
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Medición y Recursos Físicos para Información Cuántica

Tesis para optar al grado de
Doctor en Ciencias con Mención en Física

Guillermo Esteban Romero Huenchuñir

Profesor guía: Dr. Juan Carlos Retamal A.

SANTIAGO – CHILE

Agosto 2009

Resumen

En la presente tesis se abordan dos importantes problemas que se enmarcan dentro de la Física de la Información Cuántica. El primero de ellos, se relaciona con uno de los aspectos más intrigantes de la mecánica cuántica: el entrelazamiento. En particular, se desarrolla un protocolo cuántico que nos permite medir experimentalmente el entrelazamiento contenido en estados puros de dos qubits y dos qutrits. También, se estudian algunas posibles implementaciones de este protocolo, utilizando dos importantes arquitecturas físicas: átomos de Rydberg cruzando cavidades de microondas tridimensionales y sistemas de iones atrapados.

En el segundo problema, abordaremos uno de los recursos esenciales para el procesamiento cuántico de la información como lo es la detección de fotones. En particular, desarrollaremos un modelo teórico para la fotodetección de alta eficiencia en el régimen cuántico de las microondas, y su posible implementación física utilizando circuitos cuánticos superconductores.

Índice general

1. Introducción	10
2. Fundamentos	18
2.1. Formulación Matemática de la Mecánica Cuántica	19
2.2. Computación e Información Cuántica	22
2.2.1. Bit cuántico o qubit	22
2.2.2. Compuertas lógicas cuánticas	23
2.2.3. Entrelazamiento cuántico	28
2.2.4. Criterios de separabilidad	31
2.2.5. Medidas de entrelazamiento	36
2.3. Sistemas Físicos	40
2.3.1. Interacción radiación-materia	40
2.3.2. Cavidades de microondas 3D	43
2.3.3. Iones atrapados	51
2.3.4. Qubits superconductores y electrodinámica cuántica de circuitos	57
3. Medida directa de la concurrencia para estados puros de dos qubits atómicos	78
3.1. Introducción	78
3.2. El protocolo	80

3.3. Implementaciones físicas	83
3.3.1. Cavidades de microondas tridimensionales	83
3.3.2. Iones atrapados	86
3.4. Conclusión	88
4. Detectando entrelazamiento en estados puros de dos qutrits	89
4.1. Introducción	89
4.2. El protocolo	90
4.3. Implementación física	93
4.4. Conclusión	97
5. Detector de fotones de microondas en electrodinámica cuántica de circuitos	98
5.1. Introducción	98
5.2. Modelo abstracto y diseño	100
5.3. Implementación del modelo: guía de microondas coplanar acoplada a qubits de fase	105
5.4. Conclusión	108
6. Conclusiones generales	109
Bibliografía	111
Apéndice	122
A. Circuitos Cuánticos	122
A.1. Efecto Josephson	122
A.2. Formalismo de flujos	124
A.3. Qubit de carga (Cooper-Pair Box)	125
A.4. Qubit de flujo (rf-QUID)	128

B. Cálculos explícitos del capítulo 5	131
B.0.1. Solución no hermítica	131
B.0.2. Ecuaciones del modelo para un elemento absorbente . .	133
B.0.3. Solución estacionaria para un qubit	136
B.0.4. Matriz de transferencia	137
B.0.5. Fórmula de absorción general	139
B.0.6. Múltiples absorbentes	139

Índice de figuras

2.1. Representación de la esfera de Bloch para un sistema de dos niveles.	24
2.2. Representación esquemática de compuertas de un qubit, con su correspondiente operador de evolución: I para la compuerta identidad, σ_X para la compuerta NOT, σ_Z para la compuerta de fase y H para la compuerta Hadamard.	25
2.3. Representación esquemática de una compuerta controlada U	27
2.4. Representación de una compuerta controlada NOT (CNOT).	28
2.5. Concurrencia para el estado puro de dos qubits $ \psi\rangle = p 00\rangle + \sqrt{(1-p^2)} 11\rangle$ como función del parámetro p	38
2.6. (A) Representación esquemática en un experimento de cavidades de microondas con átomos de Rydberg circulares. (B) Esquema de niveles circulares relevantes en los experimentos.	45
2.7. Representación esquemática de los niveles de energía relevantes en un ion $^{40}\text{Ca}^+$	52
2.8. Representación esquemática de los niveles de energía en un ion atrapado interactuando con un campo laser de frecuencia ω	53
2.9. (a) Una juntura Josephson está compuesta por dos superconductores unidos por una delgada lámina aisladora. (b) Representación esquemática de una JJ en un circuito integrado.	60

2.10. Representación esquemática de un qubit de carga o Cooper-Pair Box.	62
2.11. Representación esquemática de un qubit de flujo de una junta Josephson o rf-SQUID.	63
2.12. (a) Potencial del rf-SQUID para un flujo externo $\phi_{\text{ext}} = 0,5\phi_0$. (b) Potencial del rf-SQUID para un flujo externo $\phi_{\text{ext}} = 0,3\phi_0$.	64
2.13. (izquierda) Esquema para un qubit de fase o current-biased Josephson junction. (derecha) Niveles de energía. Hay N_s niveles de energía metaestables con frecuencias anarmónicas. . . .	66
2.14. Una línea de transmisión puede ser modelada como un conjunto de inductancias y capacitancias.	69
2.15. Un capacitor conectado a una fuente de voltaje via otro capacitor, puede ser simulado através tres capacitores conectados en serie, donde el último de ellos posee una capacitancia muy grande, $C_V \rightarrow \infty$, pero con un potencial fijo, $V = Q_V/C_V$. . .	74
3.1. Circuito cuántico que describe una medida directa de la concurrencia de un estado puro de dos qubits, con la disponibilidad de dos copias del mismo. El circuito involucra una compuerta controlled-not, así como rotaciones unitarias de un solo qubit, σ_y y R , seguidas por una medida conjunta de los cuatro qubits.	81
3.2. Protocolo para medir la concurrencia en cavidades de microondas tridimensionales usando dos cavidades y dos zonas Ramsey.	84
3.3. Cuatro iones en una trampa de Paul lineal que pueden ser accesados individualmente, medidos, y acoplados a un grado de libertad de movimiento colectivo para implementar el protocolo en Fig. 3.1.	87

-
- 4.1. Esquema de los cuatro iones de seis niveles interactuando con un modo cuantizado de una cavidad óptica. Cada átomo puede ser iluminado individualmente mediante campos laser, permitiéndonos llevar a cabo compuertas de uno y dos átomos. . . . 94
- 5.1. Diseño del detector. Bosquejo que muestra una guía de onda unidimensional (gris) acoplada a un conjunto de elementos absorbentes con tres niveles en su estructura interna (cuadrados azules) y distribuidos en posiciones arbitrarias. El campo de microondas (línea discontinua) excita coherentemente el estado $|0\rangle$ al estado superior $|1\rangle$, el cuál decae en el estado estable $|g\rangle$. Una configuración análoga a la existente en qubits de fase (CBBJ), en la cual un potencial confina a dos estados metaestables que pueden decaer en un continuo de estados de corriente. 99

- 5.2. Eficiencia en la detección cuando los absorbentes están en resonancia con el campo de microondas (γ real). (Izquierda) Probabilidad de absorción versus la tasa de decaimiento efectiva $\gamma = \Gamma v_g/V^2$ en unidades sin dimensiones para un arreglo con $N = 1, 2, 4$ y 8 qubits (negro, verde, azul, rojo), ambos en los regímenes de agrupamiento por clusters (segmentos) y un arreglo igualmente espaciado. Las barras de error toman en cuenta las desviaciones aleatorias en los absorbentes individuales, γ_i , de hasta un 40 % en promedio. Cuando los absorbentes están muy cerca entre sí, la eficiencia está limitada hasta un 50 %, mientras que en el otro caso no hay un límite superior en la eficiencia. (Derecha) Eficiencia en la detección versus la separación d en un arreglo de absorbentes distribuidos periódicamente. 101
- 5.3. (a) Eficiencia máxima alcanzable para la detección de un fotón como una función del número de qubits a lo largo de la guía de microondas. (b) Parámetro de trabajo óptimo versus el número de qubits. 104
- A.1. Anillo superconductor en presencia de un campo magnético externo. 129
- B.1. Un fotón incidente, moviéndose hacia la derecha, interactúa con un elemento absorbente. Desde la amplitud original del campo, a , una componente es transmitida, a' , otra componente es reflejada, b , y finalmente con alguna probabilidad, $|c|^2$, el sistema absorbe un fotón y cambia de estado. 134

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo de la teoría cuántica ha permitido dar una descripción coherente del mundo físico, no solamente a escala microscópica [1] sino también a escala macroscópica [2]. Originalmente impulsada por los famosos *experimentos pensados* (gedanken), en donde los físicos imaginaban máquinas simples que manipulaban átomos aislados o fotones. Hoy en día tales idealizaciones han sido hechas realidad [3, 4] permitiéndonos observar, *in situ*, los aspectos contra-intuitivos de la mecánica cuántica, tales como superposición de estados, entrelazamiento y complementariedad.

La mecánica cuántica también ha dado lugar a importantes aplicaciones. A principios de la década de 1980, algunos físicos de la época como P. Benoiff [5] y R. Feynman [6], dieron los primeros pasos en la ciencia de la información cuántica al exponer las primeras consideraciones teóricas de cómo sacar provecho de los aspectos contra intuitivos de la teoría cuántica, para realizar operaciones imposibles con máquinas que obedecen a la lógica clásica. Estas ideas fueron apoyadas posteriormente por los trabajos de D. Deutsch [7], Deutsch y Jozsa [8], P. Shor [9], L. Grover [10], entre otros, en donde se mostró que un procesador que obedezca a las leyes de la mecánica

cuántica, puede realizar operaciones de forma más eficiente de lo que lo haría un procesador clásico. En particular, P. Shor [9] desarrolló un algoritmo para la factorización de números primos y el cálculo de logaritmos discretos en un computador cuántico. Si bien este proceso de factorización puede llevarse a cabo en un computador clásico, la característica más importante del algoritmo de Shor es la notable reducción del tiempo de computación. Esta va desde tiempos exponenciales a tiempos polinomiales de computación.

El estudio de la teoría cuántica de la información no solamente ha sido enfocada en explotar las leyes de la mecánica cuántica con fines computacionales, sino que también gran parte de su esfuerzo ha sido dirigido hacia lo que se conoce como *comunicación cuántica*, en donde han sido desarrollados protocolos elegantes para la distribución de clave cuántica [11, 12] y la teleportación cuántica [13]. Desde un punto de vista general, el gran desarrollo teórico de la ciencia de la información cuántica combinado al extraordinario avance experimental, han dado origen a lo que hoy denominamos “*física de la información cuántica*” [14, 15, 16].

Para que un sistema físico opere como un procesador cuántico, este debe satisfacer los siguientes requerimientos, también conocidos como los criterios de DiVincenzo [17]. Almacenar y procesar información cuántica requieren (i) *escalabilidad*, es decir, un sistema físico que permita disponer de un número suficiente de entidades básicas de información o bit cuánticos, también conocidos como qubits, los cuales puedan ser (ii) *inicializados* en estados cuánticos bien definidos. Estos estados deben tener (iii) *tiempos de vida largos* para asegurar la coherencia del sistema durante el proceso computacional. La necesidad de manipular coherentemente la información almacenada requiere (iv) un conjunto de compuertas lógicas universales entre los qubits, las cuales deben ser implementadas usando interacciones controlables de los sistemas cuánticos. Finalmente, y uno de los puntos claves en el desarrollo de esta

tesis, determinar confiablemente el resultado de una computación cuántica requiere (v) un procedimiento de medición que sea eficiente.

Si bien, hoy en día no se cuenta con un dispositivo que satisfaga a cavallidad todos los requerimientos anteriores, es indudable que la tecnología actual no sólo ha permitido la verificación experimental de muchos de los protocolos de computación y comunicación cuántica, sino que también ha permitido poner de manifiesto los aspectos que más distiguen a la mecánica cuántica de su contrapartida clásica. Entre las principales arquitecturas físicas debemos nombrar los sistemas de iones atrapados [4], la electrodinámica cuántica de cavidades [18, 19, 3] y los circuitos cuánticos superconductores [20, 21, 22, 23], los cuales en conjunto con el desarrollo de las guías de onda coplanares cuasi unidimensionales [24], conforman el incipiente campo de la electrodinámica cuántica de circuitos [25, 26, 27].

Un elemento clave dentro de las aplicaciones de la teoría cuántica de la información es el *entrelazamiento cuántico*. Desde que en 1935 fue presentado el trabajo de Einstein, Podolski y Rosen (EPR) titulado *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?* [28], el entrelazamiento fue sujeto de gran controversia y materia de debate cuasi filosófico, debido a las implicaciones fundamentales sobre la completitud de la mecánica cuántica como una teoría realista local.

Actualmente el entrelazamiento es un recurso clave para aplicaciones tales como operaciones lógicas cuánticas controladas [29], distribución de clave cuántica [11, 12] y teleportación cuántica [13]. Además, la generación de estados entrelazados ha sido extensivamente explorada desde el punto de vista experimental en muchos escenarios físicos tales como los fotones [30], partículas masivas como los iones atrapados [4], átomos en cavidades [3], puntos cuánticos [31], circuitos cuánticos superconductores [32, 33], entre otros.

Durante las últimas dos décadas, la teoría cuántica de la información ha

tenido un importante desarrollo en cuanto a caracterizar y cuantificar el entrelazamiento para estados cuánticos generales. Los resultados más fructíferos han sido logrados en sistemas cuánticos bipartitos de qubits, en donde importantes contribuciones [34, 35, 36, 37, 38, 39] han permitido resolver completamente el problema de la separabilidad y la cuantificación del entrelazamiento.

En sistemas bipartitos de más alta dimensión, se sabe que el grado de entrelazamiento de un estado puro de dimensión $n \otimes m$ puede ser cuantificado a través de la denominada *concurrancia* I [40, 41], la cual relaciona la cantidad de entrelazamiento contenido en el estado a la pureza de su matriz densidad marginal. Sin embargo, al considerar una matriz densidad general el problema de caracterizar y cuantificar el entrelazamiento se convierte en una tarea difícil de llevar a cabo. A pesar de esto, se han alcanzado logros importantes al estudiar cotas inferiores para el entrelazamiento [42, 43, 44, 45].

Debido al rol clave del entrelazamiento cuántico en todas las aplicaciones antes mencionadas, la búsqueda de métodos eficientes para su detección experimental y cuantificación son de gran importancia. Una de las principales dificultades que surge al enfrentar este problema, es debido al hecho que las medidas de entrelazamiento existentes tales como la *concurrancia* de Wootters [39], son funciones no lineales de los parámetros asociados al estado cuántico. Además, la concurrancia involucra la operación no física de la conjugación compleja de un estado cuántico. En este contexto, un gran esfuerzo teórico ha surgido inspirado en la búsqueda de mecanismos eficientes para detectar entrelazamiento cuántico [46, 47].

El primer objetivo de esta tesis es abordar el problema de la medición del entrelazamiento cuántico contenido en estados puros bipartitos de dimensión $2 \otimes 2$ y $3 \otimes 3$. En ambos casos, se desarrolla un protocolo el cual está basado en la disponibilidad de una copia doble del estado puro en cuestión, además de operaciones locales y no locales para procesar la información cuántica a

conveniencia. Para la implementación física de ambos protocolos haremos uso de dos sistemas físicos mencionados antes: sistemas de iones atrapados y átomos cruzando cavidades de microondas tridimensionales. Debido a que en estos sistemas es posible implementar una gran variedad de compuertas locales y no locales, junto a métodos de detección de estados cuánticos de alta eficiencia, los hace especialmente adecuados para realizar una gama amplia de protocolos cuánticos y en particular los que presentaremos en esta tesis.

Por otro lado, la fotodetección cuántica en el régimen óptico [48] ha ocupado un rol central en comprender la interacción entre la radiación y la materia. Esta también ha contribuido al desarrollo de la física atómica y la óptica cuántica, con aplicaciones a la metrología, la espectroscopía y particularmente en el procesamiento cuántico de la información. La existencia de estos detectores está implicada por cualquier protocolo cuántico que involucre fotones ópticos, ya sea por su interacción coherente con la materia [14] o con dispositivos puramente ópticos [49]. Estos protocolos van desde la caracterización y reconstrucción de estados no clásicos de luz propagante mediante tomografía cuántica homodina [48], hasta la lectura con muy alta fidelidad de qubits atómicos [4]. Ambos ejemplos, provenientes de la óptica cuántica, han mostrado ser de gran influencia en el campo de la *electrodinámica cuántica de circuitos* con la primera propuesta teórica [50] para medir los observables relevantes de microondas propagantes, y una propuesta reciente para la lectura de qubits [51]. A pesar de estos esfuerzos, será muy difícil cubrir la necesidad de detectores y contadores de fotones cuando el campo emergente de las microondas cuánticas aborde problemas tales como la comunicación cuántica, implementaciones de criptografía cuántica y otros protocolos avanzados de información cuántica [14, 49].

Es por esta razón que la detección y conteo de fotones en el régimen de microondas se convertirá en un tópico central en los circuitos cuánticos

superconductores, los cuales interactúan con campos de microondas propagantes o confinados dentro de una cavidad. Hasta ahora se ha demostrado el intercambio de fotones individuales entre qubits superconductores y resonadores cuánticos [52, 53, 54], la resolución de estados de Fock del campo electromagnético en un circuito superconductor [55], la generación de fotones individuales propagantes [56], el primer esfuerzo teórico para detectar fotones propagantes [57, 58], y los efectos no lineales que surgen de la presencia de un qubit en un resonador [59, 60].

Hay muchos desafíos para el diseño de un detector de fotones en el régimen de microondas en electrodinámica cuántica de circuitos: i) los amplificadores lineales criogénicos disponibles son incapaces de resolver el régimen de pocos fotones. ii) Se sabe que en el espacio libre la sección eficaz entre los campos de microondas y los bit cuánticos es pequeña. iii) El uso de cavidades para mejorar el acoplamiento introduce problemas adicionales, tales como la sintonización a la frecuencia del modo de la cavidad y el compromiso entre un alto factor de calidad Q y alta reflectividad. iv) La imposibilidad de realizar la medida continua sin la retroacción [57], la cual conlleva al problema de sincronizar el proceso de detección con la llegada del campo a ser medido. Hasta el momento se han observado propuestas teóricas y experimentales que pueden resolver algunos, pero no todos estos problemas. La mayoría de ellos se orienta hacia la evolución unitaria o coherente del sistema fotón-qubit, ayudadas por efectos dispersivos no lineales [59, 55] o efectos de bifurcación [61]. Sin embargo, hasta ahora no se conoce una implementación de un contador o un simple detector de fotones en el régimen de microondas.

El segundo objetivo de esta tesis es la propuesta teórica de un detector de fotones de alta eficiencia en el régimen de microondas, el cual también puede funcionar como un contador de fotones. La propuesta está basada en la tecnología actual de los circuitos superconductores en dos frentes. El

primero corresponde al desarrollo de átomos artificiales y qubits [20,21,22,23] para computación cuántica y el procesamiento cuántico de la información. El segundo frente es el acoplamiento eficiente de estos elementos a guías de microondas y cavidades [25,26,27]. Como punto de partida se presentará un modelo abstracto, el cual describe la interacción de campos propagantes con elementos discretos con tres niveles de energía distinguibles, a partir del cual es posible calcular la fracción de fotones absorbidos en términos de los distintos parámetros del sistema. Al implementar este modelo abstracto en circuitos cuánticos superconductores, seremos capaces de expresar la cantidad relevante en el proceso de absorción en términos de los parámetros asociados al circuito, por ejemplo, la impedancia de la línea de transmisión, las capacitancias presentes en la arquitectura, etc. Finalmente discutiremos brevemente las limitaciones e imperfecciones de esta propuesta.

Los resultados de esta tesis han sido publicados en los siguientes artículos

- *Direct measurement of concurrence for atomic two-qubit pure states*
G. Romero, C. E. López, F. Lastra, E. Solano, and J. C. Retamal, Phys. Rev. A **75**, 032303 (2007).
- *Detecting entanglement in a two-qubit pure state*
G. Romero, C. E. López, and J. C. Retamal, sometido a publicación.
- *Microwave Photon Detector in Circuit QED*
G. Romero, J. J. García Ripoll, and E. Solano, Phys. Rev. Lett. **102**, 173602 (2009).

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos necesarios para el desarrollo de esta tesis, en particular, discutiremos conceptos relacionados a la computación e información cuántica y describiremos en detalle los sistemas físicos utilizados a lo largo de esta

tesis. En el capítulo 3 se muestra un protocolo cuántico para la medición experimental de la concurrencia para estados puros de dos qubits y su posible implementación física en sistemas de cavidades de microondas tridimensionales y sistemas de iones atrapados. En el capítulo 4 se discute un protocolo para la medición del entrelazamiento contenido en un estado puro de dos qubits y su posible implementación en sistemas de iones atrapados. En el capítulo 5 se presenta una propuesta teórica para un detector de fotones en el régimen de microondas. Esta propuesta está basada en la tecnología actual de los circuitos cuánticos superconductores. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de esta tesis.

Capítulo 2

Fundamentos

En este capítulo presentaremos los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de esta tesis. En particular, daremos una breve descripción de los postulados de la mecánica cuántica, resumiremos los principales conceptos asociados a la computación e información cuántica; tales como el *qubit*, compuertas lógicas de uno y dos qubits, y el entrelazamiento cuántico bipartito. Posteriormente se presentarán tres importantes sistemas físicos: cavidades de microondas tridimensionales, iones atrapados, para finalizar con qubits superconductores y electrodinámica cuántica de circuitos. En todos ellos discutiremos las herramientas necesarias que serán utilizadas en capítulos posteriores.

Particularizando a los iones atrapados y cavidades de microondas, discutiremos la implementación física de un qubit, la manipulación de los estados del qubit mediante campos clásicos y cuánticos, y los distintos métodos para la detección de estados cuánticos. En el último sistema físico, discutiremos las principales implementaciones de qubits fabricados de elementos superconductores. En particular, se presentarán el qubit de carga, el de flujo, y el de fase o current-biased Josephson junction (**CCJJ**), dándole mayor

énfasis a este último por razones que serán explicadas posteriormente. Finalizando este capítulo, discutiremos las guías de ondas coplanares, las cuales acopladas a circuitos superconductores discretos, conforman el campo de la electrodinámica cuántica de circuitos.

2.1. Formulación Matemática de la Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica, como una teoría rigurosa y su formulación matemática que consta de los siguientes postulados:

Postulado 1

A un tiempo dado t_0 , el estado de cualquier sistema físico aislado está descrito por un vector unitario $|\psi_{t_0}\rangle$ en un espacio vectorial complejo llamado *espacio de Hilbert*, \mathcal{H} .

Un espacio de Hilbert, es un espacio vectorial definido en los números complejos \mathcal{C} , cuyos elementos corresponden a funciones complejas de cuadrado integrables $L^2(\mathcal{C})$. En notación de Dirac, estas funciones son denotadas por un **ket** en el espacio de estados, esto es, $|\psi\rangle$. Además, a cada vector en \mathcal{H} le corresponde un objeto en el espacio dual \mathcal{H}^* denotado por un **bra**, esto es, $\langle\psi|$.

Este espacio tiene producto interno $\langle\psi|\varphi\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$, es decir, mapea un par ordenado de vectores a los números complejos y cuyas propiedades son las siguientes:

- (i) $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$. (Simetría)
- (ii) $\langle\varphi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle$. (Linealidad)
- (iii) $\langle\psi|\psi\rangle > 0$; $\langle\psi|\psi\rangle = 0$ si y sólo si $|\Psi\rangle = 0$. (Positividad)

Dos vectores $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ pertenecientes a este espacio de estados se dicen ortogonales si se cumple que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$. Además, a partir de la definición de producto interno es posible definir la norma de un vector:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad (2.1)$$

que es un número real y positivo. $\|\psi\| = 0$ si y sólo si $|\psi\rangle = 0$.

Por último debemos mencionar que el espacio de Hilbert debe ser *completo*, lo que en el caso de espacios con dimensión infinita asegura la convergencia de expansiones en funciones propias.

Postulado 2

Cada cantidad física medible u *observable*, está descrita matemáticamente por un operador hermítico \hat{A} que actúa en \mathcal{H} .

Un operador es un mapeo lineal que transforma un vector en otro vector dentro del mismo espacio de Hilbert \mathcal{H} :

$$\hat{A} : |\psi\rangle \rightarrow \hat{A}|\psi\rangle, \hat{A}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle) = \alpha\hat{A}|\psi\rangle + \beta\hat{A}|\varphi\rangle. \quad (2.2)$$

El adjunto del operador \hat{A} está definido por:

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle^*, \quad (2.3)$$

para todos los vectores $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$. El operador \hat{A} se dice hermítico si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Un operador hermítico en un espacio de Hilbert \mathcal{H} tiene una representación espectral, es decir, sus autoestados forman una base ortonormal completa en \mathcal{H} . Es posible representar un operador hermítico \hat{A} como:

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n, \quad (2.4)$$

donde cada a_n es un autovalor de \hat{A} , y \hat{P}_n es la correspondiente proyección ortogonal sobre el espacio de autovectores con autovalor a_n .

Postulado 3

El resultado de una medida sobre un observable físico \hat{A} es alguno de autovalores de este operador:

$$\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle, \quad (2.5)$$

donde a_n pertenece a los números reales (\mathcal{R}).

En mecánica cuántica, las mediciones están descritas por un conjunto $\{\hat{P}_m\}$ de *operadores de medición*. El índice m da cuenta de los resultados posibles de la medición. Si el sistema cuántico está en un estado $|\psi\rangle$, inmediatamente antes de la medición la probabilidad de obtener un resultado m está dada por

$$p(m) = \langle\psi|\hat{P}_m^\dagger\hat{P}_m|\psi\rangle, \quad (2.6)$$

e inmediatamente después de la medición el estado del sistema colapsará a

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_m^\dagger\hat{P}_m|\psi\rangle}}, \quad (2.7)$$

Postulado 4

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado es unitaria, y es generada por un operador hermítico llamado el *Hamiltoniano* del sistema. En el cuadro de Schrödinger, el vector $|\psi\rangle$ que describe al sistema evoluciona de acuerdo con la *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (2.8)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano.

2.2. Computación e Información Cuántica

En esta sección se presentarán los elementos básicos de la computación e información cuántica. En particular, se introducirá el *bit cuántico* o *qubit*, compuertas lógicas cuánticas de un qubit y dos qubits, y finalmente el concepto de entrelazamiento cuántico bipartito.

2.2.1. Bit cuántico o qubit

Un computador clásico utiliza bits con dos valores posibles 0 y 1 para representar números binarios, pero un computador cuántico almacena información como *bits cuánticos* o *qubits*. Un qubit corresponde a cualquier sistema físico cuyo espacio de Hilbert accesible tiene dimensión $d = 2$. En otras palabras, un qubit tiene dos estados posibles $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en notación de Dirac para los estados cuánticos. En esta base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ denominada *base computacional*, el estado cuántico de un sistema de dos niveles puede ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.9)$$

donde α y β son números complejos que satisfacen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Más adelante veremos que una mejor visualización del estado cuántico de un sistema de dos niveles, puede ser representado como un punto con coordenadas polares θ y ϕ sobre una esfera unitaria y en cuya representación, Eq. (2.9) puede ser expresado como:

$$|\psi\rangle = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \right] e^{i\phi'}. \quad (2.10)$$

Aquí, el factor de fase global $e^{i\phi'}$ no tiene efectos observables y por lo tanto

usualmente es omitido.

2.2.2. Compuertas lógicas cuánticas

A continuación se presentarán algunas compuertas lógicas y sus principales propiedades. En particular, se mostrarán compuertas de un qubit y compuertas controladas.

Compuertas de un qubit

Las compuertas de un qubit corresponden a transformaciones unitarias que actúan sobre el estado cuántico del sistema.

Formalmente, cualquier sistema de dos niveles tiene una representación de *pseudo-spin* cuyas componentes a lo largo de una dirección arbitraria en el espacio tridimensional, puede tomar solamente uno de dos valores $\pm\hbar/2$. Esta descripción nos entrega una manera útil de visualizar el estado cuántico de un sistema de dos niveles, representándolo como un punto con coordenadas polares θ y ϕ sobre una esfera unitaria, ver Fig. 2.1. Este cuadro se conoce generalmente como *representación de la esfera de Bloch* y al vector $\vec{v} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$, como al vector de Bloch.

