave is initiated in a monodisperse chain made of $n_0=16$ beads whose diameter is $\phi_0=26$ mm by applying a short impact with constant velocity (over all experiments) of a smaller bead ($\phi_i=8$ mm) at one of its extremities [14]. This impulse then reaches a tapered chain composed of beads whose diameters ϕ_n progressively decrease. More precisely, two tapered chains are implemented, whose intermediate diameters ϕ_n are given in Table I. The tapering factor is determined as $q=1-\langle(\phi_n/\phi_0)^{1/(n-n_0)}\rangle_{n>n_0}$. As everywhere in this paper, error bars refer to the unbiased sample standard deviation [confidence interval (CI) $\approx 68\%$]. The first chain provides a tapering factor of $q_1=(5.60\pm 0.67)\%$, and the second one provides a tapering factor of $q_2=(8.27\pm 0.31)\%$.

Beads of the monodisperse chain are aligned on a rigid Plexiglas track over which beads are allowed to roll with little friction. Beads of the tapered chain are located on a special stepped track composed of a collection of short tracks of length nearly the bead diameters, designed in such a way that the tapered chain is automatically aligned on the axis of the monodisperse chain. The whole rigid structure serving for bead alignment is fixed on an optical table, which guarantees a misalignment—i.e., off-center error—lower than 2% between the smallest consecutive beads and lower than 0.1% for the biggest beads considered here. It appears that repeat-

ability of measurements is not so much affected by misalignments if the beads are not allowed to move laterally. This effect is quantified further in the text by introducing a controlled off-center displacement of the beads.

A piezoelectric dynamic impulse sensor (PCB 208A11 with sensitivity 112.40 mV/N) located at the end of the chain provides the force at the rigid end. This sensor has a flat cap made of the same material as the beads. Forces inside the monodisperse chain are monitored by a flat dynamic impulse sensor (PCB 200B02 with sensitivity 11.24 mV/N) that is inserted inside one of the beads, cut in two parts. The total mass of the bead sensor system has been compensated to match the mass of an original bead. This system allows achieving nonintrusive force measurement by preserving both contact and inertial properties of the bead-sensor system. The stiffness of the sensor $k_s=1.9$ kN/ μ m being greater than the stiffness of the Hertzian contact ($k_s\gg k_H\propto\kappa\delta^{3/2}$; see Sec. III for definitions of κ and δ), the coupling between the chain and sensor is consequently negligible. Additional details on how to relate the force F_s detected by the sensor with the actual force at the contact between two beads are given in Ref. [14]. Signals from sensors are amplified by a conditioner (PCB 482A16), recorded by a two-channel numeric oscilloscope (Tektronix TDS340), and transferred to a computer. Measurements have been repeated 9 times and averaged to minimize errors, and acquisitions are achieved as follows. In the monodisperse chain, the sensor at the end of the chain serves as a trigger and the force is recorded at various positions by the sensor in the chain. In the tapered chain, force is recorded by the sensor at the end of the chain, while the sensor in the monodisperse chain is let at a given position to trigger the acquisition. In addition, we know from numerical simulations [14] that under perfectly elastic collisions, forces recorded in the chain and at the end of the chain are related in amplitude and duration: $F_m^{wall}\approx 1.94F_m^{chain}$ and $\tau_{wall}\approx 1.09\tau_{chain}$, with relative error less than 5%.

In Fig. 1 we show the evolution of an unaveraged pulse, initiated in an $n_0=16$ bead long monodisperse chain, as it propagates in the first tapered chain ($q=q_1$) made with $n_1=14$ beads of decreasing diameters as described above. Practically, the evolution of the pulse is measured at the end of a tapered chain containing an increasing number of beads ($0\leq n_1\leq 14$). It appears that a tail is formed behind a front pulse and the wave, initially symmetric, becomes more and more asymmetric. In Fig. 2 is the evolution of a pulse, initiated in an $n_0=16$ bead monodisperse chain, as it propagates in the second tapered chain ($q=q_2$) made with $n_2=12$ beads

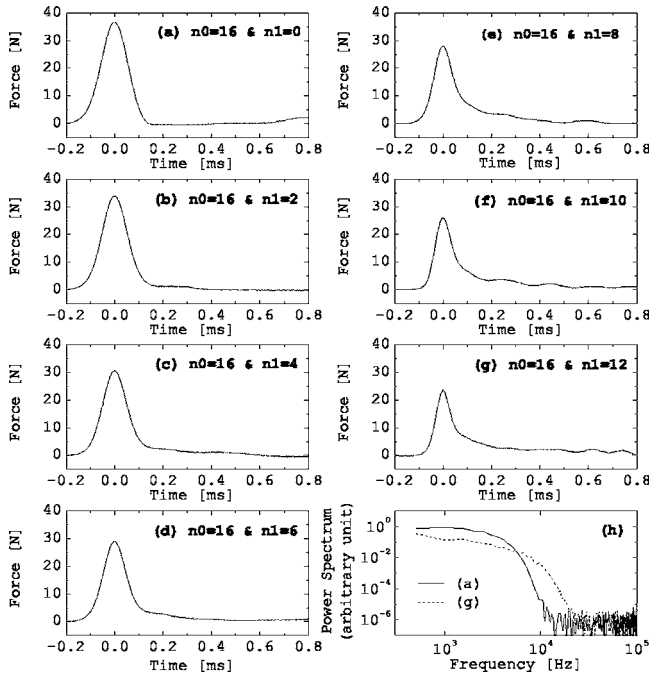


FIG. 1. (a)–(g) Force as a function of time (arbitrary origin). Evolution of a pulse initiated in a monodisperse chain of $n_0=16$ beads, shown in (a), as it propagates in the tapered chain of n_1 beads with tapering factor $q=q_1$. (b)–(g) Actual forces felt at the right contact of bead Nos. 18, 20, 22, 24, 26, and 28 (see Table I). (h) Power spectrum, with arbitrary units, indicating a comparison between incoming and outgoing pulses in the tapered chain.

of decreasing diameters as described above. The tail formed behind a front pulse of the wave is in this case even more pronounced. This effect is exactly the one predicted by Sen and co-workers [3]. For tapered chains ($q \neq 0$), the pulse becomes distributed throughout the chain as it propagates. Since impulsion is transmitted down the chain at the contact surface, impedance mismatches are introduced by tapering the diameters, every mismatch limiting transmission between the grains. By comparing Fig. 1 to Fig. 2, it can be observed that the effects of pulse spreading and maximum force decrease become more dramatic as the tapering factor is increased. Figures 1(h) and 2(h) illustrate typical power spectra of the incident solitary-wave, as well as the corresponding waves reaching the end of the chain for the values of the tapering factor used here. A clear cascade of energy is observed, from low to high frequencies, as the pulse propagates through the tapered chain.

In order to check the robustness of our experimental configuration, we have explored how sensitive is the shock mitigation effect to a small misalignment of beads. To quantify the effect of bead misalignments we have performed two test experiments. In a first experiment, we check the chain sensitivity to misalignment occurring in the middle of the tapered chain. Second, we impose a well-controlled vertical displacement of the bead in contact with the wall sensor and observe how the pulse is modified. As seen in Fig. 3(a), as the misalignment in the middle of the tapered chain increases, the signal decreases slightly in amplitude and the oscillations of the tail progressively decrease. When looking

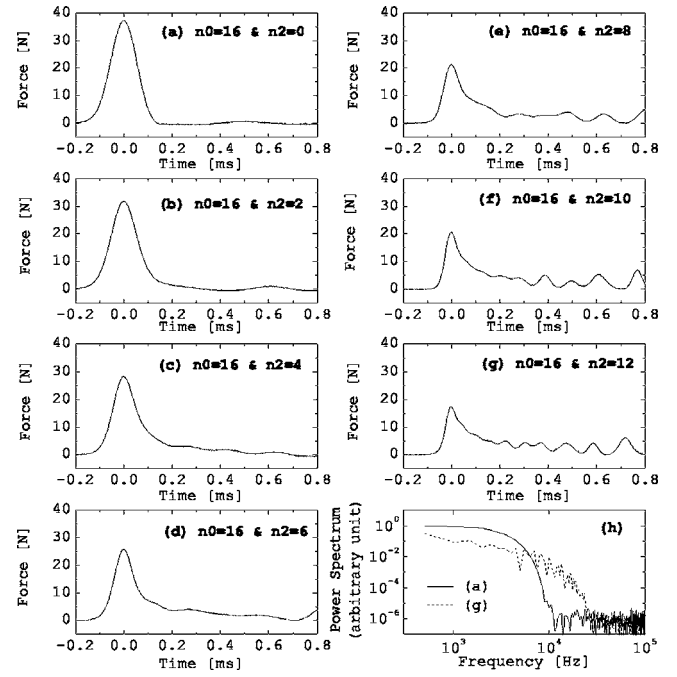


FIG. 2. Same as Fig. 1, for a pulse initiated in a monodisperse chain of $n_0=16$ beads, shown in (a) and propagating through the tapered chain of n_2 beads with tapering factor $q=q_2$. (b)–(g) Actual forces felt at the right contact of bead Nos. 18, 20, 22, 24, 26, and 28 (see Table I). (h) Power spectrum, with arbitrary units, indicating a comparison between incoming and outgoing pulses in the tapered chain.

carefully, one can see that the more pronounced peak of the tail ($t-T \approx 0.38$ ms) is progressively decreasing in amplitude, suggesting the existence of a correlation between the oscillating tail and a given contact at the chain. Similarly, as observed from Fig. 3(b), a misalignment up to 10% at the end of the chain does not introduce a dramatic effect on the wave. The amplitude is slightly modified and only some effects take place at the tail of the wave. However, in both cases, the front pulse velocity is nearly unchanged at the experimental resolution achieved here.

Although the tapering factor was not kept exactly constant through the chain in the above description, the effect of shock mitigation predicted by Sen and co-workers [2] is well captured in our experimental results. To better characterize the effect of local variation of tapering factor, we have tested a short tapered chain in which we replaced one of the beads by a smaller one, in such a way that two consecutive beads have equal diameter. Thus, a local variation of q , $dq/q = +1$, is produced. Similarly, to investigate the effect of a negative variation of q , $dq/q = -1$, we replace a bead by one equal to the bigger neighbor. As seen in Fig. 3(c), two effects are visualized. First, for $dq/q = +1$, the front pulse is slightly steeper and narrower. In contrast, for $dq/q = -1$, a smoother and slightly wider front pulse is produced. These two effects are consistent with results presented in Figs. 1 and 2.

III. DISCUSSION

The physical behavior of solitary-waves in chains of N identical beads is summarized below. Under elastic deforma-

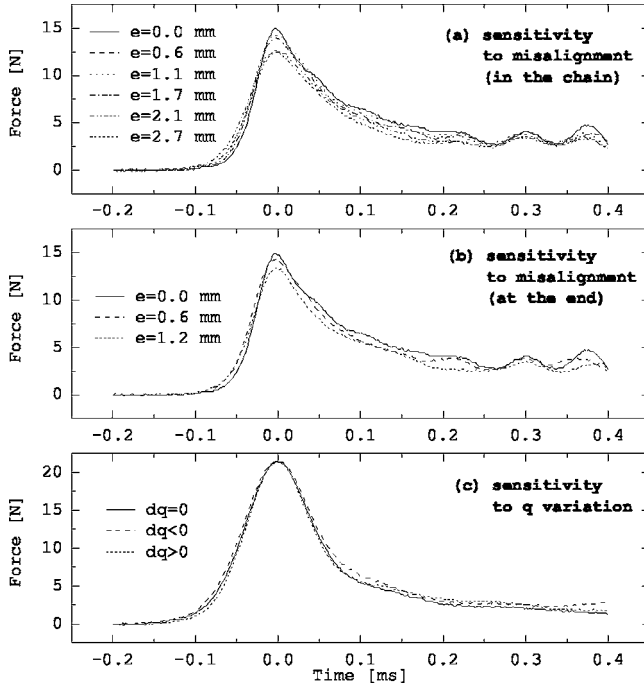


FIG. 3. Force as a function of time, measured at the end of the entire chain of tapering factor $q=q_2$. Vertical displacement e of the bead under scope is indicated in the figure. (a) Effect of a controlled vertical misalignment introduced at the bead number $\phi_{22}=16$ mm close to the middle of the tapered chain. (b) Effect of similar vertical misalignment which is this time located at the bead in contact with the wall sensor, $\phi_{28}=9$ mm. (c) The force as a function of time, measured at the end of a partial tapered chain ($q=q_1$) made of beads 01–24. $dq/q=+1$ corresponds to the same signal when bead No. 18 is replaced by a bead of diameter $\phi_{18}=\phi_{19}=23.0$ mm. Thus, two consecutive beads have identical diameter. Similarly, for $dq/q=-1$, bead No. 19 is replaced by a bead of diameter $\phi'_{19}=\phi_{18}=23.0$ mm.

tion, the energy stored at the contact between two elastic bodies submitted to an axial compression corresponds to the Hertz potential [22], $U_H=(2/5)\kappa\delta^{5/2}$, where δ is the overlap deformation between bodies, $\kappa^{-1}=(\theta+\theta')(R^{-1}+R'^{-1})^{1/2}$, $\theta=3(1-\nu^2)/(4Y)$, and R and R' are radii of curvature at the contact. Y and ν are Young's modulus and Poisson's ratio, respectively. Since the force felt at the interface is the derivative of the potential with respect to δ ($F_H=\partial_\delta U_H=\kappa\delta^{3/2}$), the dynamics of the chain of beads is described by the following system of N coupled nonlinear equations:

$$m\ddot{u}_n = \kappa[(u_{n-1} - u_n)_+^{3/2} - (u_n - u_{n+1})_+^{3/2}], \quad (1)$$

where overdots denote time derivatives, m is the mass, u_n is the displacement of the center of mass of bead n , and the label $+$ on the brackets indicates that the Hertz force is zero when the beads lose contact. Under the long-wavelength approximation $\lambda \gg R$ (where λ is the characteristic wavelength of the perturbation), the continuum limit of Eq. (1) can be obtained by replacing the discrete function $u_{n\pm 1}(t)$ by the Taylor expansion of the continuous function $u(x \pm 2R, t)$. Keeping terms of up to fourth-order spatial derivatives, Eq. (1) leads to the equation for the strain $\psi = -\partial_x u > 0$ [1],

$$\ddot{\psi} \approx c^2 \partial_{xx} [\psi^{3/2} + (2/5)R^2 \psi^{1/4} \partial_{xx} (\psi^{5/4})], \quad (2)$$

which admits an exact periodic solution in the form of a traveling wave, $\psi(\xi=x-vt)$, with speed v . This solution is [7–10,23]

$$\psi = (5/4)^2 (v/c)^4 \cos^4 [\xi / (R\sqrt{10})], \quad (3)$$

where $c = (2R)^{5/4} (\kappa/m)^{1/2}$. Although this solution only satisfies the truncated equation (1), it is well established that one hump $[-\pi/2 < \xi / (R\sqrt{10}) < \pi/2]$ of this periodic function represents a solitary-wave solution [7,14,24]. Finally, approximating spatial derivative by finite difference, the strain in the chain reads $\psi \approx \delta / (2R)$. The force felt at the interface, $F \approx \kappa(2R\psi)^{3/2}$, and the wave velocity v become

$$F \approx F_m \cos^6 \left[\frac{x-vt}{R\sqrt{10}} \right], \quad (4)$$

$$v \approx \left(\frac{6}{5\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{F_m}{\theta^2 R^2} \right)^{1/6} \approx \left(\frac{6}{5\rho} \right)^{2/5} \left(\frac{V_m}{\theta^2} \right)^{1/5}. \quad (5)$$

The second expression for the wave velocity v is obtained by relating the maximum force F_m to the maximum bead velocity V_m [1,7,8,22]. Experimentally, the maximum force F_m , the time of flight T , and the duration τ are obtained here from fitting the loading part ($-\tau < t - T < 0$) of the measured force as a function of time to the Nesterenko solution $F(t) = F_m \cos^6[(t-T)/\tau]$.

It is worth mentioning that Rosenau and Hyman, while studying the role of nonlinear dispersion in pattern formation, introduced a $K(m, n)$ family of fully nonlinear equations [25–27], which in some cases support solitary-waves with compact support (thus named compactons), similar to the continuum limit of Eq. (1). The equation $K(2, 1)$ corresponds to the Korteweg–de Vries equation, and the equation $K(3/2, 3/2)$ has a solution of the form of Eq. (3), but which is strictly zero outside a finite range—i.e., for $|\xi / (R\sqrt{10})| > \pi/2$ [27].