El observable más general en la representación de pseudo-spin, puede ser expresado como una combinación lineal con coeficientes reales del operador identidad $I(2 \times 2)$ y los tres operadores de Pauli $\sigma_i = 2S_i/\hbar$ ($i = X, Y, Z$), los cuáles en la base de autoestados de σ_Z , son:

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

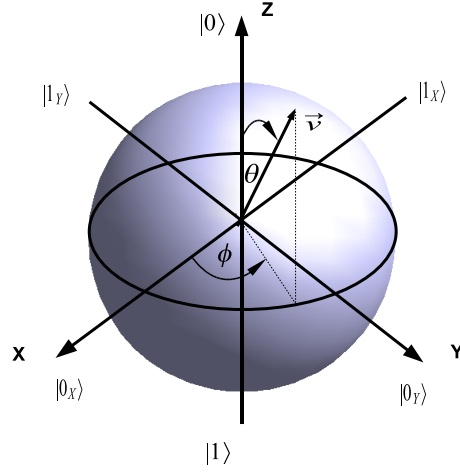


Figura 2.1: Representación de la esfera de Bloch para un sistema de dos niveles.

Estos operadores satisfacen las reglas de conmutación:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.12)$$

donde ϵ_{ijk} es cero si dos índices son iguales y $+1$ o -1 cuando son distintos, dependiendo de la paridad de permutación de $\{ijk\}$.

Los autovalores de los operadores σ_i son ± 1 . Los autovectores de σ_Z con autovalores $+1$ y -1 se denotan por $|0\rangle$ y $|1\rangle$, respectivamente. Estos representan los polos norte y sur de la esfera de Bloch Fig. 2.1. Los correspondientes autovectores de σ_X son combinaciones lineales simétricas y antisimétricas $|0/1_X\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ mientras que los autovectores de σ_Y son $|0/1_Y\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$. Estos autoestados tienen su correspondiente representación en la esfera de Bloch ver Fig.2.1.

El observable de traza nula más general para un sistema de dos niveles corresponde a una componente de espín a lo largo de la dirección definida por el vector unitario \vec{v} con coordenadas polares θ y ϕ (Fig.2.1). Este se expresa

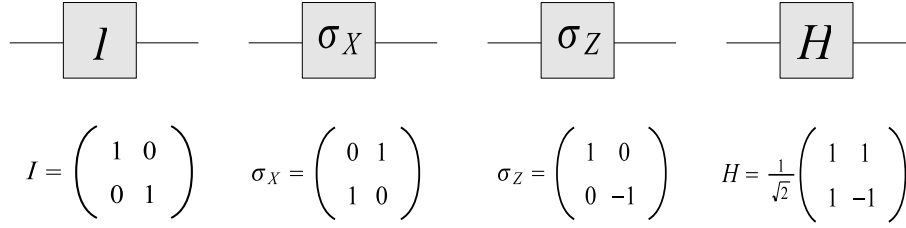


Figura 2.2: Representación esquemática de compuertas de un qubit, con su correspondiente operador de evolución: I para la compuerta identidad, σ_X para la compuerta NOT, σ_Z para la compuerta de fase y H para la compuerta Hadamard.

en términos de la matrices de Pauli como:

$$\sigma_{\vec{v}} = \cos \theta \sigma_Z + \sin \theta \cos \phi \sigma_X + \sin \theta \sin \phi \sigma_Y = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

El observable $\sigma_{\vec{v}}$ también tiene un espectro ± 1 , con autoestados:

$$\begin{aligned} |0_{\vec{v}}\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|1\rangle; \\ |1_{\vec{v}}\rangle &= \sin(\theta/2)|0\rangle - \cos(\theta/2)e^{i\phi}|1\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cuando el vector unitario \vec{v} rota en el espacio, $|0_{\vec{v}}\rangle$ explora completamente el espacio de Hilbert del pseudo-spin. El estado de spin más general, Ec. (2.9), es de hecho el autoestado con autovalor $+1$ de la componente de spin a lo largo de la dirección \vec{v} de coordenadas polares θ y ϕ , definido por la relación $\tan(\theta/2)e^{i\phi} = \beta/\alpha$.

Las compuertas de un qubit implementan rotaciones en el espacio de Hilbert del pseudo-spin. Estas compuertas las representamos esquemáticamente como se muestra en Fig. 2.2. Dado el estado cuántico más general para un sistema de dos niveles, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, estas compuertas actúan

como sigue:

$$\sigma_X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle, \quad (2.15)$$

esto es, σ_X intercambia los estado cuánticos de la base computacional $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Esta compuerta representa el análogo cuántico de la compuerta clásica NOT, la cuál actúa de la siguiente forma sobre un bit 0, 1

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1 \\ 1 &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por otro lado, las otras compuertas actúan de esta manera:

$$\begin{aligned} \sigma_Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \\ H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Es importante notar lo siguiente, mientras que sólo existe un tipo de compuerta clásica de un bit (compuerta NOT), para un qubit existen más de una, como se ha expuesto aquí. De hecho, cualquier operación unitaria de un qubit puede ser considerada como una compuerta lógica.

Compuertas cuánticas controladas

Las compuertas cuánticas controladas o compuertas de dos qubits, acoplan los bits de '*control*' y '*objetivo*' de acuerdo a una dinámica condicional, implementando una proposición lógica del tipo *si A es verdad, realice B*. La acción *B*, presentada sobre el bit objetivo, puede ser cualquier operación unitaria *U*. La verdad de la afirmación *A* generalmente corresponde al valor 1 del control, su '*negación*' al valor 0. Si el control está inicialmente en el

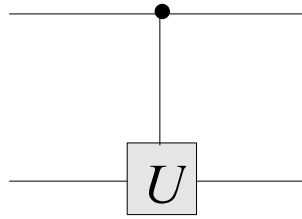


Figura 2.3: Representación esquemática de una compuerta controlada U .

estado $|1\rangle$ (A es verdad) o en el estado $|0\rangle$ (A no es verdad), este estado permanece inalterado en la operación de la compuerta.

Se denomina 'compuerta controlada U ', a la compuerta que implementa la siguiente 'tabla de verdad':

$$|0\rangle|\psi\rangle \rightarrow |0\rangle|\psi\rangle; \quad |1\rangle|\psi\rangle \rightarrow |1\rangle U|\psi\rangle, \quad (2.18)$$

donde el primer y el segundo ket en cada expresión representa al qubit de control y objetivo, respectivamente. Claramente esta operación, la cuál transforma la base ortogonal de dos qubits $|a, b\rangle$ ($a, b = 0, 1$) en otra base ortogonal, debe ser unitaria. Al igual que en el caso de compuertas cuánticas de un qubit, las compuertas controladas se representan esquemáticamente como muestra la Fig.2.3. En esta figura, las dos líneas horizontales representan al bit de control (línea superior) y al bit objetivo (línea inferior). El control condicional está simbolizado por una línea vertical y el cuadrado (conteniendo el símbolo de la operación condicional) sobre la línea del qubit objetivo.

Una de las principales compuertas lógicas de esta clase es la compuerta NOT controlada o CNOT. Esta compuerta tiene una representación esquemática tal como se muestra en la Fig. 2.4.

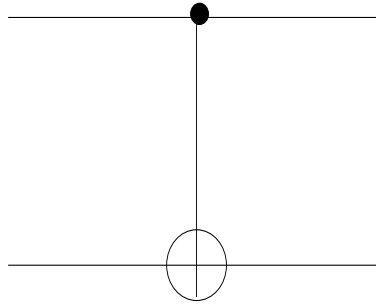


Figura 2.4: Representación de una compuerta controlada NOT (CNOT).

La acción de la compuerta CNOT se representa por

$$|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle|t \oplus c\rangle, \quad (2.19)$$

donde \oplus representa la suma en módulo 2 y los estados $|c\rangle$ y $|t\rangle$ dan cuenta del qubit de control y el qubit objetivo, respectivamente. En otras palabras, esta compuerta realiza una operación NOT sólo cuando el qubit de control está en el estado $|1\rangle$ de otra forma el qubit objetivo es dejado intacto.

2.2.3. Entrelazamiento cuántico

En lo que sigue discutiremos el concepto de entrelazamiento cuántico bipartito. En particular, se darán algunas definiciones básicas asociadas a estados puros y estados mixtos, y definiremos una medida de entrelazamiento denominada *entrelazamiento de formación* [62, 63, 47]. Por completitud, también discutiremos algunos criterios de separabilidad para estados puros y estados mixtos.

Entrelazamiento bipartito

1. Estados puros.

Supongamos que se dispone de dos sistemas cuánticos A y B , los cuales

son entregados a dos experimentadores que llamaremos Alice y Bob (de acuerdo con la notación estándar en la Teoría Cuántica de la Información). El estado físico en el sistema de Alice puede ser descrito por estados cuánticos pertenecientes a un espacio de Hilbert \mathcal{H}_A cuya dimensión es d_A , análogamente en el sistema de Bob, el estado físico es descrito por estados cuánticos en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_B de dimensión d_B . De esta manera, el estado cuántico del sistema completo estará descrito por vectores pertenecientes al espacio producto tensorial de ambos subespacios $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. En este espacio de Hilbert, el estado cuántico más general puede ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (2.20)$$

con una matriz $d_A \times d_B$ compleja $C = \{c_{ij}\}$.

Un estado puro $|\psi\rangle$ perteneciente a \mathcal{H} se llama un *estado producto* o *separable*, si existen estados $|\phi_A\rangle$ perteneciente a \mathcal{H}_A y $|\phi_B\rangle$ perteneciente a \mathcal{H}_B tal que se satisface

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle. \quad (2.21)$$

De otra manera, el estado $|\psi\rangle$ se llama *entrelazado*.

Físicamente, la definición de estados producto significa que el estado no está correlacionado. En este sentido, un estado producto puede ser preparado en una manera local: Alice produce el estado $|\phi_A\rangle$ y Bob produce el estado $|\phi_B\rangle$ independientemente. Si Alice mide cualquier observable \hat{A} y Bob mide el observable \hat{B} , entonces las probabilidades en los distintos resultados se factorizan. En otras palabras, los resultados en la medición para Alice no dependen de los resultados que haya obtenido Bob en sus mediciones.

Por otro lado, un estado entrelazado $|\psi\rangle$ contiene no solamente la información de los resultados de las mediciones sobre el sistema A y B separadamente, sino también correlaciones entre estas mediciones.

2. Estados mixtos.

En una situación más general, uno siempre trata con estados cuánticos que son una mezcla estadística o matriz densidad, es decir, uno no conoce exactamente cuál es el estado que representa al sistema, sino que solamente podemos decir que con cierta probabilidad p_i , el sistema está en alguno de los estados $|\phi_i\rangle$ pertenecientes al espacio de Hilbert \mathcal{H} , esto es

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad (2.22)$$

con $\sum_i p_i = 1$ y $p_i \geq 0$. En una base determinada, este estado cuántico se representa por una matriz compleja semidefinida positiva y hermítica. Una matriz hermítica M se dice positiva semidefinida ($M \geq 0$), si sus correspondientes autovalores no son negativos.

En este caso más general, se dice que ρ es un estado producto en \mathcal{H} si existen estados ρ^A en el sistema A y ρ^B en el sistema B tal que

$$\rho = \rho^A \otimes \rho^B. \quad (2.23)$$

Por otro lado, se dice que ρ es un estado separable, de acuerdo con la definición de R. F. Werner [34], si existen un conjunto de probabilidades $\{p_i\}$ y estados producto $\rho_i^A \otimes \rho_i^B$ tal que

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (2.24)$$

con $\sum_i p_i = 1$ y $p_i \neq 0$. De otra forma se dice que el estado es *entrelazado*.

Aquí es posible distinguir tres situaciones. Primero, un estado producto no tiene correlaciones. Para estados que no son un producto tensorial se tienen dos tipos de correlaciones:

- Estados separables están correlacionados clásicamente.

Esto significa que para producir un estado separable, solamente es necesario contar con operaciones locales y comunicación clásica (LOCC). Supongamos que Alice y Bob pueden, por comunicación clásica (telefono o radio), compartir un generador de números aleatorios que produce los resultados i con probabilidades p_i . Para cada uno de los resultados, ellos pueden acordar producir el estado $\rho_i^A \otimes \rho_i^B$ localmente. Mediante este procedimiento ellos producirán el estado $\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$.

- Estados entrelazados.

En un estado entrelazado, las correlaciones no pueden generarse simplemente por el procedimiento anterior. De hecho es necesario la presencia de operaciones que actúen simultáneamente sobre ambos subsistemas A y B . Estas operaciones han sido definidas anteriormente como operaciones de dos qubits, también denominadas operaciones no locales.

2.2.4. Criterios de separabilidad

1. Estados puros.

Descomposición de Schmidt

Como se ha discutido anteriormente, un estado puro entrelazado $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ puede expresarse como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle, \quad (2.25)$$

con una matriz $d_A \times d_B$ compleja $C = \{c_{ij}\}$. Por simplicidad en la notación, se adoptará la siguiente identidad $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \equiv |a_i\rangle |b_j\rangle$. En general, la superposición en Ec. (2.25) no nos dice a primera vista si el estado puede ser factorizado. Sin embargo, existe una base $|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}_A$ y una base $|\beta_i\rangle \in \mathcal{H}_B$ tal que podemos escribir

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^R \lambda_k |\alpha_k\rangle |\beta_k\rangle, \quad (2.26)$$

con coeficientes reales y positivos λ_k . El número $R \leq \min\{d_A, d_B\}$ se denomina el rango de Schmidt del estado $|\psi\rangle$.

La demostración de esta propiedad es directa. Notemos que el estado en la Ec.(2.25) puede ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle |b_j\rangle = \sum_i |a_i\rangle |\tilde{b}_i\rangle, \quad (2.27)$$

donde se define $|\tilde{b}_i\rangle \equiv \sum_j c_{ij} |b_j\rangle$.

Supongamos ahora que la base $\{|a_i\rangle\}$ se escoge de tal manera que la matriz densidad parcial asociada al subsistema A , ρ_A , sea diagonal

$$\rho_A = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (2.28)$$

La matriz densidad parcial asociada al subsistema A , se obtiene al trazar los grados de libertad asociados al subsistema B , esto es, $\rho_A =$

$\text{tr}_B(\rho)$. Análogamente para la matriz densidad parcial del subsistema B .

Al calcular ρ_A obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_A &= \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= \text{Tr}_B\left(\sum_{ij} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |\tilde{b}_i\rangle\langle\tilde{b}_j|\right) = \sum_{ij} \langle\tilde{b}_j|\tilde{b}_i\rangle |a_i\rangle\langle a_j|. \quad (2.29)\end{aligned}$$

Este resultado se obtiene al notar que

$$\begin{aligned}\text{Tr}_B(|\tilde{b}_i\rangle\langle\tilde{b}_j|) &= \sum_k \langle k|\tilde{b}_i\rangle\langle\tilde{b}_j|k\rangle \\ &= \sum_k \langle\tilde{b}_j|k\rangle\langle k|\tilde{b}_i\rangle = \langle\tilde{b}_j|\tilde{b}_i\rangle, \quad (2.30)\end{aligned}$$

donde $\{|k\rangle\}$ es una base ortonormal $\in \mathcal{H}_B$. Comparando la Ec. (2.28) y Ec. (2.29), vemos que

$$\langle\tilde{b}_j|\tilde{b}_i\rangle = p_i\delta_{ij}, \quad (2.31)$$

notando que los estados $\{|\tilde{b}_i\rangle\}$ son ortogonales. Los correspondientes vectores ortonormales se obtienen reescalando

$$|\bar{b}_i\rangle = \frac{|\tilde{b}_i\rangle}{\sqrt{p_i}}, \quad (2.32)$$

consecuentemente se obtiene la expansión requerida

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |a_i\rangle |\bar{b}_i\rangle, \quad (2.33)$$

en términos de bases ortonormales particulares en \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B llamadas *bases de Schmidt*. Debido a la simetría de esta última expresión, se puede ver que el espectro de las matrices densidad parciales o reducidas están dados por los *coeficientes de Schmidt* $\lambda_i = \sqrt{p_i}$.

La descomposición de Schmidt es una herramienta útil para distinguir estados separables de estados entrelazados. Dado que las bases de

Schmidt, por construcción sólo incluyen estados separables, toda la información acerca del entrelazamiento está en los coeficientes de Schmidt. Un estado separable está caracterizado por un vector de coeficientes de Schmidt con un sólo valor no nulo: $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_s = [1, 0, \dots, 0]$, mientras que el vector de coeficientes de Schmidt para un estado entrelazado tiene al menos dos componentes no nulas. Un estado se llama *maximalmente entrelazado*, si su vector de Schmidt se escribe como $\vec{\lambda}_m = [1/d, \dots, 1/d]$. Desde aquí, es posible observar que el concepto de los coeficientes de Schmidt permite relacionar el grado de entrelazamiento de un estado puro bipartito con el grado de mezcla estadística de las correspondientes matrices reducidas: una matriz densidad reducida pura corresponde a un estado separable, mientras que un estado maximalmente entrelazado conduce a una matriz densidad reducida completamente mezclada.

2. Estados mixtos.

Es bien sabido en la teoría de la información cuántica que cuando se trata con estados mixtos bipartitos de dimensión arbitraria, el problema de la separabilidad se vuelve una tarea complicada de llevar a cabo. Sin embargo, existen criterios basados en mapeos positivos que permiten abordar este desafío.

Mapeos positivos

Los mapeos positivos se definen como sigue. Sean \mathcal{H}_B y \mathcal{H}_C dos espacios de Hilbert y sea $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ un operador lineal en el espacio de Hilbert correspondiente. Un mapeo lineal

$$\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_C) \quad (2.34)$$

se llama positivo, si este mapea operadores hermíticos en operadores hermíticos satisfaciendo la relación $\Lambda(X^\dagger) = \Lambda(X)^\dagger$ y preservando la positividad, es decir, si $X \geq 0$ entonces $\Lambda(X) \geq 0$. Recordemos que un operador X es positivo si este tiene un espectro positivo.

Un mapeo Λ se dice *completamente* positivo cuando para un espacio de Hilbert arbitrario \mathcal{H}_A , el mapeo $I_A \otimes \Lambda$ es positivo. De otra forma, Λ es positivo, pero no completamente positivo. Un ejemplo muy importante de un mapeo positivo, pero no completamente positivo, es la traspuesta parcial [35, 36].

Criterio de la transposición parcial

Dada la matriz densidad de un sistema compuesto:

$$\rho = \sum_{i,j}^N \sum_{kl}^M \rho_{ij,kl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|, \quad (2.35)$$

la trasposición parcial respecto al primer subsistema está dada por

$$\rho^{TA} = \sum_{i,j}^N \sum_{kl}^M \rho_{ji,kl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|. \quad (2.36)$$

Similarmente podemos definir ρ^{TB} intercambiando k y l en vez de i y j . Entonces dada una matriz densidad ρ , se dice que esta tiene una *traspuesta parcial positiva* si su transposición parcial no tiene autovalores negativos, es decir, es positiva semidefinida

$$\rho^{TA} \geq 0 \leftrightarrow \rho^{TB} \geq 0. \quad (2.37)$$

El criterio de la trasposición parcial nos dice que una condición necesaria para la separabilidad de un estado mixto bipartito es que $\rho^{TA} \geq 0$. Si ρ^{TA} tiene al menos un autovalor negativo, se dice que el estado

está entrelazado. Es importante notar que la positividad de la traspuesta parcial es una condición necesaria y suficiente sólo para sistemas bipartitos de dimensión $2 \otimes 2$ y $2 \otimes 3$ [36].

2.2.5. Medidas de entrelazamiento

Anteriormente hemos visto cómo es posible introducir criterios de separabilidad en sistemas bipartitos considerando estados puros o mixtos. Ahora discutiremos cómo es posible cuantificar exactamente el grado de entrelazamiento de un estado cuántico bipartito.

Entre un número considerable de cuantificadores de entrelazamiento, el más usado en la comunidad de Información Cuántica es el llamado *entrelazamiento de formación* [37]. El entrelazamiento de formación se define de la siguiente manera:

Supongamos que dos experimentadores Alice y Bob, que pueden comunicarse sólo a través de comunicación clásica, comparten el estado cuántico mixto ρ . Entonces, el entrelazamiento de formación se define como el número mínimo de estados maximalmente entrelazados necesarios para formar un esamble de estados puros que representen a ρ [38]. En otras palabras, el entrelazamiento de formación corresponde al entrelazamiento promedio mínimo de un esamble de estados puros que representan al estado ρ .

Dada esta noción física para el entrelazamiento de formación, ahora presentaremos sus aspectos formales, estableciendo resultados analíticos al considerar estados puros y estados mezcla estadística.

Cuantificando entrelazamiento de estados puros

Anteriormente hemos discutido el concepto de la descomposición de Schmidt, en donde se ha hecho patente que el grado de entrelazamiento de un estado

puro bipartito, está directamente relacionado con el grado de pureza de sus correspondientes matrices densidad reducidas. Con esto en mente, primero veremos como cuantificar el grado de entrelazamiento en un sistema bipartito de dos qubits.

Dado un sistema bipartito de dimensión $2 \otimes 2$, el entrelazamiento de formación $E_f(\psi) = \mathcal{E}(C(\psi))$ está dado por

$$\mathcal{E}(C(\psi)) = h \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - C^2}) \right], \quad (2.38)$$

donde h es la función de entropía binaria

$$h[x] = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x), \quad (2.39)$$

y C es una función no lineal en los parámetros del estado cuántico llamada *conurrencia*.

Si bien originalmente la función concurrencia fue introducida como una cantidad adicional para determinar el entrelazamiento de formación, esta también puede ser considerada como una medida de entrelazamiento independiente [39]. La definición de la concurrencia para sistemas bipartitos de dos niveles está dada en términos de la base especial [38, 39]

$$|e_1\rangle = |\Phi^+\rangle, \quad |e_2\rangle = i|\Phi^-\rangle, \quad |e_3\rangle = i|\Psi^+\rangle, \quad |e_4\rangle = |\Psi^-\rangle, \quad (2.40)$$

donde $|\Phi^\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$ y $|\Psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$ son los estados de Bell [38]. Usando esta base particular, la concurrencia C de un estado puro $|\psi\rangle$ está dada por

$$C(\psi) = \left| \sum_i \langle e_i | \psi \rangle^2 \right|, \quad (2.41)$$

o más explícitamente

$$\begin{aligned} C(\psi) &= |\langle \psi^* | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi \rangle| \\ &= \sqrt{2(1 - \text{tr}(\rho_A^2))} \\ &= \sqrt{2(1 - \text{tr}(\rho_B^2))}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

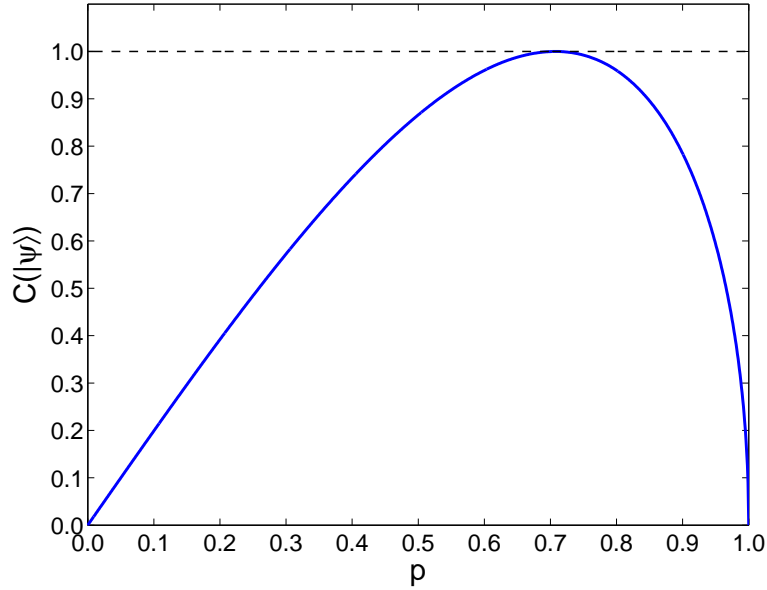


Figura 2.5: Concurrencia para el estado puro de dos qubits $|\psi\rangle = p|00\rangle + \sqrt{(1-p^2)}|11\rangle$ como función del parámetro p .

donde σ_y es la segunda matriz de Pauli, y $|\psi^*\rangle$ es el complejo conjugado de $|\psi\rangle$ con la conjugación presentada en la base estándar $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

Como un ejemplo, estudiemos la concurrencia asociada al estado puro $|\psi\rangle = p|00\rangle + \sqrt{(1-p^2)}|11\rangle$, donde $p \in [0, 1]$. En la Fig. (2.5) se muestra el comportamiento de la concurrencia en función del parámetro p . Aquí podemos observar que la concurrencia es nula cuando $p = 0$ o $p = 1$, lo que corresponde a los estados separables $|11\rangle$ y $|00\rangle$, respectivamente. Además, alcanza un valor máximo para $p = 1/\sqrt{2}$, lo cual corresponde al estado entrelazado $|\Phi^+\rangle$. También es posible mostrar que el resto de estados de Bell alcanzan el valor máximo para la concurrencia en $p = 1/\sqrt{2}$, permitiéndonos definir estados de dos qubits maximalmente entrelazados.

En el caso general de un estado puro bipartito de dimensión arbitraria $d_A \times d_B$, el grado de entrelazamiento del estado correspondiente está dado

por la función concurrencia I [40, 41]

$$C(\psi) = \sqrt{2\nu_A\nu_B(1 - \text{tr}(\rho_A^2))} = \sqrt{2\nu_A\nu_B(1 - \text{tr}(\rho_B^2))}, \quad (2.43)$$

donde los coeficientes ν_A y ν_B dependen de la dimensión del subsistema correspondiente, y $\rho_{A,B}$ es la correspondiente matriz densidad reducida. Una medida que también es ampliamente usada corresponde al cuadrado de la concurrencia $C^2(\psi_{AB}) = \tau_{AB}$, denominada *tangle*.

Cuantificando entrelazamiento de estados mixtos

En el caso de estados mezcla estadística, el problema de cuantificar entrelazamiento es algo más intrincado.

Dada una matriz densidad ρ de un par de sistemas cuánticos A y B , considere todas las descomposiciones de ρ en estados puros, esto es, todos los ensambles de estados $|\psi_i\rangle$ con probabilidades p_i , tal que

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.44)$$

Volviendo a la definición anterior del entrelazamiento de formación, este puede expresarse matemáticamente como

$$E(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle), \quad (2.45)$$

es decir, corresponde al entrelazamiento promedio de los estados puros de la descomposición, minimizado sobre todas las descomposiciones posibles de ρ .

En el caso particular de un sistema de dos qubits, el entrelazamiento de formación de un estado ρ puede calcularse analíticamente. Esta fórmula corresponde a una generalización de la concurrencia para estados puros generales de dos qubits [39]. En este caso, el entrelazamiento de formación $E_f(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho))$ está dado por

$$\mathcal{E}(C(\rho)) = h \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - C^2}) \right], \quad (2.46)$$

donde la concurrencia ahora está dada por

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.47)$$

donde los λ_i son las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ ordenados decrecientemente.

2.3. Sistemas Físicos

En esta sección se presentarán los distintos sistemas físicos que han sido utilizados en esta tesis. Como punto de partida, es necesario discutir la interacción entre la radiación y la materia desde el punto de vista semiclásico y cuántico. Luego presentaremos los siguientes escenarios físicos: cavidades de microondas tridimensionales, iones atrapados, y finalmente qubits superconductores y electrodinámica cuántica de circuitos.

2.3.1. Interacción radiación-materia

Supongamos que tenemos un electrón ligado en un átomo tipo hidrogenoide, el cual se mueve en una pequeña región del espacio con dimensiones lineales del orden del radio de Bohr a_0 . En general, el Hamiltoniano que describe la interacción entre este átomo y el campo electromagnético está descrito por

$$H = H_a + H_f + H_{a-f}, \quad (2.48)$$

donde H_a representa a la energía interna del átomo, H_f corresponde a la energía libre del campo y H_{a-f} es la correspondiente energía de interacción.

Si la longitud de onda del campo electromagnético λ es mucho mayor que la distancia desde el núcleo hasta la posición del electrón, típicamente del orden de 10^{-9}m , entonces es posible mostrar que, en la *aproximación*

dipolar, el término de interacción adopta la siguiente forma [64]

$$H_{a-f} = -q\vec{r} \cdot \vec{E}(0), \quad (2.49)$$

donde q es la carga del electrón y $\vec{E}(0)$ es el campo eléctrico.

Átomo de dos niveles interactuando con un campo clásico

El caso más simple que podemos considerar es el de un átomo de dos niveles de energía interactuando con un campo clásico oscilante externo. Este modelo simple es muy relevante a la hora de generar rotaciones arbitrarias del estado cuántico sobre la esfera de Bloch.

Supongamos, entonces, que se tiene un campo clásico oscilatorio con frecuencia ω_L , polarizado linealmente a lo largo de la dirección x . En la aproximación dipolar, este campo puede expresarse como $E(t) = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega_L t + \varphi_0)$.

De esta manera, el Hamiltoniano que describe la dinámica del sistema estará dado por

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_Z + \frac{\hbar}{2}(\Omega^* e^{-i(\omega_L t + \varphi)}\sigma^+ + \Omega e^{i(\omega_L t + \varphi)}\sigma^-), \quad (2.50)$$

con $\sigma_Z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$, $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$, φ es la fase del elemento de matriz dipolar \mathcal{P}_{eg} y $\Omega = -|\mathcal{P}_{eg}|E_0 e^{i\varphi_0}/\hbar$ se denomina frecuencia de Rabi clásica. Los estados $|e\rangle$, $|g\rangle$ representan al estado excitado y al estado fundamental, respectivamente. Es importante notar que en el Hamiltoniano (2.50), hemos despreciado términos que conducen a contribuciones rápidamente oscilantes ($e^{i\omega_L t}\sigma^+$, $e^{-i\omega_L t}\sigma^-$), esto se conoce como *aproximación de onda rotante*.

En el cuadro de interacción, el Hamiltoniano se escribe como:

$$H^I = \frac{\hbar}{2}(\Omega^* e^{i(\Delta t + \varphi)}\sigma^+ + \Omega e^{-i(\Delta t + \varphi)}\sigma^-), \quad (2.51)$$

donde $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ es la desintonización de la frecuencia del campo respecto a la frecuencia de la transición. En particular, escogiendo la fase φ_0 tal que Ω sea real y positiva, $\varphi = 0$ y el caso resonante ($\Delta = 0$), se tiene que

$$H^I = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_X \quad (2.52)$$

con $\sigma_X = \sigma^+ + \sigma^-$.

Por otro lado, considerando el caso resonante y $\varphi = \pi/2$, se tiene que

$$H^I = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_Y \quad (2.53)$$

con $\sigma_Y = (\sigma^+ - \sigma^-)/i$.

De esta manera, controlando la fase φ es posible realizar rotaciones locales arbitrarias. Este parámetro depende de la fase de referencia entre el campo clásico y la transición dipolar atómica y puede ser sintonizada barriendo la fase del campo clásico.

Átomo de dos niveles interactuando con un campo cuántico. Modelo de Jaynes-Cummings

Consideremos ahora la interacción de un átomo de dos niveles con un oscilador armónico cuántico o un modo cuántico del campo electromagnético. Esta situación la podemos encontrar, por ejemplo en cavidades de microondas donde un único átomo es acoplado a un modo de la cavidad [1,3]. Este modelo también permite estudiar un único ion en una trampa [4].

El Hamiltoniano que describe la situación actual está dado por

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_Z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\sigma^+ + \sigma^-)(a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger), \quad (2.54)$$

donde

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{k}} &= -\frac{\mathcal{P}_{eg}\epsilon_{\mathbf{k}}\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{\hbar}, \quad y \\ \mathcal{E}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

La energía de interacción en (2.54) consiste de cuatro términos. El término $a_k^\dagger \sigma^-$ describe el proceso en cual un átomo experimenta una transición desde el nivel superior al nivel inferior, creando un fotón en el modo k . El término $a_k \sigma^+$ describe el proceso opuesto. Por otro lado, los términos $a_k \sigma^-$ y $a_k^\dagger \sigma^+$ describen los siguientes procesos: (i) un átomo experimenta una transición desde el nivel superior al nivel inferior destruyendo un fotón en el modo k , (ii) un átomo experimenta una transición desde el nivel inferior al nivel superior creando un fotón en el modo k . Claramente, estos procesos no conservan el número de excitaciones en el sistema ya que el primero produce una ganancia de energía de aproximadamente $2\hbar\omega_0$ y el segundo resulta en una pérdida de energía de igual magnitud. Análogamente al caso clásico, estos términos producen contribuciones rápidamente oscilantes y pueden ser eliminados considerando la aproximación de onda rotante. De esta manera, el Hamiltoniano adopta la siguiente forma

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_Z + \hbar \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \hbar \sum_k g_k (\sigma^+ a_k^\dagger + \sigma^- a_k). \quad (2.56)$$

Cuando consideramos la situación en la cual un único modo del campo electromagnético se acopla al átomo de dos niveles, el Hamiltoniano (2.56) puede escribirse como

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_Z + \hbar\omega_C a^\dagger a + \hbar g (\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger), \quad (2.57)$$

conocido como el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings [65].

2.3.2. Cavidades de microondas 3D

Una cavidad de microondas tridimensional combinada, entre otras cosas, con átomos de Rydberg que cruzan este dispositivo uno a uno, representa una de las principales arquitecturas que han permitido poner de manifiesto

algunos intrigantes aspectos de la mecánica cuántica [1,3]. La importancia de este escenario físico se ve reflejada en realizaciones experimentales tales como: La generación de entrelazamiento átomo-fotón via interacción resonante y no resonante, generación de entrelazamiento bipartito y tripartito de átomos, generación de entrelazamiento entre dos modos de una cavidad, la implementación de la compuerta de fase controlada (CPHASE), entre otras [1].

Un esquema típico de la situación experimental se muestra en la figura (2.6)(A). Los átomos que son efusionados desde el horno O , son seleccionados por velocidad mediante campos láser (L_1 y L'_1). En la caja B , estos átomos son preparados en estados circulares mediante la combinación de un láser (L_2) y excitación de microondas. Posteriormente, ellos interactúan con la cavidad superconductora C antes de ser contados en el detector D . La cavidad C está acoplada a una fuente clásica S . Dos cavidades de baja calidad R_1 y R_2 , conducidas por otra fuente clásica S' , permiten la manipulación del estado atómico antes o después de la interacción con C . Desde B a D , el arreglo está encerrado en un ambiente criogénico y aislado de la radiación del medioambiente.

A lo largo de esta tesis, sacaremos provecho de la lógica cuántica que puede ser llevada a cabo a partir de R_1 , y de la detección de los estados internos de los átomos. Si bien los procedimientos anteriores- seleccionar los átomos por su velocidad y prepararlos en estados circulares determinados- son etapas esenciales a la hora de realizar experimentos, estos no serán discutidos en esta tesis. Ambos procedimientos son herramientas bien establecidas en cavidades de microondas [1], por lo que estamos en posición de decir que cada átomo puede ser preparado en un estado cuántico bien definido antes de viajar a lo largo del arreglo con una velocidad bien determinada.

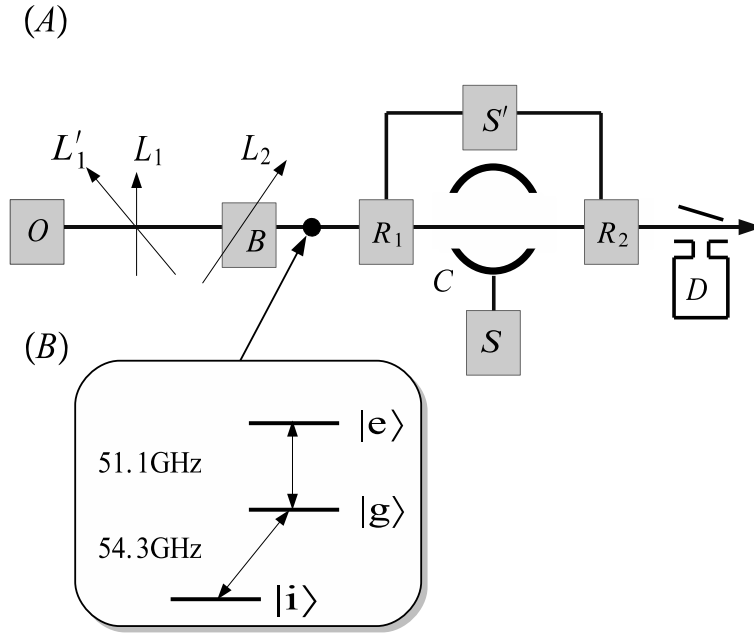


Figura 2.6: (A) Representación esquemática en un experimento de cavidades de microondas con átomos de Rydberg circulares. (B) Esquema de niveles circulares relevantes en los experimentos.

Átomos de Rydberg circulares

Un estado de Rydberg circular [66] corresponde a un nivel atómico alcalino (Rubidio en experimentos), en el cual el único electrón de valencia ha sido excitado cercano al límite de ionización, en un estado con un número cuántico principal n muy alto y máximos valores de los números cuánticos orbital $l = |m| = n - 1$ y magnético m . Las transiciones entre estados circulares vecinos están en el dominio de las microondas para números cuánticos principales del orden de $n = 50$. Los experimentos actuales de cavidades de microondas involucran tres niveles circulares con números cuánticos principales 51, 50, y 49, denominados como $|e\rangle$, $|g\rangle$, y $|i\rangle$, respectivamente ver Fig. (2.6)(B). Las correspondientes frecuencias de transición y elementos de matriz dipolar en-

tre estados vecinos son 51,1GHz y $d = 1776q_e a_0$ para la transición $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$; 54,3GHz y $d = 1697q_e a_0$ para la transición $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$, estas frecuencias corresponden al rango de microondas. Aquí, q_e corresponde a la carga del electrón ($q_e = 1,6022 \times 10^{-19}\text{C}$) y a_0 es el radio de Bohr ($a_0 = 5,292 \times 10^{-11}\text{m}$).

Otra propiedad importante de los átomos de Rydberg está relacionada con los tiempos de vida radiativos de los niveles $|e\rangle$, $|g\rangle$, y $|i\rangle$ que son del orden de $T_{at} \approx 30\text{ms}$. Esto implica que, en el espacio libre, los átomos son capaces de recorrer algunos metros a velocidad térmica antes de decaer. De esta manera, los decaimientos radiativos de los átomos pueden ser despreciados a lo largo de la trayectoria recorrida dentro de la configuración experimental ($\approx 20\text{cm}$).

Detección de estados circulares

Un elemento clave a la hora obtener información cuántica en este tipo de experimentos corresponde a la detección de los estados internos de los átomos. La detección de los niveles circulares se logra mediante la ionización del electrón de valencia en un campo eléctrico estático moderado (145V/cm y 134V/cm para los niveles con número cuántico principal $n = 50$ y $n = 51$, respectivamente) dentro del detector D . El electrón resultante del proceso de ionización puede ser detectado con alta eficiencia, de hasta $90 \pm 10\%$ [67], en un esquema sensible a un único átomo. Dado que los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ son ionizados para distintos campos eléctricos, D permite contar, selectivamente, el estado interno de un átomo de Rydberg.

Zonas Ramsey

Las zonas Ramsey denotadas por R_1 y R_2 en la figura (2.6)(A), permiten la manipulación del estado atómico a través de campos clásicos de microondas (2.3.1), antes y después de la interacción con la cavidad C . En otras palabras, permiten llevar a cabo rotaciones locales sobre los átomos generan-

do superposiciones de estados circulares. Los pulsos clásicos son generados mediante una fuente de microondas S' e inyectados en la cavidad a través de un agujero. Por ejemplo, si la frecuencia del pulso clásico, ω_C , es resonante con la transición $|g\rangle \Leftrightarrow |i\rangle$, un pulso $\pi/2$ puede llevar a cabo la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} |g\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |i\rangle) \\ |i\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|g\rangle + |i\rangle). \end{aligned} \quad (2.58)$$

En óptica cuántica, el concepto de pulso $\pi/2$ significa que un campo clásico interactúa resonantemente con un átomo durante un tiempo $t = \pi/2\Omega$, donde Ω es la frecuencia de Rabi (2.50). Análogamente, un pulso π significa que un campo clásico interactúa resonantemente con un átomo durante un tiempo $t = \pi/\Omega$.

Finalmente debemos mencionar que es posible realizar distintas superposiciones de estados circulares, dependiendo de la frecuencia del campo clásico y la fase φ en el Hamiltoniano (2.50).

Cavidad superconductora

La cavidad superconductora C está construida de dos espejos de Niobio en una geometría de Fabry-Perot. Los dos espejos esféricos tienen radios de curvatura de 40mm. La distancia entre los espejos es igual a 27,5mm. Los dos modos Gaussianos TEM_{900} con una frecuencia cercana a $\nu_{eg} = 51,1\text{GHz}$ tienen polarizaciones lineales perpendiculares y están separados por una cantidad $\delta/2\pi = 100\text{KHz}$. Cuando un átomo interactúa resonantemente con uno de estos dos modos, el acoplamiento con el otro usualmente juega un rol despreciable. La cintura del modo es $w_0 = 6\text{mm}$ y su correspondiente volumen es $V \simeq 700\text{mm}^3$. De acuerdo con este volumen, la amplitud del campo eléctrico de microondas en el centro de la cavidad es igual

a $E_0 = \sqrt{\hbar\nu_{eg}/2\epsilon_0 V} = 1,5\text{mV/m}$, este es un parámetro esencial que caracteriza el acoplamiento del campo con un dipolo atómico. Un parámetro importante de una cavidad es su factor de calidad, en este caso $Q = 3 \times 10^8$, lo que implica un tiempo de vida de un fotón dentro de la cavidad $T_c = 1\text{ms}$. Actualmente es posible acceder a cavidades de muy alto factor de calidad, $Q = 4,2 \times 10^{10}$, implicando altos tiempo de vida de un fotón dentro de la cavidad, $T_c = 130\text{ms}$ [68].

Acoplamiento átomo-cavidad

El acoplamiento entre un átomo de Rydberg y uno de los modos soportados por la cavidad está descrito por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (2.57), ligeramente modificado para tener en cuenta la estructura Gaussiana del modo:

$$H = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z + \hbar\omega_C a^\dagger a - i\frac{\hbar\Omega_0}{2}f(x)(a\sigma^+ - a^\dagger\sigma^-), \quad (2.59)$$

donde $f(x) = \exp(-x^2/w^2)$ ($x \propto vt$), es la posición atómica, con $x = 0$ sobre el eje de la cavidad).

Los átomos cruzan el antinodo central de la estructura de onda estacionaria del modo de la cavidad. Dado que el modo es cercanamente resonante con la transición $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$, la frecuencia de Rabi del vacío en el centro de la cavidad está dado por $\Omega_0/2\pi = 2E_0d/h = 50\text{kHz}$, y consecuentemente un período de Rabi de $2\pi/\Omega_0 = 20\mu\text{s}$. Este período es mucho menor que el tiempo de vida media del estado atómico T_{at} y el tiempo de vida de un fotón dentro de la cavidad T_c . De esta manera, el sistema átomo-cavidad experimentará muchas oscilaciones de Rabi antes de que un fotón depositado dentro la cavidad se pierda.

- Tiempo de interacción efectivo entre un átomo y la cavidad.

A medida que el átomo cruza la cavidad y explora la estructura Gaussiana del modo, este experimenta una amplitud del campo que varía con el tiempo. Esto, en general, complica el análisis de la evolución átomo-campo durante un experimento. Sin embargo, es posible obtener un resultado simple en el caso de resonancia exacta. En este caso, es posible definir un tiempo de interacción efectivo el cual permite describir los experimentos como si el acoplamiento fuera constante a lo largo de la interacción átomo-campo.

El efecto de la interacción durante el cruce del átomo a lo largo de la cintura del modo está descrito por el operador de evolución U_∞ , desde $t \rightarrow -\infty$ a $t \rightarrow +\infty$ (el origen del tiempo, $t = 0$, se escoge cuando el átomo cruza el eje de la cavidad). En el caso resonante ($\Delta_C = \omega_{eg} - \omega_C = 0$), el operador de evolución estará dado por:

$$U_\infty = \exp \left[- (i/\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} H^I(t) dt \right] = \exp[-(i/\hbar)H^I(0)t_i], \quad (2.60)$$

donde

$$t_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f(vt) dt = \sqrt{\pi} \frac{w_0}{v}. \quad (2.61)$$

Es decir, una vez que el átomo ha cruzado el modo, el sistema ha evolucionado como si se hubiera aplicado el acoplamiento máximo, Ω_0 , durante el tiempo de interacción efectivo t_i .

- Algunos pulsos de Rabi.

Para entender más en detalle la evolución átomo-campo, consideremos que inicialmente un átomo de Rydberg es preparado en el estado circular $|e\rangle$, y el modo de la cavidad está en el vacío $|0\rangle$. En este caso, el estado del sistema compuesto estará dado por:

$$|\psi_e(t_i)\rangle = \cos(\Omega_0 t_i/2)|e, 0\rangle + \sin(\Omega_0 t_i/2)|g, 1\rangle. \quad (2.62)$$

Por otro lado, si el sistema está preparado en el estado $|g, 1\rangle$, el estado al instante t_i estará dado por:

$$|\psi_g(t_i)\rangle = \cos(\Omega_0 t_i/2)|g, 1\rangle - \sin(\Omega_0 t_i/2)|e, 0\rangle. \quad (2.63)$$

Es importante notar que una vez que el átomo ha dejado la cavidad, el estado átomo-campo corresponde a un estado entrelazado.

Es posible definir algunos pulsos importantes de acuerdo con el tiempo de interacción efectivo. En el caso en que $\Omega_0 t_i = \pi/2$ (pulso $\pi/2$), y el sistema preparado inicialmente en el estado $|e, 0\rangle$, el estado del sistema átomo-campo será:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 1\rangle), \quad (2.64)$$

el cuál corresponde a un estado átomo-campo maximalmente entrelazado. En el caso en que $\Omega_0 t_i = \pi$ (pulso π), y el sistema preparado inicialmente en el estado $|e, 0\rangle$, el estado del sistema átomo-campo será:

$$|\psi\rangle = |g, 1\rangle, \quad (2.65)$$

es decir, se produce una transferencia completa de población entre los estados $|e, 0\rangle$ y $|g, 1\rangle$. Otro caso de interés ocurre cuando $\Omega_0 t_i = 2\pi$ (pulso 2π). En este caso, el sistema evoluciona a:

$$\begin{aligned} |e, 0\rangle &\rightarrow -|e, 0\rangle \\ |g, 1\rangle &\rightarrow -|g, 1\rangle, \end{aligned} \quad (2.66)$$

es decir, el sistema experimenta un cambio de fase global en π .

Estos tres tipos de pulsos sumados a la manipulación del estado atómico por parte de las zonas Ramsey, comprenden la lógica cuántica que será utilizada a lo largo de esta tesis.

2.3.3. Iones atrapados

Un arreglo de iones atrapados acoplados a su modo colectivo vibracional, representa otra importante arquitectura física donde es posible observar un número importante de procedimientos de información cuántica. El confinamiento de los iones se realiza mediante potenciales cuadrupolares. Entre las trampas de iones más populares encontramos a la trampa de Penning [69], en donde las partículas cargadas son sujetas por una combinación de campos electrostáticos y magnéticos. Está también la trampa de Paul [70], en la cual un campo tiempo dependiente que varía espacialmente, típicamente en el dominio de las radio-frecuencias (rf), confina a las partículas cargadas en el espacio.

Desde que en 1995 J. I. Cirac y P. Zoller propusieron este sistema como un candidato a un procesador de información cuántica [71], muchos grupos experimentales han seguido esta idea básica, y aunque hoy no se cuenta con un dispositivo operativo, es indudable que el desarrollo alcanzado ha permitido llevar a cabo una amplia variedad de protocolos cuánticos. Entre los principales logros podemos mencionar la realización de la compuerta CNOT [72], propuesta teóricamente por Cirac y Zoller [71], la generación de entrelazamiento de cuatro partículas [73], teleportación cuántica usando tres iones en la misma trampa [74], entre otros.

Como se ha mencionado en la sección anterior 2.3.2, un punto importante en el desarrollo de esta tesis es la lógica cuántica que se puede llevar a cabo en los sistemas físicos, en particular iones atrapados, y la extracción de información a partir de métodos adecuados. A continuación veremos la implementación de un qubit en iones de $^{40}\text{Ca}^+$ y estudiaremos la dinámica de este ion, en una trampa de Paul, cuando es manipulado por un campo laser. Finalmente describiremos el método de detección de los niveles internos del ion a través de la técnica conocida como *electron shelving* [4].

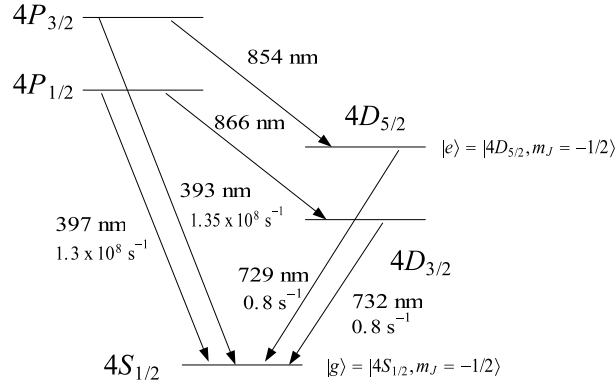


Figura 2.7: Representación esquemática de los niveles de energía relevantes en un ion $^{40}\text{Ca}^+$.

Implementación de un qubit en iones de calcio $^{40}\text{Ca}^+$

El ion de calcio $^{40}\text{Ca}^+$, tiene un único electrón fuera del carozo electrónico y cuya configuración electrónica corresponde a la del átomo alcalino de potasio. En la figura (2.7) se muestran los niveles electrónicos relevantes, las longitudes de onda de las transiciones y las tasas de decaimiento radiativo.

El estado fundamental es el nivel $4S_{1/2}$ sin estructura hiperfina (no existe espín nuclear). La degeneración Zeeman de los niveles con $m_S = \pm 1/2$ es removida mediante un pequeño campo magnético. El subnivel $m_S = -1/2$ juega el rol de estado fundamental del qubit $|g\rangle$. Los primeros estados excitados del ion $^{40}\text{Ca}^+$ son los niveles $4D_{3/2}$ y $4D_{5/2}$, los cuales pueden decaer hacia el estado fundamental solamente a través de una transición cuadrupolar con una probabilidad extremadamente baja. Debido a esto, estos estados tienen un tiempo de vida media radiativo muy largo. El subestado Zeeman de componente de spin $m_S = -1/2$ en el nivel $4D_{5/2}$ (tiempo de vida media 1,2s), juega el rol de estado excitado del qubit $|e\rangle$.

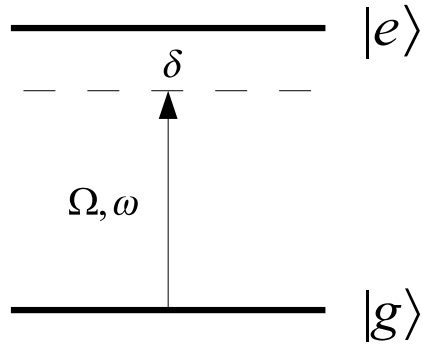


Figura 2.8: Representación esquemática de los niveles de energía en un ion atrapado interactuando con un campo laser de frecuencia ω .

Manipulando el qubit con un campo laser

Como ha sido mencionados anteriormente, un qubit puede ser manipulado a conveniencia mediante la aplicación de radiación acoplado los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$ 2.3.1. En el caso de los iones atrapados, esta interacción puede ser ajustada no solamente para excitar los niveles internos del ion, sino que también para excitar su movimiento vibracional en la trampa. En una trampa de Paul lineal, el confinamiento radial puede ser muy fuerte comparado al confinamiento axial permitiendo un tratamiento unidimensional del movimiento del ion.

Consideremos un ion en una trampa lineal confinado a moverse a lo largo del eje z con frecuencia ω_z . En la figura (2.8) se representa esquemáticamente los niveles de energía en un ion atrapado que interactúa con un campo clásico de frecuencia ω , desintonizado de la transición $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ por una cantidad $\delta = \omega_0 - \omega$. El Hamiltoniano que describe la dinámica del sistema está dado por:

$$H = H_0 + H_1, \quad (2.67)$$

donde la energía libre está dada por

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\nu^2 z^2}{2} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\nu\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (2.68)$$

y el término de interacción es

$$H_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)(e^{i(kz - \omega t + \phi)} + \text{H.c.}), \quad (2.69)$$

donde la posición y el momento lineal del ion están dados por $z = \sqrt{\hbar/2m\nu}(a^\dagger + a)$ y $p = i\sqrt{\hbar m\nu/2}(a^\dagger - a)$. En el cuadro de interacción, y considerando la aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano que describe la dinámica del sistema está dado por [4]

$$H_1^I = \frac{\hbar\Omega}{2} \left[\exp(i\eta(a^\dagger e^{i\nu t} + a e^{-i\nu t}) + i(\phi - \delta t))\sigma^+ + \text{H.c.} \right], \quad (2.70)$$

donde la desentonización se define como $\delta = \omega - \omega_0$ y

$$\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} = 2\pi \frac{\sqrt{\langle 0|z^2|0\rangle}}{\lambda}, \quad (2.71)$$

es el parámetro de Lamb-Dicke, proporcional al cociente entre el ancho de la función de onda del estado fundamental y la longitud de onda del láser.

Un aspecto interesante que distingue a los iones atrapados de las cavidades de microondas, es el hecho de que manipulando la frecuencia del láser aplicado, es posible acceder a distintos tipos de dinámicas. Notemos que la interacción entre el ion y el campo puede ser simplificada si el ion está confinado al régimen de Lamb-Dicke, donde la extensión de la función de onda del ion es mucho más pequeña que la longitud de onda del láser ($\eta\langle\bar{n}\rangle \ll 1$). En este caso, el Hamiltoniano puede ser escrito como:

$$H_{LD}^I = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma^+ \{1 + i\eta(ae^{-i\nu t} + a^\dagger e^{i\nu t})\} e^{i(\phi - \delta t)} + \text{H.c.} \quad (2.72)$$

- Transición Carrier

La primera resonancia en el Hamiltoniano anterior aparece al escoger $\delta = 0$. Esta interacción se denomina *resonancia Carrier* y el Hamiltoniano tiene la siguiente forma

$$H_{\text{car}} = \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma^+ e^{i\phi} + \sigma^- e^{-i\phi}). \quad (2.73)$$

Este Hamiltoniano acopla solamente los grados de libertad internos del ion y deja invariante el estado de movimiento: $|g, n\rangle \leftrightarrow |e, n\rangle$. Notemos que a partir de este Hamiltoniano, es posible llevar a acabo cualquier rotación local sintonizando la fase ϕ , la frecuencia de Rabi Ω , y el tiempo de interacción entre el ion y el campo.

- Primer red sideband (corrimiento al rojo)

Cuando $\delta = -\nu$, la parte resonante en el Hamiltoniano (2.72), se denomina primer red side band y tiene la forma

$$H_R = \frac{i\hbar\Omega\eta}{2}(a\sigma^+ e^{i\phi} - a^\dagger\sigma^- e^{-i\phi}). \quad (2.74)$$

Este Hamiltoniano describe un dinámica tipo Jaynes-Cummings análogamente al caso de cavidades de microondas, produciendo oscilaciones de Rabi entre los estados $|g, n\rangle \leftrightarrow |e, n-1\rangle$. Esta resonancia conduce a una dinámica del ion condicionada por el número de fonones, una situación ideal para realizar entrelazamiento entre los grados de libertad internos y vibracionales. Partiendo inicialmente desde el estado $|e, 0\rangle$, un pulso $\pi/2$ sobre el primer red side band prepara una superposición de los estados $|e, 0\rangle$ y $|g, 1\rangle$, generando un entrelazamiento máximo.

- Primer blue sideband (corrimiento al azul)

Por otro lado, la parte resonante del Hamiltoniano (2.72) cuando $\delta = \nu$, se denomina primer blue side band y tiene la forma

$$H_B = \frac{i\hbar\Omega\eta}{2}(a^\dagger\sigma^+ e^{i\phi} - a\sigma^- e^{-i\phi}). \quad (2.75)$$

Este Hamiltoniano describe una dinámica anti Jaynes-Cummings, en la cual el ion puede experimentar un transición desde el estado $|g\rangle$ al estado $|e\rangle$ mientras es emitido un fonón en el modo vibracional. En el contexto de cavidades de microondas, un proceso de este tipo no conserva la energía y por lo tanto es despreciado. Por el contrario, en trampas de iones esta dinámica contra-intuitiva provee una herramienta útil a la hora de realizar lógica cuántica. Análogamente a la dinámica de Jaynes-Cummings, este tipo de interacción también permite realizar entrelazamiento entre los grados de libertad internos del ion y los grados de libertad del modo vibracional.