In the following, we discuss what features of the front pulse, traveling in the tapered chain, can be captured using the simple monodisperse solution of solitary-waves in conjunction with a ballistic approximation. Indeed, Doney and Sen [4] proposed recently a ballistic approximation, with a heuristic term rendering energy dissipation, to model the elastic collision of individual beads. Taking into account a classical restitution coefficient ϵ , the ratio of consecutive bead velocity is

$$\frac{V_m^{n+1}}{V_m^n} = \frac{2\epsilon}{1 + (1-q)^3}. \quad (6)$$

The restitution coefficient is obtained from force measurements [14] acquired in the monodisperse chain ($q=0$) by using the fact that $\epsilon = (F_m^{n+1}/F_m^n)^{5/6} \equiv V_m^{n+1}/V_m^n$. We thus estimate that $\epsilon \approx 0.985$. The theoretical maximum of the force in the tapered chain is then obtained from Eq. (5),

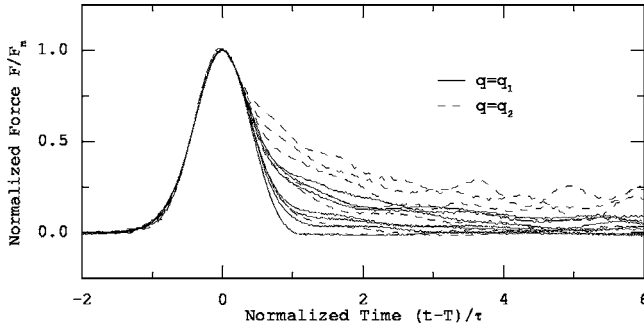


FIG. 4. The collapse of all data presented in Figs. 1 and 2 when the force is normalized to the measured maximum force F_m and the time scale is $(t-T)/\tau$, where T and τ are the measured time of flight and pulse duration, respectively.

$$\frac{F_m^{n+1}}{F_m^n} = (1-q)^2 \left[\frac{2\epsilon}{1+(1-q)^3} \right]^{6/5}, \quad (7)$$

and the predicted speed of the quasisolitary-wave (the front pulse), in the ballistic approximation, reads

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left[\frac{2\epsilon}{1+(1-q)^3} \right]^{1/5}. \quad (8)$$

In writing Eqs. (7) and (8), it is assumed that the front pulse adapts to the self-similar solution at every impedance mismatch. Therefore, this approximation is suitable for a small tapering factor, since for slow variation of bead size, quasisolitary-wave adjustments are expected to be small and to take place at a distance much longer than its characteristic width. This can be shown also by comparing the time scale of the wave, $\tau_{wave} \sim 2R/v$, to the time scale of the loading during a collision, $\tau_{coll} \sim \delta_m/V_m$ [use Eq. (5) to estimate the ratio v/V_m]. These characteristic times are equal in a monodisperse chain and almost equal for small tapering factor, demonstrating that the loading of the contact is the process governing the main features of quasisolitary-wave formation. In Fig. 4, when the force is normalized to the maximum force F_m and the time scale is selected to be the measured duration τ , all data presented in Figs. 1 and 2 show a collapse in the rising part of the front pulse. Thus, this result provides strong evidence that the main front of the pulse follows a self-similar solution.

Based on the results above, we discuss in further detail the main features of the quasisolitary-wave: namely, its maximum force, its local speed, and the momentum transfer from the main peak to its tail. As a reference, for both tapering factors, Figs. 5(a1) and (a2) indicate the size of beads as a function of position. In Figs. 5(b1) and (b2) is given the maximum force felt by the rigid wall. An important decrease in the force is observed in both cases as the pulse propagates in the tapered chain. Interestingly, such a decrease cannot be attributed to dissipation only. Indeed, the dashed lines in Figs. 5(b1) and (b2) indicate that predictions from Eq. (7), with $q=0$, overestimate the force. However, when the tapering factor is introduced, the experimental data follow reasonably well the predictions from Eq. (7).

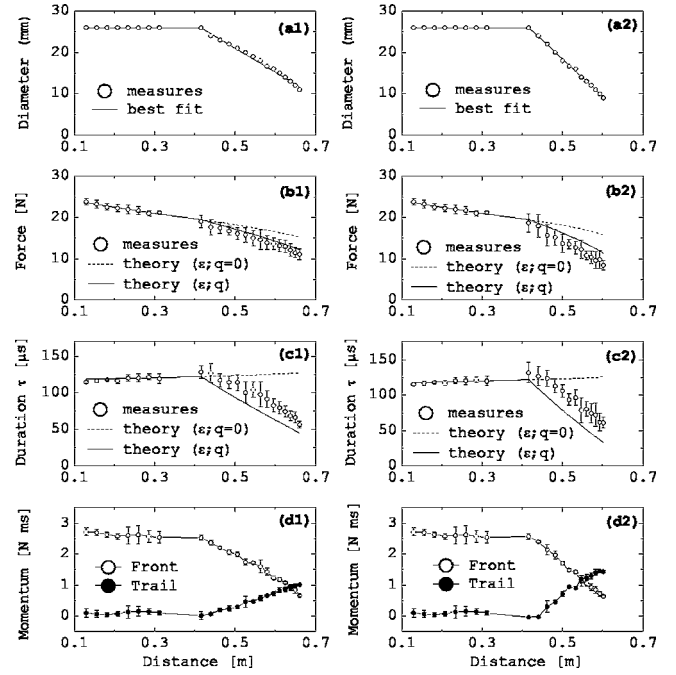


FIG. 5. Characteristics of the chain and of the pulse traveling in both tapered chains (the left column is for $q=q_1$ and the right one is for $q=q_2$) as a function of the position in the chain. (a1), (a2) The bead diameter used in the experiments compared with the fit presented in the text. (b1), (b2) Maximum compression measured in the chain. (c1), (c2) Duration of the pulse contrasted to predictions from the dissipative ballistic approximation including or not the tapering effect. (d1), (d2) Front and tail linear momenta $Q_F = \int_{-\infty}^{T+\tau} F(t)dt$ and $Q_T = \int_{T+\tau}^{+\infty} F(t)dt$, respectively. Here the solid lines are guides for the eye.

In Figs. 5(c1) and (c2) we represent the duration τ of the pulses as the bead diameter decreases. From the theory of monodisperse chains schematized above, it is known that the quasisolitary-wave duration τ , according to Eq. (4), is $\tau_n = (\phi_n/2)\sqrt{10}/v_n$. It has been checked that τ_n , measured at every bead, agrees with the monodisperse-ballistic approximation in a reasonable manner for small tapering factor; see the solid lines in Figs. 5(c1) and (c2). This result is not obvious since to calculate the solid lines in Figs. 5(c1) and (c2), we have used the calculated value of the quasisolitary-wave speed at every bead from Eq. (8).

On the other hand, the impulse of the front is $Q_F = \int_{-\infty}^{T+\tau} F(t)dt$ and the impulse of the tail is $Q_T = \int_{T+\tau}^{+\infty} F(t)dt$. The principal effect of the tapered chain is then shown in Figs. 5(d1) and (d2), in which a noticeable part of the impulse is transferred from the front pulse to the tail. From a comparison to Figs. 5(b) and (c), it appears that the diminution of the front impulse is principally due to dramatic decreases of both the maximum force and duration of the front pulse, as it propagates down the tapered chain. Note that total momentum is conserved in the tapered chain. This has been checked more accurately using lower-frequency resolution, which allowed us to fully record the pulse tail and thus verify that $(Q_F + Q_T = cte)$. In fact, the signal being acquired on a fixed set of points, for the rest of our measurements, we have preferred to keep a high sampling frequency, which

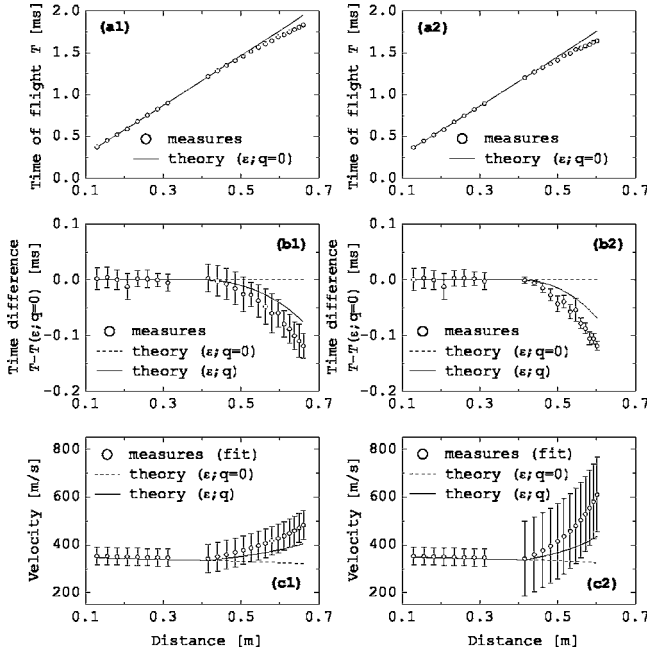


FIG. 6. time of flight and velocity measurements in both tapered chains (the left column is for $q=q_1$ and the right one is for $q=q_2$) as a function of the position in the chain. (a1), (a2) time of flight T . (b1), (b2) Difference between the measured time of flight and the theoretical time of flight obtained when only the restitution coefficient is taken into account ($\epsilon < 1$ and $q=0$). (c1), (c2) Pulse velocity.

provides high resolution for the front pulse but avoids recording the very end of its tail.

We compare below the measured to the predicted time of flight of the front pulse when reaching the sensing wall. The relation $T_n = T_0 + \sum_1^n (\phi_m/v_m) = T_0 + (\phi_0/v_1) \frac{1-\epsilon^{-n/5}}{1-\epsilon^{-1/5}}$ helps to find v_1 and T_0 by fitting to measurements done in a chain of equal beads ($n \leq n_0$). The theoretical velocity is then found by using Eq. (8), and finally, a prediction of the time of flight in the tapered chain is obtained by using the relation $T_n = T_{n-1} + (\phi_n/v_n)$. In Figs. 6(a1) and (a2) comparisons with experimental data are presented in the case of $q=0$. The decrease observed for both tapering factors cannot be attributed to the restitution coefficient effect only. The effect of tapering factor is better observed in Figs. 6(b1) and (b2) which provide a close comparison of time difference $T - T(\epsilon; q=0)$, where $T(\epsilon; q=0)$ is the prediction that only includes the restitution coefficient effect. It is seen that the measured time of flight is shorter than the prediction from the ballistic approximation which slightly overestimates the time of flight between two consecutive beads.

For the sake of comparison, we finally contrast theoretical velocity from Eq. (8) to the local velocity $v_n^d = (\delta_n - \delta_{n-1}) / (T_n - T_{n-1})$. Experimentally, the local velocity, estimated from time of flight differences, naturally provides

very large relative errors. We thus choose to present an estimate obtained by smoothing the local time of flight fluctuations. This is done as follows. In accordance with Eq. (8), we map the local velocity v_n^d onto the behavior $v_n^d = Q^{n-n'} v_{n'}^d$, to find equivalent coefficients of proportionality Q for both tapered chains. The results of the fits are presented in Figs. 6(c1) and (c2). The inflection of the velocity in the tapered part of the chain, rendering the acceleration of the pulse, is clearly demonstrated in both cases. Nevertheless, experimental fits slightly overestimate theoretical predictions and a closer comparison is necessary. Experimentally, we find that the coefficient of proportionality is $Q_1 = 1.025 \pm 0.016$ for the first chain ($q=q_1$) and $Q_2 = 1.049 \pm 0.044$ for the second chain ($q=q_2$). These coefficients must be compared to their theoretical predictions $Q_1^{th} = 1.014$ and $Q_2^{th} = 1.022$, respectively. We thus check that both theoretical values lie inside their respective experimental error bars. Moreover, these experimental coefficients only overestimate their theoretical counterparts by 1.1% for the first chain and by 2.7% for the second one. This last satisfactory agreement, between theoretical and experimental coefficients of proportionality Q in both chains, is not surprising and must be balanced, since Q is weakly sensitive to the tapering factor variation δq [see Eq. (8) with $q \ll 1$]: $\delta Q/Q = (3/10) \delta q$.

IV. CONCLUSION

In conclusion, we have shown that a tapered chain is useful for shock attenuation and energy transfer from low to high frequencies, as previously stated by Sen and co-workers [2–5,20]. The ballistic approximation allowed capturing essential behaviors such as front pulse acceleration, amplitude shrinking, and diminution of its duration. This lowest-order model appeared accurate for small tapering factor, but may become insufficient when tapering becomes greater. Under this approximation, it was assumed that the front pulse adapts to a self-similar solution at every impedance mismatch. This may clearly not always be true. Nevertheless, our data seemed to follow this scaling in a reasonably good manner, indicating that the main parameters to characterize the quasisolitary-wave are the maximum force and the bead size, in addition to the mechanical properties of the beads. As a possible extension of this work, it would be interesting to extract a more complete behavior from a nonlinear wave equation that would take into account the tapering of the chain. In addition, comparisons of our experimental findings with numerical simulations are under way and should help to elucidate some of the hypotheses stated here.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Conicyt-Chile under research program Fondap No. 11980002. The authors are grateful to V.F. Nesterenko for fruitful discussions.

- [1] V. F. Nesterenko, *Dynamics of Heterogeneous Materials* (Springer-Verlag, New York, 2001).
- [2] S. Sen, F. S. Manciu, and M. Manciu, *Physica A* **299**, 551 (2001).
- [3] S. Sen, S. Chakravarti, D. P. Visco, M. Nakagawa, D. T. Wu, and J. H. Agui, in *Modern Challenges in Statistical Mechanics*, edited by V. M. Kenkre and K. Lindenberg, AIP Conf. Proc. No. 658 (AIP, Melville, NY, 2003), p. 357.
- [4] R. L. Doney and S. Sen, *Phys. Rev. E* **72**, 041304 (2005).
- [5] A. Sokolow, J. M. Pfannes, R. L. Doney, M. Nakagawa, J. H. Agui, and S. Sen, *Appl. Phys. Lett.* **87**, 254104 (2005).
- [6] J. Hong, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 108001 (2005).
- [7] V. F. Nesterenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **24**, 733 (1984).
- [8] A. N. Lazaridi and V. F. Nesterenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **26**, 405 (1985).
- [9] V. F. Nesterenko, *J. Phys. IV* **4**, C8 (1994).
- [10] V. F. Nesterenko, A. N. Lazaridi, and E. B. Sibiryakov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **36**, 166 (1995).
- [11] C. Coste, E. Falcon, and S. Fauve, *Phys. Rev. E* **56**, 6104 (1997).
- [12] E. Hascoet, H. J. Herrmann, and V. Loreto, *Phys. Rev. E* **59**, 3202 (1999).
- [13] R. S. Mackay, *Phys. Lett. A* **251**, 191 (1999).
- [14] S. Job, F. Melo, A. Sokolow, and S. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 178002 (2005).
- [15] T. Pöschel and N. V. Brilliantov, *Phys. Rev. E* **63**, 021505 (2001).
- [16] R. S. Sinkovits and S. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2686 (1995).
- [17] S. Sen and R. S. Sinkovits, *Phys. Rev. E* **54**, 6857 (1996).
- [18] J. Hong, J.-Y. Ji, and H. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3058 (1999).
- [19] E. Hascoet and E. J. Hinch, *Phys. Rev. E* **66**, 011307 (2002).
- [20] M. Nakagawa, J. H. Agui, D. T. Wu, and D. V. Extramiana, *Granular Matter* **4**, 167 (2004).
- [21] See, for instance, <http://www.wsb.co.th/>
- [22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theorie de l'Élasticité*, 2nd ed. (Mir, Moscou, 1967).
- [23] S. L. Gavriluk and V. F. Nesterenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **34**, 784 (1993).
- [24] A. Chatterjee, *Phys. Rev. E* **59**, 5912 (1999).
- [25] P. Rosenau and J. M. Hyman, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 564 (1993).
- [26] P. Rosenau, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1737 (1994).
- [27] P. Rosenau, *Phys. Lett. A* **230**, 305 (1997).

**D.2. Nonlinear waves in Hertzian granular chains:
Effects of inertial and stiffness heterogeneities.**

Nonlinear waves in Hertzian granular chains: Effects of inertial and stiffness heterogeneities

Stéphane Job¹, Francisco Melo², Francisco Santibanez², Franco Tapia²

¹Institut Supérieur de Mécanique de Paris, LISMMA (EA 2336),
3 rue Fernand Hainaut, 93407 Saint-Ouen Cedex, France.
(email: stephane.job(a)supmeca.fr; url: http://www.supmeca.fr/perso/jobs).

²Departamento de Física, USACH and CIMAT,
Av. Ecuador 3493, Casilla 307, Correo 2, Santiago de Chile.

Abstract: A one-dimensional granular medium, a chain of beads which interact via the nonlinear Hertz potential, exhibits strongly nonlinear behaviors. When an alignment of grains further contains some heterogeneities (e.g. local modification of the inertia or of the stiffness), it exhibits even more complex behaviors. We report some recent experiments, analysis and numerical simulations concerning nonlinear propagation of pulses in such alignments. We consider first a monodisperse chain as a reference case. We then analyze how pulse modifies in heterogeneous configurations. We show that strongly nonlinear behaviors take place if a chain contains a single intruder or if it contains a sharp decrease of bead's size. Finally, we present recent results concerning a monodisperse chain in which additional fluid is set between grains.

Keywords: one-dimensional granular chain, nonlinear phenomena, solitary wave, heterogeneous medium.