Detección del estado interno en iones $^{40}\text{Ca}^+$ (*electron-shelving*)

La detección de un ion en el estado $|g\rangle$ se realiza mediante la fluorescencia inducida por un laser resonante. Un ion Ca^+ conducido por un laser resonante sobre la transición $4S_{1/2} \rightarrow 4P_{1/2}$, es capaz de dispersar $\Gamma_{ps}/2 = 7 \cdot 10^7$ fotones por segundo. Para evitar la interrupción de la fluorescencia del ion debido al salto cuántico desde el estado $4P_{1/2}$ hacia el estado $4D_{3/2}$, se utiliza un laser de bombeo (866nm) para conducir de vuelta al ion a la transición cíclica entre los estados $4S_{1/2} \rightarrow 4P_{1/2}$, reestableciendo la luz fluorescente. No todos los fotones fluorescentes son detectados. El ángulo sólido de la detección óptica en un experimento típico es de 10^{-2} sr y la eficiencia cuántica de los detectores está en el rango de 0,1 a 0,2.

Cuando el ion está inicialmente en el estado $|e\rangle$, la detección laser no es resonante y no hay scattering de fotones. Así, el nivel de fluorescencia es muy diferente para los dos estados del qubit. Este método se conoce con el nombre de *electron shelving* y el estado del ion puede ser inferido desde el número de fotones detectados con una fidelidad del 99,85%. Es importante hacer notar que dentro de todas las arquitecturas propuestas para implementar un

procesador cuántico, esta alta fidelidad en la detección del estado electrónico del qubit hace de los iones atrapados el candidato más promisorio.

2.3.4. Qubits superconductores y electrodinámica cuántica de circuitos

Usualmente la mecánica cuántica se asocia a sistemas microscópicos tales como átomos, fotones y electrones, los cuales son parte esencial en los escenarios físicos anteriormente discutidos. Por otro lado, la mecánica clásica nos permite establecer las leyes que gobiernan la dinámica de los objetos macroscópicos tales como bolas de billar, sistemas planetarios, etc. Sin embargo, los trabajos de Antony Leggett [2] dieron a conocer la existencia de sistemas que poseen un estatus intermediario entre las partículas microscópicas y los objetos clásicos macroscópicos, los cuales denominó *sistemas cuánticos macroscópicos*. Estos objetos se dicen macroscópicos en el sentido que ellos están constituidos por un gran número de partículas microscópicas (pares de Cooper en el caso de un estado superconductor). Además, son metamateriales o materiales artificiales dado que pueden ser construidos de acuerdo a ciertas especificaciones. Una característica esencial de este tipo de sistemas es que poseen grados de libertad colectivos que se comportan de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica. Tal comportamiento está influenciado por parámetros que no son fundamentales sino que son parámetros que pueden ser ajustados de acuerdo al diseño del sistema físico.

Un ejemplo de sistemas en donde es posible observar fenómenos cuánticos macroscópicos, y que son nuestro tema de interés para el desarrollo de esta tesis, corresponden a los circuitos cuánticos integrados [75]. A continuación describiremos los aspectos básicos de estos circuitos integrados, dando a conocer la necesidad de introducir elementos tales como las uniones o jun-

turas Josephson [76]. Posteriormente describiremos en detalle las juntas Josephson y se presentarán las distintas implementaciones de qubits en este tipo de sistemas, por ejemplo, qubits de carga [77], flujo [78, 79] y fase [80]. Finalmente, estudiaremos el modelo para una guía de onda coplanar y cómo es posible acoplarla con el qubit superconductor de fase.

Aspectos básicos de circuitos cuánticos integrados.

Para que un circuito integrado se comporte de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica, es necesario que se satisfagan los siguientes requerimientos [81]:

- Disipación ultrabaja: *superconductividad*

El primer requerimiento es que el circuito tenga una disipación muy baja. Específicamente, todas sus partes metálicas deben estar hechas de un material que tenga una resistencia despreciable a las temperaturas que opera un qubit y a la frecuencia de transición del mismo. Es por esta razón que los superconductores de baja temperatura tales como el aluminio y el niobio son ideales a la hora de transportar señales cuánticas. Este requerimiento está directamente relacionado con la coherencia cuántica en el sistema, por ejemplo, en este tipo de dispositivos es posible observar superposiciones coherentes de estados con N y $N + 1$ pares de Cooper.

- Ruido ultrabajo: *bajas temperaturas*

El segundo requerimiento hace referencia a que los grados de libertad del circuito integrado deben ser congelados a temperaturas donde la energía de las fluctuaciones térmicas, $k_B T$, sean mucho menores que la energía de transición entre los estados del qubit, $\hbar\omega_{01}$. Típicamente para qubits superconductores, esta frecuencia de transición está dentro

del rango de 5 – 20GHz y por lo tanto, la temperatura a la cual deben operar estos dispositivos deben ser de $\sim 20\text{mK}$. Dentro de este requerimiento, un punto importante hace referencia al control y medición del estado del qubit. Esto se realiza mediante alambres conectados (formando el *ambiente electromagnético* del qubit) al chip superconductor los cuales también deben ser congelados a estas bajas temperaturas. Los requerimientos para un funcionamiento con ultra bajo ruido son $k_B T \ll \hbar\omega_{01}$ y $\hbar\omega_{01} \ll \Delta$, donde Δ es el gap de energía del material superconductor.

- Elemento no disipativos, no lineales: *junturas tunel*

En tercer lugar, debemos notar que el procesamiento de señales cuánticas no puede realizarse utilizando sólo elementos puramente lineales, tales como, capacitores e inductores, sino que es necesaria la presencia de elementos que exhiban un comportamiento no lineal, además de presentar disipación despreciable. El único dispositivo capaz de satisfacer ambos requerimientos son las *junturas tunel superconductoras* o *junturas Josephson* [76], los cuales son necesarios para la aparición de estados de qubits.

Junturas Josephson

Una juntura Josephson (**JJ**) consiste de dos superconductores separados por una barrera aisladora lo suficientemente delgada, típicamente 2 – 3 nm, para permitir que pares de Cooper experimenten efecto tunel a través de la barrera, ver la figura 2.9(a).

El efecto Josephson [76] describe la supercorriente I que fluye a través de

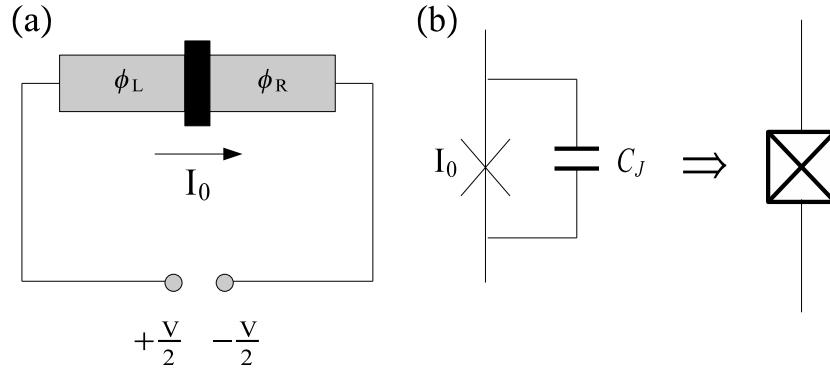


Figura 2.9: (a) Una junta Josephson está compuesta por dos superconductores unidos por una delgada lámina aisladora. (b) Representación esquemática de una **JJ** en un circuito integrado.

la junta de acuerdo a las ecuaciones clásicas

$$\begin{aligned} I &= I_0 \sin(\theta) \\ V &= \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde $\phi_0 = h/2e$ corresponde al cuanto de flujo, I_0 es la corriente crítica de la junta, $\theta = \phi_L - \phi_R$ es la diferencia de fase superconductor y V es el voltaje a lo largo de junta. Para una derivación detallada de las relaciones de Josephson (2.76) ver el apéndice (A).

El comportamiento dinámico de las relaciones (2.76) permiten revelar el aspecto esencial de las juntas Josephson. Estas uniones son inductores no lineales que combinados con su capacitancia intrínseca, C_J , se comporta como un oscilador no lineal con niveles de energía cuantizados los cuales pueden ser utilizados como estados de un qubit. La figura 2.9(b) muestra un representación esquemática de una junta Josephson en un circuito cuántico integrado.

Para hacer patente la no linealidad de las uniones Josephson, tomemos la derivada respecto al tiempo de la ecuación para la supercorriente I y reem-

plazemos esta en la ecuación para el voltaje V . Esto conlleva a la siguiente relación

$$\frac{dI}{dt} = I_0 V \frac{2\pi}{\phi_0} \cos(\theta). \quad (2.77)$$

Recurriendo entonces a la ley de Faraday $V = -LdI/dt$, donde L corresponde a la inductancia, es posible obtener la inductancia Josephson

$$|L_J| = \frac{\phi_0}{2\pi I_0 \cos(\theta)} \quad (2.78)$$

$$= \frac{\phi_0}{2\pi(I_0 - I^2)^{1/2}}, \quad (2.79)$$

donde $I < I_0$. Claramente, el término $1/\cos(\theta)$ revela que el inductor es no lineal y es capaz de almacenar una energía E_J , denominada *energía de Josephson*

$$\begin{aligned} E_J &= \int IV dt \\ &= \frac{\phi_0 I_0}{2\pi} \int \sin(\theta) d\theta \\ E_J &= -\frac{\phi_0 I_0}{2\pi} \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Combinando entonces el inductor con la capacitancia intrínseca de la juntura, se obtiene un oscilador no lineal, cuya frecuencia natural es

$$\omega_p(I) = (L_J C_J)^{-1/2} \quad (2.81)$$

$$= (2\pi I_0 / \phi_0 C_J)^{1/2} / (1 - I^2 / I_0^2)^{1/4}, \quad (2.82)$$

denominada frecuencia de plasma.

Qubits superconductores de carga, flujo y fase

Una vez presentadas las uniones Josephson, estamos en posición de estudiar las distintas implementaciones de qubits. En este capítulo presentaremos en detalle el qubit de fase debido a que será utilizado posteriormente. Los qubits de carga y flujo se estudian con más detalle en el apéndice (A).

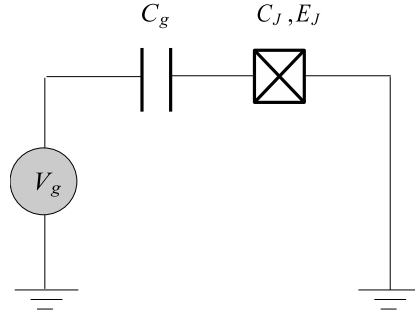


Figura 2.10: Representación esquemática de un qubit de carga o Cooper-Pair Box.

- Qubit de carga. Cooper-Pair Box (CPB)

Un qubit superconductor de carga o Cooper-Pair Box (**CPB**) consiste de un pequeño electrodo superconductor llamado la “isla”. Este electrodo está conectado a un reservorio superconductor BCS a través de una juntura Josephson con capacitancia C_J y energía Josephson E_J . Esta isla es conducida por una fuente de potencial V_g en serie con una compuerta de capacitancia C_g como se observa en la figura 2.10. Siguiendo el formalismo de flujos desarrollado en el apéndice (A), es posible mostrar que el Hamiltoniano de este sistema está dado por

$$H_{CPB} = 4E_C(N - N_g)^2 - E_J \cos(\theta), \quad (2.83)$$

donde θ es la diferencia de fase superconductor. Aquí, $E_C = e^2/2(C_J + C_g)$ es la energía de carga de la isla y $N_g = C_g V_g / (2e)$ se denomina compuerta de carga.

En los circuitos cuánticos integrados, las variables canónicas conjugadas son la diferencia de fase superconductor θ (o bien el flujo ϕ) y la carga almacenada en la juntura Q , las cuales obedecen a la relación de conmutación $[\theta, Q] = 2ei$. Consecuentemente, estas variables están sujetas al principio de incertidumbre de Heisenberg, $\Delta\theta\Delta Q \geq 2e$.

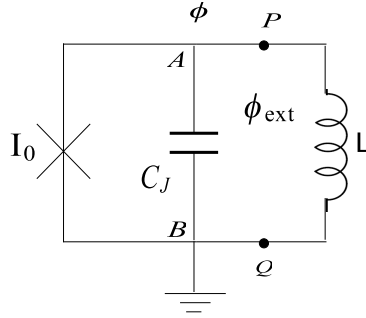


Figura 2.11: Representación esquemática de un qubit de flujo de una juntura Josephson o rf-SQUID.

En el caso del qubit de carga, se tiene la siguiente relación entre las energías de carga y de Josephson, las cuales controlan los anchos característicos de la función de onda del sistema, $E_J/E_C = 1/10$. De esta manera, la carga en la juntura está bien definida mientras la diferencia de fase experimenta largas fluctuaciones. Esta condición permite además a la compuerta de carga, V_g , seleccionar el número de pares de Cooper que pueden experimentar efecto tunel hacia la isla superconductora, definiendo de esta manera los estados de qubits con $|N_g\rangle$ y $|N_g + 1\rangle$ pares de Cooper.

- Qubit de flujo. rf-SQUID

Un qubit de flujo consiste de un anillo superconductor interrumpido por una [78] o tres [79] junturas Josephson el cual se acopla a un inductor externo que genera un flujo magnético (ϕ_{ext}). Este flujo externo induce dos estados de supercorriente: uno circulando en sentido horario y otro en sentido antihorario (ver la figura 2.11). En particular, el Hamiltoniano para el qubit de una juntura denominado rf-SQUID, está dado por

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} + \frac{(\phi - \phi_{\text{ext}})^2}{2L} - E_J \cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right). \quad (2.84)$$

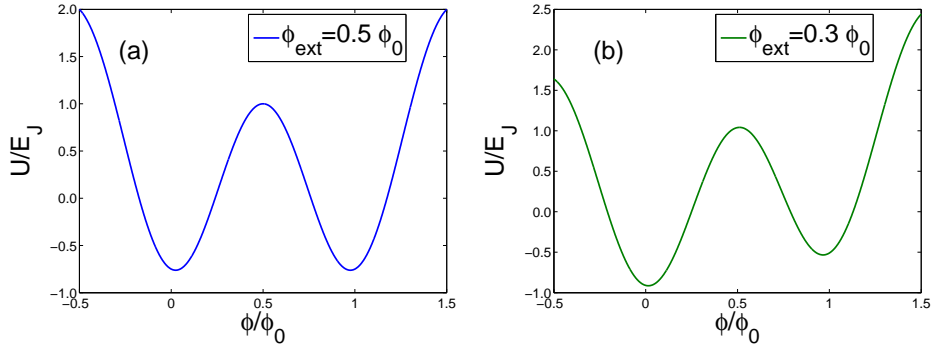


Figura 2.12: (a) Potencial del rf-SQUID para un flujo externo $\phi_{\text{ext}} = 0,5\phi_0$. (b) Potencial del rf-SQUID para un flujo externo $\phi_{\text{ext}} = 0,3\phi_0$.

Esta implementación física está caracterizada por la siguiente relación entre las energías de carga y de Josephson, $E_J/E_C = 10$. De acuerdo con la discusión anterior, el flujo (relacionado a la diferencia de fase por la relación, $\phi = (\hbar/2e)\theta$) está bien definido mientras la carga en la juntura experimenta largas fluctuaciones.

Cuando el flujo externo se ajusta a $\phi_{\text{ext}} = \phi_0/2$, el potencial del rf-SQUID se vuelve simétrico (caso degenerado), como se muestra en la figura 2.12(a). Una pequeña desviación de este valor, $\phi_{\text{ext}} \neq \phi_0/2$, hace que el potencial se vuelva asimétrico (caso no degenerado), como se muestra en la figura 2.12(b). En ambos casos, los dos mínimos corresponden a los dos diferentes sentidos en que la supercorriente puede fluir a lo largo del anillo.

- Qubit de fase. Current-biased Josephson junction (CBIJ)

El modelo para un qubit de fase se muestra en la figura 2.13. Hay una juntura Josephson conducida por una fuente de corriente la cual puede ser modelada por una inductancia muy alta. La corriente externa I

provoca una inclinación de la energía potencial en la juntura, creando regiones metaestables con un número finito de niveles de energía los cuales pueden experimentar efecto tunel fuera de la barrera.

La dinámica de este circuito obedece al siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2C_J}Q^2 + U(\phi), \quad (2.85)$$

expresado en términos de la carga en la juntura y el flujo ϕ en el nodo del circuito [Fig. 2.13]. El Hamiltoniano contiene la energía capacitiva usual expresada en términos de la capacitancia de la juntura, C_J , y una energía potencial debido a los elementos inductivos. Este Hamiltoniano se obtiene siguiendo el formalismo de flujos discutido en el apéndice (A). Modelando la fuente de corriente como un inductor largo con un flujo total que suministra una corriente constante, $\tilde{\Phi}/L_J = I$, se obtiene el potencial altamente anarmónico

$$U(\phi) = -I_0\varphi_0 \cos(\phi/\varphi_0) - I\phi. \quad (2.86)$$

Por simplicidad, seguiremos el tratamiento en términos de la variable $\varphi_0 = \phi_0/2\pi$, esto para evitar factores 2π .

La cuantización de este modelo corresponde a imponer las relaciones de conmutación usuales entre las variables canónicas conjugadas, el flujo ϕ y la carga Q , esto es $[\phi, Q] = i\hbar$. Trabajando en la representación de número-fase, esto es, $\phi = \varphi_0 \times \theta$, y $Q = 2e \times N$ con operadores que satisfacen la relación de conmutación $[\theta, N] = i$. En términos de estas variables, el Hamiltoniano puede ser expresado como

$$H = E_C N^2 - I_0\varphi_0 \left[\cos(\theta) + \frac{I}{I_0}\theta \right], \quad (2.87)$$

donde la energía de carga de la juntura está dada por

$$E_C = \frac{(2e)^2}{2C_J} = \frac{\hbar^2}{2\varphi_0^2 C_J}. \quad (2.88)$$

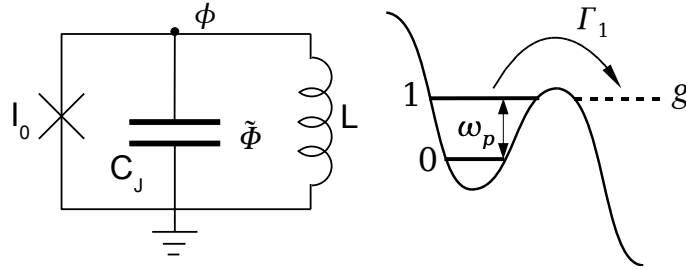


Figura 2.13: (izquierda) Esquema para un qubit de fase o current-biased Josephson junction. (derecha) Niveles de energía. Hay N_s niveles de energía metaestables con frecuencias anarmónicas.

Notemos que ahora hemos incluido el factor 2 correspondiente a la carga de un electrón superconductor.

Aproximación armónica

Cuando la corriente que conduce a la juntura I es muy cercana a la corriente crítica I_0 , se tiene una situación en Fig. 2.13 en la cual la juntura desarrolla un mínimo local del potencial para θ cercano a $\pi/2$. En este caso, es adecuado aproximar el potencial por un polinomio cúbico y describir la dinámica semiclassical con una componente coherente que describa las oscilaciones alrededor del mínimo local y la tasa de decaimiento al continuo de estados de carga, los cuales están fuera de este mínimo inestable.

El límite semiclassical está caracterizado solamente por dos números, la frecuencia de plasma de las oscilaciones de la fase alrededor del mínimo

$$\omega_p = \sqrt{\frac{I_0}{4\varphi_0 C_J} \left[1 - \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 \right]^{1/4}} \quad (2.89)$$

y la altura de la barrera

$$\Delta U = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 - \frac{I}{I_0}}, \quad (2.90)$$

la cual previene el tunelamiento fuera de este mínimo. Usando métodos semiclásicos, es posible estimar el número de estados metaestables en este mínimo local, $\sim N_s = \Delta U / \hbar \omega_p$, y aproximar sus niveles de energía como

$$E_n / \hbar = n\omega_p + \omega_n^{anh} - i\Gamma_n, \quad (2.91)$$

el cual incluye la componente anarmónica, ω_n^{anh} , y una parte imaginaria que corresponde a la tasa a la cual el estado decae al continuo, Γ_n . En esta tesis, se utilizará el hecho que para dos niveles consecutivos sus tasas de decaimiento pueden ser muy diferentes, $\Gamma_{n+1} / \Gamma_n \sim 1000$ [82]. Permitiéndonos tratar los niveles $|0\rangle$ y $|1\rangle$, como los niveles de elementos absorbedores de fotones.

Un punto importante que trataremos más adelante, es cómo acoplar un qubit de fase con una guía de onda unidimensional transportando fotones. Para esto, es necesario estudiar en detalle los resultados que hemos presentado hasta ahora.

Primero notemos que el mínimo de energía se alcanza para el siguiente valor de la fase

$$\sin(\theta_m) = \frac{I}{I_0} =: r \quad (2.92)$$

el cual es muy cercano a $\pi/2$. Alrededor de este mínimo, $\theta = \theta_m + \tilde{\theta}$, una aproximación armónica nos permite escribir

$$H \simeq E_C \hat{N}^2 + \frac{1}{2} U'' \tilde{\theta}^2, \quad (2.93)$$

con una curvatura del potencial dada por

$$U''(\theta_m) = I_0 \varphi_0 \cos(\theta_m) = I_0 \varphi_0 \sqrt{1 - r^2}. \quad (2.94)$$

Para diagonalizar este Hamiltoniano se introducen los operadores

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} i(a^\dagger - a), \quad (2.95)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad (2.96)$$

con las relaciones de conmutación usuales, $[a, a^\dagger] = 1$, e imponiendo que

$$\frac{E_C}{2\alpha^2} = \frac{U''\alpha^2}{4} = \frac{1}{2}\hbar\omega_p. \quad (2.97)$$

Esto nos provee de la frecuencia de plasma obtenida antes (2.82),

$$\omega_p = \sqrt{\frac{E_C U''}{2\hbar^2}} = \sqrt{\frac{I_0}{4\varphi_0 C_J}} (1 - r^2)^{1/4}, \quad (2.98)$$

y también de la “intensidad” de los operadores de número y fase,

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{2E_C}{U''}} = \frac{E_C}{\hbar\omega_p}, \quad (2.99)$$

la cual está relacionada a la energía de carga y la frecuencia de plasma.

Fotones en líneas de transmisión

A continuación se estudiará el modelo matemático y las propiedades físicas de una guía de microondas coplanar. Este dispositivo consiste de un conductor central que transporta a las ondas, el cual está delimitado por dos conductores conectados a tierra. Un modelo simple pero efectivo para esta línea de transmisión, se obtiene acoplando inductancias y capacitores como se muestra en la Fig. 2.14. Como se mostrará más adelante, si denotamos por l y c la inductancia y capacitancia por unidad de longitud, este modelo predice la propagación de campos de microondas en la línea de transmisión de acuerdo a la relación de dispersión

$$\omega_k = v|k| = \frac{1}{\sqrt{cl}}|k|, \quad (2.100)$$

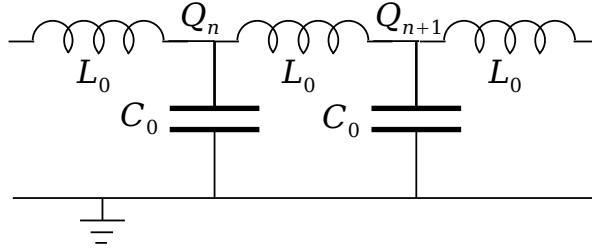


Figura 2.14: Una línea de transmisión puede ser modelada como un conjunto de inductancias y capacitancias.

donde $\hbar k$ es el momento del fotón, ω_k es la frecuencia y v es la velocidad de grupo.

■ Modelo discreto

Para analizar el circuito de la figura 2.14, debemos escribir las leyes de Kirchhoff para el n -ésimo bloque conteniendo 4 nodos. Al combinar todas las ecuaciones y dejando como variables las intensidades de las corrientes, es posible obtener el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$-L_0 \frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{C_0} [2I_n - I_{n-1} - I_{n+1}]. \quad (2.101)$$

Estas ecuaciones son similares a aquellas que describen un conjunto infinito de osciladores de masa $m \propto L_0$ y constante elástica $\kappa \propto 1/C_0$. En analogía con el caso mecánico, si asumimos condiciones de borde periódicas para reproducir de mejor manera la propagación de la carga, encontramos soluciones de ondas viajeras

$$I_n(t) = I_0 e^{i(kx_n - \omega t)}, \quad k = \frac{2\pi}{L} \times \mathbf{Z}, \quad (2.102)$$

donde $x_n = a \times n$, a es un parámetro que denota la distancia entre osciladores vecinos, k es el momento de la onda y L es la longitud de la

línea. Sustituyendo esta última expresión en Eq. (2.101), nos permite obtener la relación de dispersión

$$\omega(k) = \left[\frac{2}{L_0 C_0} (1 - \cos(ka)) \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{a^2}{L_0 C_0}} |k|, \quad (2.103)$$

la cual es aproximadamente lineal para pequeños momentos, guía de onda larga o discretización fina. Usando la inductancia y capacitancia por unidad de longitud

$$l = L_0/a, \quad c = C_0/a, \quad (2.104)$$

se obtiene la velocidad de grupo v y la relación de dispersión introducida antes (2.100).

■ Formalismo Lagrangiano y límite continuo

Las ecuaciones de evolución previas (2.101) pueden ser obtenidas desde el siguiente Lagrangiano

$$L = \sum_n \left(\frac{L_0}{2} \dot{Q}_n^2 - \frac{1}{2C_0} (Q_n - Q_{n+1})^2 \right) \quad (2.105)$$

usando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_n} \right) = \frac{\partial L}{\partial Q_n}. \quad (2.106)$$

Un modelo más realista para una línea de transmisión continua se obtiene tomando el límite de inductores y capacitores infinitesimalmente pequeños, $a \rightarrow 0$, mientras se preservan las cantidades intensivas l y c . En el límite continuo, se reemplazan las cargas discretas por una distribución continua de densidad de carga, $Q_n \simeq a \times q(x_n, t)$, la cual debería ser una función de la variable x , suave e integrable. Mediante este procedimiento uno obtiene un Lagrangiano total expresado en forma integral

$$L = \int dx \left[\frac{l}{2} (\partial_t q)^2 - \frac{1}{2c} (\partial_x q)^2 \right]. \quad (2.107)$$

La distribución de carga descrita a través del campo $q(x, t)$ obedece a la ecuación de onda

$$\partial_x^2 q(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 q(x, t) = 0, \quad (2.108)$$

donde la velocidad de grupo es precisamente la que se ha encontrado en el caso discreto.

■ Hamiltoniano y cuantización

La cuantización de un circuito eléctrico es un procedimiento de tres etapas. Se comienza por identificar las variables canónicas conjugadas: la distribución de carga $q(x, t)$ y su momento asociado

$$\Pi_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = l\dot{q}(x, t). \quad (2.109)$$

El Hamiltoniano se construye de acuerdo a la prescripción

$$H = \int dx \Pi_q \dot{q} - L = \int dx \left[\frac{(\Pi_q)^2}{2l} + \frac{(\partial_x q)^2}{2c} \right]. \quad (2.110)$$

Finalmente, las variables $\{q, \Pi_q\}$ son reemplazadas por operadores Hermíticos que satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{q}(x, t), \hat{\Pi}_q(x', t)] = i\hbar\delta(x - x'). \quad (2.111)$$

El Hamiltoniano anterior (2.110) es cuadrático y puede ser diagonalizado. Para ello, comencemos por analizar la dinámica de estos operadores en el cuadro de Heisenberg. Dado que la carga satisface la ecuación de onda (2.108), tiene sentido buscar un conjunto de modos normales construídos por ondas planas

$$\hat{q}(x, t) = \sum_k N_k \hat{q}_k(t) u_k(x), \quad (2.112)$$

$$u_k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \exp(ikx), \quad k \in \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \times \mathbf{Z}, \quad (2.113)$$

donde \hat{q}_k son nuestras nuevas variables dinámicas y N_k es una constante de normalización la cual debe ser fijada. Notemos que se está utilizando condiciones de borde periódicas debido a que estas son adecuadas para describir transporte, pero no hemos fijado la longitud de la línea de transmisión \mathcal{L} , la cual puede ser arbitrariamente larga.

Reemplazando la expresión anterior en (2.108), produce una ecuación diferencial de segundo orden para los operadores $q_k(t)$

$$\ddot{\hat{q}}_k(t) + \omega_k^2 \hat{q}_k(t) = 0. \quad (2.114)$$

Dado que \hat{q} y \hat{q}_k son observables físicos, y consecuentemente operadores Hermíticos, la solución más general estará dada por $\hat{q}_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t}$, la cual está expresada en términos del operador independiente del tiempo, a_k . La relación de conmutación (2.111) produce relaciones de conmutación bosónicas para los a_k

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad (2.115)$$

y permite definir la constante $N_k^2 = \hbar/(2\omega_k l)$. Finalmente, con las funciones de onda ortonormalizadas $w_k(x, t) = u_k(x) \exp(-i\omega_k t)$, se obtiene

$$\hat{q}(x, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k l}} [a_k w_k(x, t) + \text{H.c.}] \quad (2.116)$$

$$\hat{\Pi}_q(x, t) = \sum_k i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k l}{2}} [a_k^\dagger w_k(x, t)^* - \text{H.c.}].$$

Dada la forma específica de los operadores canónicos, se puede obtener una relación de dispersión particular ω_k que diagonaliza el Hamiltoniano. Usando las relaciones

$$\int w_k(x, t) w_{k'}(x, t) dx = \delta_{k+k'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t}, \quad (2.117)$$

$$\int w_k(x, t) w_{k'}(x, t)^* dx = \delta_{k-k'}, \quad (2.118)$$

e imponiendo

$$\frac{\hbar\omega_k l}{2} \times \frac{1}{2l} = \frac{\hbar}{2\omega_k l} \times \frac{1}{2c} \times k^2, \quad (2.119)$$

seremos capaces de cancelar todos los términos proporcionales a $a_k a_{-k}$ y $a_k^\dagger a_{-k}^\dagger$, obteniendo un conjunto de osciladores desacoplados

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.120)$$

donde la relación de dispersión es estrictamente la introducida antes en Eq. (2.100).

■ Linealización

En esta tesis nos focalizaremos sobre los estados que contienen fotones con momento alrededor de $|k_0|$ o ω_0/v , donde ω_0 corresponde a la frecuencia principal del paquete de ondas. Además introduciremos los siguientes operadores de campo, los cuales representan a los fotones que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda:

$$\psi_r(x, t) = \sum_{k \in \mathcal{B}} a_k w_k(x, t), \quad (2.121)$$

$$\psi_l(x, t) = \sum_{k \in \mathcal{B}} a_{-k} w_{-k}(x, t), \quad (2.122)$$

donde $\mathcal{B} = [k_0 - \Delta, k_0 + \Delta]$ es la vecindad deseada alrededor del momento principal, caracterizada por una frecuencia de corte Δ . Estos dos campos satisfacen las ecuaciones de evolución

$$i\partial_t \psi_r(x, t) = -i\hbar v \partial_x \psi_r(x, t), \quad (2.123)$$

$$i\partial_t \psi_l(x, t) = +i\hbar v \partial_x \psi_l(x, t), \quad (2.124)$$

y podemos escribir el Hamiltoniano efectivo como

$$H = \int \left[\psi_r^\dagger (-i\hbar v \partial_x) \psi_r + \psi_l^\dagger (+i\hbar v \partial_x) \psi_l \right] dx. \quad (2.125)$$

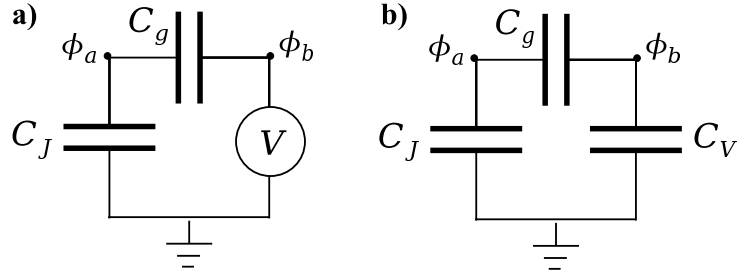


Figura 2.15: Un capacitor conectado a una fuente de voltaje via otro capacitor, puede ser simulado através tres capacitores conectados en serie, donde el último de ellos posee una capacitancia muy grande, $C_V \rightarrow \infty$, pero con un potencial fijo, $V = Q_V/C_V$.

Hay un truco en la expansión anterior: los operadores $\psi_{r,l}$ no satisfacen las relaciones de conmutación bosónicas usuales. Por ejemplo

$$[\psi_r(x, t), \psi_r^\dagger(y, t)] = \sum_{k \in \mathcal{B}} w_k(x, t) \bar{w}_k(y, t), \quad (2.126)$$

donde el lado derecho representa una truncación de la distribución $\delta(x-y)$ dentro del intervalo de momentos \mathcal{B} . Como veremos en el capítulo 5, estaremos interesados en el régimen asintótico de un procedimiento de absorción de fotones, tratando con tiempos largos y paquetes de onda suficientemente largos, para los cuales la aproximación de onda rotante es válida. En este caso, podemos justificar la aproximación

$$[\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta^\dagger(y, t)] \simeq \delta_{\alpha,\beta} \delta(x-y), \quad \alpha, \beta \in \{r, l\}, \quad (2.127)$$

y tratar a los campos propagantes como causales.

Acoplamiento entre el qubit y la línea de transmisión. Aproximación dipolar

La interacción de un qubit de fase y una línea de transmisión se logra através de un acoplamiento capacitivo. Para entender la física involucrada en

esta interacción, estudiemos el circuito cuántico mostrado en Fig. 2.15, donde un “elemento” es el capacitor C_J acoplado a un potencial V a través de otro capacitor, C_g . Si seguimos la prescripción de tratar a la fuente de potencial como un capacitor de tamaño infinito y considerando el tratamiento de flujos del apéndice (A), se obtiene el siguiente término de energía capacitiva

$$E_C = \frac{C_J}{2}\dot{\phi}_a^2 + \frac{C_V}{2}\dot{\phi}_b^2 + \frac{C_g}{2}(\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b)^2. \quad (2.128)$$

Este puede ser escrito equivalentemente utilizando la matriz de capacitancia

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_J + C_g & -C_g \\ -C_g & C_V + C_g \end{pmatrix}, \quad (2.129)$$

cuya inversa es

$$\bar{C}^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} C_V + C_g & C_g \\ C_g & C_J + C_g \end{pmatrix}, \quad (2.130)$$

con $|C| = C_J C_V + C_g(C_J + C_V)$. Notemos que esto conduce al Hamiltoniano

$$H = \frac{C_V + C_g}{2|C|} Q_J^2 + \frac{C_g}{|C|} Q_J Q_V + \frac{C_J + C_g}{2|C|} Q_V^2. \quad (2.131)$$

De esta manera no solamente aparece un término de interacción, sino que el capacitor de gran tamaño también se ve afectado. Sin embargo, al considerar el límite de grandes capacitancias, $C_V \rightarrow \infty$ con $V = C_V/Q_V$, se obtiene $|C| \sim C_V(C_g + C_J)$, y $C_g Q_V/|C| \sim C_g V/(C_g + C_J)$. Así, luego de remover la energía de la fuente de potencial, obtenemos el Hamiltoniano

$$H \simeq \frac{1}{2C_\Sigma} Q_J^2 + \frac{C_g}{C_g + C_J} Q_J V. \quad (2.132)$$

Las consideraciones anteriores se conocen como *aproximación dipolar*, en la cual el capacitor objetivo es afectado por el potencial de la fuente grande. Dado que la capacitancia total de la línea de transmisión es mucho más

grande que la de un qubit superconductor, también es posible aplicar el límite dipolar para estudiar el acoplamiento entre ambos elementos y asumir que el término de interacción está dado por:

$$H = \hat{q} \frac{C_g}{C_g + C_J} \hat{V}(x, t). \quad (2.133)$$

Siguiendo nuestra teoría cuántica de campos, el potencial creado dentro de la guía de onda puede ser escrito como una función de la distribución de carga sobre el conductor

$$\hat{V}(x, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{Q}(x, t)}{\partial x}. \quad (2.134)$$

Usando la ecuación de autovalores $\partial_x w_k(x, t) = ipw_k(x, t)$ y la relación de dispersión (2.100), obtenemos

$$\hat{V}(x, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2c}} \left[a_k w_k(x, t) - a_k^\dagger w_k(x, t)^* \right]. \quad (2.135)$$

Asumiendo que el fotón incidente y el paquete de ondas que se aleja tienen un ancho de banda pequeño, podemos aproximar $\omega_k \simeq \omega_0$ y obtener el potencial como una función de los campos propagantes

$$\hat{V} \simeq i \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c}} \left[\psi_r + \psi_l - \psi_r^\dagger - \psi_l^\dagger \right]. \quad (2.136)$$

De esta manera, la intensidad del acoplamiento entre el qubit superconductor y la línea de transmisión está descrita por

$$V \sim \frac{C_g}{C_g + C_J} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c}}, \quad (2.137)$$

la cual es independiente de la longitud de la guía de ondas.

Consistentemente, podemos considerar el caso de una línea de transmisión pequeña en la cual los modos están muy bien separados. En este caso, solamente se necesita considerar un único momento, k , y todo se reduce a la fórmula

$$\hat{V}(x, 0) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2C}} (a_k - a_k^\dagger). \quad (2.138)$$

Aquí, C corresponde a la capacidad de la línea de transmisión y la cantidad $(\hbar\omega_k/2C)^{1/2}$ es el voltaje r.m.s, el cual corresponde a la expresión en el experimento de Wallraff *et.al.* [26].

Capítulo 3

Medida directa de la conurrencia para estados puros de dos qubits atómicos

En este capítulo se mostrará un esquema general para medir la concurrencia de un estado puro de dos qubits en sistemas atómicos. El protocolo está basado en operaciones de uno y dos qubits que actúan sobre dos copias del sistema bipartito, seguidas por una lectura global de los qubits. Aquí, se muestra que es posible codificar la concurrencia en la probabilidad de encontrar a todos los qubits atómicos en el estado fundamental. Se presentarán dos implementaciones físicas para el protocolo: átomos cruzando cavidades de microondas tridimensionales y sistemas de iones atrapados.

3.1. Introducción

Anteriormente se ha expuesto la importancia que tiene el entrelazamiento cuántico en aplicaciones modernas de la mecánica cuántica. Es por esta

razón que la detección y cuantificación experimental del entrelazamiento, ha capturado la atención de muchos grupos [46, 47]. Un primer acercamiento a este problema corresponde a la reconstrucción tomográfica del estado cuántico [83], seguida por la evaluación de alguna medida de entrelazamiento, las cuales son funciones no lineales de la matriz densidad. Otras propuestas teóricas involucran a los operadores testigos de entrelazamiento [84], mapas positivos [85], interferencia de dos partículas [86], criterios de entrelazamiento utilizando entropías [87], reconstrucción tomográfica mínima y óptima [88], propuestas via visibilidad en un sistema de cavidades de microondas [89], la propuesta de *medida directa de entrelazamiento* [90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97], la cual está basada en la disponibilidad de muchas copias del estado que será analizado, y una propuesta reciente para la medida directa del entrelazamiento, la cual no considera suposición alguna acerca de los estados generados [98] para medir su entrelazamiento.

Profundizando algo más, las propuestas para la medición directa del entrelazamiento (teóricas y su verificación experimental) están basadas en el siguiente argumento teórico:

En los trabajos de F. Mintert *et al* [99], se estableció que; en el caso general de sistemas bipartitos de dimensión $d_A \otimes d_B$, la *conurrencia* puede ser expresada como el valor de expectación de un operador antisimétrico, \hat{A} , definido sobre el espacio de Hilbert para una copia doble del estado cuántico $|\psi\rangle$, esto es

$$C(|\psi\rangle) = \sqrt{\langle \psi | \otimes \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \otimes | \psi \rangle}, \quad (3.1)$$

donde $\hat{A} = 4P_-^{(1)} \otimes P_-^{(2)}$ y $P_-^{(i)}(P_+^{(i)})$ es el proyector sobre el subespacio antisimétrico $\mathcal{H}_i \wedge \mathcal{H}_i$ (subespacio simétrico $\mathcal{H}_i \odot \mathcal{H}_i$) de las dos copias del i -ésimo

subsistema $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_i$, el cual está definido como

$$P_{\mp}^{(i)} = \frac{1}{4} \sum_{jk} (|\alpha_j \alpha_k\rangle \mp |\alpha_k \alpha_j\rangle) (\langle \alpha_j \alpha_k | \mp \langle \alpha_k \alpha_j |), \quad (3.2)$$

donde $\{|\alpha_j\rangle\}$ es una base ortonormal arbitraria de \mathcal{H}_i . En el caso particular de un sistema bipartito de qubits, el operador antisimétrico está dado por $\hat{A} = 4|\chi\rangle\langle\chi|$, donde

$$|\chi\rangle = \frac{1}{2} (|0011\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle + |1100\rangle), \quad (3.3)$$

o equivalentemente

$$|\chi\rangle = |\phi_{-}\rangle_{AA'} \otimes |\phi_{-}\rangle_{BB'}, \quad (3.4)$$

donde $|\phi_{-}\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$, es el estado de Bell antisimétrico. Notemos que el estado de Bell ha sido reordenado para considerar al subsistema y su correspondiente copia. En otras palabras, la concurrencia del estado $|\psi\rangle$ se puede obtener mediante una medida de Bell sobre ambos subsistemas y sus respectivas copias.

El protocolo que presentaremos a continuación representa una adaptación del resultado general presentado antes, aplicado al caso particular de sistemas atómicos. En particular, las cavidades de microondas y los iones atrapados.

3.2. El protocolo

La idea central de esta propuesta es transformar el estado separable de dos copias de un estado puro, de tal manera que la concurrencia sea codificada en la amplitud de probabilidad de encontrar a todos los qubits en el estado fundamental. Con este objetivo, haremos uso de operaciones unitarias σ_y ; rotaciones locales R ; y la compuerta NOT controlada (CNOT), seguidas de una medición de los cuatro qubits. En la Fig. 3.1 se presenta

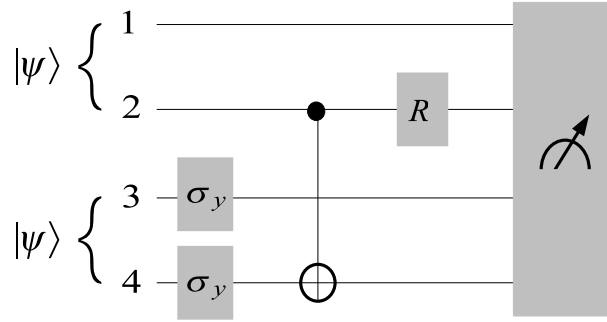


Figura 3.1: Circuito cuántico que describe una medida directa de la concurrencia de un estado puro de dos qubits, con la disponibilidad de dos copias del mismo. El circuito involucra una compuerta controlled-not, así como rotaciones unitarias de un solo qubit, σ_y y R , seguidas por una medida conjunta de los cuatro qubits.

un circuito cuántico que describe el protocolo propuesto. En este, los dos primeros canales cuánticos representan al estado entrelazado de dos qubits, cuya concurrencia deseamos medir, el tercer y cuarto canal denotan la copia del estado cuántico correspondiente. Por último, la medición se produce a través de la detección de todos los qubits en el estado fundamental.

Supongamos que queremos medir la concurrencia del siguiente estado puro de dos qubits

$$|\psi\rangle = c_0 |gg\rangle + c_1 |ge\rangle + c_2 |eg\rangle + c_3 |ee\rangle, \quad (3.5)$$

y que se dispone de dos copias del mismo, $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Es posible mostrar que la concurrencia del estado $|\psi\rangle$, en términos de los coeficientes c_i , está dada por $C(|\psi\rangle) = 2|c_1c_2 - c_0c_3|$. Siguiendo el circuito cuántico de la figura 3.1, aplicamos las operaciones locales σ_y sobre la copia del estado. De esta manera, el estado global estará dado por $|\Phi\rangle = |\psi\rangle \otimes (\sigma_y \otimes \sigma_y |\psi\rangle)$. Este estado, puede ser escrito como una superposición de estados que tienen un número

de excitaciones que van desde 0 a 4, esto es

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle = & -c_0c_3 |gggg\rangle \\
& +c_2c_0 |ggge\rangle + c_0c_1 |ggeg\rangle \\
& -c_1c_3 |gegg\rangle - c_2c_3 |eggg\rangle \\
& -c_0^2 |ggee\rangle - c_3^2 |eegg\rangle + c_1c_2 |gege\rangle \\
& +c_1^2 |geeg\rangle + c_2^2 |egge\rangle + c_2c_1 |egeg\rangle \\
& -c_1c_0 |geee\rangle - c_2c_0 |egee\rangle \\
& +c_3c_2 |eege\rangle + c_3c_1 |eeeg\rangle \\
& -c_3c_0 |eeee\rangle .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Siguiendo con el circuito, aplicamos una compuerta NOT controlada entre el segundo qubit, el cual actúa como el control, y el cuarto qubit, el cual actúa como el objetivo, seguida por una rotación del segundo qubit. La compuerta CNOT en este protocolo está definida tal que si el qubit de control está en el estado $|g\rangle$, el target no es afectado, inversamente si el qubit de control está en el estado $|e\rangle$, el qubit objetivo cambia su estado. La rotación subsecuente R_2^- , la cual actúa sobre el qubit 2, corresponde al caso particular de la rotación $R_j^\pm : |g\rangle_j \rightarrow (|g\rangle_j \pm |e\rangle_j)/\sqrt{2}$ and $|e\rangle_j \rightarrow (|e\rangle_j \mp |g\rangle_j)/\sqrt{2}$. Luego de la operaciones CNOT y R_2^- , el estado que describe al sistema completo estará dado por

$$\begin{aligned}
|\Phi_1\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ A_- |gggg\rangle + A_+ |gegg\rangle \\
& + B_- |ggge\rangle - B_+ |gege\rangle \\
& + 2c_2c_3 |eegg\rangle - 2c_0c_1 |geeg\rangle \\
& + C_{10}^- |ggee\rangle + C_{10}^+ |geee\rangle \\
& + C_{23}^- |egge\rangle - C_{23}^+ |eege\rangle \\
& + A_- |egeg\rangle - A_+ |eeeg\rangle \\
& + B_+ |eeee\rangle - B_- |egee\rangle \},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $A_\pm = c_1c_2 \pm c_0c_3$, $B_\pm = c_0c_2 \pm c_1c_3$, y $C_{ij}^\pm = c_i^2 \pm c_j^2$. Notemos que en el

estado (3.7), la información de la concurrencia del estado $|\psi\rangle$ está presente el coeficiente A_- a través de:

$$C(|\psi\rangle) = 2\sqrt{2P_{gggg}}, \quad (3.8)$$

donde $P_{gggg} = |A_-|^2/2$. Claramente, un argumento similar conduce también a $C(|\psi\rangle) = 2\sqrt{2P_{egeg}}$. La conveniencia de medir a los qubits en el estado fundamental, será patente en la siguiente sección cuando discutamos situaciones experimentales concretas.

3.3. Implementaciones físicas

A continuación, se presentarán dos escenarios físicos para el protocolo que se ha propuesto. Primero se discutirá el caso de átomos volando a través de cavidades de microondas tridimensionales, para luego considerar el caso de sistemas de iones atrapados.

3.3.1. Cavidades de microondas tridimensionales

El protocolo propuesto hará uso de dos cavidades, dos zonas Ramsey, y átomos de Rydberg que vuelan a velocidades determinadas, ver Fig. 3.2. Este protocolo confía en los esfuerzos presentes para desarrollar configuraciones de dos cavidades [100], ver también otros proyectos con múltiples cavidades [101, 102]. La primera cavidad C se utiliza para crear dos copias del mismo estado entrelazado de dos átomos en una manera consecutiva. Para esto, hacemos uso de una técnica para generar entrelazamiento que ya ha sido demostrada experimentalmente en Ref. [103], siguiendo la propuesta teórica en Ref. [104]. En este sentido, tenemos derecho a decir que se podría producir en el laboratorio un estado entrelazado general de la forma $\alpha|ge\rangle + \beta|eg\rangle$. En Ref. [103], dos átomos de Rydberg, con un retardo relativo τ , son enviados

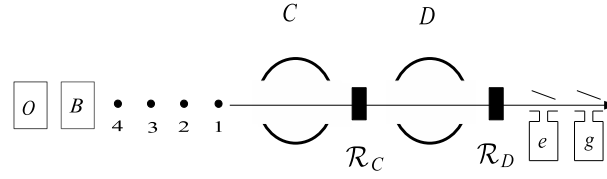


Figura 3.2: Protocolo para medir la concurrencia en cavidades de microondas tridimensionales usando dos cavidades y dos zonas Ramsey.

desde B con velocidades v and w ($w > v$) tal que ellos se crucen el interior de la cavidad, determinando de esta manera el deseado ángulo de Rabi efectivo. Aquí, se propone crear las dos copias requeridas una después de otra, en donde los átomos de cada par tendrían las mismas velocidades v and w , y un adecuado tiempo de retardo τ' entre los átomos 2 and 3. Veremos que mientras se requiere que cada par de átomos $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$ se crucen dentro de la cavidad C , para generar el mismo estado entrelazado $|\Psi\rangle$, no se necesita que los átomos 2 y 4 se crucen en la cavidad D para producir la compuerta CNOT.

Antes de la cavidad C , ver Fig. 3.2, los cuatro átomos siguen el orden natural $\{4, 3, 2, 1\}$, desde izquierda a derecha. Inmediatamente después de la cavidad C , los cuatro átomos que codifican el estado inicial $|\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle$, siguen el orden $\{3, 4, 1, 2\}$ debido a la sincronización y velocidades antes mencionadas. Para comenzar con el protocolo descrito en Fig. 3.1, nosotros permitimos que los átomos 4 y 3 crucen la región Ramsey donde serán aplicadas operaciones locales unitarias σ_y . En este protocolo, se considera que las regiones Ramsey no fueron activadas cuando los átomos 2 y 1 pasaron a través de ellas en un instante de tiempo más temprano. Recordemos que las zonas Ramsey, las cuales pueden implementar diferentes rotaciones locales, son dispositivos muy precisos y bien controlados, que representan un elemento importante en la tecnología actual de cavidades de microondas 3D [3]. Tengamos en cuenta

que antes de entrar en la cavidad D , sería preferible tener el siguiente orden entre los átomos $\{3, 1, 4, 2\}$. Este intercambio de posiciones entre los átomos 1 y 4 se podría alcanzar sintonizando apropiadamente los parámetros v , w , τ , τ' , y la distancia entre las cavidades.

El segundo paso del protocolo es la implementación de una compuerta CNOT(2,4) entre el qubit atómico de control 2 y el qubit atómico objetivo 4. Como se explicó antes, el átomo llega primero a la cavidad D seguido por el átomo 4. Se puede probar fácilmente que esta compuerta es equivalente a las siguientes operaciones sucesivas $R_4^+ \times \text{CPHASE}(2, 4) \times R_4^-$. La compuerta de fase controlada CPHASE(2,4) actúa como sigue: $|e\rangle_2|e\rangle_4 \rightarrow -|e\rangle_2|e\rangle_4$, mientras que los otros estados de la base, $\{|g\rangle_2|g\rangle_4, |g\rangle_2|e\rangle_4, |e\rangle_2|g\rangle_4\}$, permanecen sin cambios. Para lograr esto, primero debe mapearse el qubit del átomo 2 hacia el estado fotónico de la cavidad D . Entonces, el qubit atómico 4 es transformado debido a R_4^- y entra dentro de la cavidad D para llevar a cabo una compuerta CPHASE con el qubit fotónico, esto es, $|e\rangle|1\rangle \rightarrow -|e\rangle|1\rangle$, dejando los otros estados sin cambios. Nosotros sugerimos usar la compuerta CPHASE implementada experimentalmente en Ref. [105]. Una vez realizado esto, nosotros proponemos el uso de un nivel auxiliar $|i\rangle$, el cual permite llevar a cabo un pulso 2π en el subespacio $\{|e\rangle|1\rangle, |i\rangle|0\rangle\}$ [106]. Finalmente, el qubit atómico 4 es rotado a través de la acción de R_4^+ , mientras el qubit fotónico es mapeado de vuelta en un átomo adicional 5 preparado inicialmente en su estado fundamental.

Como se desprende de lo anterior, el átomo 2 es perdido en este proceso. Sin embargo, su información lógica ahora es transportada por el átomo 5. El último paso consiste en medir la estadística de los niveles de energía de todos los qubits luego de una rotación final R_5^- implementada sobre el qubit atómico 5, siguiendo el protocolo en Fig. 3.1. Como se muestra en la Eq. (3.8), la probabilidad de encontrar a todos los átomos relevantes $\{5, 3, 1, 4\}$ en el esta-

do fundamental, nos proveerá de la concurrencia del estado puro entrelazado $|\Psi\rangle$. Claramente, siguiendo la Eq. (3.7), también es posible obtener la misma información si usamos la probabilidad P_{egeg} .

Hay puntos técnicos adicionales que deben ser mencionados. En primer lugar, será deseable que el átomo 5 sea enviado con una apropiada sincronización y velocidad tal que este pueda recuperar el qubit fotónico de la cavidad D , antes de que la decoherencia destruya la información codificada por el átomo 2. Segundo, la sintonización apropiada de la frecuencia relativa de las cavidades C y D , sólo puede ser decidida cuando todos los parámetros, incluyendo la distancia entre cavidades y transiciones atómicas, han sido decididos. Tercero, nuestra propuesta confía en la posibilidad de encender y apagar los dispositivos Ramsey en determinados instantes de tiempo, y también en el mecanismo de corrimiento de los niveles atómicos, lo cual se logra controladamente aplicando voltajes DC a través de los espejos de la cavidad [107].

3.3.2. Iones atrapados

Alternativamente, este protocolo podría ser directamente implementado en cuatros iones atrapados, ver Fig. 3.3, como discutiremos a continuación. Para lograr esto, se requiere implementar las correspondientes operaciones lógicas descritas en nuestro protocolo general, esto es, las operaciones σ_y , rotaciones locales R^\pm , y una compuerta CNOT, las cuáles han sido implementadas con una muy alta precisión en los experimentos. En este caso, confiaremos en la posibilidad de implementar el acceso individual sobre los cuatros iones, para lograr su control y lectura. Típicamente, la medida de cada ion se realiza por medio de la técnica denominada *electron-shelving*, en donde un nivel interno, digamos $|e\rangle$, se acopla a un nivel auxiliar $|c\rangle$ que decae cíclicamente de regreso al estado $|e\rangle$. La abundancia de fotones fluorescentes

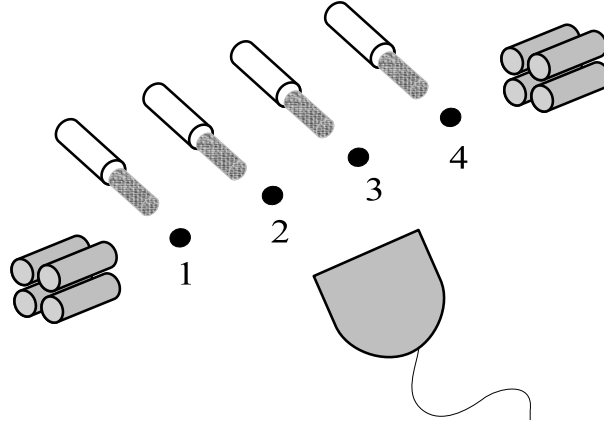


Figura 3.3: Cuatro iones en una trampa de Paul lineal que pueden ser accesados individualmente, medidos, y acoplados a un grado de libertad de movimiento colectivo para implementar el protocolo en Fig. 3.1.

implica la proyección del qubit sobre el estado $|e\rangle$, y la ausencia de fotones fluorescentes garantiza la proyección del qubit en el otro estado $|g\rangle$. Sin embargo, debemos hacer notar que para medir la concurrencia de acuerdo a nuestro protocolo, no es necesario llevar a cabo una lectura individual de los qubits iónicos. Aquí, se propone el uso de una técnica que puede ser denominada como *electron-shelving global* [108], en donde la medida requerida de P_{gggg} en la Eq. (3.8) se reduce a responder si existe o no fluorescencia. Dado que todos los iones son idénticos, podemos aplicar el mismo pulso láser para llevar a cabo la técnica electron-shelving en una manera global y simultánea, en donde cada ion llevará a cabo su correspondiente transición cíclica. Sólo la ausencia de fotones fluorescentes garantiza la proyección del estado de los cuatro qubits en el estado $|g\rangle|g\rangle|g\rangle|g\rangle$, mientras que la presencia de fotones fluorescentes implica una proyección sobre cualquier otro estado de cuatro qubits. De esta manera, se lograría la medida de la concurrencia a través de P_{gggg} en la Eq. (3.8) en un esquema de lectura global y simplificado.

3.4. Conclusión

En este capítulo, hemos presentado un protocolo realista para la medida directamente de la concurrencia de un estado puro de dos qubits, considerando dos copias del estado cuántico y un número sencillo de operaciones lógicas. También hemos presentado dos implementaciones físicas en sistemas de cavidades y sistemas de iones atrapados, los cuales son dos arquitecturas en donde es posible llevar a cabo una gama amplia de operaciones lógicas de uno y dos qubits.