A. Introduction

The problem of mechanical energy transport in alignments of grains has attracted significant attention in recent years [1]-[7]. If the chain is held within boundaries, it is well established that sound waves may propagate and acoustic speed increases with imposed static stress. In the presence of loading, linear acoustic waves disperse as a function of time and space [8]. When the chain is not loaded, i.e., when the grains barely touch one another, acoustic speed vanishes: the medium cannot sustain linear acoustic waves. In this *sonic vacuum* limit, nonlinear phenomena predominate and any perturbation is known to result in strongly nonlinear waves which travel through the chain [1]. The spherical grains interact via the intrinsically nonlinear Hertz potential, in which the repulsive potential between the grains increases with grain-grain overlap via a $5/2$ power law. This power law is softer than the quadratic (harmonic) repulsion for small overlaps but rapidly becomes steeper as compression increases. Hence, it is energetically expensive for two adjacent grains to sustain contact for long. This physical feature is at the heart of the peculiar nonlinear properties associated with mechanical energy transport in non-loaded granular alignments. It can be shown that whenever the repulsive potential has a steeper than

quadratic power law growth in the overlap (or intergrain distance), mechanical energy transfer from one grain to the next starts off slowly and then ends abruptly. Energy is hence transported as a "bundle." These alignments therefore propagate energy in the form of solitary waves. From a geometrical standpoint, the solitary wave in a granular alignment of spheres is a highly symmetric object whose velocity depends on the amount of energy it carries.

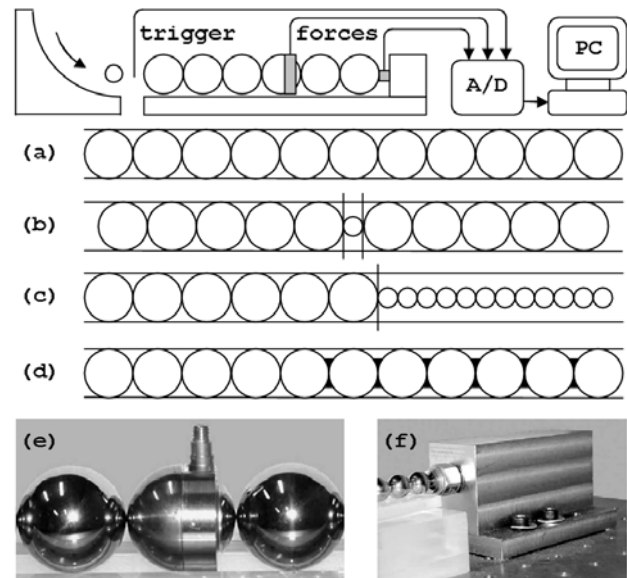


Fig.1. Experimental setup: Schematic view showing a chain with sensors and data acquisition facilities. The chain can be either (a) monodisperse, (b) may contains an intruder or (c) may contain a steep decrease in beads' size. In configuration (d) we examine a wet monodisperse, in which interstitial viscous fluid has been added to some grains' contact. (e) Force sensor embedded in a bead and (f) rigid and non moving force sensor at the end of the chain.

In an ideal point of view, a clear understanding on how energy propagates in these alignments might be of interest to shed some light on real granular beds' dynamics at macroscopic scale. In a famous paper, Liu and Nagel [9] shown that sound propagation could be related to the existence of one-dimensional force networks in unconsolidated granular materials. However, Somfai and Roux [10] recently demonstrated that the link between sound, force networks and stiffness networks is definitively not obvious. In fact, single alignments do not

take into account for essential complex nature of 3D granular materials. The transposition should thus be considered with care. Nevertheless, the grain-grain dynamics being relevant at the microscopic scale, whatever the macroscopic arrangement may be, this drawback may constitute an asset. This "lack" of complexity gives the opportunity to use these simple alignments as useful tools in probing some specific behaviors of granular materials that couldn't easily be identified in more general systems.

In this paper, we report recent experimental studies, analysis, and numerical simulations, devoted to understand how an initial perturbation provided to the edge of unconsolidated granular chains can result in the formation and the propagation of nonlinear waves, when the medium is heterogeneous. First, we report some experiments done in a monodisperse chain, as a reference configuration. Then, we analyze the effect of a local modification of chain's inertial properties, by adding a single intruder with smaller mass in a monodisperse chain. The following is devoted to the study of a stepped chain, a chain containing a sharp decrease of beads' size. Finally, we explore the effects of contacts' stiffness modification, by adding a small amount of viscous fluid between some grains of a monodisperse chain.

B. Experimental setup and nonlinear long-wavelength description

The setups under experimental study are one dimensional non-loaded chains of beads. All our beads are high carbon chrome hardened *AISI 52100* steel roll bearing (density $\rho = 7780 \text{ kg/m}^3$, Young modulus $Y = 203 \text{ GPa}$, and Poisson ratio $\nu = 0.3$), but their radii R and masses $m = (4/3)\pi\rho R^3$ differ from one chain to the other. The chain is impacted by a spherical striker initially moving at velocity V_s and whose radius is $R_s = 8 \text{ mm}$. Typical elements of our experimental setups are shown in Fig.1. Measurements are achieved by using two piezoelectric force sensors. One of the sensors is boxed in a rigid and non moving heavy piece of metal placed at the end of the chain, and the second one is inserted inside a 13 mm radius bead that has been cut in two parts. The mass of the bead-sensor element has been rectified to match the mass of an original bead. The front mass being negligible, the embedded sensor provides a satisfactory estimation of the force at the contact with the neighbor bead [6].

An impact of the striker generates an elastic deformation of contact regions between beads, which propagates from one bead to another [1]-[2], [8]. The overlap at contact n (i.e. between beads n and $n-1$) is defined as $\delta_n = (u_{n-1} - u_n)$, where u_n is the position of bead number n . Derived from Hertz potential [11]-[12], the force at contact n is $F_n = \kappa\delta_n^{3/2}$ if $\delta_n > 0$ (and 0 if $\delta_n \leq 0$), where $\kappa = R^{1/2} / (2^{3/2}\theta)$ and $\theta = 3(1-\nu^2)/4Y$ are constants. More precisely, the dynamics of the chain is described by applying Newton's second law to each of

the beads,

$$m\ddot{u}_n = \kappa(u_{n-1} - u_n)^{3/2} - \kappa(u_n - u_{n+1})^{3/2}. \quad (1)$$

A continuum limit of this set of equations can be derived under the long wavelength approximation, when characteristic wavelength λ of the deformation is greater than the radii of the beads [8]. Keeping terms of up to the fourth order of small parameter $(2R/\lambda)$ in Taylor expansions of $u_{n\pm 1} = u(x_n \pm 2R, t)$ versus $u_n = u(x_n, t)$ leads to a nonlinear equation for the strain $\psi(x, t) = -\partial u(x, t) / \partial x$,

$$\ddot{\psi} = (2R)^{5/2} \left(\frac{\kappa}{m} \right) \left[\psi^{3/2} + \left(\frac{2}{5} \right) R^2 \psi^{1/4} (\psi^{5/4})_{xx} \right]. \quad (2)$$

An exact solution of the last equation is,

$$\psi = \psi_m \cos \xi, \quad \xi = \frac{x - vt}{R\sqrt{10}}, \quad v = \sqrt{\frac{6}{5\pi\rho\theta}} \psi_m^{1/4}, \quad (3)$$

where one hump of the strain wave ψ , for $|\xi| \leq \pi/2$, describes a single solitary wave (SW) solution [1]-[2], [8], with a compact spatial extent of the order of the characteristic length $\lambda_{sw} = R\sqrt{10}$. The duration of the pulse is approximately two times the amplitude dependent characteristic duration $\tau_{sw} = R\sqrt{10}/v$.

In addition to theoretical analysis, the discrete set of equations (1) is solved numerically by using a fourth order Runge-Kutta numerical scheme, as proposed by Chatterjee [13]. The time step is chosen to be few orders of magnitude smaller than the shortest physical duration and the energy conservation is fulfilled within an error less than 10^{-9} .

C. Dry chain of identical beads

We present here some experimental observations carried out in a non-loaded monodisperse chain [6]. The chain, shown in inset (a) of Fig.1, is made of identical beads with radius is $R = 13 \text{ mm}$. As previously demonstrated experimentally and numerically [4], [8], [13], the initial impact being applied by a light striker ($R_s = 8 \text{ mm}$), a single solitary wave propagates in the chain. Such a wave is shown in inset (a) of Fig.2, which represents the force measured as it propagates deeper in the chain by the bead/sensor element. The pulse slightly changes while propagating the distance of the few first beads, and then quickly reaches a stable profile. It should be pointed out that previous experimental results [4], mainly focusing on loaded monodisperse chains, didn't reach sufficiently precise measurements in the non-loaded limit to allow a satisfactory comparison with theory, (3). Inset (b) and (c) of Fig.2 show the wave velocity and the wave duration respectively as a function of the incident wave force amplitude. In our experiments, the solitary wave profile, its velocity and its duration exhibit excellent agreements with theoretical results of (3), without any adjustable parameter.

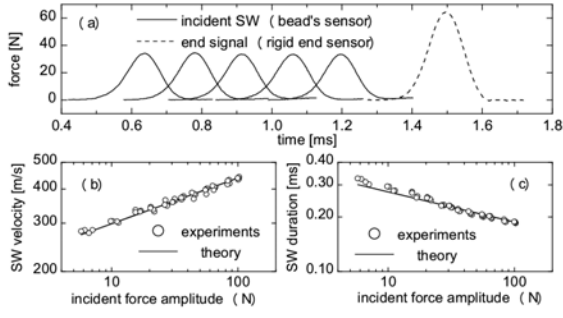


Fig.2. Experiments in a non-loaded monodisperse chain. (a) Incident force at different position in the chain, and force measured at the rigid end, as a function of time. (b-c) Solitary wave velocity and duration, respectively, as functions of incident force amplitude. Theory estimates are based on (3).

D. Effects of an intruder

The simplest way to explore the role of heterogeneities is to insert a single intruder in a monodisperse chain [14]-[15]. Such a configuration is shown in inset (b) of Fig.1. A qualitative description of the chain's dynamics can be achieved, provided the monodisperse chain of beads can be seen as a discrete chain of identical mass m connected by linear springs with stiffness $k = \partial F / \partial \delta$. According to linear theory, the dispersion relation indicates that acoustic wave can propagate in such a linearized chain if the angular frequency of the perturbation is lower than a given cutoff frequency, $\omega_c \propto \sqrt{k/m}$. Any faster perturbation will result in oscillatory non-propagating evanescent waves. We consider now the presence of a light intruder with mass m_I . The natural angular frequency of the light intruder, $\omega_I \propto \sqrt{k/m_I}$, may exceed the cutoff angular frequency. A localized state thus may appear. The intruder starts to oscillate from any dynamical perturbation and these oscillations remains localized on the intruder as they cannot propagate in the chain. This phenomenon can be observed experimentally and numerically, as shown in Fig.3. In the force measured few beads before the intruder, the first pulse is the incident wave, and the second smaller one is a reflected wave. The reflected pulse indicates that, from energy and momentum conservations considerations, a gap opened in the chain, in the close vicinity of the intruder. In both figures, the oscillating tail in the force measured at the intruder contact is a clear signature of the oscillation of the intruder. We checked that these oscillations does not propagate in the chain, they thus remain localized on the intruder. The excellent agreement between experiments and simulations demonstrates the reliability of our measurements. According to experimental results and considering a more detailed analysis, which will be published elsewhere [15], the angular frequency of these oscillations are found to depend on both the incident wave features and the geometrical properties of the chain,

$$\omega_I \propto \left(\frac{R}{R_I} \right)^{4/3} F_m^{1/6}, \quad (4)$$

where R and $R_I \ll R$ are radii of the beads and of the intruder, respectively, and F_m is the incident force amplitude.

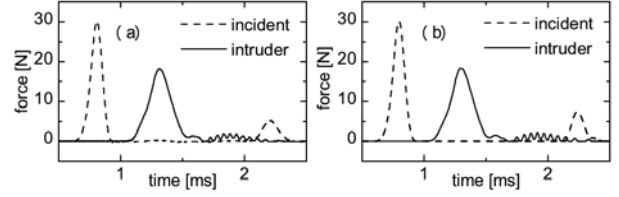


Fig.3. Monodisperse chain containing an intruder. (a) Experiments. (b) Numerical simulation. The incident wave is measured few beads before the intruder. The oscillation in the tail of the force at the intruder is the clear signature of wave localization on the intruder.

E. Effects of a step in beads's size

Attention now turns to mechanical energy propagation due to initial perturbations that generate significantly long grain compressions at a chain end. Lazaridi and Nesterenko demonstrated that an initial perturbation provided at the edge of a non-loaded granular chain by a heavy striker can result in the formation of solitary wave trains, containing many single solitary waves ordered by decreasing amplitudes [2]. Solitary wave trains are also known to exist in stepped chains of beads [16]-[17], i.e., chains containing a steep decrease in bead radius as shown in inset (c) of Fig.1. A stepped chain is similar, from the point of view of the interaction of the last bead of the first chain with edge beads of the second smaller chain, to a monodisperse chain impacted by a large and massive striker [2], [16]-[18]. Interestingly, Nesterenko reported that energy and momentum can be totally transmitted when a pulse passes through a sharp decrease of bead's size, and partial reflected in the reverse case [16]-[17]. Such nontrivial and fascinating behaviors are highly related to the way energy and momentum transfer nonlinearly at the interface between chains. This type of interaction has practical interests, since they are known to act as efficient shock absorbers [19]. Solitary wave trains formation observations and description have been confirmed and extended in recent works [20]-[21]. The force amplitude of the p^{th} single pulse in a solitary wave train has been found to decrease approximately exponentially, i.e. $F_m \propto \exp(-\alpha p)$. Applying energy and momentum conservations at the interface between both parts of the stepped chain, we found that the coefficient α only depends on the beads' mass of the first and the second part of the chain, respectively M and m ,

$$\alpha = \left(\frac{6}{5} \right) \ln \left[\frac{1 + (m/M)\Omega}{1 - (m/M)\Omega} \right], \quad (5)$$

where $\Omega \approx 1.345$ is a non-dimensional constant coming from theory [21]. We performed measurements in a stepped chain, which are presented in Fig.4. The theoretical estimate we proposed is found in a good agreement with both numerical simulations [20] and experiments [21]. Moreover, we shown that the force felt at the interface, measured by the embedded sensor first loads within a characteristic time of the order of incident solitary wave duration, and then unloads through a longer exponential relaxation-like process. We found [21] that the characteristic unloading time is inversely proportional to the coefficient α . Finally, we demonstrated that the

overall strength of the transmitted solitary wave train decreases when the mass ratio M/m increases, whereas the number of pulses it contains increases. This last result proves valuable in using such systems as shocks protectors.

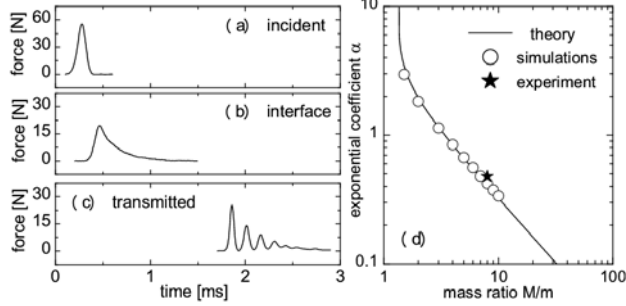


Fig.4. Stepped chain made with 7 beads of radius $R_1 = 13$ mm followed by 50 beads of radius $R_2 = 6.5$ mm. (a) Incident solitary wave's force as a function of time in the first chain. (b) Force at interface versus time. (c) Solitary wave train's force measured in the second part of the chain. (d) Coefficient α versus beads' mass ratio, defined such that $F_m \propto \exp(-\alpha p)$ where $F_m(p)$ is the maximum force of the p^{th} transmitted solitary wave.

F. Effects of an interstitial fluid

The influence of interstitial fluid on grains' interaction still suffers a lack of understanding despite major practical importance in describing wet granular media dynamics. In recent ultrasonics propagation experiments, Jia and Mills [22]-[23] reported that the coherent ballistic wave and the coda wave both dissipate if some viscous fluid is mixed with the grains. Interestingly, they also reported that the velocity of the ballistic wave can increase, by up to 25%, even if the volume fraction of fluid was very small, about 0.06% in their experiments. Their interpretation of such stiffening effect, based on an effective medium description, assumes the presence of liquid bridges between grains in parallel to dry Hertzian contacts. Characterizing these liquid bridges by simple Maxwell elements (a dashpot and a linear spring in series), they found qualitative agreements with experiments that might explain the pulse acceleration.

Some of these effects have also been observed in beads alignments. Herbold and Nesterenko reported experiments done in a monodisperse chain of beads immersed in glycerol fluid (dynamic viscosity $\eta = 0.62$ N.s/m²) [24], where slight acceleration of the pulse was underlined. Performing numerical simulations, they included classical buoyancy, drag and pressure forces. In addition to these effects, they also proposed to take into account for a viscous term in the set of equations (1), in the form,

$$m\ddot{u}_n = \kappa(\delta_n^{3/2} - \delta_{n+1}^{3/2}) + \mu(\dot{\delta}_n - \dot{\delta}_{n+1}), \quad (6)$$

where μ is a viscous coefficient proportional to the dynamic viscosity. It is noteworthy that the model exposed in (6) should lead to an increase of the velocity, when considering a short enough pulse, i.e. a wave with sufficiently high frequency content. Their numerical simulations qualitatively shown that the dissipation of the

pulse can be fitted by appropriate selection of μ , but they also found a wave deceleration, in contradiction to experiments.

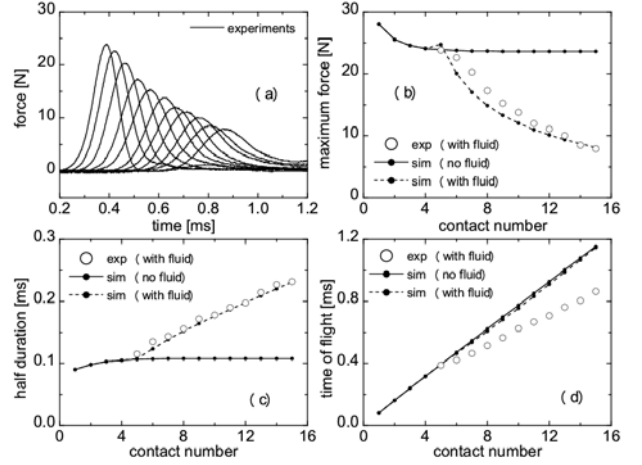


Fig.5. Monodisperse chain with additional interstitial viscous fluid set at contacts 6 to 15. Numerical simulation, performed by setting viscous coefficient to $\mu = 250$ N.s/m, shows satisfactory agreements for the pulse's amplitude decrease and broadening, but fails to describe the pulse acceleration. Without fluid, the pulse velocity is 341 m/s, and in the presence of interstitial fluid, the velocity increases by 56%, up to 531 m/s.

We performed measurements in a monodisperse chain, in order to test Jia's and Mills's interpretations. The configuration is shown in inset (d) of Fig.1. Contrarily to Herbold's approach, our chain is not immersed, in order to avoid any additional effects, and a very small amount of viscous fluid is set between grains. The fluid we use, Sylgard 184, is a highly viscous one ($\eta = 5.5$ N.s/m²), in order to ensure a low enough Reynolds number. Measurements are shown in Fig.5, where pulse dissipation and acceleration are clearly demonstrated. Performing numerical simulations of the discrete set of equations (6), we found that setting the viscosity coefficient to $\mu = 250$ N.s/m gives a satisfactory agreement for the amplitude decreasing and pulse broadening. The pulse acceleration is also observed in our numerical simulations, but does not agree with experimental observations. Our measurements actually confirm Herbold's assumption upon the introduction of a viscous term proportional to the relative velocity [24]. Indeed, grains' overlaps might generate a mean radial flow proportional to relative grains' velocities. In order to get insight of the microscopic scale, we try in the following to relate the numerical viscous coefficient μ to the physical properties of the setup.

In the field of Tribology [25], it is known that a squeezing effect, a classical elastohydrodynamic lubrication effect [26], generally takes place at low Reynolds number when two solids, separated by a thin layer of fluid, are pressed together. It is well established for example that when two circular plates (radius R), separated by a viscous fluid (dynamic viscosity η and thickness h), are approached with relative velocity V_R , a normal load opposed to the displacement is induced, $F = \mu V_R$, where $\mu \propto R^4/h^3$. Similarly, if the solids are two rigid spheres with radius R , separated by distance h , the coefficient scales as $\mu \propto R^2/h$. Assuming a film

of liquid should form in the vicinity of the grains' contact region, we find from the geometrical properties of the setup, and from the numerically found viscosity coefficient $\mu = 250$ N.s/m, that this film should be few microns thick. Considering the overlap is also of the order of few microns, the interpretation of a squeezing flow thus appears relevant.

At this stage, the stiffening effect was not unraveled. Following Jia's and Mills' proposal [22], the pulse acceleration should take place by considering additional restoring forces, e.g., by considering fluid compressibility with appropriate description.

G. Conclusion

In summary, we have reported detailed studies of the propagation of strongly nonlinear wave in various non-loaded chains of beads. We first presented some results done in a monodisperse chain. These results confirmed the reliability of existing theoretical results, and showed that a pulse propagates in the form of a solitary wave. We then analyzed the influence of a single intruder in a monodisperse chain, as the simplest heterogeneous configuration. A well defined nonlinear wave localization process occurs at the location of the intruder. Further, we explored the propagation and the transmission of solitary wave in a stepped chain and we reported recent analysis that allowed describing the main features of a transmitted solitary wave train. Finally, we exposed recent experiments and interpretation concerning the propagation of a wave in a Hertzian chain with additional interstitial fluid. The physical description of such a system remains opened, but dissipative and stiffening effects were clearly shown experimentally. All these observations should prove valuable to reach a better knowledge of the dynamics of more complex granular material.

H. Acknowledgements

The authors acknowledge support of Conicyt under Fondap Program N° 11980002.

I. Literature

- [1] V. F. Nesterenko, "Propagation of nonlinear compression pulses in granular media", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 24, 733-743, 1983.
- [2] A. N. Lazaridi and V. F. Nesterenko, "Observation of a new type of solitary waves in a one-dimensional granular medium", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 26, 405-408, 1985.
- [3] R. S. Sinkovits and S. Sen, "Nonlinear Dynamics in Granular Columns", *Phys. Rev. Lett.*, 74, 2686, 1995.
- [4] C. Coste, E. Falcon and S. Fauve, "Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact", *Phys. Rev. E*, 56, pp. 6104-6117, 1997.
- [5] E. Hascoet, H. J. Hermann and V. Loreto, "Shock propagation in a granular chain", *Phys. Rev. E*, 59, 3202-3206, 1999.
- [6] S. Job, F. Melo, A. Sokolow and S. Sen, "How solitary waves interact with boundaries in a 1D Granular Medium", *Phys. Rev. Lett.*, 94, 178002, 2005.
- [7] F. Melo, S. Job, F. Santibanez and F. Tapia, "Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain", *Phys. Rev. E*, 73, 041305, 2006.
- [8] V. F. Nesterenko, "Dynamics of heterogeneous materials", Springer-Verlag (New York), 2001.
- [9] C.-H. Liu and S. R. Nagel, "Sound in a granular material: Disorder and nonlinearity", *Phys. Rev. B*, 48, 15646, 1993.
- [10] E. Somfai, J.-N. Roux, J. H. Snoeijer, M. van Hecke and Wim van Saarloos, "Elastic wave propagation in confined granular systems", *Phys. Rev. E*, 72, 021301, 2005.
- [11] H. Hertz, *Über die Berührung fester elastischer Körper*", *J. Reine Angew. Math.*, 92, 156-171, 1881.
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Theorie de l'élasticité", Mir (Moscou), 2nd dition (in French), 1967.
- [13] A. Chatterjee, "Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres", *Phys. Rev. E*, 59, 5912-5919, 1999.
- [14] E. Hascoet and H. J. Hermann, "Shock in non-loaded bead chains with impurities", *Eur. Phys. J. B*, 4, 183-190, 2000.
- [15] S. Job, F. Santibanez, F. Tapia and F. Melo, "Wave localization in Hertzian chains containing small intruder", (to be submitted), 2007.
- [16] V. F. Nesterenko, "Solitary waves in discrete media with anomalous compressibility and similar to sonic vacuum", *J. Phys. IV*, 4, C8-729, 1994.
- [17] V.F. Nesterenko, A.N. Lazaridi and E.B. Sibiriyakov, "The decay of soliton at the contact of two acoustic vacuums", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 36, 166-168, 1995.
- [18] V.F. Nesterenko, C. Daraio, E. Herbold and S. Jin, "Anomalous wave reflection at the interface of two strongly nonlinear granular media", *Phys. Rev. Lett.*, 95, 158702, 2005.
- [19] J. Hong, "Universal Power-Law Decay of the Impulse Energy in Granular Protectors", *Phys. Rev. Lett.*, 94, 108001, 2005.
- [20] A. Sokolow, E. G. Bittle and Surajit Sen, "Formation of solitary wave trains in granular alignments", *Europhysics Letters*, 77, 24002, 2007.
- [21] S. Job, F. Melo, A. Sokolow and S. Sen, "Solitary wave trains in granular chains: experiments, theory and simulations", *Granular Matter* (submitted), 2007.
- [22] X. Jia and P. Mills, "Sound propagation in dense granular materials", in "Powders and Grains", Y. Kishino (ed.), Balkema (Rotterdam), 105-112, 2001.
- [23] X. Jia, "Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media", *Phys. Rev. Lett.*, 93, 154303, 2004.
- [24] E. B. Herbold, V. F. Nesterenko and C. Daraio, "Influence of Controlled Viscous Dissipation on Propagation of Strongly Nonlinear Waves in Steel-Based Phononic Crystals", in "Shock compression of condensed matter", AIP (Melville), 1523-1526, 2005.
- [25] B. J. Hamrock, "Fundamentals of fluid film lubrication", McGraw-Hill (New York), 1994.
- [26] R.H. Davis, J.M. Serayssol and E.J. Hinch, "The elasto-hydrodynamic collision of two spheres", *J. Fluid Mech.*, 163, 479-497, 1986.

D.3. Nonlinear waves in dry and wet Hertzian granular chains

Nonlinear waves in dry and wet Hertzian granular chains

Stéphane Job^{a,*}, Francisco Santibanez^b, Franco Tapia^b, Francisco Melo^b

^a SUPMECA, 3 rue Fernand Hainaut 93407 Saint-Ouen, France

^b Departamento de Física, USACH and CIMAT, Av. Ecuador 3493, Casilla 307, Correo 2, Santiago de Chile, Chile

Received 10 March 2008; accepted 11 March 2008

Available online 16 March 2008

Abstract

A one-dimensional dry granular medium, a chain of beads which interact via the nonlinear Hertz potential, exhibits strongly nonlinear behaviors. When such an alignment further contains some fluid in the interstices between grains, it may exhibit new interesting features. We report some recent experiments, analysis and numerical simulations concerning nonlinear wave propagation in dry and wet chains of spheres. We consider first a monodisperse chain as a reference case. We then analyze how the pulse characteristics are modified in the presence of an interstitial viscous fluid. The fluid not only induces dissipation but also strongly affect the intergrain stiffness: in a wet chain, wave speed is enhanced and pulses are shorter. Simple experiments performed with a single sphere colliding a wall covered by a thin film of fluid confirm these observations. We demonstrate that even a very small amount of fluid can overcome the Hertzian potential and is responsible for a large increase of contact stiffness. Possible mechanisms for wet contact hardening are related to large fluid shear rate during fast elastohydrodynamic collision between grains.

© 2008 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 45.70.-n; 43.25.+y; 05.45.-a; 62.50.+p

Keywords: One-dimensional granular chain; Hertz potential; Nonlinear wave; Viscous fluid

1. Introduction

The problem of mechanical energy transport in alignments of grains has attracted significant attention in recent years [1–7]. When a linear chain of beads is held and loaded within boundaries, it is well established that sound waves may propagate and acoustic speed increases with imposed static stress. In the presence of loading, linear acoustic waves disperse as a function of time and space [8]. When the chain is not loaded, i.e. when the grains barely touch one another, acoustic speed vanishes: the medium cannot sustain linear acoustic waves. In this sonic vacuum limit, nonlinear phenomena predominate and balance dispersive effects. Any perturbation is thus known to result in strongly nonlinear waves which travel with well-defined profiles and

amplitude dependent velocity [1]. In loaded or non-loaded granular chains, the characteristic time of propagating waves is proportional to the characteristic dimensions of the grains. Waves in usual granular media, having sub millimeter dimensions, generally involve ultrasonic frequency content and short time events.

At first glance, a clear understanding on how energy propagates in these alignments might be of interest to shed some light on real granular beds' dynamics at macroscopic scale. In an early paper, Liu and Nagel [9] showed that sound propagation could be related to the existence of one-dimensional force networks in unconsolidated granular materials. However, Somfai et al. [10] recently demonstrated that the link between sound, force networks and stiffness networks might not be obvious. In fact, single alignments do not take into account for essential complex nature of 3D granular materials. The transposition should thus be considered with care. Nevertheless, the grain–grain dynamics being relevant at the microscopic scale, whatever

* Corresponding author.

E-mail address: stephane.job@supmeca.fr (S. Job).

URL: <http://www.supmeca.fr/perso/jobs/> (S. Job).

the macroscopic arrangement may be, this drawback may constitute an asset. The lack of complexity gives the opportunity to use these simple alignments as useful tools to probe some specific behaviors of granular materials that could not easily be identified in most situations. Moreover, we propose in this paper to analyze the dynamics of granular chains made of grains having centimeter dimensions, in which experiments can be performed carefully, and for which the wave frequency content is slightly below typical ultrasonic waves.

In this paper, we report some recent experimental studies, analysis, and numerical simulations, devoted to understand how nonlinear waves propagate in dry granular chains, and how the addition of some viscous fluid between grains may affect the dynamics of such a medium. First, we report in Section 2 some experiments and analysis performed in dry Hertzian chains of beads. These experiments were performed in a monodisperse chain, as a reference configuration. In Section 3, we explore how a small amount of viscous fluid between grains of a monodisperse chain may modify nonlinear wave propagation characteristics. The presence of an interstitial viscous fluid enhances the dissipation process, but also induces a large increase of wave speed. In Section 4, we intent to provide some key understanding, by considering the effect of an interstitial fluid on the contact dynamics between a single sphere and a flat wall.

2. Dry Hertzian chain of beads: nonlinear long-wavelength description and experiments

The experimental configuration under study is a one dimensional non-loaded chain of beads. All our beads are high carbon chrome hardened 100C6 steel roll bearing (density $\rho = 7780 \text{ kg/m}^3$, Young modulus $E = 203 \text{ GPa}$, and Poisson ratio $\nu = 0.3$), with radius $R = 13 \text{ mm}$ and mass $m = (4/3)\pi\rho R^3 \simeq 71.6 \text{ g}$. The chain is impacted by a spherical striker initially moving at velocity v_s and whose radius is $R_s = 4 \text{ mm}$. Typical elements of our experimental setups are shown in Fig. 1. Measurements are achieved by using two piezoelectric force sensors. The external surface of the two sensors is made of stainless steel whose mechanical properties (Young modulus and Poisson ratio) are assumed close to the bead properties. One of the sensors (PCB 10471) is boxed in a rigid and non moving heavy piece of metal placed at the end of the chain, and a second one (PCB 200B02) is inserted inside a 13 mm in radius bead that has been cut in two parts. The mass of the bead–sensor element has been rectified to match the mass of an original bead. The mass of the spherical cap in front of the sensor has been made as negligible as possible (about 10% of the total mass) in order to reduce inertial effect. This ensures the embedded sensor accurately measures the force at the contact between two beads [6].

When the striker collides the first bead of a granular chain, the kinetic energy generates an elastic deformation of the contact region. This results in local increase of

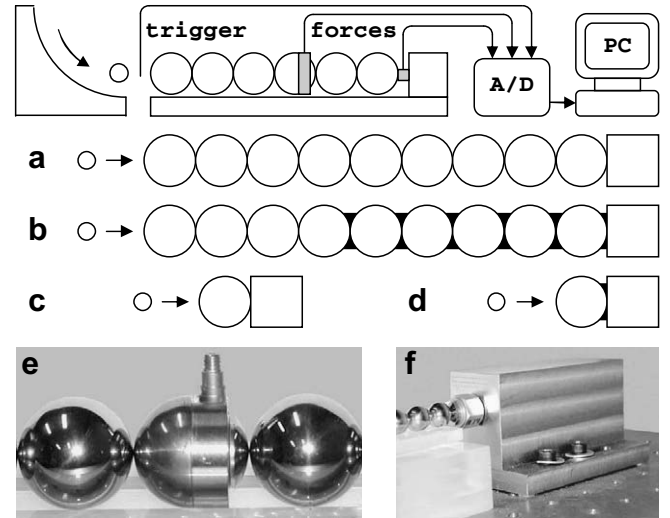


Fig. 1. Experimental setup: a chain of spheres impacted by a smaller striker bead, with data acquisition facilities. Force versus time is simultaneously recorded by a sensor embedded in one of the bead (e) and by a flat and non moving sensor placed at the end of the chain (f). The dry monodisperse chain (a) and the single bead colliding the flat sensor (c) serve as reference configurations. Setups (b) and (d) show a monodisperse chain and a single bead, respectively, in which an additional viscous fluid has been set at some of the contacts. In configurations (c) and (d), an electrical switch circuit (not shown) allow to measure whether the bead and the sensor are in contact or not.

potential energy which is then release through the delayed acceleration of the impacted bead. From one contact to another and from bead to bead, potential and kinetic energy thus propagate along the granular chain [1,2,8]. The overlap at contact n (between beads $n - 1$ and n) is defined as $\delta_n = (u_{n-1} - u_n)$, where u_n is the displacement relative to static equilibrium position of bead number n . The overlap is positive if beads are compressed and negative if beads loose contact. Derived from Hertz potential [11–13], the force at contact n is $F_n = \kappa_n(\delta_n)_+^{3/2}$, where $\kappa_n = (\theta_{n-1} + \theta_n)^{-1}(R_{n-1}^{-1} + R_n^{-1})^{-1/2}$ and $\theta_n = 3(1 - \nu_n^2)/4E_n$ are constants. The subscript (+) indicates that Hertzian force is non-zero during solids compression ($\delta_n > 0$), and is zero when solids loose contact ($\delta_n \leq 0$). Finally, the dynamics of an infinite chain of identical beads is described by applying Newton's second law to each bead n ,

$$m\ddot{u}_n = \kappa(u_{n-1} - u_n)_+^{3/2} - \kappa(u_n - u_{n+1})_+^{3/2}, \quad (1)$$

where $\kappa = R^{1/2}/(2^{3/2}\theta)$. A continuum limit of this set of equations can be derived under the long-wavelength approximation, when characteristic wavelength λ of the deformation is greater than the radii of the beads [8]. Keeping terms of up to the fourth order of small parameter $(2R/\lambda)$ in Taylor expansions of $u_{n\pm 1} = u(x_n \pm 2R, t)$ versus $u_n = u(x_n, t)$ leads to a nonlinear equation for the compression strain $\psi(x, t) = -\partial_x u(x, t) > 0$,

$$\ddot{\Psi} \simeq (2R)^{5/2}(\kappa/m) \left[\Psi^3 + (2/5)R^2\Psi^4(\Psi^5)_{xx} \right]. \quad (2)$$

An exact solution of Eq. (2) is,

$$\Psi = \Psi_m \cos^4 \xi, \quad \xi = \frac{x - vt}{R\sqrt{10}}, \quad v = \sqrt{\frac{6}{5\pi\rho\theta}} \Psi_m^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

where one hump of the strain wave Ψ , for $|\xi| \leq \pi/2$, describes a single solitary wave (SW) solution [1,2,8], with a stable profile and a compact spatial extent. The width of the pulse, approximately two times the characteristic length $\lambda_{sw} = R\sqrt{10}$, only depends on beads radii, while its duration, approximately two times the characteristic time $\tau_{sw} = R\sqrt{10}/v$, depends on the strength of the wave. The solitary wave is a strongly nonlinear object: wave velocity v depends on the maximum strain Ψ_m and infinitely small perturbations tend to propagate at zero speed.