Capítulo 4

Detectando entrelazamiento en estados puros de dos qutrits

En este capítulo se propone un método para medir la *conurrencia* I contenida en un estado puro de dos qutrits. Este protocolo, el cual involucra a una copia doble del estado cuántico, confía en la posibilidad de llevar a cabo operaciones $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre subespacios distintos de dos qubits. Cada término que compone a la *conurrencia* I puede ser codificado, a través de rotaciones locales, en la amplitud de probabilidad de detectar a cada qutrit en su estado de más baja energía. También, se discute una posible implementación física del protocolo en sistemas de iones atrapados.

4.1. Introducción

En el capítulo anterior, hemos discutido cómo es posible extraer la información del grado de entrelazamiento en un sistema de dos qubits, a través de un protocolo que involucra una copia doble del estado cuántico en cuestión. En principio, esta idea también puede ser aplicada a sistemas bipartitos de

mayor dimensionalidad, como mostraremos a continuación.

La situación que nos interesa es un sistema bipartito compuesto de qutrits. El estado puro más general para este sistema está dado por

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= c_1|00\rangle + c_2|01\rangle + c_3|02\rangle \\
 &+ c_4|10\rangle + c_5|11\rangle + c_6|12\rangle \\
 &+ c_7|20\rangle + c_8|21\rangle + c_9|22\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde los coeficientes c_i son amplitudes complejas. En este caso, el cuadrado de la *conurrencia* I adopta la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 C^2(|\psi\rangle) &= 4(|c_1c_5 - c_2c_4|^2 + |c_1c_8 - c_2c_7|^2 + |c_4c_8 - c_5c_7|^2 \\
 &+ |c_4c_9 - c_6c_7|^2 + |c_5c_9 - c_6c_8|^2 + |c_2c_9 - c_3c_8|^2 \\
 &+ |c_2c_6 - c_3c_5|^2 + |c_1c_6 - c_3c_4|^2 + |c_1c_9 - c_3c_7|^2).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Esta expresión está compuesta por una serie de 9 términos, los cuales pueden interpretarse como “conurrencias” definidas sobre subespacios distintos de dimensión $d = 4$.

A continuación, se mostrará que al considerar dos copias del estado (4.1), es posible extraer la información de cada una de las “conurrencias” anteriormente definidas, mediante la aplicación de rotaciones locales y no locales, seguidas de medidas proyectivas.

4.2. El protocolo

Para ilustrar como funciona nuestro protocolo, consideremos el estado $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Luego de reordenar términos, colocando juntos los estados asociados al subsistema A y su copia A' a la izquierda, mientras que los estados

asociados al subsistema B y su copia B' a la derecha, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = & c_1^2|00\rangle|00\rangle + c_1c_2|00\rangle|01\rangle + c_1c_3|00\rangle|02\rangle \\
& + c_2c_1|00\rangle|10\rangle + c_2^2|00\rangle|11\rangle + c_2c_3|00\rangle|12\rangle \\
& + c_3c_1|00\rangle|20\rangle + c_3c_2|00\rangle|21\rangle + c_3^2|00\rangle|22\rangle \\
& + c_1c_4|01\rangle|00\rangle + c_1c_5|01\rangle|01\rangle + c_1c_6|01\rangle|02\rangle \\
& + c_2c_4|01\rangle|10\rangle + c_2c_5|01\rangle|11\rangle + c_2c_6|01\rangle|12\rangle \\
& + c_3c_4|01\rangle|20\rangle + c_3c_5|01\rangle|21\rangle + c_3c_6|01\rangle|22\rangle \\
& + c_1c_7|02\rangle|00\rangle + c_1c_8|02\rangle|01\rangle + c_1c_9|02\rangle|02\rangle \\
& + c_2c_7|02\rangle|10\rangle + c_2c_8|02\rangle|11\rangle + c_2c_9|02\rangle|12\rangle \\
& + c_3c_7|02\rangle|20\rangle + c_3c_8|02\rangle|21\rangle + c_3c_9|02\rangle|22\rangle \\
& + c_4c_1|10\rangle|00\rangle + c_4c_2|10\rangle|01\rangle + c_4c_3|10\rangle|02\rangle \\
& + c_5c_1|10\rangle|10\rangle + c_5c_2|10\rangle|11\rangle + c_5c_3|10\rangle|12\rangle \\
& + c_6c_1|10\rangle|20\rangle + c_6c_2|10\rangle|21\rangle + c_6c_3|10\rangle|22\rangle \\
& + c_4^2|11\rangle|00\rangle + c_4c_5|11\rangle|01\rangle + c_4c_6|11\rangle|02\rangle \\
& + c_5c_4|11\rangle|10\rangle + c_5^2|11\rangle|11\rangle + c_5c_6|11\rangle|12\rangle \\
& + c_6c_4|11\rangle|20\rangle + c_6c_5|11\rangle|21\rangle + c_6^2|11\rangle|22\rangle \\
& + c_4c_7|12\rangle|00\rangle + c_4c_8|12\rangle|01\rangle + c_4c_9|12\rangle|02\rangle \\
& + c_5c_7|12\rangle|10\rangle + c_5c_8|12\rangle|11\rangle + c_5c_9|12\rangle|12\rangle \\
& + c_6c_7|12\rangle|20\rangle + c_6c_8|12\rangle|21\rangle + c_6c_9|12\rangle|22\rangle \\
& + c_7c_1|20\rangle|00\rangle + c_7c_2|20\rangle|01\rangle + c_7c_3|20\rangle|02\rangle \\
& + c_8c_1|20\rangle|10\rangle + c_8c_2|20\rangle|11\rangle + c_8c_3|20\rangle|12\rangle \\
& + c_9c_1|20\rangle|20\rangle + c_9c_2|20\rangle|21\rangle + c_9c_3|20\rangle|22\rangle \\
& + c_7c_4|21\rangle|00\rangle + c_7c_5|21\rangle|01\rangle + c_7c_6|21\rangle|02\rangle \\
& + c_8c_4|21\rangle|10\rangle + c_8c_5|21\rangle|11\rangle + c_8c_6|21\rangle|12\rangle \\
& + c_9c_4|21\rangle|20\rangle + c_9c_5|21\rangle|21\rangle + c_9c_6|21\rangle|22\rangle \\
& + c_7^2|22\rangle|00\rangle + c_7c_8|22\rangle|01\rangle + c_7c_9|22\rangle|02\rangle \\
& + c_8c_7|22\rangle|10\rangle + c_8^2|22\rangle|11\rangle + c_8c_9|22\rangle|12\rangle \\
& + c_9c_7|22\rangle|20\rangle + c_9c_8|22\rangle|21\rangle + c_9^2|22\rangle|22\rangle.
\end{aligned}$$

Debemos mencionar un aspecto interesante de este estado. Si realizamos operaciones $\sqrt{\text{SWAP}}$ entre los subsistemas A y A' , sobre subespacios distintos de dos qubits definidos por los vectores ortogonales $\mathcal{B}_1 = \{|01\rangle, |10\rangle\}$, $\mathcal{B}_2 = \{|02\rangle, |20\rangle\}$, y $\mathcal{B}_3 = \{|12\rangle, |21\rangle\}$, cada componente de la concurrencia I (4.2), puede ser codificada en las amplitudes de probabilidad de vectores particulares, los cuales pertenecen al espacio de Hilbert definido para el estado $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$.

En particular, cuando aplicamos estas operaciones no locales como se muestran a continuación: $|01\rangle(|10\rangle) \rightarrow [|10\rangle + |01\rangle]/\sqrt{2} ([|10\rangle - |01\rangle]/\sqrt{2})$, $|02\rangle(|20\rangle) \rightarrow [|20\rangle + |02\rangle]/\sqrt{2} ([|20\rangle - |02\rangle]/\sqrt{2})$, y $|12\rangle(|21\rangle) \rightarrow [|21\rangle + |12\rangle]/\sqrt{2} ([|21\rangle - |12\rangle]/\sqrt{2})$ tal que los otros estados $\{|00\rangle, |11\rangle, |22\rangle\}$ permanecen invariantes, es posible mostrar que

$$\begin{aligned}
P_{01,01} = P_{01,10} &= |c_1c_5 - c_2c_4|^2/2 \\
P_{01,02} = P_{01,20} &= |c_1c_6 - c_3c_4|^2/2 \\
P_{01,12} = P_{01,21} &= |c_2c_6 - c_3c_5|^2/2 \\
P_{02,01} = P_{02,10} &= |c_1c_8 - c_2c_7|^2/2 \\
P_{02,02} = P_{02,20} &= |c_1c_9 - c_3c_7|^2/2 \\
P_{02,12} = P_{02,21} &= |c_2c_9 - c_3c_8|^2/2 \\
P_{12,01} = P_{12,10} &= |c_4c_8 - c_5c_7|^2/2 \\
P_{12,02} = P_{12,20} &= |c_4c_9 - c_6c_7|^2/2 \\
P_{12,12} = P_{12,21} &= |c_5c_9 - c_6c_8|^2/2,
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

donde $P_{kk',ll'}$ es la correspondiente probabilidad asociada al estado $|kk'\rangle_{AA'}|ll'\rangle_{BB'}$. De esta manera, al medir cada probabilidad, podemos obtener la información acerca del entrelazamiento contenido en el estado $|\psi\rangle$.

4.3. Implementación física

Como se ha discutido anteriormente, una vez aplicada las operaciones $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre subespacios distintos de dos qubits, es posible obtener cada elemento que compone a la concurrencia I como la probabilidad de estados específicos $|kk'\rangle_{AA'}|ll'\rangle_{BB'}$. En la práctica, extraer la información requerida podría ser una tarea difícil de llevar a cabo debido a la dimensionalidad alta del sistema completo.

En esta tesis, se propone una implementación física en iones atrapados. Como se muestra en la Fig. 4.1, se consideran cuatro iones con seis niveles de energía internos, los cuales interactúan con un único modo cuantizado de una cavidad óptica. Además, cada partícula puede ser iluminada con campos laser de manera individual [109], permitiéndonos llevar a cabo rotaciones locales y operaciones $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre pares de átomos específicos. Se considerará que el estado cuántico $|\psi\rangle$, estará codificado en los niveles internos de los átomos 1 y 2, mientras que su copia en los niveles internos de los átomos 3 y 4. Antes de discutir el protocolo para obtener la concurrencia I, discutiremos cómo es posible implementar las operaciones de dos partículas requeridas.

Consideremos la configuración de niveles de energía como se muestra en la Fig. 4.1. Para nuestros propósitos, estableceremos que el estado de un qutrit estará codificado en los niveles internos $|0\rangle$, $|1\rangle$ y $|2\rangle$, mientras que el resto de estados $|h\rangle$, $|p\rangle$, y $|0_p\rangle$ serán considerados como niveles auxiliares necesarios para implementar compuertas no locales. El modo de la cavidad, el cual tiene una polarización lineal, acopla las transiciones dipolares $|2\rangle \leftrightarrow |h\rangle$ y $|1\rangle \leftrightarrow |p\rangle$.

Una compuerta $\sqrt{\text{SWAP}}$, puede ser implementada a través de la excitación virtual del modo de la cavidad, ya sea por un esquema Raman creado por un campo clásico con polarización σ^- , el cual acopla los esta-

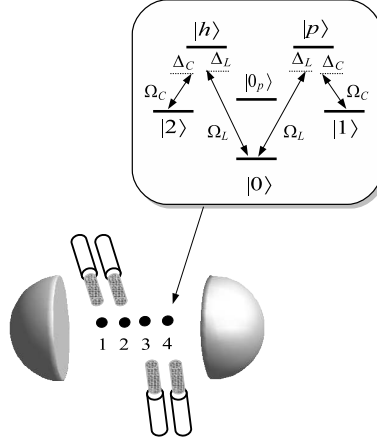


Figura 4.1: Esquema de los cuatro iones de seis niveles interactuando con un modo cuantizado de una cavidad óptica. Cada átomo puede ser iluminado individualmente mediante campos láser, permitiéndonos llevar a cabo compuertas de uno y dos átomos.

los estados $|0\rangle$ y $|h\rangle$, o bien por un campo clásico con polarización σ^+ , el cual acopla los estados $|0\rangle$ y $|p\rangle$, como muestra la Fig. 4.1. Aquí se considera que un par de iones específicos evolucionan de acuerdo a esta dinámica. En este caso, el Hamiltoniano, en la representación de interacción, está dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}^I &= \hbar\Omega_L \sum_{j=1,2} (|h\rangle_j \langle 0| e^{i(\Delta_L^j t + \phi_j)} + \text{H.c.}) \\ &+ \hbar\Omega_C \sum_{j=1,2} (\hat{b}|h\rangle_j \langle 2| e^{i\Delta_C^j t} + \text{H.c.}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde \hat{b} y \hat{b}^\dagger son los operadores de aniquilación y creación de fotones en el modo de la cavidad, las desintonizaciones son $\Delta_L = \omega_{p0} - \omega_L$ y $\Delta_C = \omega_{p1} - \omega_C$, Ω_L y Ω_C son las frecuencias de Rabi de los campos clásicos y el campo cuántico, respectivamente. Notemos que al escribir el Hamiltoniano (4.5), hemos asumido el régimen de Lamb-Dicke, $\eta_i \sqrt{\bar{n}} \ll 1$, donde η_i es el parámetro de Lamb-Dicke asociado al i -ésimo ion y \bar{n} es el número promedio de fonones.

En el regimen dispersivo donde $|\Delta_{L,C}| \gg \Omega_L, \Omega_C$, los niveles superiores $|h\rangle$ y $|p\rangle$, solo serán poblados virtualmente y el Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica del sistema estará dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} = & -\hbar\Omega_L^2 \sum_j \frac{1}{\Delta_j} |0\rangle_j \langle 0| - \hbar\Omega_C^2 \sum_j \frac{1}{\Delta_C^j} |2\rangle_j \langle 2| \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ & + \hbar \sum_j \Omega_{\text{eff}}^j e^{i\delta^j t} |2\rangle_j \langle 0| \hat{b}^\dagger e^{i\phi_j} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\delta^j = \Delta_L^j - \Delta_C^j$, y la frecuencia de Rabi efectiva se define como

$$\Omega_{\text{eff}}^j = \frac{\Omega_C \Omega_L}{2} \left(\frac{1}{\Delta_C^j} + \frac{1}{\Delta_L^j} \right). \quad (4.7)$$

Si $\delta^j \gg \Omega_{\text{eff}}^j$, el campo de la cavidad solamente será excitado virtualmente y puede ser eliminado de la dinámica, conduciendo a una interacción efectiva entre dos iones mediada por el vacío del modo de la cavidad

$$\hat{H}_{jk} = \hbar \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\delta} \sum_j |0\rangle_j \langle 0| + \hbar \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\delta} \sum_{j \neq k} \sigma_j^+ \sigma_k^- e^{i\phi_{jk}}, \quad (4.8)$$

donde $\phi_{jk} = \phi_j - \phi_k$, corresponde a la diferencia de fase entre los campos clásicos. El Hamiltoniano anterior, provisto de la condición $\Delta_L^k = \Delta_L^j$, $\Delta_C^k = \Delta_C^j$; lo cual implica que $\delta^j = \delta^k$ y $\Omega_{\text{eff}}^j = \Omega_{\text{eff}}^k$, permite implementar una operación $\sqrt{\text{SWAP}} |02\rangle (|20\rangle) \rightarrow [|20\rangle + |02\rangle]/\sqrt{2} ([|20\rangle - |02\rangle]/\sqrt{2})$, escogiendo apropiadamente la diferencia de fase ϕ_{jk} ($\phi_{jk} = \pi/2$). Similarmente, uno puede implementar una operación $\sqrt{\text{SWAP}} |01\rangle (|10\rangle) \rightarrow [|10\rangle + |01\rangle]/\sqrt{2} ([|10\rangle - |01\rangle]/\sqrt{2})$, al considerar el esquema Raman de la rama derecha.

El protocolo para medir la concurrencia I funciona de la siguiente manera. Una vez que ha sido preparado el estado de la copia doble (4.1), el ion 1 y su copia correspondiente 3, son iluminados individualmente mediante campos clásicos para llevar a cabo una operación $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre los subespacios de

dos qubits \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 . Luego, necesitamos realizar una operación $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre el subespacio \mathcal{B}_3 . Esta compuerta se logra de la siguiente manera: un pulso π clásico y resonante con la transición $|0\rangle \leftrightarrow |0_p\rangle$ es aplicado sobre los iones, transfiriendo toda la población desde el estado $|0\rangle$ al estado $|0_p\rangle$. Un segundo pulso π clásico y resonante con la transición $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ (una transición cuadrupolar) conducirá la población desde $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$. Luego, realizamos una segunda operación $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre el subespacio \mathcal{B}_2 , seguida por la restauración de las poblaciones desde el estado $|0\rangle$ a $|1\rangle$ y desde el estado $|0_p\rangle$ a $|0\rangle$. De esta manera, es posible realizar las operaciones no locales requeridas por el protocolo. A través del cálculo numérico, es posible observar que la dinámica induce algunas fases en los estados, en los cuales están codificadas cada componente de la concurrencia I. Sin embargo, esto no afectará al resultado final a la hora de extraer la información, dado que extraemos probabilidades.

Finalmente debemos extraer la información necesaria. De acuerdo con la ecuación (4.4), cada producto bilineal está asociado a un estado específico $|kk'\rangle_{AA'}|ll'\rangle_{BB'}$. Para rescatar cada uno de ellos, debemos codificar la información correspondiente en el estado $|00\rangle_{AA'}|00\rangle_{BB'}$, mediante pulsos π clásicos. Una vez hecho esto, haremos uso de una técnica que puede ser llamada *electron-shelving global* [108] (similarmente al caso de dos qubits), donde la medida de $P_{00,00}$ se reduce a responder si existe o no fluorescencia. Dado que todos los iones son idénticos, podemos aplicar el mismo pulso clásico para realizar la técnica electron-shelving globalmente y simultáneamente, conectando el estado $|0\rangle$ con un nivel auxiliar $|c\rangle$. En este caso, cada ion realizará su correspondiente transición cíclica. Solo la presencia de fotones fluorescentes garantiza la proyección sobre el estado de los cuatro qutrits $|00\rangle_{AA'}|00\rangle_{BB'}$, mientras que la ausencia de fotones fluorescentes implica la proyección sobre cualquier otro estado de los cuatro qutrits.

4.4. Conclusión

En resumen, hemos presentado un protocolo para medir la *conurrencia* I de un estado puro de dos qutrits, dada una copia doble del estado cuántico. Se ha mostrado que al realizar operaciones $\sqrt{\text{SWAP}}$ sobre subespacios de dos qubits distintos, es posible codificar cada término no lineal que forma a la *conurrencia* I , en las amplitudes de probabilidad de estados específicos pertenecientes al espacio de Hilbert para el sistema de los cuatro qutrits. También se ha discutido una implementación física aplicada al caso de los iones atrapados, en donde la información requerida puede ser extraída a través de la técnica denominada electron-shelving.

Capítulo 5

Detector de fotones de microondas en electrodinámica cuántica de circuitos

En este capítulo se muestra el diseño de un metamaterial compuesto de elementos superconductores discretos que permiten la implementación de un detector de fotones de alta eficiencia en el régimen de microondas. El diseño consiste de una guía de microondas acoplada a un arreglo de circuitos cuánticos metaestables, cuyos estados internos son cambiados irreversiblemente debido a la absorción de fotones. Esta propuesta puede ser ampliamente aplicada a diferentes sistemas físicos y puede ser generalizada para implementar un contador de fotones en el régimen de microondas.

5.1. Introducción

Como se ha discutido antes, un elemento central en el desarrollo futuro de la electrodinámica cuántica de circuitos será la implementación de detectores

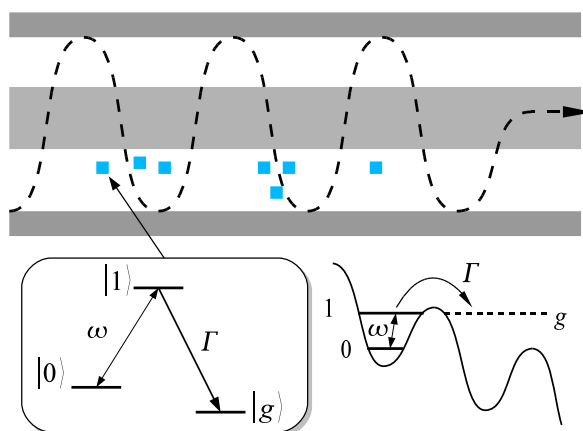


Figura 5.1: Diseño del detector. Bosquejo que muestra una guía de onda unidimensional (gris) acoplada a un conjunto de elementos absorbentes con tres niveles en su estructura interna (cuadrados azules) y distribuidos en posiciones arbitrarias. El campo de microondas (línea discontinua) excita coherentemente el estado $|0\rangle$ al estado superior $|1\rangle$, el cuál decae en el estado estable $|g\rangle$. Una configuración análoga a la existente en qubits de fase (CBBJ), en la cual un potencial confina a dos estados metaestables que pueden decaer en un continuo de estados de corriente.

de fotones en el rango de microondas. En este capítulo se presenta el diseño de un metamaterial que realiza la detección de fotones de microondas de manera individual, mediante la absorción irreversible de fotones [110,111,112]. El mecanismo se asemeja al de una película fotográfica: cuando un fotón entra en el dispositivo, hay una probabilidad alta de que este sea capturado, dejando al sistema en un estado estable y distinguible mesoscópicamente, el cuál puede detectarse *a posteriori*. Más precisamente, se propone un arreglo general basado en una guía de onda unidimensional que pasa por un conjunto de elementos que absorben fotones [Fig. 5.1]. El dispositivo que se presenta aquí, no confía en la presencia de una cavidad ni apunta a alcanzar el régimen de

acoplamiento fuerte entre la materia y el campo. Los elementos absorbentes a lo largo de la guía de onda pueden construirse con circuitos cuánticos biestables similares a los usados para implementar bit cuánticos. Estos circuitos deben ser capaces de capturar un fotón y decaer desde el estado inicial $|0\rangle$ a un estado estable $|g\rangle$. En analogía a la película fotográfica, estos eventos irreversibles constituyen en sí el proceso de medida. El paso final consiste en contar el número de absorbentes activados que se relacionan al número de fotones en el estado de Fock en el cuál fué detectado por la medida cuántica. El conteo debe hacerse después de que el proceso de absorción ha terminado, de esta manera se evita cualquiera perturbación en la señal entrante. En este sentido, el proceso de detección es pasivo y no requiere ningún tipo de control.

5.2. Modelo abstracto y diseño

Es posible desarrollar a un modelo simple para la detección basado en los requisitos generales anteriores. Nosotros modelamos los elementos absorbentes como sistemas de tres niveles, con una frecuencia interior ω y una tasa de decaimiento desde el estado excitado $|1\rangle$ al estado estable final $|g\rangle$ que denotaremos por Γ , ver Fig. 5.1. Matemáticamente, esto se describe con una ecuación maestra para la matriz de densidad ρ del sistema completo (absorbentes y la guía de onda):

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}\rho. \quad (5.1)$$

El Hamiltoniano contiene términos para los absorbentes y los campos de radiación, ψ_l y ψ_r , los cuales se propagan hacia la izquierda y hacia la derecha con velocidad de grupo v_g . La interacción entre ambos se modela usando un potencial delta de Dirac de intensidad V

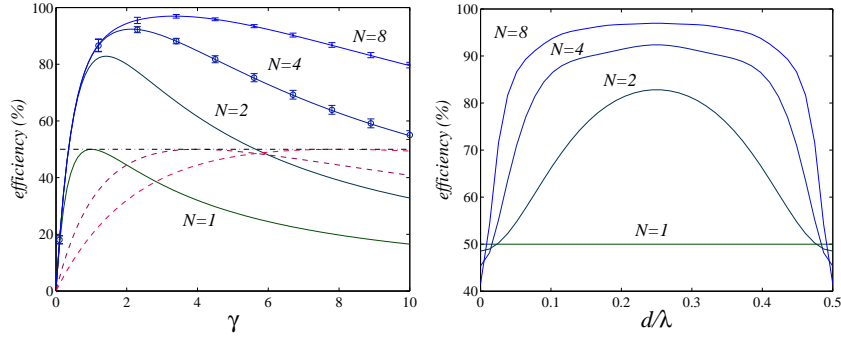


Figura 5.2: Eficiencia en la detección cuando los absorbentes están en resonancia con el campo de microondas (γ real). (Izquierda) Probabilidad de absorción versus la tasa de decaimiento efectiva $\gamma = \Gamma v_g/V^2$ en unidades sin dimensiones para un arreglo con $N = 1, 2, 4$ y 8 qubits (negro, verde, azul, rojo), ambos en los regímenes de agrupamiento por clusters (segmentos) y un arreglo igualmente espaciado. Las barras de error toman en cuenta las desviaciones aleatorias en los absorbentes individuales, γ_i , de hasta un 40 % en promedio. Cuando los absorbentes están muy cerca entre sí, la eficiencia está limitada hasta un 50 %, mientras que en el otro caso no hay un límite superior en la eficiencia. (Derecha) Eficiencia en la detección versus la separación d en un arreglo de absorbentes distribuidos periódicamente.

$$\begin{aligned}
H &= \int dx \left[\psi_l^\dagger (i\hbar v_g \partial_x) \psi_l - \psi_r^\dagger (i\hbar v_g \partial_x) \psi_r \right] \\
&+ \sum_i \int dx V \delta(x - x_i) [(\psi_l + \psi_r) |1\rangle_i \langle 0| + \text{H.c.}] \\
&+ \sum_i \hbar \omega |1\rangle_i \langle 1|.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

El Liouvilliano \mathcal{L} tiene los términos de decaimiento estándar para cada uno de los bit cuánticos absorbentes [113]

$$\mathcal{L}\rho = \frac{\Gamma}{2} \sum_i (2|g\rangle_i \langle 1|\rho|1\rangle_i \langle g| - |1\rangle_i \langle 1|\rho - \rho|1\rangle_i \langle 1|), \tag{5.3}$$

y es proporcional a la tasa de decaimiento Γ . Las soluciones de esta ecuación maestra pueden ser encontradas utilizando un Hamiltoniano equivalente no hermítico $\bar{H} = H - i \sum_j \Gamma/2 |1\rangle_j \langle 1|$, que gobierna la dinámica de las poblaciones $|0\rangle$ y $|1\rangle$. La norma de la función de onda no es conservada por esta ecuación, pero precisamente la disminución en la norma corresponde a la probabilidad de que uno o más elementos hayan absorbido un fotón.

El escenario más simple que podemos considerar es el de un solo absorbente acoplado a la guía de microondas, un problema que tiene soluciones analíticas para cualquier forma del pulso. En el límite de paquetes de onda largos se vuelve más conveniente analizar los estados de scattering de \bar{H} . Para un solo elemento absorbente, estos estados se caracterizan por la intensidad del haz entrante que nosotros tomaremos como la unidad, y las intensidades reflejada y transmitida, $|r|^2$ y $|t|^2$. Las correspondientes amplitudes complejas están relacionadas por la matriz de scattering T

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

La matriz de transferencia para un sólo elemento absorbente

$$T = \begin{pmatrix} 1 - 1/\gamma & -1/\gamma \\ 1/\gamma & 1 + 1/\gamma \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

es una función de la tasa de decaimiento renormalizada

$$\gamma = (\Gamma - i\delta) \frac{v_g}{V^2}. \quad (5.6)$$

Este parámetro sin dimensiones relaciona las propiedades del circuito: la velocidad de grupo en la guía de onda, v_g , la intensidad del acoplamiento entre los absorbentes y la guía de onda, V , y la desentonización de los fotones respecto de la frecuencia característica de los absorbentes, $\delta = \omega - \omega_\mu$. La

eficiencia en la detección de un único fotón (la probabilidad de absorción) se calcula como la cantidad de radiación que no es transmitida ni reflejada. En términos de los elementos de matriz de T , está dada por

$$\alpha = 1 - |t|^2 - |r|^2 = 1 - \frac{1 + |T_{01}|^2}{|T_{11}|^2} = \frac{2\gamma}{(1 + \gamma)^2}. \quad (5.7)$$

La curva mostrada en Fig. 2 revela dos regímenes. Si $\gamma \ll 1$, el canal de decaimiento $|1\rangle \rightarrow |g\rangle$ es muy lento comparado al tiempo requerido para que un fotón excite la transición $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, y sólo una pequeña fracción de los fotones es absorbida. Si, por otro lado, el estado metastable $|1\rangle$ decae demasiado rápido, $\gamma \gg 1$, hay una supresión Zeno de la absorción. Desde la Eq. (5.7), la máxima eficiencia alcanzada es del 50%, un límite que se alcanza sintonizando el elemento absorbente en resonancia con el campo de microondas. Se conjetura que este puede ser un límite fundamental para cualquier arreglo que involucre un sólo absorbente puntual y sin un control externo dependiente del tiempo.

Una expectativa natural sería que agrupando muchos elementos absorbentes dentro de la guía de onda, permitiría incrementar la eficiencia en la detección. Como se muestra en la Fig. 5.2, esto no es verdad. Si tenemos un grupo de N absorbentes idénticos, es posible calcular la eficiencia en la detección usando la misma fórmula, pero con la siguiente matriz de scattering:

$$T_{\text{cluster}} = T^N. \quad (5.8)$$

Dado que el tamaño del grupo es más pequeño que una longitud de onda, el arreglo aún estará limitado a sólo un 50% en la eficiencia máxima. Hay una explicación simple y cualitativa para esto. Dado que el tamaño del grupo es pequeño, el fotón ve al conjunto de absorbentes como un solo elemento con una tasa de decaimiento más grande, $N\Gamma$. Esta renormalización simplemente cambia la localización del punto de trabajo óptimo, dejando la eficiencia

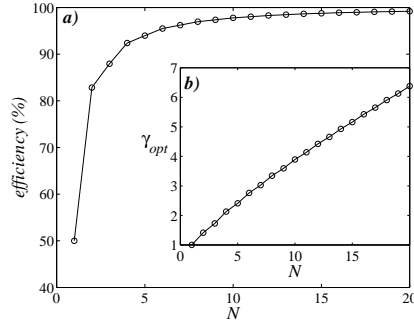


Figura 5.3: (a) Eficiencia máxima alcanzable para la detección de un fotón como una función del número de qubits a lo largo de la guía de microondas. (b) Parámetro de trabajo óptimo versus el número de qubits.

máxima intacta.

El resultado principal que se presenta en esta tesis, es que es posible aumentar la eficiencia en la absorción separando los elementos absorbentes un distancia d fija longitudinalmente a lo largo de la guía de onda. La matriz de scattering total para el arreglo estará dada por:

$$T_{\text{array}} = \prod_{j=1}^N e^{-i2\pi\sigma^z d/\lambda T}, \quad (5.9)$$

donde σ^z es una matriz de Pauli. En este caso, el pulso de microondas no vé al arreglo como una partícula grande, y nosotros obtenemos un aumento colectivo de la probabilidad de absorción. Notablemente, una eficiencia de detección arbitrariamente alta puede alcanzarse aumentando el número de absorbentes y sintonizando su separación d . Es posible observar que con dos y tres bit cuánticos se logra un 80% y 90% en la eficiencia de detección, ver Fig.5.2 y Fig.5.3. Además, como nosotros hemos visto numéricamente, mientras más bit cuánticos tenemos, el arreglo completo se vuelve menos sensible a los parámetros experimentales, ver Fig. 5.2. Esto muestra que el arreglo propuesto es robusto y escalable.

5.3. Implementación del modelo: guía de microondas coplanar acoplada a qubits de fase

El análisis anterior ha sido de tipo general. Solo requiere un acoplamiento entre una guía de onda y absorbentes que pueden capturar un fotón e irreversiblemente pueden decaer a uno de los estados más estables. Una aplicación práctica de nuestro arreglo consiste en una guía de onda coplanar acoplada a varias uniones de Josephson CBJJ [80, 32]. A continuación, realizaremos una derivación microscópica de la Eq. (5.2) para este arreglo y relacionaremos la eficiencia en la detección a los parámetros del circuito.

En primer lugar, dado que las uniones Josephson CBJJ se describen por un potencial para el grado de libertad de fase, nosotros podemos identificar $|0\rangle$ y $|1\rangle$ con los dos niveles metastable más bajos en un mínimo local, ver Fig. 5.1. Los niveles de energía alrededor de ese mínimo se describen por un oscilador armónico con frecuencia ω_p que depende de la corriente externa con la cuál se conduce a la unión Josephson. Además, estos niveles tienen vidas finitas antes de que ellos decaigan en los estados continuos de corriente. Dado que la tasa de decaimiento del estado $|0\rangle$, Γ_0 , puede diseñarse tal que sea 1000 veces más pequeña que la tasa del estado $|1\rangle$, Γ_1 [82], es posible realizar la siguiente aproximación $\Gamma_0 \simeq 0, \Gamma_1 \equiv \Gamma$.

La guía de microondas está descrita por el Lagrangiano [25]

$$L = \int dx \left[\frac{l}{2} (\partial_t Q)^2 - \frac{1}{2c} (\partial_x Q)^2 \right], \quad (5.10)$$

donde l y c son la inductancia y capacitancia por unidad de longitud. La cuantización del campo de carga Q introduce operadores de Fock a_k asociado a los modos normales de la línea. Asumiendo condiciones de borde periódicas, se tiene que $w_k(x, t) = \exp[i(kx - \omega_k t)]/L^{-1/2}$, donde L es

la longitud de la guía de onda y la relación de dispersión está dada por $\omega_k = v_g|k| = |k|/\sqrt{cl}$. Cuando los modos relevantes del campo electromagnético se concentran en un intervalo pequeño \mathcal{B} alrededor de un momento central k_0 , es posible introducir campos moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda $\psi_r(x, t) = \sum_{k \in \mathcal{B}} a_k w_k(x, t)$, y $\psi_l(x, t) = \sum_{k \in \mathcal{B}} a_{-k} w_{-k}(x, t)$, y aproximar el Hamiltoniano de la guía de onda como $H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k$, que corresponde a la primera línea en Eq. (5.2).

Finalmente, para la interacción entre los absorbentes y la guía usamos un acoplamiento capacitivo en la aproximación dipolar, ver el apéndice A. El Hamiltoniano correspondiente tiene la siguiente forma

$$H_{\text{int}} = \frac{C_g}{C_g + C_J} \sqrt{\frac{\hbar \omega_\mu}{c}} (\psi_r + \psi_l + \text{H.c.}) \frac{e}{\alpha} (a + a^\dagger). \quad (5.11)$$

La primera parte depende de la capacitancia de la unión y de la compuerta entre la unión y la microonda, C_J y C_g , respectivamente. El segundo término da cuenta de la intensidad del potencial eléctrico dentro de la guía de onda y es proporcional a los campos. El tercer término es simplemente el operador de carga para el CBJJ, expresado usando la aproximación armónica alrededor de un mínimo del potencial. En particular, $a \simeq |0\rangle\langle 1|$ y $\alpha^2 = E_C/\hbar\omega_p$ es el parámetro sin dimensiones del oscilador, expresado en términos de la energía capacitiva de la juntura, $E_C = (2e)^2/C_J$ y la frecuencia de plasma. Notemos que cuando se combinan todas las constantes para formar la intensidad de la interacción V , no hay dependencia explícita en la longitud de la guía de microondas. Cualitativamente, mientras en el experimento con una cavidad el bit cuántico ve sólo un fragmento pequeño de las ondas estacionarias con la cuál interactúa, en nuestro arreglo cada absorbente consigue ver el paquete de onda completo después un tiempo suficientemente largo.

En términos del modelo microscópico, es posible escribir el parámetro que

determina la eficiencia del detector como sigue:

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{c_{12}} \frac{\hbar}{eZ_0} \frac{\Gamma_1 - i(\omega - \omega_\mu)}{\omega_\mu}, \quad (5.12)$$

donde hemos introducido la constante sin dimensiones $c_{12} = C_g/(C_g + C_J)$. Es evidente de Eq. (5.12) que para optimizar la eficiencia, se dispone de varios parámetros experimentales. En particular, consideremos los siguientes valores, cercanos a los utilizados en los experimentos actuales [32], un capacitancia de la juntura de $C_J = 4,8\text{pF}$, $c_{12} = 0,13$ y la frecuencia de plasma $\omega_p = 5\text{GHz}$. Al evaluar y permitiendo que la impedancia de la guía de onda oscile entre 10 y 100 Ω , el punto de operación óptimo para una sola union da una tasa de decaimiento entre $\Gamma \simeq 10 - 100\text{MHz}$. Incrementando C_g por un factor de 2, esto triplica la tasa de decaimiento óptima, $\Gamma \simeq 30 - 300\text{MHz}$.

Nuestra propuesta tiene las siguientes limitaciones e imperfecciones. Primero, el ancho de banda de los fotones detectados tiene que ser pequeño comparado al tiempo requerido para absorber un fotón, aproximadamente proporcional a $1/\Gamma$. Segundo, la eficiencia podría limitarse por los errores en la discriminación del estado $|g\rangle$ pero estos efectos son despreciables, debido a la buena precisión en la detección del estado $|g\rangle$ [53]. Tercero, las cuentas oscuras debido al decaimiento del estado $|0\rangle$ pueden corregirse calibrando Γ_0 y procesando posteriormente las estadísticas de la medición. Cuarto, las fluctuaciones en las energías relativas de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son matemáticamente equivalente a un ensanchamiento del ancho de banda de la señal entrante por unos pocos megahertzios y deberían tenerse en cuenta en la elección de parámetros. Finalmente y más importante, existen efectos desconocidos de muchos cuerpos, los cuales provocan el proceso de decaimiento no radiativo $1 \rightarrow 0$. Esto puede manifestarse en la pérdida de fotones mientras ellos están siendo absorbidos. En los experimentos actuales [53] esto sucede a una tasa de unos pocos megahertzios, así que esto solamente afectaría a paquetes de onda muy

largos.

Una extensión natural de nuestro diseño es la implementación de un contador de fotones. Esto sólo requiere un número suficientemente grande de absorbedores para capturar todos los fotones que tienen que ser detectados y contados. Además, mientras nosotros hemos escogido sistemas de tres niveles y bit cuánticos CBJJ por propósitos ilustrativos, el mismo fin puede ser logrado usando otros esquemas de niveles y circuitos cuánticos que puedan absorber fotones y decaer irreversible en estados de larga vida y fácilmente detectables.

5.4. Conclusión

En resumen, hemos presentado el diseño teórico de un detector de fotones de alta eficiencia en el régimen de las microondas. Este dispositivo permite la detección de señales propagantes en una manera pasiva y sin la necesidad de ningún tipo de control externo, requiriendo solamente un conjunto de absorbedores que cambien su estado irreversiblemente. En particular, hemos observado que el proceso absorción mejora cuando se dispone de un conjunto de elementos absorbentes igualmente espaciados a lo largo de línea de transmisión. También, se ha discutido una posible implementación física de esta propuesta considerando una guía de ondas coplanar acoplada a un conjunto de qubits de fase. En este caso, es posible expresar el parámetro relevante en el proceso de absorción, en términos de los parámetros del circuito cuántico tales como las capacitancias internas de los absorbedores y la impedancia de la línea de transmisión. Finalmente, hemos discutido brevemente las limitaciones e imperfecciones de esta propuesta.

Capítulo 6

Conclusiones generales

A lo largo de esta tesis hemos recorrido algunos pasajes de uno de los temas más candentes en la investigación actual como lo es la *física de la información cuántica*, cuya fortaleza radica en la conjunción de su desarrollo teórico y la tecnología presente. En esta línea de investigación hemos querido resaltar dos puntos de relevancia a la hora de llevar a cabo cualquier protocolo de información cuántica: el primero (i) corresponde a la extracción de información mediante algunas técnicas de medición, y el segundo (ii) corresponde a la fotodetección en el régimen de microondas, como un recurso físico para el procesamiento cuántico de la información.

Tomando como referencia el primer punto antes mencionado, en los capítulos 3 y 4 hemos presentado dos protocolos cuánticos que nos permite medir experimentalmente el grado de entrelazamiento contenido en estados puros de dos qubits y dos qutrits, respectivamente. En ambos casos, hemos sacado el máximo provecho a la tecnología actual para la implementación física del protocolo. Particularmente me refiero a la riqueza de posibilidades que nos entregan los sistemas de cavidades de microondas y los sistemas de iones atrapados, junto a sus métodos eficientes para la discriminación de estados

cuánticos.

Haciendo referencia al segundo punto, en el capítulo 5 hemos presentado un modelo teórico par un detector, de alta eficiencia, de señales propagantes en el régimen cuántico de las microondas, el cual también puede funcionar como un contador de fotones. En principio, basta simplemente con definir un número suficiente de entidades absorbentes que sean capaces de capturar las excitaciones presentes en la señal cuántica. Esta propuesta confía en el actual desarrollo de los circuitos cuánticos superconductores, y representa un gran avance para el desarrollo futuro de la Ciencia de la Información Cuántica en el régimen de las microondas.

También quiero destacar que paralelamente a esta tesis, he colaborado en otros trabajos que se enmarcan dentro de la Información Cuántica, específicamente en el tema del entrelazamiento cuántico y su dinámica en sistemas disipativos. En particular, hemos estudiado las propiedades del entrelazamiento en sistemas de dos qubits, sometidos a una interacción de intercambio, bajo los efectos de un ruido clásico [126]. Hemos estudiado la evolución temporal de una cota inferior para el entrelazamiento cuántico en sistemas bipartitos de dimensión $3 \otimes 3$ [127]. Continuando en esta línea de investigación, hemos estudiado los fenómenos denominados *nacimiento súbito y muerte súbita del entrelazamiento* [128], y la dinámica del desentrelazamiento en estados coherentes entrelazados [129]. Además, hemos estudiado las propiedades del entrelazamiento en el espectro de autoestados del modelo de Tavis-Cummings inhomogéneo [130].

Bibliografía

- [1] S. Haroche and J.-M. Raymond, *Exploring the Quantum*, Oxford Univ. Press Inc., New York, 2006.
- [2] A. J. Leggett, *Macroscopic quantum systems and quantum theory of measurement*, Prog. Theor. Phys. **69**, 80 (1980).
- [3] J.-M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [4] D. Liebfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [5] P. Benoiff, J. Stat. Phys. **22**, 563 (1980).
- [6] R. Feynman, Int. J. Theor. Phys. **21**, 467 (1982).
- [7] D. Deutsch, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **400**, 97 (1985).
- [8] D. Deutsch and R. Jozsa, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **439**, 553 (1992).
- [9] P. Shor, in Proceedings, *35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Press, Los Alamitos, CA 1994; P. Shor, SIAM J. Comp. **26**, 1484 (1997).

-
- [10] L. K. Grover, Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [11] A. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 7661 (1991).
- [12] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [13] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys.Rev.Lett.**70**, 1895 (1993).
- [14] D. Bouwmeester, A. Ekert, & A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, Springer, Berlin, 2008.
- [15] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 2000.
- [16] Gregg Jaeger, *Quantum Information*, Springer, New York, 2007.
- [17] D. P. DiVincenzo, *Quantum Information and Computation* **1**, Special 1-6 (2001).
- [18] H. Mabuchi and A. Doherty, Science **298**, 1372 (2002).
- [19] H. Walther, B. T. H. Varcoe, B. G. Englert, and T. Becka, Rep. Prog. Phys. **69**, 1325 (2006).
- [20] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [21] J. Q. You and F. Nori, Superconducting Circuits and Quantum Information. *Physics Today* **58**, 42–47 (2005).
- [22] R. J. Schoelkopf and S. M. Girvin, Wiring up quantum systems. *Nature* **451**, 664–669 (2008).

-
- [23] J. Clarke, and F. K. Wilhelm, Superconducting quantum bits. *Nature* **453**, 1031–1042 (2008).
- [24] P. K. Day, H. G. LeDuc, B. A. Mazin, A. Vayonakis, and J. Zmuidzinas, *Nature* **425**, 817 (2003).
- [25] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [26] A. Wallraff, D. I. Shuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Nature* **431**, 162 (2004).
- [27] I. Chiorescu, *et al.*, *Nature* **431**, 159 (2004).
- [28] A. Einstein, B. Podolski, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [29] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **409**, 46 (2001).
- [30] W. Tittel and G. Weihs, *Quantum Inf. Comput.* **2**, 3 (2001).
- [31] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 1217 (2007).
- [32] A. J. Berkley, *et al.*, *Science* **300**, 1548 (2003).
- [33] M. Steffen, *et al.*, *Science* **313**, 1423 (2006).
- [34] R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [35] A. Peres, *Phys. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [36] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996).
- [37] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).

-
- [38] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. Smolin, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [39] S. Hill and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997); W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [40] A. Uhlmann, *Phys. Rev. A* **62**, 032307 (2000).
- [41] P. Rungta, V. Buzek, C. M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **64**, 042315 (2003).
- [42] F. Mintert, M. Kuś, and A. Buchleitner, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 167902 (2004).
- [43] K. Chen, S. Albeverio, and S. Fei, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 040504 (2005).
- [44] K. Chen, S. Albeverio, S. Fei, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 210501 (2005).
- [45] Yong-Cheng Ou, H. Fan, and S. Fei *Phys. Rev. A* **78**, 012311 (2008).
- [46] S. J. van Enk, N. Lütkenhaus, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **75**, 052318 (2007).
- [47] O. Gühne and G. Tóth, *Physics Reports* **474**, 1 (2009).
- [48] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*, chapter 9,14, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [49] Pieter Kok, W. J. Munro, Kae Nemoto, T. C. Ralph, Jonathan P. Dowling, and G. J. Milburn, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 135 (2007).
- [50] M. Mariani, M. J. Storcz, F. K. Wilhelm, W. D. Oliver, A. Emmert, A. Marx, R. Gross, H. Christ, and E. Solano, arXiv:cond-mat/0509737.

-
- [51] B. G. U. Englert, G. Mangano, M. Mariantoni, R. Gross, J. Siewert, and E. Solano, arXiv:0904.1769.
- [52] J. Majer, *et al.*, Nature **449**, 443 (2007).
- [53] M. Hofheinz, *et al.*, Nature **454**, 310 (2008).
- [54] M. Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, J. Wenner, John M. Martinis, and A. N. Cleland, Nature **459**, 546 (2009).
- [55] D. I. Schuster, *et al.*, Nature **445**, 515 (2007).
- [56] A. A. Houck, *et al.*, Nature **449**, 328 (2007).
- [57] F. Helmer, M. Mariantoni, E. Solano, and F. Marquardt, Phys. Rev. A **79**, 052115 (2009).
- [58] Shwetank Kumar and David P. DiVincenzo, arXiv:0906.2979.
- [59] J. M. Fink, M. Göppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff, Nature **454**, 315 (2008).
- [60] L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch, A. A. Houck, M. H. Devoret, E. Thuneberg, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature Physics **5**, 105 (2009).
- [61] I. Siddiqi, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 207002 (2004).
- [62] F. Mintert, A. Carvalho, M. Kus, and A. Buchleitner, Phys. Rep. **415**, 207 (2005); **419**, 143 (2005).
- [63] M. Plenio and V. Vedral, Quant. Inf. Comp. **7**, 1 (2007).

-
- [64] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupon-Roc, and G. Grynberg: *An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, New York, 1992.
- [65] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [66] R. G. Hulet and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **51**, 1430 (1983).
- [67] P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **94**, 113601 (2005).
- [68] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J.-M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin, Applied Physics Letters **90**, 164101 (2007).
- [69] F. M. Penning, Physica (Amsterdam) **3**, 873 (1936).
- [70] W. Paul, Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).
- [71] J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [72] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner, and R. Blatt, Nature **422**, 408 (2003).
- [73] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland, and C. Monroe, Nature **404**, 256 (2000).
- [74] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James, and R. Blatt, Nature (London) **429**, 734 (2004).
- [75] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Ann. Phys. (NY) **149**, 347-456 (1983); A. J. Leggett, J. Phys. CM **14**, R415-451 (2002). s

- [76] B. D. Josephson, in *Superconductivity*, R. D. Parks, ed. (Marcel Dekker, New York, 1969).
- [77] Bouchiat, V., Vion, D., Joyez, P., Esteve, D. & Devoret, M. H. Quantum coherence with a single cooper pair. *Phys. Scr*, T**76**, 165–170 (1998).
- [78] J. R. Friedman, V. Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, and J. E. Lukens, *Nature* **406**, 43-46 (2000).
- [79] J. E. Mooij, *et al.*, *Science* **285**, 1036 (1999).
- [80] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1543 (1985).
- [81] M. H. Devoret and J. M. Martinis. Superconducting qubits. In D. Estève, J.-M. Raimond, and J. Dalibard, editors, *Quantum Entanglement and Information Processing, Les Houches Session LXXIX*, page 443. North Holland, Amsterdam, 2004.
- [82] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
- [83] A.G. White, D.F.V. James, P.H. Eberhard, and P.G. Kwiat, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3103 (1999).
- [84] O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello, and A. Sanpera, *Phys. Rev. A* **66**, 062305 (2002).
- [85] P. Horodecki and A. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 127902 (2002).
- [86] Jiang-Ming Cai, Zheng-Wei Zhou, and Guang-Can Guo, *Phys. Rev. A* **73**, 024301 (2006).

-
- [87] F. A. Bovino, G. Castagnoli, A. Ekert, P. Horodecki, C. M. Alves, and A. V. Sergienko, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 240407 (2005).
- [88] A. Salles, F. de Melo, J. C. Retamal, R. L. de Matos Filho, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **74**, 060303(R) (2006).
- [89] S. M. Lee, S.-W. Ji, H.-W. Lee, and M. Suhail Zubairy, *Phys. Rev. A* **77**, 040301(R) (2008).
- [90] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert, and A. Buchleitner, *Phys. Rev. A* **75**, 032338 (2007).
- [91] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert, and A. Buchleitner, *Nature* **440**, 1020 (2006).
- [92] G. Romero, C. E. López, F. Lastra, E. Solano, and J. C. Retamal, *Phys. Rev. A* **75**, 032303 (2007).
- [93] F. Mintert and A. Buchleitner, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140505 (2007).
- [94] C. Schmid, *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 260505 (2008).
- [95] Y.-F. Huang, X.-L. Niu, Y.-X. Gong, J. Li, L. Peng, C.-J. Zhang, Y.-S. Zhang, and G.-C. Guo, *Phys. Rev. A* **79**, 052338 (2009).
- [96] L. Aolita and F. Mintert, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 050501 (2006).
- [97] L. Aolita, A. Buchleitner, and F. Mintert, *Phys. Rev. A* **78**, 022308 (2008).
- [98] S. J. van Enk, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 190503 (2009).
- [99] F. Mintert, M. Kus, and A. Buchleitner, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 260502 (2005).

-
- [100] S. Haroche group at École Normale Supérieure de Paris (private communication).
- [101] M.F. Santos, P. Milman, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **73**, 040305 (2006).
- [102] P. Blythe and B. Varcoe, arXiv:0605190.
- [103] S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037902 (2001).
- [104] Shi-Biao Zheng and Guang-Can Guo, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2392 (2000).
- [105] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5166 (2000).
- [106] Por razones pedagógicas, se han renombrado los niveles atómicos de Ref. [105]. En nuestro caso, el estado de más baja energía es $|g\rangle$, el estado intermedio es $|e\rangle$, y el nivel superior auxiliar es $|i\rangle$.
- [107] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Science* **288**, 2024 (2000).
- [108] Q.A. Turchette, C.S. Wood, B.E. King, C.J. Myatt, D. Leibfried, W.M. Itano, C. Monroe, and D.J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3631 (1998).
- [109] H. C. Nägerl, D. Leibfried, H. Rohde, G. Thalhammer, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, *Phys. Rev. A* **60**, 145 (1999).
- [110] G. Romero, J. J. García Ripoll, and E. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 173602 (2009).
- [111] J. J. García-Ripoll, E. Solano, and G. Romero, Spanish Patent Application No. 200802933, 2008.

-
- [112] G. Romero, J. J. García Ripoll, and E. Solano, arXiv:0906.4362.
- [113] Howard Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer, Berlin, 1993.
- [114] D. Vion, *et al.*, Science **296**, 886 (2002).
- [115] T. Yamamoto, Y. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Nature **425**, 941 (2003).
- [116] C. H. Van der Wal, *et al.*, Science **290**, 773 (2000).
- [117] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, and J. E. Mooij, Science **299**, 1869 (2003).
- [118] R. W. Simmonds, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 077003 (2004).
- [119] K. B. Cooper, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180401 (2004).
- [120] L. S. Bishop, *et al.*, arXiv:0807.2882.
- [121] J. M. Martinis. Superconducting qubits and the physics of Josephson junctions. In D. Estève, J.-M. Raimond, and J. Dalibard, editors, *Quantum Entanglement and Information Processing, Les Houches Session LXXIX*, page 487. North Holland, Amsterdam, 2004.
- [122] H. Otha. A self-consistent model of the Josephson junction. IC-SQUID 76, 35-49 (1976).
- [123] Michel H. Devoret, Quantum fluctuations in electrical circuits. In Elsevier Science B.V., editor, *Quantum Fluctuations, Les Houches, Session LXIII*, pages 351-386, 1997.
- [124] Antonio Barone and Gianfranco Paternò. *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York, 1982.

-
- [125] J.-T. Shen and S. Fan, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 213001 (2005).
- [126] F. Lastra, G. Romero, C. E. López, and J. C. Retamal, *Int. Journal of Quantum Information*, Vol. 5, No. 4 (2007) 457-468.
- [127] F. Lastra, G. Romero, C. E. López, M. França Santos, and J. C. Retamal, *Phys. Rev. A* **75**, 062324 (2007).
- [128] C. E. López, G. Romero, F. Lastra, E. Solano, and J. C. Retamal, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 080503 (2008).
- [129] F. Lastra, G. Romero, C. E. López, N. Zagury, and J. C. Retamal, arXiv:0801.1664.
- [130] C. E. López, F. Lastra, G. Romero, and J. C. Retamal, *Phys. Rev. A* **75**, 022107 (2007).

Apéndice A

Circuitos Cuánticos

En este apéndice discutiremos un modelo simple para obtener las relaciones de Josephson. Posteriormente estudiaremos el formalismo de flujos para los circuitos cuánticos y a partir de esto, deduciremos los Hamiltonianos para los qubits superconductores de carga y flujo.

A.1. Efecto Josephson

Si bien una derivación formal de las relaciones de Josephson puede llevarse a cabo a través de la teoría BCS [121], aquí se adoptará un formalismo mucho más simple desarrollado por Richard Feynman. Esta descripción considera que el sistema completo representa esencialmente un sistema de dos estados ligados a través de una amplitud " ϵ " característica de la juntura. El Hamiltoniano para este sistema es dado por

$$H = \epsilon_L |\psi_L\rangle \langle \psi_L| + \epsilon_R |\psi_R\rangle \langle \psi_R| + \epsilon (|\psi_L\rangle \langle \psi_R| + |\psi_R\rangle \langle \psi_L|), \quad (\text{A.1.1})$$

donde ϵ_L y ϵ_R son las energías del estado fundamental de cada superconductor y ϵ es la energía de interacción entre los dos estados. Esta energía de acoplamiento está relacionada con el solapamiento finito existente entre las

funciones de los superconductores. Cada superconductor está descrito por una función de onda macroscópica ψ , en donde $\psi\psi^*$ es proporcional a la densidad de electrones superconductores.

En esta descripción de dos estados, la función de onda más general está dada por una superposición lineal $|\psi\rangle = \psi_L|\psi_L\rangle + \psi_R|\psi_R\rangle$. Dada esta descripción simplificada, estudiemos la dinámica del sistema mediante la ecuación de Schrödinger. Esto nos permite encontrar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\psi}_L &= \epsilon_L\psi_L + \epsilon\psi_R \\ i\hbar\dot{\psi}_R &= \epsilon_R\psi_R + \epsilon\psi_L. \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Reemplazando la forma explícita para las funciones de onda, $\psi_k = \sqrt{n_k}e^{i\phi_k}$, donde n_k corresponde a la densidad de electrones superconductores y ϕ_k es la fase superconductora, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} i\hbar \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{n}_L}{\sqrt{n_L}} + i\sqrt{n_L}\dot{\phi}_L \right] e^{i\phi_L} &= \epsilon_L\sqrt{n_L}e^{i\phi_L} + \epsilon\sqrt{n_R}e^{i\phi_R} \\ i\hbar \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{n}_R}{\sqrt{n_R}} + i\sqrt{n_R}\dot{\phi}_R \right] e^{i\phi_R} &= \epsilon_R\sqrt{n_R}e^{i\phi_R} + \epsilon\sqrt{n_L}e^{i\phi_L}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Tomando las partes real e imaginaria de estas ecuaciones, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} -\hbar\sqrt{n_L}\dot{\phi}_L &= \epsilon_L\sqrt{n_L} + \epsilon\sqrt{n_R}\cos(\phi_R - \phi_L), \\ \frac{\hbar}{2} \frac{\dot{n}_L}{\sqrt{n_L}} &= \epsilon\sqrt{n_R}\sin(\phi_R - \phi_L), \\ -\hbar\sqrt{n_R}\dot{\phi}_R &= \epsilon_R\sqrt{n_R} + \epsilon\sqrt{n_L}\cos(\phi_R - \phi_L), \\ \frac{\hbar}{2} \frac{\dot{n}_R}{\sqrt{n_R}} &= -\epsilon\sqrt{n_L}\sin(\phi_R - \phi_L). \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

La densidad de corriente de un par de Cooper, J , está definido como $J = \dot{n}_L = -\dot{n}_R$, esto es

$$J = \frac{2\epsilon}{\hbar}\sqrt{n_L n_R} \sin(\theta), \quad (\text{A.1.5})$$

donde $\theta = \phi_R - \phi_L$.