The condition for the observation of a single solitary wave depends on how energy is supplied to the system, and requires the initial collision to be shorter than the characteristic duration $2\tau_{sw}$. On the contrary, a longer duration perturbation on a finite monodisperse chain, e.g. a collision of large or heavy bead, generate a pulse in the form of solitary waves train ordered by decreasing amplitude [2,14,15].

In addition to theory, the discrete set of Eq. (1) can be solved numerically by using a classical fourth order Runge-Kutta numerical scheme, as proposed by Chatterjee [16]. The time step is chosen to be few orders of magnitude smaller than the shortest physical duration and the energy conservation is fulfilled within an error lower than 10^{-9} .

Experimental observations were previously carried out in a non-loaded monodisperse chain [6]. These measurements, performed with dry and clean beads, will serve as a reference configuration in the next section. The chain,

shown in Fig. 1a, is made of identical beads ($R = 13$ mm). As previously demonstrated experimentally and numerically [4,8,6,15], the initial impact being applied by a light striker ($R_s = 4$ mm), a single solitary wave propagates in the chain. Such a wave is shown in Fig. 2a, which represents the force measured at different positions in the chain by the embedded sensor and at the end of the chain by the flat sensor. The pulse profile quickly converges within a distance of few beads and reaches a stable profile in an excellent agreement with Eq. (3) solution. Figs. 2b and 2c show the wave velocity and the wave duration respectively as a function of the incident wave force amplitude. The measurements are compared here to numerical simulations performed by Sokolow and Sen in [6]. Experimental and simulated velocity and duration of the pulse are in satisfactory agreement with Eq. (3) theory. The slight shift of the experimental duration is due to experimental dissipative processes, and excellent agreement were achieved by considering solid friction and viscoelasticity of the solid material in simulations [6].

3. Interstitial fluid in a chain of beads

The interaction of solids separated by viscous fluid is a well known configuration in the field of Tribology [17]. In a pioneering paper, Davis, Serayssol and Hinch [18] described the contact dynamics of two elastic spheres immersed in a viscous fluid. Their numerical simulations and analytical descriptions demonstrated that complex elasto-hydrodynamic interactions occur in the lubrication regime. However, many questions remain open, and some specific features of wet granular media remain unclear. In recent experiments dealing with ultrasound propagation in sub millimeter grains sized beds, Jia and Mills [19,20] reported that both the coherent ballistic wave and the multi-scattered coda wave dissipate if some viscous fluid is mixed with the grains. Interestingly, they also reported that the velocity of the ballistic wave can increase, by up to 25%, even if the volume fraction of additional fluid is negligible, about 0.06% in their experiments. Using an effective medium description, they assumed the presence of linear viscoelastic liquid bridges between grains in parallel to dry Hertzian contacts network. Assuming the viscous fluid behaves as a Maxwell liquid, they found qualitative agreements with experiments: the elastic modulus of the viscoelastic fluid might get involved at ultrasonic frequencies and short duration collision, and explain the stiffening of the medium and the increase of pulse speed [19].

Herbold and Nesterenko's experiments [21] with a monodisperse chain fully immersed in oil (dynamic viscosity $\mu = 0.067$ Pa s) or glycerol ($\mu = 0.62$ Pa s) also revealed a slight increase of pulse velocity, about few percents, in comparison to a dry chain. They stated the velocity enhancement may be explained by an increased stiffness between particles. Performing numerical simulations, they included in Eq. (1) classical buoyancy force, drag force, pressure force, and finally a viscous force proportional to

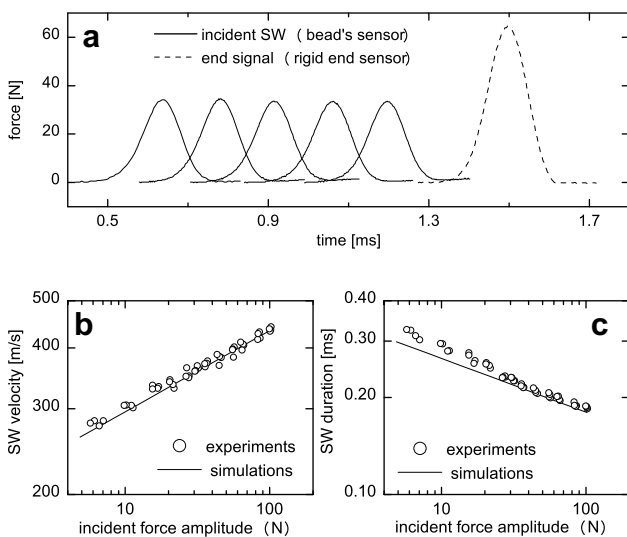


Fig. 2. Experiments performed in a dry monodisperse chain. (a) Incident force at different position in the chain, and force measured at the end, as a function of time. (b-c) Solitary wave velocity and duration, respectively, as functions of incident force amplitude. The numerical simulation of Eq. (1), performed in [6], are in satisfactory agreement with experiments and Eq. (3).

the relative velocity of the beads, $F_v = \eta \dot{\delta}_n$, in addition to the Hertzian contribution. The parameter η is a friction coefficient, proportional to the dynamic viscosity μ of the fluid. Their numerical simulations qualitatively showed that the features of the pulse can be reproduced by appropriate selection of fluid's parameters. However, the numerical model they retained for the fluid, with all additional contributions, revealed a wave speed lowering, in contradiction to experiments.

Our experimental setup is shown in Fig. 1b. Contrarily to Herbold's setup [21], our chain is not fully immersed in the fluid. Following Jia's protocols [19,20], a very small amount of viscous fluid, about 1 mm^3 i.e. about 0.01% of a single sphere volume, is set at the contact between spheres. The first half of the chain contains dry contacts in order to initiate a well defined incident pulse. All wetted beads are gently pressed in order to ensure the film of fluid to be as thin and reproducible as possible. When in place, the fluid is approximately few millimeters wide and a meniscus forms at its periphery. The radius of curvature of the meniscus is about few tenths of millimeters. Assuming the surface tension of water, about 0.07 N/m , we thus found that capillarity force induces a negligible static attraction of the beads, which is few orders of magnitude lower than typical range of forces we explored.

From simple arguments, it can be shown that a collision between wetted spheres involves inertia of the solids and viscosity of the fluid. Stokes number, $St \propto m/\mu$, a measure of the particles inertia to the viscous forces, is thus a non-dimensional parameter that governs the elastohydrodynamic interaction [18]. Substantial effects, such as the large speed enhancement observed by Jia [19,20] with sub millimeter grains at ultrasound frequency content, is thus expected to occur in a setup with larger grains, by considering oils with higher viscosities. The fluids we used are *Sylgard 184* (a non-cured base solution, part of a silicone elastomer kit, Dow Corning Inc), *Rhodorsil 5000* and *Rhodorsil 10000* (formerly manufactured by Rhône-Poulenc company). Their densities, compressibilities, and consequently sound speeds, are close to water properties ($\rho \simeq 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\chi \simeq 0.5 \text{ GPa}^{-1}$, and $c_0 = 1/\sqrt{\rho\chi} \simeq 1500 \text{ m/s}$). These three fluids are polymers solution known to behave as non-Newtonian shear-thinning fluids: the viscosity μ , which depends on fluid shear rate $\dot{\gamma}$, is usually described by Carreau relation [22]:

$$\mu = \mu_0 [1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^\beta]^{(\alpha/\beta)}, \quad (4)$$

where μ_0 is the zero shear rate viscosity, $\dot{\gamma}_c$ is a critical shear rate, and α and β are real exponents. Values of these parameters are summarized in Table 1. As polymer fluids, they also exhibit a linear viscoelastic behavior due to the elastic response of polymer molecules. Oswald reported that *Rhodorsil* oils elastic modulus is constant and about 5 kPa for a large range of viscosities [23].

The measurements which correspond to the experimental configuration of Fig. 1b using *Sylgard 184* fluid are

Table 1
Viscous fluid parameters

viscous fluid	μ_0 (Pa s)	$\dot{\gamma}_c$ (s^{-1})	α	β
<i>Sylgard 184</i>	5.50	–	< 0	–
<i>Rhodorsil 5000</i>	4.91	1624	–0.45	1.17
<i>Rhodorsil 10000</i>	9.50	1860	–0.56	1.18

Zero shear rate dynamic viscosity μ_0 , critical shear rate $\dot{\gamma}_c$, and exponents α and β correspond to parameters introduced in Eq. (4). *Sylgard 184* is known to behave as a shear-thinning fluid ($\alpha < 0$) and μ_0 corresponds to the manufacturer value. Parameters for *Rhodorsil* oils were obtained by matching Eq. (4) to manufacturer datasheets.

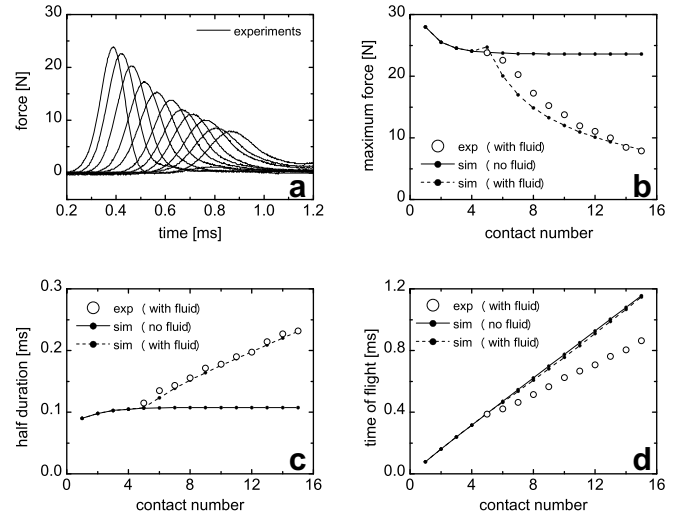


Fig. 3. Monodisperse chain with additional interstitial viscous fluid (*Sylgard 184*) set at the 10 last contacts. (a) Force versus time at different position. (b) Force amplitude, (c) half-duration, and (d) time of flight, versus contact number. In inset (b), (c) and (d), simulations are numerical solutions of Eq. (5) with $\eta = 0$ in the dry case (solid lines) and $\eta = 250 \text{ N s/m}$ (dashed lines) in the wet configuration. The wet numerical solution shows satisfactory agreements for the amplitude decrease and the broadening of the pulse, but fails to describe the pulse acceleration. The experimental pulse velocity is $v = 341 \text{ m/s}$ in the dry case and increases by 56%, up to $v = 531 \text{ m/s}$, in the presence of interstitial fluid.

shown in Fig. 3. For the sake of comparison, maximum force, half-duration, and time of flight of an entirely dry chain obtained from numerical simulations of Eq. (1) are plotted in solid lines in Fig. 3. Measurements clearly show that large dissipation and wave speed enhancement occurs when the pulse reaches the wetted part of the chain. Similar features have been observed by replacing *Sylgard 184* with *Rhodorsil* oils. As a first try, we intended to take into account for the presence of the fluid by including a viscous force proportional to the relative velocity in the set of Eq. (1). As proposed by Herbold [21], the modified set of equations is,

$$m\ddot{u}_n = \kappa[(\delta_n)_+^{3/2} - (\delta_{n+1})_+^{3/2}] + \eta(\dot{\delta}_n - \dot{\delta}_{n+1}), \quad (5)$$

where η is a viscous parameter proportional to the fluid viscosity μ (see Eq. (A.4)). For the sake of simplicity, the fluid is assumed Newtonian, with constant viscosity. The numerical solution of Eq. (5) is plotted in Fig. 3 in dashed lines.

We found that a satisfactory agreement for both the amplitude decrease and the broadening of the pulse can be achieved by choosing an appropriate viscous parameter ($\eta_n = 250 \text{ N s/m}$ for *Sylgard 184* in the experimental conditions). Our measurements seem thus to confirm Herbold's assumption upon the introduction of a viscous term proportional to the relative velocity [21]. A very weak increase of the pulse velocity is observed in our numerical simulations, which however clearly disagrees with experimental observations. The model presented in Eq. (5) consequently not appears sufficient to describe properly the dynamics of the contact between wetted spheres.

The presence of viscous fluid between the beads of a granular chain induces a large increase of the stiffness in the medium. The hardening of the medium, which leads to the substantial enhancement of wave speed, cannot be predicted by considering a purely viscous fluid model. Such hardening is closely related to the presence of interstitial fluid in the vicinity of the intergrain contact region. The analysis of the wet chain's dynamics might be complex. We thus propose in next section to get insight on the effects observed in a wet chain of beads, by considering the rather simple configuration of a single bead colliding a flat wall covered by a thin film of viscous fluid.

4. Interstitial fluid at a single contact

We intent here to identify the essential features that might shed some light on how an interstitial fluid modifies the intergrain dynamics during the collision of non-conformal solids. The reference setup, shown in Fig. 1c, corresponds to a single bead with radius $R = 13 \text{ mm}$ colliding the flat and non-moving dry sensor. The bead, initially barely touching the sensor, is impacted on the back by a striker (a small sphere with radius $R_s = 4 \text{ mm}$) thrown on chute from precisely located heights. An electrical switch, not shown in Fig. 1, allows us to know whether the bead and the sensor are in contact or not. The force is then recorded as a function of time for different striker initial heights. Each measurement is repeated five times to improve experimental accuracy. The striker velocity is obtained indirectly by solving the following set of equations, derived from Eq. (1),

$$\begin{cases} m_s \ddot{u}_s = -\kappa_s (u_s - u_b)_+^{3/2}, \\ m_b \ddot{u}_b = \kappa_s (u_s - u_b)_+^{3/2} - \kappa_b (u_b)_+^{3/2}. \end{cases} \quad (6)$$

For any initial striker height, the initial striker velocity $\dot{u}_s(t=0)$ is found such that the maximum simulated force $F_b = \kappa_b (u_b)_+^{3/2}$ matches the maximum experimental force. In Eq. (6), subscripts b and s denotes the bead and the striker, respectively, m_b and m_s are spheres' masses, u_b and u_s are spheres' positions relative to their initial positions, and from Section 2 we derive that $\kappa_b = \sqrt{R}/2\theta$ and $\kappa_s = \sqrt{Rr}/(R+r)/2\theta$. We find that the striker velocity approximately ranges from 0.1 m/s to 0.7 m/s, when the maximum compression force approximately ranges from 8 N to 60 N in the dry configuration.

The single wet bead setup is shown in Fig. 1d. As done in Section 3, a small amount (about 1 mm^3) of each of our three viscous fluids is set between the bead and the sensor. The bead is gently pressed on the sensor until the electrical switch indicates that both metallic solids barely touch. The striker is then dropped on the chute from same heights used in the dry configuration. The striker thus collides the bead and the force applied by the bead on the sensor is recorded as a function of time. Each measurement is repeated five times to improve experimental accuracy.

Experimental forces versus time, in dry and wet configurations, are presented in Fig. 4 (*Sylgard 184*) and Fig. 5 (*Rhodorsil 5000*), for increasing striker velocity v_s . In addition to force measurements, the electrical switch signal indicates in each plot whether the bead and the sensor are in contact (upper state) or not (lower state). Force signals clearly show that the presence of an interstitial fluid modifies the contact dynamics. Compared to a dry contact, the loading is faster, the half-duration of the first compression is shorter, and the maximum load is higher. Moreover, the force profile depends on the initial impact strength, and appears closely related to the bead–sensor contact state. The force looks like a sub-damped harmonic oscillator response at lowest striker velocity, for which the bead always keeps in contact with the sensor (e.g. see Fig. 4a). At highest striker velocity, the bead loses contact from the sensor after the first compression, and the late-time force appears like a purely viscous relaxation of the load,

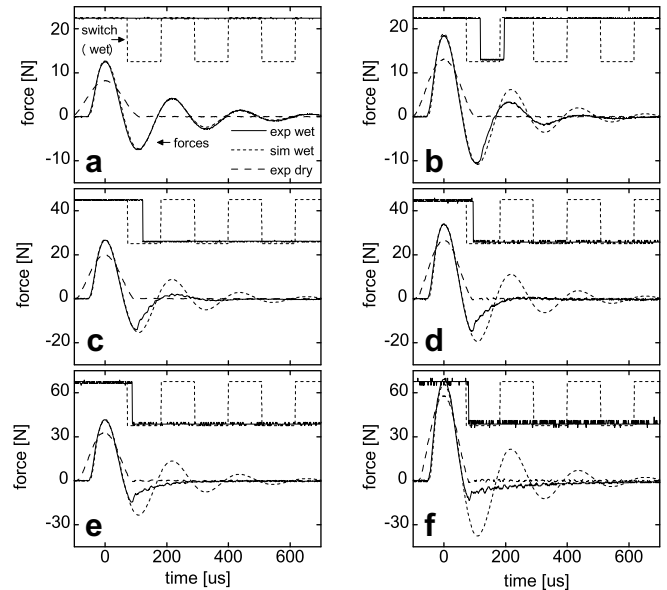


Fig. 4. Single bead colliding a flat sensor covered by a thin film of *Sylgard 184*, after being impacted by a striker. Insets (a) to (f) represent forces and contact state versus time, for increasing striker velocity. An upper value of the switch means the bead is in contact with the sensor, and a lower one means contact loss. Large dashed and solid lines correspond to the forces measured in dry and wet configurations, respectively. Short dashed lines are numerical simulations of Eq. (6) using the parameters η and k indicated in Table 2. Measured and simulated forces for a wet contact satisfactorily agree in inset (a).

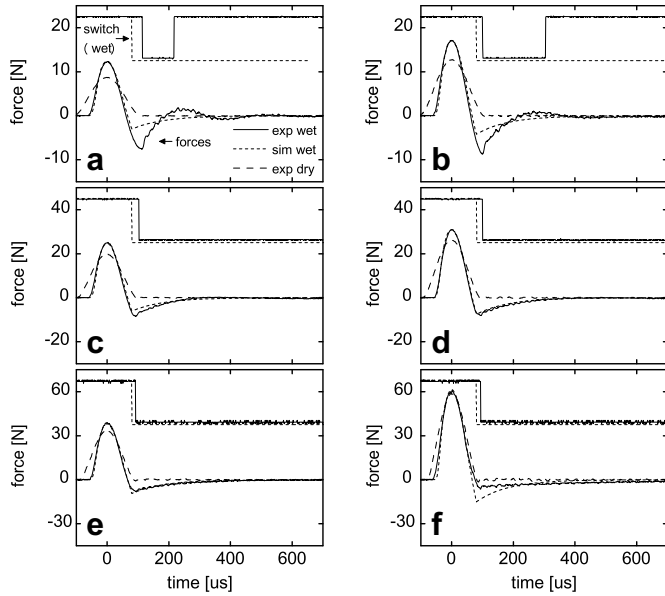


Fig. 5. Same as Fig. 4 but fluid is *Rhodorsil 5000* and numerical simulations are solutions of Eq. (9) rather than of Eq. (7), assuming the restoring force is zero when the bead loses contact and moves away from the sensor. In inset (d), measured force and contact switch both agree with simulation with a very satisfactory agreement.

that might corresponds to the exponential deceleration of the bead after bouncing back on the sensor.

The maximum amplitude and the half-width of the first compression, in dry and wet configurations, are plotted as a function of striker velocity in Figs. 6a and 6b, respectively. The measurements are compared to numerical simulation. Hertzian dry collision experiments and numerical solutions of Eq. (6) are in excellent agreement: according to theory [12], the maximum force and the half-duration of the collision scales as $F_m \propto v_s^{6/5}$ and $\tau \propto 1/v_s^{1/5}$, respectively. The slightly higher experimental duration complies

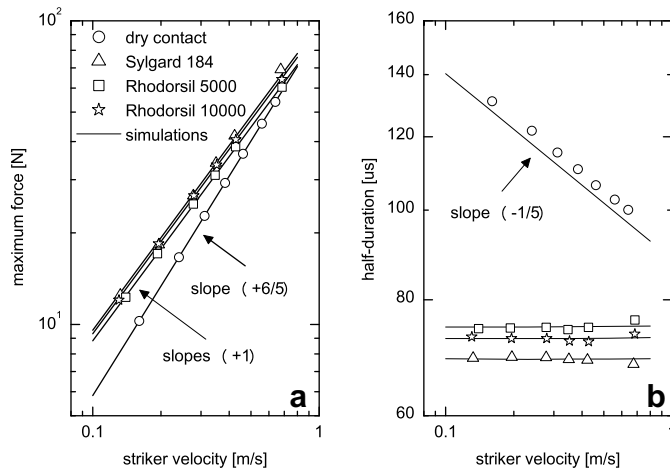


Fig. 6. Maximum force (a) and half-duration (b) of the first compression versus striker velocity. Solid lines are numerical simulations of Eq. (6) for the dry contact, and numerical simulations of Eq. (7) using the parameters $\eta = \bar{\eta}$ and $k = \bar{k}$ indicated in Table 2 for the wet configuration.

with experimental dissipation (e.g. solid friction or viscoelasticity of the bead material [6]), which is not taken into account in numerical model Eq. (6).

On the contrary, wet contacts dynamics substantially differs from Hertz theory: in the range of our experiments, the maximum force almost grows linearly with striker velocity and the half-duration of the main compression remains constant. The simplest way to simulate wet contact behaviors thus resume in replacing the Hertzian contribution in Eq. (6) by an elastic response and a viscous force, in the form,

$$\begin{cases} m_s \ddot{u}_s = -\kappa_s (u_s - u_b)_+^{3/2}, \\ m_b \ddot{u}_b = \kappa_s (u_s - u_b)_+^{3/2} - (\eta \dot{u}_b + k u_b), \end{cases} \quad (7)$$

where η is a viscous parameter and k is a constant stiffness, which may both depend on striker velocity. Matching the simulated force $F_b = (\eta \dot{u}_b + k u_b)$, obtained from the numerical solution of Eq. (7), to experimental forces, a unique pair of parameters (η, k) is found for each measurements.

Parameters η and k are plotted versus striker velocity in Fig. 7a and 7b, respectively. The viscous parameter and the wet contact stiffness approximately remain constant, as expected from the analysis of Fig. 6. For the sake of comparison, the order of magnitude of the experimental dry Hertzian stiffness, $k_h \simeq \max[F_b/u_b] \simeq \kappa_b^{2/3} \max[F_b]^{1/3}$ (see Eq. (6)), is plotted in Fig. 7b. For each fluid, average values of these parameters are summarized in Table 2. Despite our attempts, we were not able to find quantitative correlations between these parameters and the characteristics of the fluids given in Table 1. However, solving the set of Eq. (6) by using the average values $(\bar{\eta}, \bar{k})$ provides satisfactory agreements with experimental force signals at low striker veloc-

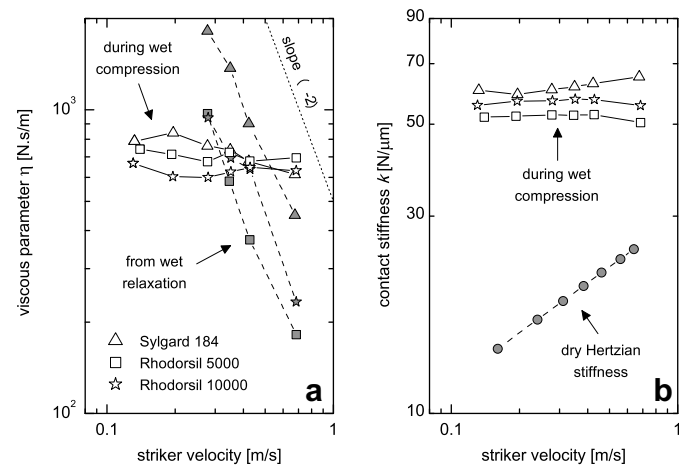


Fig. 7. Viscous parameter η (a) and wet contact stiffness k (b) versus striker velocity. In both figures, lines are guides for the eye and open symbols correspond to parameters that allow to match numerical maximum force and half-duration of the first compression to measurements. Filled symbols in (a) correspond to values of η derived from the late relaxation time, according to Eq. (8). Filled symbols in (b) correspond to the dry Hertzian stiffness.

Table 2
Experimental parameters

viscous fluid	$\bar{\eta}$ (N s/m)	\bar{k} (N/ μm)	$\bar{\tau}$ (μs)
<i>Sylgard 184</i>	736	62	69
<i>Rhodorsil 5000</i>	705	52	75
<i>Rhodorsil 10000</i>	628	57	73

The viscous parameter $\bar{\eta}$ and the wet contact stiffness \bar{k} correspond to average values presented in Fig. 7 and obtained from the fit of the main compression of a single bead impact on the wet flat sensor. Half-width $\bar{\tau}$ corresponds to the average of the values showed in Fig. 6b.

ity (see Fig. 4a), and with the maximum force and half-durations shown in Fig. 6.

The viscous parameter η can alternately be derived from the analysis of the late-time force relaxation. Late-time forces resulting from the four highest striker velocities have a well defined exponential profile. These signals are similar to an over-damped harmonic oscillator response, for which the viscous contribution overcomes the elastic response. The relaxation occurring well after the striker impact, and neglecting the linear elastic contribution, the second Eq. (7) thus reduces to $m_b \ddot{u}_b \simeq -\eta \dot{u}_b$ and the late-time force reads,

$$F(t) \propto \dot{u}_b \propto \exp(-\eta t/m_b). \quad (8)$$

Estimations of viscous parameter η from Eq. (8) are plotted in Fig. 7a. During the relaxation, viscous parameters of the three fluids are found to decrease in a power law of the striker velocity, $\eta \propto v_s^{-2}$.

From one hand, this could correspond to a shear-thinning behavior, considering that the fluid shear rate increases with the bead velocity after it bounced on the sensor. However, assuming a linear growth between bouncing velocity and striker velocity, the experimental dependence $\eta \propto v_s^{-2}$ does not match with fluids parameters (see Table 1).

From the other hand, partial slip of the fluid on the solids might also get involved in the faster decrease of the viscous parameter versus striker velocity during the late relaxation. Indeed, Zhu demonstrated that the no-slip condition at solid boundaries fails when a viscous fluid is squeezed between non-conformal smooth bodies [24], as shown e.g. in Fig. A.1. The repulsive force in Eq. (A.4) thus needs to be corrected by a prefactor which depends on a shear rate dependent slip length. This prefactor is lower than one and decreases with fluid flow rate, i.e. with striker velocity in our case, above some critical value.

Trying to capture numerically the late force relaxation behavior, we tested a numerical model, in which the elastic response crudely switches off when the bead and the sensor loose contact,

$$\begin{cases} m_s \ddot{u}_s = -\kappa_s (u_s - u_b)_+^{3/2}, \\ m_b \ddot{u}_b = \kappa_s (u_s - u_b)_+^{3/2} - [\eta \dot{u}_b + k(u_b)_+]. \end{cases} \quad (9)$$

Numerical solutions of Eq. (9), using the parameters ($\bar{\eta}$, \bar{k}) reported in Table 2 for *Rhodorsil 5000*, are compared to

experiments in Fig. 5. A satisfactory agreement is achieved for the force signal and for the contact loss instant, in Fig. 5d ($v_s \simeq 0.35$ m/s). The good agreement for the entire force signal comes from the fact that the parameter $\bar{\eta}$ used in simulation is equal, in this particular case, to the value obtained from the fit of the main compression, and to the value derived from the late relaxation (see Fig. 7a for *Rhodorsil 5000* at $v_s \simeq 0.35$ m/s).

We identify three possible mechanisms that may explain qualitatively the hardening of wet contacts. At the stage of our investigations, the exact scenario has not been clearly unraveled, and none of the following models provides quantitative agreements with experimental observations.

The first mechanism refers to the fluid dynamics close to contact region. As demonstrated in Appendix, the pressure gradient, the shear rate, and the radial velocity in a non-zero thick fluid all have maximal amplitudes at a radial distance $r_m \propto (Rh_0)^{1/2}$ from the contact, such that $(\partial_r p)_m \propto (R/h_0)^{5/2}$, $\dot{\gamma}_m \propto (R/h_0)^{3/2}$, and $v_{r,m} \propto (R/h_0)^{1/2}$, respectively. When the thickness h_0 vanishes, the fluid may thereby become compressible in the close vicinity of the contact region, if the radial Mach number, $M = (v_{r,m}/c_0)$, fulfills the condition $M \geq \sqrt{Re}$ [22], where $Re \simeq (\rho h_0 v_{r,m}/\mu)$ is the Reynolds number, and where c_0 is the sound speed, ρ the density, and μ the viscosity of the fluid. The elastic deformation of the fluid in the close periphery of the contact region might thus induce an additional stiffness inversely proportional to the fluid compressibility.

The second mechanism might be related to the linear viscoelastic response of polymer solutions, assuming a Maxwell fluid behavior [19]. The response of polymer fluids to high frequency content excitations involves the elastic stretching of polymers molecules [23]. The viscous fluids we used might thus tend to behave elastically under the high fluid shear rates generated during grains collisions.

The third mechanism refers to the bead deformation induced by the hydrodynamic pressure in the interstitial fluid. As demonstrated by Davis [18] and in Eq. (A.8), the elasto-hydrodynamic deformation δ is proportional to the contact load, $F = k\delta$, where the resulting stiffness scales as $k \propto \sqrt{Rh_0}/\theta$, provided the solid deformation remain small compared to fluid thickness, $\delta \ll h_0$.

5. Conclusion

In summary, we have reported detailed studies of the propagation of strongly nonlinear waves in non-loaded chains of beads. We first presented some results obtained in a dry monodisperse chain, as a reference configuration. Experimental results confirm the reliability of existing theory and are in excellent agreement with numerical simulations. We then exposed experiments and interpretations concerning wave propagation in a Hertzian chain containing an additional fluid in the interstices between beads. Dissipative and hardening effects were clearly demonstrated. In addition to a viscous response, the interstitial fluid induces a hardening of intergrains contact, which in turn

leads to an increase of the wave velocity. We then focused on the analysis of the elastohydrodynamic collision of a single sphere on a sensor with interstitial fluid. We showed that a viscous force together with a linear elastic response describe qualitatively well the force profile. The linear stiffness largely overcomes the original dry Hertzian stiffness. As a perspective, quantitative aspects are expected from the characterization of the fluid rheology, by measuring the velocity of the bead during the collision, in addition to the force. Considering smaller volume of fluid, and fluid with lower viscosities are some other already engaged perspectives. All these observations should prove valuable to reach a better knowledge of the dynamics of real and complex granular materials.

Acknowledgement

The authors acknowledge support of Conicyt under Fondap Program No. 11980002.

Appendix A. Elastohydrodynamic collision for non-zero thick interstitial fluid

We consider an elastic sphere, with radius R , separated from a flat wall by a layer of incompressible fluid, whose thickness is h and viscosity is μ , as shown in Fig. A.1. When the sphere is displaced toward the wall with relative velocity \dot{u} , the fluid is thinned and squeezed out in radial direction. Viscosity induces a hydrodynamic pressure opposed to the displacement, which in turn induces a deformation δ of the bead. For small elastohydrodynamic deformations, $\delta \ll h$, the pressure is solution of Reynolds equation in cylindrical coordinates [17,18],

$$\partial_r[(rh^3/12\mu)\partial_r p] = r\dot{h} \simeq -r\dot{u}. \quad (\text{A.1})$$

Fluid height is $h(r, t) = h_0(t) + r^2/2R$ for $r \ll R$. Integrating Eq. (A.1), one finds the pressure gradient,

$$\partial_r p(r, t) = -6\mu\dot{u}r/h^3, \quad (\text{A.2})$$

the hydrodynamic pressure,

$$p(r, t) = 3\mu R\dot{u}/h^2, \quad (\text{A.3})$$

and the repulsive force,

$$F(t) = 6\pi\mu R^2\dot{u}/h_0. \quad (\text{A.4})$$

The fluid shear rate, $\dot{\gamma} = \partial_z v_r$ where v_r is the radial fluid velocity, is obtained from Eq. (A.3) and Stokes equation, $\partial_r p = \mu\partial_z \dot{\gamma}$,

$$\dot{\gamma}(r, z, t) = (3r\dot{u}/h^2) \times (1 - 2z/h). \quad (\text{A.5})$$

Integrating Eq. (A.5) with no-slip condition at solids boundaries, the radial fluid velocity reads,

$$v_r(r, z, t) = (3r\dot{u}/h) \times (z/h) \times (1 - z/h). \quad (\text{A.6})$$

The radial velocity is zero at $r = 0$ and is maximal at $z = h(r)/2$. It reaches there a maximum at $r_m = \sqrt{2Rh_0}$,

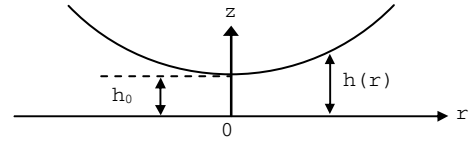


Fig. A.1. Schematic view of a sphere and a flat wall separated by a viscous fluid in cylindrical coordinates.

such that $v_r(r_m, h/2, t) = (3\dot{u}/8)\sqrt{2Rh_0}$, and then vanishes for $r > r_m$.