De las otras dos ecuaciones encontramos la segunda relación de Josephson

$$\dot{\phi}_L = -\frac{\epsilon_L}{\hbar} - \frac{\epsilon}{\hbar} \sqrt{\frac{n_R}{n_L}} \cos(\phi_R - \phi_L), \quad (\text{A.1.6})$$

$$\dot{\phi}_R = -\frac{\epsilon_R}{\hbar} - \frac{\epsilon}{\hbar} \sqrt{\frac{n_L}{n_R}} \cos(\phi_R - \phi_L). \quad (\text{A.1.7})$$

Si suponemos que $n_L = n_R = n$ donde n es constante, esto implica que

$$\dot{\theta} = \dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L = \frac{1}{\hbar} (\epsilon_L - \epsilon_R) = \frac{2eV}{\hbar} \quad (\text{A.1.8})$$

y la densidad de corriente que pasa a través de la juntura es

$$J = J_0 \sin(\theta), \quad (\text{A.1.9})$$

donde $J_0 = 2en/\hbar$ es la densidad de corriente crítica de la juntura.

Notemos que aunque las densidades n_L y n_R son consideradas constantes sus derivadas en el tiempo J no es nula. Esta es una falencia del método que se ha presentado. Sin embargo, esta contradicción no existe si se toman en cuenta la presencia de fuentes de corriente las cuales reemplazan continuamente los pares de Cooper que experimentan efecto tunel a través de la barrera [122]. A pesar de esto, este modelo simple permite rescatar los principales aspectos del efecto Josephson, los cuales son suficientes para el desarrollo de esta tesis.

A.2. Formalismo de flujos

Cuando deseamos estudiar un circuito cuántico, una aproximación útil es usar el formalismo de flujos [123]. Estas son variables que están definidas sobre los nodos de la malla cuántica, comenzando con un nodo que se escoge como referencia o “ground”, y trazando trayectorias únicas a otros nodos.

Dado esto, el Lagrangiano puede ser escrito como

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \mathbf{C}} \frac{C_n}{2} \dot{\phi}_{C_n}^2 - \sum_{n \in \mathbf{L}} U(\phi_{L_n}) = E_C - E_L. \quad (\text{A.2.10})$$

Aquí \mathbf{C} y \mathbf{L} denotan el conjunto de capacitores e inductancias, C_n y ϕ_{C_n} representan la capacitancia y la diferencia de flujo asociada a la rama del enésimo capacitor, y $U(\phi_{L_n})$ es la energía inductiva asociada al enésimo inductor.

Notemos que el Lagrangiano total puede ser escrito como la diferencia de energías de los capacitores y las energías de los inductores. Además, la energía capacitiva tiene una estructura simple

$$E_C = \frac{1}{2} \dot{\vec{\phi}}^t \bar{C} \dot{\vec{\phi}}, \quad (\text{A.2.11})$$

con una matriz positiva $\bar{C} \geq 0$ y simétrica, $\bar{C}^t = \bar{C}$. Dada esta forma, es fácil encontrar las cargas asociadas,

$$\vec{q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{\phi}}} = \bar{C} \dot{\vec{\phi}}, \quad (\text{A.2.12})$$

con el Hamiltoniano total

$$H = \vec{q}^t \dot{\vec{\phi}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{q}^t \bar{C}^{-1} \vec{q} + E_L(\vec{\phi}) = E_C + E_U. \quad (\text{A.2.13})$$

A.3. Qubit de carga (Cooper-Pair Box)

Para estudiar al qubit de carga o Cooper pair Box, notemos la energía del sistema comprende las energías debido al almacenamiento de carga en la juntura y la energía de acoplamiento Josephson, es decir

$$\frac{1}{2} C_g (V - V_g)^2 + \frac{1}{2} C_J V^2 - E_J \cos(\theta), \quad (\text{A.3.14})$$

donde V es el potencial de la isla y θ es la diferencia de fase entre la isla y el reservorio superconductor. Por otro lado, dada la segunda relación de Josephson

$$\dot{\theta} = \frac{2e}{\hbar}V, \quad (\text{A.3.15})$$

podemos observar que los términos asociados con la energía capacitiva están directamente relacionados con la energía cinética del sistema, la cuál está descrita a través de la variable dinámica θ . Con esto en mente podemos construir el siguiente Lagrangiano para el sistema

$$L = \frac{1}{2}C_g(V - V_g)^2 + \frac{1}{2}C_JV^2 + E_J \cos(\theta), \quad (\text{A.3.16})$$

el cual puede reescribirse como

$$L = \frac{1}{2}C_\Sigma V^2 + \frac{1}{2}C_g V_g^2 - \frac{1}{2}(2VC_gV_g) + E_J \cos(\theta) \quad (\text{A.3.17})$$

$$L = \frac{1}{2}C_\Sigma \left(V - \frac{C_g V_g}{C_\Sigma} \right)^2 + E_J \cos(\theta) + \text{const.} \quad (\text{A.3.18})$$

Aquí hemos obviado un término constante, el cuál no afectará en la dinámica del sistema. En términos de la variable dinámica θ , el Lagrangiano puede ser escrito finalmente como

$$L = \frac{1}{2}C_\Sigma \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\theta} - \frac{C_g V_g}{C_\Sigma} \right)^2 + E_J \cos(\theta). \quad (\text{A.3.19})$$

La dinámica del sistema está descrito por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad (\text{A.3.20})$$

de aquí obtenemos lo siguiente

$$C_\Sigma \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \ddot{\theta} = -E_J \sin(\theta) \quad (\text{A.3.21})$$

$$C_\Sigma \dot{V} + I_C \sin(\theta) = 0,$$

es decir, el estado de equilibrio del sistema corresponde a un estado de caída de tension constante, sin la presencia de una corriente continua.

Estudiemos este sistema desde el punto de vista del formalismo Hamiltoniano. El momento canonico conjugado a la variable θ es dado por

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad (\text{A.3.22})$$

$$= \frac{\hbar}{2e} C_\Sigma \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\theta} - \frac{C_g V_g}{C_\Sigma} \right) \quad (\text{A.3.23})$$

$$= \frac{\hbar}{2e} \left(\frac{\hbar}{2e} C_\Sigma \dot{\theta} - C_g V_g \right). \quad (\text{A.3.24})$$

Así, el Hamiltoniano del sistema es

$$H = P_\theta \dot{\theta} - L \quad (\text{A.3.25})$$

$$= \frac{2e}{\hbar C_\Sigma} \left[\frac{2e}{\hbar} P_\theta^2 + P_\theta C_g V_g \right] - \frac{1}{2} \frac{(2e)^2}{\hbar^2 C_\Sigma} P_\theta^2 - E_J \cos(\theta) \quad (\text{A.3.26})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2e)^2}{C_\Sigma} \left[\left(\frac{P_\theta}{\hbar} \right)^2 + \frac{2P_\theta C_g V_g}{2e\hbar} \right] - E_J \cos(\theta) \quad (\text{A.3.27})$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(2e)^2}{C_\Sigma} \left[\frac{P_\theta}{\hbar} + \frac{C_g V_g}{2e} \right]^2 - E_J \cos(\theta) + \text{const.} \quad (\text{A.3.28})$$

Veamos la interpretación que tiene la variable P_θ para el sistema

$$P_\theta = \frac{\hbar}{2e} \left(\frac{\hbar}{2e} C_\Sigma \dot{\theta} - C_g V_g \right) \quad (\text{A.3.29})$$

$$= \frac{\hbar}{2e} (C_\Sigma V - C_g V_g) \quad (\text{A.3.30})$$

$$= \frac{\hbar}{2e} [C_g (V - V_g) + C_J V], \quad (\text{A.3.31})$$

comparando con la ecuación de movimiento, vemos que la cantidad $C_g (V - V_g) + C_J V$ que da cuenta de la carga almacenada en la isla superconductora, es igual al exceso de pares de Cooper que tunelean desde el reservorio a la isla, es decir

$$C_g (V - V_g) + C_J V = -2eN. \quad (\text{A.3.32})$$

Tomando la derivada en el tiempo de esta ultima ecuación y haciendo uso de la primera relacion de Josephson A.1.5, se tiene que

$$C_{\Sigma}\dot{V} = -2e\dot{N} = -I_C \sin(\theta), \quad (\text{A.3.33})$$

es decir, se reproducen las ecuaciones de movimiento. De esta manera, se tiene que

$$P_{\theta} = -\hbar N, \quad (\text{A.3.34})$$

y finalmente el Hamiltoniano del sistema es dado por

$$H = 4E_C (N - N_g)^2 - E_J \cos(\theta), \quad (\text{A.3.35})$$

donde se define la energía de carga $E_C = e^2/2C_{\Sigma}$, y la compuerta de carga $N_g = C_g V_g/2e$.

A.4. Qubit de flujo (rf-QUID)

Para encontrar el Hamiltoniano del qubit de flujo compuesto de una juntura Josephson, recordemos la figura 2.11. De acuerdo con el formalismo de flujos expuesto antes (A.2), partiendo desde el nodo A trazaremos dos trayectorias hasta el nodo B . La primera, que denominaremos c_1 , pasará por la juntura Josephson y la segunda trayectoria pasará por la inductancia L y la denominaremos c_2 . Considerando ambos caminos debemos tener en cuenta las energías de carga almacenada en la juntura, su energía Josephson (energía debida al inductor no lineal) y la energía inductiva almacenada en L . De esta manera, el Lagrangiano del sistema está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{C_J^2}{2} \dot{\phi}^2 + E_J \cos(\theta) - \frac{LI^2}{2}, \quad (\text{A.4.36})$$

donde I es la corriente inducida por el flujo externo y θ es la diferencia de fase superconductora.

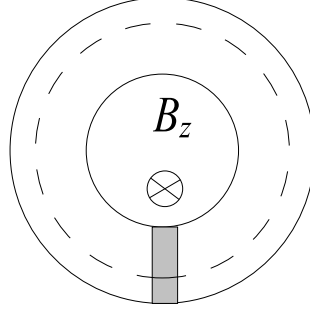


Figura A.1: Anillo superconductor en presencia de un campo magnético externo.

Una propiedad importante de esta fase surge al imponer la invariancia de Gauge, esto debido a la siguiente relación entre la densidad de corriente, el gradiente de la fase y el potencial magnético vector \vec{A} [124]:

$$\vec{J} = n \frac{e}{m} (\hbar \vec{\nabla} \theta - 2e \vec{A}), \quad (\text{A.4.37})$$

donde e y m son, respectivamente, la carga y masa del electrón y n es la densidad de electrones superconductores. Dado que \vec{A} está definido hasta el gradiente de una función escalar χ , $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$, esto implica que la fase debe transformarse a

$$\theta \rightarrow \theta + \frac{2e}{\hbar} \chi, \quad (\text{A.4.38})$$

de tal manera que la densidad de corriente permanezca invariante.

Volviendo al análisis del circuito cuántico en la figura 2.11 y escogiendo una trayectoria hacia el interior de anillo superconductor que forma nuestro qubit de flujo como se muestra en Fig. A.1, la expresión (A.4.37) se reduce a

$$\vec{\nabla} \theta = \frac{2e}{\hbar} \vec{A}. \quad (\text{A.4.39})$$

En estas circunstancias, la diferencia de fase entre los puntos P y Q debe ser la misma al considerar ya sea la trayectoria c_1 o c_2 . Esto conlleva a la

siguiente relación

$$\phi + \int_{c_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = LI + \int_{c_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (\text{A.4.40})$$

es decir, $I = (\phi - \phi_{\text{ext}})/L$, donde hemos definido la variable de flujo en términos de la diferencia de fase superconductora $\phi = (\hbar/2e)\theta$ y $\phi_{\text{ext}} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}$. Así, el Lagrangiano del rf-SQUID (A.4.36) adopta su forma final

$$\mathcal{L} = \frac{C_J^2}{2} \dot{\phi}^2 + E_J \cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right) - \frac{(\phi - \phi_{\text{ext}})^2}{2L}, \quad (\text{A.4.41})$$

desde donde es directo obtener el Hamiltoniano considerando las variables canónicas conjugadas del sistema.

Apéndice B

Cálculos explícitos del capítulo

5

B.0.1. Solución no hermítica

Considerando el caso más simple de un qubit o absorbedor, la ecuación maestra

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}\rho, \quad (\text{B.0.1})$$

puede ser escrita en una forma más conveniente

$$\frac{d}{dt}\rho = A\rho + \rho A^\dagger + \Gamma|g\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle g|, \quad (\text{B.0.2})$$

donde hemos introducido el operador no hermítico

$$A = -\frac{i}{\hbar}H - \frac{\Gamma}{2}|1\rangle\langle 1| \neq A^\dagger. \quad (\text{B.0.3})$$

De esta manera, la ecuación maestra puede ser manipulada formalmente usando el cuadro de “interacción”

$$\rho(t) = e^{At}\sigma(t)e^{A^\dagger t}, \quad (\text{B.0.4})$$

con la siguiente ecuación par $\sigma(t)$,

$$\frac{d}{dt}\sigma = \Gamma e^{-At}|g\rangle\langle 1|e^{At}\sigma e^{A^\dagger t}|1\rangle\langle g|e^{-A^\dagger t}. \quad (\text{B.0.5})$$

Usando la relación $e^{At}|g\rangle = e^{A^\dagger t}|g\rangle = |g\rangle$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\sigma = \Gamma|g\rangle\langle 1|e^{At}\sigma e^{A^\dagger t}|1\rangle\langle g|. \quad (\text{B.0.6})$$

Esta ecuación puede ser resuelta separándola en dos contribuciones, $\sigma_{gg} \propto |g\rangle\langle g|$, representando a la parte que ya decayó, y todas las otras contribuciones $\sigma_\perp = 1 - \sigma_{gg}$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{gg} = \Gamma|g\rangle\langle g| \times \sum_{\alpha,\beta} \langle 1|e^{At}\sigma_\perp e^{A^\dagger t}|1\rangle, \quad (\text{B.0.7})$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_\perp = 0. \quad (\text{B.0.8})$$

Usando la condición inicial

$$\sigma_{gg}(0) = 0, \quad \sigma_\perp(0) = \rho(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|, \quad (\text{B.0.9})$$

se obtiene la solución formal

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| + |g\rangle\langle g| \int_0^t \Gamma \langle 1|\Psi(\tau)\rangle\langle\Psi(\tau)|1\rangle d\tau, \quad (\text{B.0.10})$$

donde hemos introducido el estado $|\Psi(t)\rangle$, el cual evoluciona desde el estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ de acuerdo a la ecuación de Schrödinger disipativa

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = A|\Psi(t)\rangle \equiv -\frac{i}{\hbar}\bar{H}|\Psi(t)\rangle. \quad (\text{B.0.11})$$

Notemos que la probabilidad de que un qubit capture un fotón irreversiblemente, está dada por

$$P(0 \rightarrow 1 \rightarrow g) = \text{Tr}(\rho|g\rangle\langle g|) \quad (\text{B.0.12})$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \text{Tr} [|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|] \\ &= 1 - \|\Psi\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.0.13})$$

B.0.2. Ecuaciones del modelo para un elemento absorbente

Siguiendo el razonamiento previo, es posible resolver la ecuación de Schrödinger disipativa

$$i \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \bar{H} |\Psi\rangle, \quad (\text{B.0.14})$$

gobernada por el operador no hermítico

$$\bar{H} = H_{\text{photon}} + H_{\text{qubit}} + H_{\text{int}} - \sum_i \frac{\hbar\Gamma}{2} |1\rangle_i \langle 1|. \quad (\text{B.0.15})$$

Para describir el proceso de detección, nuestra condición inicial $|\Psi(0)\rangle$ contendrá los fotones propagantes más todos los absorbedores en el estado fundamental $|0\rangle$. La probabilidad de que un absorbedor capture un fotón y cambie su estado desde $|0\rangle$ a $|g\rangle$ está dada por la pérdida de la norma mostrada en la ecuación (B.0.13).

Consideremos un fotón incidente, el cual se propaga desde la izquierda con energía $E = \hbar|k|v$. El estado del sistema estará dado por [125]

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int \left[\xi_r(x, t) \psi_r^\dagger(x) + \xi_l(x, t) \psi_l^\dagger(x) \right] |vac, 0\rangle + \\ &+ e_1 |vac, 1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.0.16})$$

Aquí, $\psi_{r,l}^\dagger(x)|vac, 0\rangle$ es el estado de un fotón creado en la posición x y moviéndose hacia la derecha o a la izquierda, mientras que el absorbedor se encuentra en el estado metaestable $|0\rangle$. Además, $\xi_r(x, t)$ y $\xi_l(x, t)$ representan las funciones de onda de un sólo fotón moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente, mientras que $|vac, 1\rangle$ representa al estado sin fotones y el absorbedor excitado al nivel inestable $|1\rangle$. Notemos que gracias a la relación (B.0.10), no necesitamos incluir explícitamente la población del estado $|g\rangle$. Solamente tenemos que resolver la ecuación de Schrödinger (B.0.14)

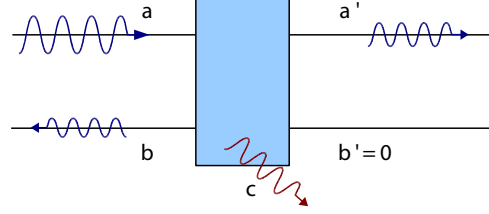


Figura B.1: Un fotón incidente, moviéndose hacia la derecha, interactúa con un elemento absorbente. Desde la amplitud original del campo, a , una componente es transmitida, a' , otra componente es reflejada, b , y finalmente con alguna probabilidad, $|c|^2$, el sistema absorbe un fotón y cambia de estado.

usando una condición de borde que represente a un fotón viniendo desde la izquierda y un absorbedor inactivo, esto es

$$\xi_r(x > 0, t_0) = \xi_l(x, t_0) = 0, \quad e_1(t_0) = 0, \quad (\text{B.0.17})$$

y calcular la evolución de la amplitud del fotón, $\xi_{r,l}(x, t)$, la población del estado excitado $e_1(t)$ y la probabilidad resultante de absorber un fotón (B.0.13).

Luego de descomponer la ecuación de onda en las regiones del espacio unidimensional $x < 0$ y $x > 0$, y reemplazando el potencial $\delta(x - x_1)$ con una apropiada condición de borde en $x_1 = 0$, uno obtiene la ecuación de Schrödinger para el absorbedor

$$\begin{aligned} i\partial_t e_1 &= \frac{V}{2\hbar} [\xi_r(0^+) + \xi_r(0^-) + \xi_l(0^+) + \xi_l(0^-)], \\ &+ (\omega - i\Gamma)e_1 \end{aligned} \quad (\text{B.0.18})$$

y cuatro ecuaciones para el fotón,

$$\begin{aligned} i\partial_t \xi_r(x, t) &= -iv\partial_x \xi_r(x, t), \quad x \neq 0, \\ i\partial_t \xi_l(x, t) &= +iv\partial_x \xi_l(x, t), \quad x \neq 0, \\ 0 &= -i\hbar v [\xi_r(0^+, t) - \xi_r(0^-, t)] + V e_1(t), \\ 0 &= +i\hbar v [\xi_l(0^+, t) - \xi_l(0^-, t)] + V e_1(t). \end{aligned} \quad (\text{B.0.19})$$

Introducimos nuevas variables a, b, a' , and b' las cuales describen a los campos en ambos lados del absorbedor [Fig. B.1],

$$\begin{aligned} a(t) &= \xi_r(0^-, t), & a'(t) &= \xi_r(0^+, t), \\ b(t) &= \xi_l(0^-, t), & b'(t) &= \xi_l(0^+, t). \end{aligned} \quad (\text{B.0.20})$$

Dos de estas variables pueden ser resueltas desde las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} a(t) &= \xi_r(0^+, t) = \xi_r(-v(t - t_0), t_0) \\ b'(t) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.0.21})$$

mientras que el resto son extraídas desde las condiciones de borde

$$a'(t) = a(t) + \frac{V}{i\hbar v} e_1(t), \quad b(t) = \frac{V}{i\hbar v} e_1(t). \quad (\text{B.0.22})$$

Hemos expresado todas las variable desconocidas en términos de $e_1(t)$. La población del estado excitado satisface la ecuación

$$i\partial_t e_1 = \left(\omega - i\Gamma - i\frac{V^2}{\hbar^2 v} \right) e_1 + \frac{V}{\hbar} a(t), \quad (\text{B.0.23})$$

la cual contiene la frecuencia original, ω , y una componente imaginaria proveniente del decaimiento del sistema de tres niveles, Γ , reforzado por la interacción con la línea de transmisión $V^2/\hbar^2 v$. Resolviendo para e_1 , encontramos lo siguiente

$$\begin{aligned} e_1(t) &= -i\frac{V}{\hbar} \int_0^t e^{-\tilde{\Gamma}(t-\tau)} a(\tau) d\tau, \\ \tilde{\Gamma} &= \Gamma + \frac{V^2}{\hbar^2 v} + i\omega, \end{aligned} \quad (\text{B.0.24})$$

en términos del haz incidente (B.0.21).

Usando la expresión para $e_1(t)$, uno puede calcular las componentes reflejada y transmitida del haz de microondas, desde donde se encuentra que la intensidad total no es conservada. En vez de esto, tenemos una componente

absorbida que es “robada” por el sistema de tres niveles para experimentar una transición desde $|0\rangle$ a $|g\rangle$ via el estado $|1\rangle$. De esta manera, las ecuaciones de balance serán [Fig. B.1]

$$|a|^2 + |b'|^2 = |a'|^2 + |b|^2 + |c|^2. \quad (\text{B.0.25})$$

Si consideramos un fotón con una duración finita, T , la eficiencia en la detección será definida como la fracción del paquete de ondas que fué absorbido

$$\alpha = \frac{\int_0^T |c(t)|^2 dt}{\int_0^T [|a(t)|^2 + |b'(t)|^2] dt}. \quad (\text{B.0.26})$$

Para propósitos de fotodetección y contaje de fotones, lo ideal es que este valor alcance un valor máximo $\alpha = 1$.

B.0.3. Solución estacionaria para un qubit

Para comprender el proceso de absorción de fotones, estudiaremos un haz monocromático continuo el cual es encendido lentamente,

$$a(t) = \exp[(-i\omega_0 + \sigma)t] \quad t \leq 0, \sigma > 0. \quad (\text{B.0.27})$$

Tomando los límites $t_0 \rightarrow -\infty$ y $\sigma \rightarrow 0^+$ en este preciso orden, obtenemos

$$\begin{aligned} e_1 &= -i \frac{V}{\hbar} \int_{-\infty}^t \exp[-\tilde{\Gamma}(t - \tau) + (-i\omega_0 + \sigma)\tau] \\ &= -i \frac{V/\hbar}{\Gamma + \frac{V^2}{\hbar^2} + i(\omega - \omega_0)} e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.28})$$

Se introducirá un único parámetro para describir el proceso de detección,

$$\gamma = \frac{\hbar v}{V^2} \hbar [\Gamma + i(\omega - \omega_0)], \quad (\text{B.0.29})$$

el cual incluye una renormalización de la tasa de decaimiento y una pequeña componente imaginaria asociada a la desentonización. Con estos parámetros

la solución se escribe como

$$e_1(t) = -i \frac{\hbar v}{V} \frac{1}{1+\gamma} e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{B.0.30})$$

$$a'(t) = \left[1 - \frac{1}{1+\gamma} \right] e^{-i\omega_0 t}, \quad (\text{B.0.31})$$

$$b(t) = -\frac{1}{1+\gamma} e^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{B.0.32})$$

Si trabajamos en el régimen de resonancia, $\omega = \omega_0$, la tasa de decaimiento γ se vuelve real y la tasa de absorción estará dada por

$$\alpha = -2\text{Re}(a^*b) - 2|b|^2 \quad (\text{B.0.33})$$

$$= \frac{2}{1+\gamma} - \frac{2}{(1+\gamma)^2} \quad (\text{B.0.34})$$

$$= \frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} = 2b(1-b). \quad (\text{B.0.35})$$

Este valor alcanza un máximo de 50% de eficiencia o $\alpha = 1/2$ para valores $b = 1/2$, $\gamma = 1$.

B.0.4. Matriz de transferencia

Podemos derivar la solución cuasi estacionaria o de extensos paquete de ondas en una manera ligeramente distinta. Notemos que para paquetes de ondas infinitamente largos, la población del estado excitado está determinado por los campos a ambos lados del elemento absorbente

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{(\omega_0 - \omega) + i\Gamma} \frac{V}{2\hbar} [a + a' + b + b'] \quad (\text{B.0.36}) \\ &= \frac{\hbar v}{iV\gamma} [a + a' + b + b']. \end{aligned}$$

De esta manera, las condiciones de borde en la ecuación (B.0.22) se transforman en un conjunto de ecuaciones que solamente involucran a los campos

que se propagan hacia y desde el qubit

$$0 = a' - a + \frac{1}{2\gamma}(a + a' + b + b'), \quad (\text{B.0.37})$$

$$0 = b' - b - \frac{1}{2\gamma}(a + a' + b + b'). \quad (\text{B.0.38})$$

En términos de la matriz y vectores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.39})$$

podemos escribir lo siguiente

$$\left(1 + \frac{1}{2\gamma}A\right) x' = \left(1 - \frac{1}{2\gamma}A\right) x. \quad (\text{B.0.40})$$

Multiplicando todo por $(1 - A/2\gamma)$ y usando $A^2 = 0$, se obtiene que $x' = (1 - A/\gamma)x$. Esto conduce a una relación entre los campos a la derecha y a la izquierda del absorbedor

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.41})$$

permitiendo definir la matriz de dispersión

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma} & 1 + \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{\gamma}A. \quad (\text{B.0.42})$$

Notemos que el valor γ introducido antes (B.0.29) solamente depende de las propiedades del qubit, de la interacción entre el qubit y la línea, y de la velocidad de grupo. Así hemos elaborado un esquema bastante compacto y fácilmente generalizable para estudiar dispersión y absorción de fotones por absorbedores individuales.

B.0.5. Fórmula de absorción general

Usando el formalismo de la matriz de transferencia podemos calcular la fracción de fotones absorbidos. El único requerimiento para obtener una fórmula general es que la matriz de dispersión permanezca invariante bajo inversión, es decir

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} b' \\ a' \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.43})$$

Esto es razonable: desde la figura B.1 podemos concluir que b y a' juegan el mismo rol que b' y a . Usando las relaciones $b = T_{01}a'$ y $a = T_{11}a'$, la fracción absorbida estará dada por

$$\alpha = 1 - \frac{|a'|^2 + |b|^2}{|a|^2} = 1 - \frac{1}{|T_{11}|^2}(1 + |T_{01}|^2). \quad (\text{B.0.44})$$

Esto es consistente con el caso de un único absorbedor

$$T_{11} = \frac{1 + \gamma}{\gamma}, \quad T_{01} = -\frac{1}{\gamma}, \quad (\text{B.0.45})$$

en el cual recuperamos

$$\alpha = 1 - \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{2\gamma}{(1 + \gamma)^2}, \quad (\text{B.0.46})$$

como era esperado.

B.0.6. Múltiples absorbentes

Si tenemos más de un elemento absorbedor en las posiciones x_1, x_2, \dots , usaremos la misma fórmula para la eficiencia en la absorción (B.0.44), pero con la matriz de transmisión

$$T_{total} = T_1 \Phi(x_2 - x_1) T_2 \Phi(x_3 - x_2) \cdots T_N. \quad (\text{B.0.47})$$

Aquí, T_i describe las propiedades de un absorbedor dado y depende del valor γ_i , mientras que la matriz de fase $\Phi(x)$ es dada por

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{i\theta(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta(x)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.48})$$

y contiene la fase acumulada del campo electromagnético cuando viaja entre absorbentes consecutivos

$$\theta(x) = \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\omega_0}{v}x . \quad (\text{B.0.49})$$