The pressure in Eq. (A.3) differs from dry Hertzian pressure, $p(r) \propto (\delta/a)\sqrt{1 - (r/a)^2}$, where $a = \sqrt{R\delta}$ is the radius of dry contact region [13]. However, Davis [18] demonstrated that, provided $\delta \ll h$, the pressure in Eq. (A.3) causes an elastic deformation of the bead, whose asymptotic expression is,

$$\delta(r, t) = 2\pi\theta\mu\dot{u}(2R/h_0)^{3/2}\Omega\left(r/\sqrt{2Rh_0}\right), \quad (\text{A.7})$$

where $\Omega(0) = 1$ and $\Omega(\xi \gg 1) \simeq 2/\pi\xi$. From Eqs. (A.4) and (A.7), one finds that the elastohydrodynamic deformation of the bead increases linearly with the repulsive force, such that,

$$F(t) = \left[(3/4\theta)\sqrt{2Rh_0}\right]\delta(0, t). \quad (\text{A.8})$$

References

- [1] V.F. Nesterenko, Propagation of nonlinear compression pulses in granular media, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 24 (1983) 733–743.
- [2] A.N. Lazaridi, V.F. Nesterenko, Observation of a new type of solitary waves in a one-dimensional granular medium, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 26 (1985) 405–408.
- [3] R.S. Sinkovits, S. Sen, Nonlinear dynamics in granular columns, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 2686.
- [4] C. Coste, E. Falcon, S. Fauve, Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 6104–6117.
- [5] E. Hascoet, H.J. Hermann, V. Loreto, Shock propagation in a granular chain, *Phys. Rev. E* 59 (1999) 3202–3206.
- [6] S. Job, F. Melo, A. Sokolow, S. Sen, How solitary waves interact with boundaries in a 1d granular medium, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 178002.
- [7] F. Melo, S. Job, F. Santibanez, F. Tapia, Experimental evidence of shock mitigation in a Hertzian tapered chain, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 041305.
- [8] V.F. Nesterenko, *Dynamics of Heterogeneous Materials*, Springer-Verlag, NY, 2001.
- [9] C.-H. Liu, S.R. Nagel, Sound in a granular material: disorder and nonlinearity, *Phys. Rev. B* 48 (1993) 15646.
- [10] E. Somfai, J.-N. Roux, J.H. Snoeijer, M. van Hecke, Wim van Saarloos, Elastic wave propagation in confined granular systems, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 021301.
- [11] H. Hertz, Über die berührung fester elastischer körper, *J. Reine Angew. Math.* 92 (1881) 156–171.
- [12] L.D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theorie de l'élasticité*. Mir, Moscou, second ed., 1967 (in French).
- [13] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [14] A. Sokolow, E.G. Bittle, Surajit Sen, Formation of solitary wave trains in granular alignments, *Europhys. Lett.* 77 (2007) 24002.

- [15] S. Job, F. Melo, A. Sokolow, S. Sen, Solitary wave trains in granular chains: experiments, theory and simulations, *Granular Matter* 10 (1) (2007) 13–20.
- [16] A. Chatterjee, Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres, *Phys. Rev. E* 59 (1999) 5912–5919.
- [17] B.J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw-Hill, NY, 1994.
- [18] R.H. Davis, J.M. Serayssol, E.J. Hinch, The elastohydrodynamic collision of two spheres, *J. Fluid Mech.* 163 (1986) 479–497.
- [19] X. Jia, P. Mills, Sound propagation in dense granular materials, in: Y. Kishino (Ed.), *Powders and Grains*, Rotterdam, Balkema, 2001, pp. 105–112.
- [20] X. Jia, Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 154303.
- [21] E.B. Herbold, V.F. Nesterenko, C. Daraio, Influence of controlled viscous dissipation on propagation of strongly nonlinear waves in steel-based phononic crystals, in: *Shock compression of condensed matter*, Melville, 2005, AIP, pp. 1523–1526.
- [22] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, EDP Sciences – CNRS Editions, Paris, 2001.
- [23] P. Oswald, *Rhéophysique: ou comment coule la matière*, Belin, Paris, 2005.
- [24] Y. Zhu, S. Granick, Rate-dependent slip of newtonian liquid at smooth surfaces, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 096105.

D.4. Experimental Evidence of Localized Oscillations in Hertzian Chains

Wave localization in strongly nonlinear Hertzian chains with mass defect

Stéphane Job,¹ Francisco Santibanez,² Franco Tapia,² and Francisco Melo²

¹*Supmecca, 3 rue Fernand Hainaut, 93407 Saint-Ouen Cedex, France*

²*Departamento de Física and Center for Advanced Interdisciplinary Research in Materials (CIMAT), Universidad de Santiago de Chile, Avenida Ecuador 3493, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile*
(Received 20 January 2009; revised manuscript received 23 July 2009; published 24 August 2009)

We report observations of mechanical energy localization in a strongly nonlinear discrete lattice. The experimental setup we consider is a one-dimensional nonloaded horizontal chain of identical spheres interacting via the nonlinear Hertz potential which contains a mass defect. Our experiments show that the interaction of a solitary wave with a light intruder excites a nonlinear localized mode. In agreement with dimensional analysis, we find that the frequency of localized oscillations exceeds the incident wave frequency spectrum and nonlinearly depends on incident wave strength and on mass and size of the intruder. The absence of tensile stress between grains allows some gaps to open, which in turn induces a significant enhancement of the amplitude of oscillations. We performed numerical simulations that precisely describe our observations without any adjusting parameters.

DOI: [10.1103/PhysRevE.80.025602](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.025602)

PACS number(s): 46.40.-f, 05.45.-a, 83.80.Fg, 62.50.-p

Linear wave localization has been studied for long in discrete systems [1] or lattices [2,3]. For instance, the presence of isotopes in crystals are known to enhance optical absorption at given frequencies [4]. In turn, the interplay between discreteness and nonlinearity give rise to novel topological dynamics, such as envelope modes [5], breathers [6], or intrinsic localized modes [7]. The underlying mechanism leading to energy localization in nonlinear lattices is general and relevant for a wide variety of applications, from modern engineering problems to solid-state physics (see [5–8] and references therein). In this frame, one-dimensional nonlinear lattices have received attention since the first efforts of Fermi, Pasta, and Ulam in the mid-1950s [8]. Several investigations have tackled the problem of energy localization in nonlinear lattices with impurities, as for instance in Toda chains [9,10]. Remarkably, these lattices have been shown to share common features regarding energy localization on defects, independently of the potential interaction [11].

One-dimensional chains of elastic spheres (Hertz potential interaction) are systems suitable to observe nonlinear phenomena. In nonloaded chains, energy only propagates as fully nonlinear solitary waves [12–15] resulting from the balance between nonlinearity and nonlinear dispersion due to discreteness [13]. Any heterogeneity capable of unbalancing this equilibrium results in breaking the solitary wave symmetry, as shown for instance in tapered chains [16–18] or in stepped chains [12,19], in which solitary waves broaden or split into trains of solitary waves. Solitary wave trains formation in stepped chains involves stress oscillations localized near the interface [19]. Designing impact protection systems takes advantage of these features [20,21]. Effects of disorder on localization has also been investigated earlier in chains of randomly sized spheres [13] and more recently in diatomic chains with randomly oriented cells [22]. When loaded by static compression, Hertzian chains sustain linear acoustic waves and exhibit frequency band gaps [23], which in turn may lead to wave localization. In all these cases, the presence of defects substantially modifies the dynamics of the lattices. The elementary interaction of either lighter or heavier intruders with shock waves has been investigated

numerically [24]. When reached by a shock wave, a heavy impurity slowly translates, leading to a large transmitted solitary waves train in the forward direction [24]. A light intruder oscillates and scatters forward and backward weak delayed solitary wave trains [24].

In this Rapid Communication, we investigate experimentally the dynamics of a single light defect in a nonloaded monodisperse chain of elastic spheres. We observe localized oscillations of the impurity while interacting with a solitary wave. We show that the presence of spatial gap between the intruder and nearest neighbors enhances the oscillation amplitude. A multiscale analysis of the equations of motion of particules allows us to predict the frequency of oscillations as a function of wave strength and intruder mass and size. We also perform high-resolution numerical simulations that capture the experimental features.

Beads are 100C6 steel roll bearings [25] with density $\rho = 7780 \text{ kg/m}^3$, the Young's modulus $Y = 203 \pm 4 \text{ GPa}$, and Poisson ratio $\nu = 0.3$. The chain is made of 20 equal beads (radius $R = 13 \text{ mm}$) and contains an intruder ($2.5 \leq R_i \leq 10 \text{ mm}$) in the middle, as shown in Fig. 1. The beads, barely touching one another, are aligned on a horizontal Plexiglas track. A special short track automatically aligns the intruder on the axis of the chain [18]. The chain is ended by a flat, fixed, and heavy piece of steel. A nonlinear compressive wave (see below) is initiated from the impact of a small striker ($R_s = 4 \text{ mm}$). The pulse is monitored by measuring the load with a piezoelectric transducer (PCB 200B02, sensitivity 11.24 mV/N , and stiffness $1.9 \text{ kN}/\mu\text{m}$) inserted inside a bead cut in two parts. The total mass of the active bead matches the mass of an original bead and the rigidity of the

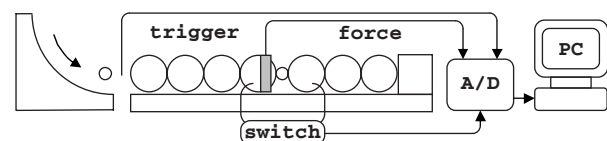


FIG. 1. Experimental setup showing a chain of beads with an intruder, sensors, and acquisition facilities.

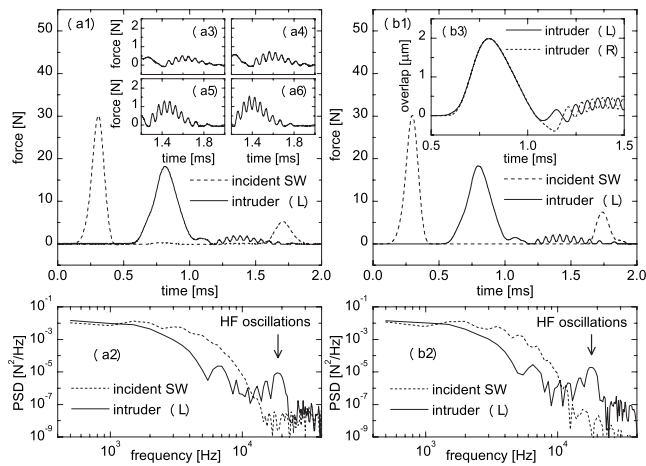


FIG. 2. Panels (a1-a6) are experiments and (b1-b3) are numerical simulations both performed in a monodisperse chain containing a 3 mm in radius intruder. Dashed line in (a1,b1) is the six beads far the intruder incident solitary wave force versus time, and solid line is the force versus time at the left intruder's contact. Power spectral densities of these forces are plotted in (a2,b2), respectively, showing high-frequency content in the intruder force. Closer views of oscillating tail in the intruder's force are shown in (a3-a6) for increasing incident force magnitude (14.1, 17.3, 22.7, and 26.3 N, respectively). Solid and dashed lines in (b3) represent overlaps between the intruder and left and right neighbor beads, respectively.

sensor is comparable to bead's material properties. The embedded sensor thus allows nonintrusive measurements of the force inside the chain [15].

Typical force signals measured by the embedded sensor in contact with the intruder, plotted in Fig. 2(a1), show that well defined oscillations appear in the tail of the incident solitary wave. The tail corresponds to a slight reflection of the incident pulse on the mass defect. Measured oscillations in the tail of the force are displayed in more details in Figs. 2(a3-a6) for increasing amplitudes of the incident solitary wave. Dissipative processes being negligible [15], conservative numerical simulations (see below) shown in Fig. 2(b1) demonstrate satisfactory agreements with experiments, without any adjusting parameter. Calculated overlaps between the intruder and neighbor beads, shown in Fig. 2(b3) [see also the relative displacements in Fig. 4(a)], demonstrate that oscillations in the tail of the force correspond to localized oscillations of the defect. Figures 2(a2) and 2(b2) depict power spectral densities of experimental and calculated forces, respectively, in which the high-frequency component corresponds to the observed oscillations.

Figure 3 presents a longer force acquisition, in which the incident pulse and the pulse reflected by the rigid end are shown. Force signals exhibit features at two different time scales that are separated by filtering low- or high-frequency contents, as shown in Fig. 3(c). Oscillations are only observed when the intruder is loaded by the solitary wave. In Fig. 3(a), intruder oscillations are only visible in the tail of the incident pulse ($0.0 < t < 1.0$ ms). Stronger and relatively faster oscillations can be observed in the reflected pulse ($1.5 < t < 3.0$ ms), both during the main compression and in the tail. Gap openings between the intruder and neighbor

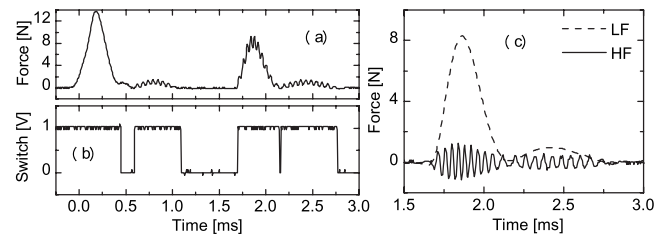


FIG. 3. Force versus time as detected by the embedded sensor in contact with a 3 mm in radius intruder. The first large peak in (a) is the incident solitary wave, and the second one is the wave after being reflected by the rigid end. The gap opening between intruder and nearest beads is indicated in (b) by jumps from upper to lower level in the contact switch. High- and low- frequency components of the force, shown in (c), are obtained by using a tenth order Butterworth filter with zero phase distortion.

beads might explain the differences between incident and reflected pulses features. We designed an electrical switch (smooth metallic brushes in contact with neighbor beads, connected to a fast transistor electrical circuit, see Fig. 1) to detect any loss of contact. The switch is on (1) when beads are in contact and off (0) when loss of contact occurs. As shown in Fig. 3(b), gap first opens right after the incident compression ($t \approx 0.5$ ms and $t \approx 2.1$ ms) and second at the end of tail ($t \approx 1.1$ ms and $t \approx 2.7$ ms). The first opening is due to the weak reflection of the pulse on the mass defect, and the second one is due to the momentum and energy transfer from the oscillating intruder to neighbors. Higher amplitude oscillations appear provided a gap between the intruder and neighbor exists.

These observations are corroborated by numerical simulation. Indeed, calculated displacements of the intruder and neighbors shown in Fig. 4(a) and the overall gap around the intruder (the difference between left and right neighbor beads displacements) shown in Fig. 4(b) demonstrate that gaps open twice at the intruder, consistently with our experiments. Figure 4(c), showing the intruder displacement relative to the center of mass of the two neighbor beads, reveals that intruder oscillations even exist during the main compression of the incident pulse [$0.5 < t < 1.0$ ms, see magnified view in

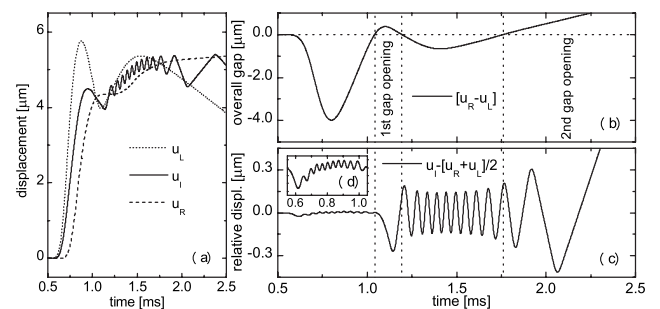


FIG. 4. Numerical simulations of the incident pulse, under same conditions as in Fig. 2(b1). (a) Positions versus time of the intruder and left and right neighbor beads. (b) Overall gap around the intruder demonstrating gap openings occur when a solitary wave crosses the intruder. (c) Intruder displacement relative to the center of mass of the two neighbor beads. (d) Magnified relative displacement during the compression.

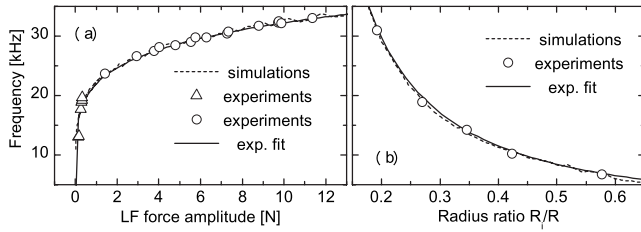


FIG. 5. Panel (a) shows frequency versus force's envelope amplitude for an $R_i=2.5$ mm in radius intruder. Triangles and circles correspond to experimental frequency detected in the tail of the incident pulse and in the reflected pulse, respectively. Panel (b) shows frequency versus intruder's radius measured in the reflected signal, whose envelope amplitude was fixed to $\bar{F}_m=8.7\pm 0.6$ N. Dashed lines correspond to numerical simulations and straight lines corresponds to Eq. (4).

Fig. 4(d)]. Momentum transfer is enhanced by larger strain gradient in the presence of gaps.

Next, we analyze how oscillations depend on incident wave strength and on intruder parameters. Frequency of oscillations is obtained from the analysis of power spectral densities of the force. Measurements are repeated nine times and averaged to minimize errors. We first run a set of experiments at constant intruder size ($R_i=2.5$ mm) while varying the amplitude of the incident solitary wave. The force amplitude is obtained from the low-pass filtered signals and results are presented in Fig. 5(a). We then keep the incident pulse amplitude constant (8.7 ± 0.6 N) and test several intruder sizes, as depicted in Fig. 5(b). Experiments show that the frequency of the intruder nonlinearly increases with the incident solitary wave strength and depends on the intruder size.

The physical behavior of solitary waves in chains of equal beads and implications for the existence of localized modes is summarized here. Under elastic deformation, the energy stored at the contact between two elastic bodies submitted to an axial compression corresponds to Hertz potential, $U_H=(2/5)\kappa\delta^{5/2}$, where δ is the overlap deformation between bodies, $\kappa^{-1}=(\theta+\theta')(R^{-1}+R'^{-1})^{1/2}$ and $\theta=3(1-\nu^2)/(4Y)$ are constants, and where R and R' are the respective radii of curvatures at the contact. The force felt at the interface derives from Hertz potential, $F_H=\partial_\delta U_H=\kappa\delta^{3/2}$. Index + indicates that Hertz force is zero when the beads loose contact (no tensile force). The dynamics of a chain of beads is thus described by the following system of N -coupled nonlinear equations:

$$m\ddot{u}_n = \kappa[(u_{n-1} - u_n)_+^{3/2} - (u_n - u_{n+1})_+^{3/2}], \quad (1)$$

where m and u_n are the mass and the position of bead n , respectively. Considering long-wavelength perturbations, such that the strain $\psi=(-\partial_x u)\approx(\delta/2R)\approx(u/\lambda)\ll 1$, a continuous equation can be derived from Eq. (1), which admits an exact solution [13] in the form of a purely compressive and periodic traveling wave, $\psi(x,t)=\psi_m \cos^4[(x-vt)/(R\sqrt{10})]$. Wave speed, $v\propto\psi_m^{1/4}$, nonlinearly depends on maximum strain. Infinitely small perturbations in the acoustic limit propagate at zero speed, linear waves are thus forbidden. One hump of this periodic function represents a soli-

tary wave solution [13]. In addition to analytical estimations, we solve the nonlinear system of Eq. (1) by using a fourth order Runge-Kutta numerical scheme [26], the embedded force sensor being incorporated in simulations for closer comparisons [27]. Numerical time step is few orders of magnitude smaller than the shortest physical duration and energy conservation is fulfilled within a relative error better than 10^{-9} .

The characteristic frequency of localized oscillations can be estimated through a multiscale analysis of Eq. (1). Here, index n denotes the intruder with radius R_i and mass $m_i=(4/3)\pi\rho R_i^3$, and $\kappa_i=\kappa(R,R_i)=\kappa(R_i,R)$ is the elastic constant that depends on radii and properties of the beads. Index $n\pm 1$ denote the two neighbor beads with radius $R>R_i$. We consider two distinct time scales: a slow time scale of the order of solitary wave duration and a fast time scale associated with intruder oscillations. Displacements of the intruder and neighbor beads are written as $u_n\approx\bar{u}_n+\tilde{u}_n e^{i\omega t}$ and $u_{n\pm 1}\approx\bar{u}_{n\pm 1}$, where \bar{u}_n and \tilde{u}_n are slowly varying functions of time. Harmonic oscillations amplitude is assumed negligible compared to solitary wave amplitude, $\tilde{u}_n\ll\bar{u}_n$. Using this ansatz into Eq. (1) leads to

$$\ddot{\tilde{u}}_n \approx \frac{\kappa_i}{m_i} [(\bar{u}_{n-1} - \bar{u}_n)_+^{3/2} - (\bar{u}_n - \bar{u}_{n+1})_+^{3/2}], \quad (2)$$

$$\omega^2 \approx \frac{3}{2} \frac{\kappa_i}{m_i} [(\bar{u}_{n-1} - \bar{u}_n)_+^{1/2} + (\bar{u}_n - \bar{u}_{n+1})_+^{1/2}], \quad (3)$$

where the first equation, at leading order, provides the displacement of the intruder at slow time scale. The second equation, at next order, determines the angular frequency of the oscillating intruder. We then introduce slowly varying forces at the contacts of the intruder, $\bar{F}_- = \kappa_i(\bar{u}_{n-1} - \bar{u}_n)_+^{3/2}$ and $\bar{F}_+ = \kappa_i(\bar{u}_n - \bar{u}_{n+1})_+^{3/2}$. Noticing that they almost behave in phase [$\bar{F}_+ \approx \bar{F}_-$, see Fig. 2(b3)], the first equation indicates that intruder acceleration oscillates around equilibrium position, $\ddot{\tilde{u}}_n \approx 0$. The second equation provides the maximum oscillation frequency $f_m = \max[\omega/2\pi]$ as a function of the amplitude of the slow time force at the intruder contact, $\bar{F}_m \approx \max[\bar{F}_+] \approx \max[\bar{F}_-]$:

$$f_m \approx \frac{3^{1/2}}{2\pi} \frac{\kappa_i^{1/3} \bar{F}_m^{1/6}}{m_i^{1/2}} \approx C \frac{(R/R_i)^{4/3} \bar{F}_m^{1/6}}{(1+R_i/R)^{1/6}}, \quad (4)$$

where $C=(3/4\pi\sqrt{\pi\rho})/(2\theta R^4)^{1/3}$. Equation (4) shows that oscillation frequency tends to zero when the load vanishes: oscillations stops as soon as the solitary wave leaves the intruder. Using the characteristics of our beads, we find a theoretical estimation, $C_i=2640$ Hz/N^{1/6}. Matching Eq. (4) to experiments and simulations shown in Fig. 5, we find $C_e=2510\pm 151$ Hz/N^{1/6} and $C_n=2531\pm 52$ Hz/N^{1/6}, respectively. The agreement among experiments, simulations, and theory shown in Fig. 5 is satisfactory, considering that no adjustable parameters is used between experiments and simulations.

Equation (4) can also be obtained by considering the low-frequency force envelope amplitude, of the order of \bar{F}_m , as a

static load at the time scale of fast oscillations, which induces an *in situ* band gap [23]. The dynamics of a loaded monodisperse chain of beads of mass m behaves according to linearized Hertz potential around static equilibrium; the intergrain stiffness reads $k \simeq (3/2)\kappa^{2/3}\bar{F}_m^{1/3}$. Small perturbations propagate as acoustic waves according to the dispersion relation $\omega = (2\sqrt{k/m})|\sin(qR)|$. Forcing a single particle to move at an angular frequency ω above the cutoff $\omega_c = 2\sqrt{k/m}$ generates an evanescent wave since the wave number is $qR = \pi/2 - j \cosh^{-1}(\omega/\omega_c)$. The group velocity $v_g = (\partial \text{Re}[q]/\partial \omega)^{-1}$ is zero and the perturbation remains localized within a characteristic distance $x_c = (\text{Im}[q])^{-1} = R/\cosh^{-1}(\omega/\omega_c)$. Localization achieves when replacing a single particle by a light intruder with mass $m_i \ll m$. Roughly estimating the angular frequency of the intruder from the free oscillation frequency between two heavy nonoscillating neighbors $\omega_i \simeq \sqrt{2k_i/m_i}$, where $k_i \simeq (3/2)\kappa_i^{2/3}\bar{F}_m^{1/3}$, leads to Eq. (4) expression. The frequency of oscillations exceeds the cutoff $\omega_i \gg \omega_c$ and the energy remains localized within a characteristic distance that does not depend on static load and which is smaller than a single radius, $x_c \ll R$.

It should be pointed out that weak delayed solitary wave trains, responsible for nonlinear leak of oscillating energy from the intruder to surrounding [24], were detected few

beads before or after the intruder in long duration force acquisitions (not shown in this Rapid Communication). This attenuation mechanism leads to an exponential decay of the oscillating amplitude within a characteristic time much longer than the duration of the low-frequency force envelope, $\tau_{\text{leak}}/\tau_{LF} \sim \sqrt{m/m_i} \gg 1$, provided $m_i \ll m$.

In conclusion, we have reported the first experimental observations of energy localization in a strongly nonlinear discrete lattice of elastic spheres. The interaction of a traveling wave with a light defect induces a local strain gradient which excites localized oscillations. The amplitude of these oscillations is enhanced by the presence of spatial gap near the intruder. Localized energy is unable to radiate linear acoustic chains. Such nonlinear localization traps part of the incident energy and shifts the frequency spectrum according to the incident strength and the mass of the defect; this might play an important role in intense wave mitigation. It is also likely to appear in polydisperse three-dimensional granular assemblies and lead to sound trapping by light weakly loaded grains.

This work was supported by Conicyt under Fondap Research Program No. 11980002.

-
- [1] I. M. Lifshitz, *J. Phys. (USSR)* **7**, 215 (1943); **7**, 249 (1943); **8**, 89 (1944).
- [2] E. W. Montroll *et al.*, *Phys. Rev.* **100**, 525 (1955).
- [3] A. A. Maradudin *et al.*, *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation*, Solid State Physics, Vol. 3 (Academic Press, New York, 1971).
- [4] A. J. Sievers, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 310 (1964).
- [5] T. Dauxois and M. Peyrard, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3935 (1993).
- [6] S. Flach and C. R. Willis, *Phys. Rep.* **295**, 181 (1998).
- [7] M. Sato *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 137 (2006).
- [8] M. Peyrard and T. Dauxois, *Physique des Solitons* (CNRS, Paris, 2004).
- [9] S. Watanabe and M. Toda, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 3436 (1981); **50**, 3443 (1981).
- [10] Q. Li, S. Pnevmatikos, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. B* **37**, 3534 (1988).
- [11] M. Leo *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **11**, 327 (2000).
- [12] V. F. Nesterenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **24**, 733 (1984); A. N. Lazaridi and V. F. Nesterenko, *ibid.* **26**, 405 (1985).
- [13] V. F. Nesterenko, *Dynamics of Heterogeneous Materials* (Springer-Verlag, New York, 2001).
- [14] C. Coste, E. Falcon, and S. Fauve, *Phys. Rev. E* **56**, 6104 (1997).
- [15] S. Job, F. Melo, A. Sokolow, and S. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 178002 (2005).
- [16] R. L. Doney and S. Sen, *Phys. Rev. E* **72**, 041304 (2005).
- [17] R. Doney and S. Sen, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 155502 (2006).
- [18] F. Melo, S. Job, F. Santibanez, and F. Tapia, *Phys. Rev. E* **73**, 041305 (2006).
- [19] S. Job *et al.*, *Granular Matter* **10**, 13 (2007).
- [20] J. Hong, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 108001 (2005).
- [21] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 058002 (2006).
- [22] L. Ponson *et al.*, e-print arXiv:0904.0426.
- [23] E. B. Herbold *et al.*, *Acta Mech.* **205**, 85 (2009).
- [24] E. Hascoet *et al.*, *Eur. Phys. J. B* **14**, 183 (2000).
- [25] See, for instance, <http://www.marteau-lemarie.fr/>
- [26] A. Chatterjee, *Phys. Rev. E* **59**, 5912 (1999).
- [27] S. Job *et al.*, *Ultrasonics* **48**, 506 (2008).

Bibliografía

- [1] J. Duran. *Sables, Poudres et Grains*. Eyrolles, 1997.
- [2] E. Zaretsky. A. Palmgren revisited - A basis for bearing life prediction. manuscript for STLE anual meeting, Lewis Research Center, 1997.
- [3] S. Andersson U. Sellgren, S. Björklund. A finite element-based model of normal contact between rough surfaces. *Wear*, (254):1180–1188, 2003.
- [4] Sangil Hyun and Mark O. Robbins. Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths. *Tribology International*, (40):1413–1422, 2007.
- [5] J. A. Greenwood and G. W. Rowe. Deformation of surface asperities during bulk plastic flow. *Journal of applied physics* , 36(667), 1965.
- [6] Landau L. D. and Lifshitz E. M. *Teoría de la elasticidad*, volume 7 of *Curso de Física Teórica*. Reverté, 1986.
- [7] K. Kono G. Kuwabara. Coefficient of restitution in a collision between two spheres. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26(8):1230–1233, 1987.
- [8] P. Oswald. *Rheophysique: Ou comment coule la matière*. Collection échelles. Belin , 1 edition, 2005.
- [9] Vitali F. Nesternko. *Dynamics of heterogeneous materials*. Springer.

- [10] E. M. Lifshits L. D. Landau. *Mechanics*, volume I of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1976.
- [11] A. Chatterjee. Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres. *Physical Review E*, 59(5), 1999.
- [12] F. Noriz N. Mitarai. Wet granular materials. *Advances in Physics*, 55(1-2):1–45, 2006.
- [13] M. Scheel C. Schier S. Herminghaus M. M. Kohonena, D. Geromichalos. On capillary bridges in wet granular materials. *Physica A*, 339:7–15, 2004.
- [14] M. S. El Youssoufin C. Saix F. Soulie, F. Cherblanc. Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 30 :213–228, 2006.
- [15] J. P. Gollub J.-C. Geminard, W. Losert. frictional mechanics of wet granular materials. *Physical Review E*, 59(5), 1999.
- [16] S. Herminghaus. Dynamics of wet granular matter. *Advances in Physics*, 54(221), 2005.
- [17] Sound wave velocities in dry and lubricated granular packings packings.
- [18] V. F. Nesterenko E. B. Herbold. Shock wave structure in a strongly nonlinear lattice with viscous dissipation. *Physical Review E*, 75, 2007.
- [19] S. Job, F. Melo, F. Santibanez, and F. Tapia. Nonlinear waves in Hertzian granular chains: Effects of inertial and stiffness heterogeneities. *Proceedings of the International Congress on Ultrasonics, Vienna, April 9-13, 2007*, 2007.
- [20] S. Job, F. Santibanez, F. Tapia, and F. Melo. Nonlinear waves in dry and wet Hertzian granular chains. *Ultrasonics*, 48(6-7):506–14, 2008.

- [21] Herbold E. B., V. F. Nesterenko, and Daraio C. Influence of Controlled Viscous Dissipation on the Propagation of Strongly Nonlinear Waves in Stainless Steel Based Phononic Crystals. *American Institute of Physics, Conference Proceedings*, 2005.
- [22] PCB Piezotronics Inc. *Sensors for Force, Load Strain and Torque*, 2010.
- [23] N. Boechler, G. Theocharis, S. Job, P. G. Kevrekidis, M. A. Porter, and C. Daraio. Discrete Breathers in One-Dimensional Diatomic Granular Crystals. Sometido a publicación, 2009.
- [24] R. Doney and S. Sen. Impulse absorption by tapered horizontal alignments of elastic spheres. *Physical review E*, 72(041304), 2005.
- [25] Fermi E., Pasta J., and Ulam S. Studies of Nonlinear Problems. *Los Alamos technical report*, 1955.
- [26] A. J. Sievers. Far-Infrared Resonance States in Silver-Activated Potassium Halide Crystals. *Physics Review Letters*, 13(9), 1964.
- [27] R. Potts E. Montroll. Effect of defects on lattice vibrations. *Physical Review*, 100(2), 1955.
- [28] Baldev Raj K.K. Ray Anish Kumar, T. Jayakumar. Correlation between ultrasonic shear wave velocity and Poisson's ratio for isotropic solid material. *Acta Materialia*, 2003.
- [29] PCB Piezoelectronics Inc. *Modular signal conditioner 442C04*, 2010.
- [30] National Instruments. *Analog Input PCI-NI6221*, 2004.
- [31] Bharat Bhushan. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact. *Tribology Letters*, 2006.

- [32] R. Davis, D. Rager, and B. Good. Elastohydrodynamic rebound of spheres from coated surfaces. *Journal of fluid mechanics*, 468:107–119, 2002.
- [33] X. Jia. Codalike Multiple Scattering of Elastic Waves in Dense Granular Media. *Physical review letter*, 93(15), 2004.
- [34] Bluestar Silicones. Rhodorsil oils 47. Industry, Bluestar Silicones, 2009.
- [35] B.J. Hamrock. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. McGraw-Hill, 1994.
- [36] T. Travers, M. Ammi, D. Bideau, A. Gervois, J.-C. Messenger, and J.-P. Troadec. Mechanical size effects in 2d granular media. *J. Phys. France*, 1988(49):939–948.
- [37] Agnolin I and Roux J. N. Internal states of model isotropic granular packings. I. Assembling process, geometry, and contact networks. *Phys. Rev. E*, (76), 2007.
- [38] Jia X., Caroli C., and Velicky B. Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Physical Review Letters*, 82(1863), 1999.
- [39] X. Jia. Ultrasound propagation in disordered granular media. *Mat. Res. Soc. Symp. Proc*, 627, 2000.
- [40] P. A. Johnson and X. Jia. Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering. *Nature*, 437(7060):871–4, 2005.
- [41] Liu C.-H. and Nagel S. R. Sound in a granular material: Disorder and nonlinearity. *Physical review B*, 48(21), 1993.