UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FISICA

INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS DE LECHOS GRANULARES FLUIDIZADOS BAJO VIBRACIÓN VERTICAL

JAVIER ALEJANDRO CONTRERAS PASTENES

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FISICA

INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS DE LECHOS GRANULARES FLUIDIZADOS BAJO VIBRACIÓN VERTICAL

JAVIER ALEJANDRO CONTRERAS PASTENES

Profesor Guía : Dr. Francisco Melo

Profesores Comisión : Dr. Raúl Cordero.

: Dr. Nicolás Mujica.

: Dr. Francisco Santibañez.

: Dr. Daniel Serafini.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

SANTIAGO DE CHILE

SEPTIEMBRE 2013

“INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS DE LECHOS GRANULARES FLUIDIZADOS BAJO VIBRACIÓN VERTICAL"

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO DE CHILE

SEPTIEMBRE 2013

“INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS
DE LECHOS GRANULARES FLUIDIZADOS
BAJO VIBRACIÓN VERTICAL"

JAVIER ALEJANDRO CONTRERAS PASTENES

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Francisco Melo H., del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato, Dr. Raúl Cordero, Dr. Nicolás Mujica, Dr. Francisco Santibañez, Dr. Daniel Serafini y Dr. Francisco Melo.

.....
Dr. Raúl Cordero

.....
Dr. Nicolás Mujica

.....
Dr. Francisco Santibañez

.....
Dr. Daniel Serafini

.....
Dr. Francisco Melo
Profesor Guía

.....

Yolanda Vargas
Directora

私のお母さんへ
私の恋人へ

Agradecimientos

Todo trabajo experimental lleva consigo el apoyo de un gran equipo de trabajo. Si bien sólo unas líneas no son suficientes... quisiera comenzar agradeciendo a todo el personal del laboratorio de Física No Lineal de mi alma mater, por una serie de fructíferas e interesantes discusiones; a Roberto Bernal, primer miembro del equipo que conocí, y que participó y ayudó en mi entrenamiento en pregrado, a Héctor Alarcón y Franco Tapia por sus grandes aportes técnicos en diversos experimentos, a Francisco Vivanco por su sostenida y notable ayuda en programación y análisis matemático. Quisiera agradecer también a Leonardo Caballero, quien me guió hacia el trabajo experimental en el laboratorio y participó en la génesis de esta tesis. Otro especial agradecimiento a los técnicos del taller de máquinas: Gonzalo Matín y Manuel Meza, cuya experticia permitió materializar diseños desafiantes. Al resto de los alumnos del laboratorio, quisiera agradecerles también por su ayuda en los momentos más inesperados: Antonella Rescaglio, Claudia Sánchez, María Oyarzún, Nelson Sepúlveda, Romina Muñoz, Ignacio Calderón, Sebastián Morgado, Manuel Sepúlveda, y José Miguel Mercado. A Erika Inostroza, le agradezco por toda su ayuda y asistencia a lo largo de mi permanencia en el laboratorio. Al resto de los amigos que tuve la oportunidad de conocer en el laboratorio y que me han ayudado y velado por este trabajo -pero se encuentran en otras regiones de Chile y el extranjero- les envío un fuerte agradecimiento.

A Jean-Christophe Gèminard, le extiendo otro agradecimiento por su dis-

ponibilidad, invaluable aporte y colaboración permanente en la investigación que se presenta en esta tesis.

Y en particular, quiero agradecer profundamente a mi tutor el Dr. Francisco Melo, una fuente inagotable de herramientas y conocimientos, cuya dirección me ha permitido adentrarme en la investigación científica de una manera que no creí posible; su inigualable paciencia y energía lo envisten como una inspiración para todos en el laboratorio. Gracias a su ayuda e impulso, fue posible materializar este trabajo sorteando todo tipo de desafíos.

Agradezco naturalmente a mis amigos Sebastián Allende, Manfredo Novela, y Sebastián Peña, cuya influencia ha dejado múltiples huellas en todo mi trabajo.

Y desde luego, el más grande de mis agradecimientos a mi familia. Mi madre Clara Pastenes y mi novia Hanna Tobar. La paciencia, comprensión, ayuda, soporte, guía y enseñanzas que me han brindado, cimentaron cada ámbito de mi vida, su relevancia y aporte son cuando menos inefables y perennes.

Finalmente, quiero agradecer el aporte financiero de los programas anillo ACT 95, ANR-011 y MECESUP FSM0605, cuyos recursos me permitieron finalizar mis estudios de doctorado. Otra mención, a la Dirección General de Graduados de nuestra universidad, por su aporte inicial durante mi comienzo en el programa de postgrado.

No existen más que dos reglas para escribir: tener algo que decir y decirlo.

Oscar Wilde

Resumen

El presente trabajo se enmarca dentro del estudio de la interacción entre un polvo granular seco bajo vibración vertical periódica, y el flujo intersticial del aire que rodea a dichos granos.

Se ha documentado en múltiples instancias, que la aplicación de fuerzas periódicas en polvos, generan efectos que los mimetizan con fenómenos observados en líquidos, y que son el resultado directo de la interacción entre las partículas y el aire que las rodea. De todos ellos, una inestabilidad muy particular origina patrones de nucleación en forma de gotas que emergen de superficies cubiertas de polvo seco oscilando verticalmente. Si la superficie de vibración posee algún grado de inclinación, las gotas generadas adquieren un movimiento colectivo orientado, reptando hacia la cima, siguiendo la dirección de la máxima pendiente local, como si se tratase de un mojado donde la gravedad se encuentra invertida. Durante casi una década, la escasa literatura que ha documentado la aparición de estas gotas, no contiene mediciones que permitan cuantificar la fuerza sobre las gotas, o la evolución de alguna variable temporal que describa su dinámica, asimismo, no existen pruebas empíricas de la validez de alguna propuesta teórica que permita entender el origen de las gotas, y tampoco se conoce cuál es el mecanismo que genera el mojado granular, ni qué significado físico tiene el umbral de la inestabilidad.

Un primer acercamiento a los efectos del aire en medios granulares, se obtiene estudiando la evolución de una columna compuesta de sólidos granulares, dentro de un tubo sometido a vibración vertical periódica. Todo el

escenario recién mencionado, se aborda en el segundo capitulo de esta tesis, acá, el tamaño de partícula permite despreciar los efectos convectivos y la fricción grano-pared, además, el control del espesor de la capa entrega la oportunidad de explorar largos regímenes de vibración sin que los efectos de la difusión del aire puedan ser relevantes. El monitoreo de la posición de la columna, su dilatación, la aceleración local y la presión del gas debajo de la misma, son las variables que permiten caracterizar toda la física del sistema. La columna se comporta como un medio poroso deformable, cuya altura cambia durante el ciclo de vibración; cuando la aceleración inyectada al sistema vence la fuerza normal, la columna se despega de la plataforma de vibración (base del tubo) y un flujo de aire comienza a transportarse a través de la columna. La medición de la presión del aire debajo de la columna, es posible gracias a una cavidad especialmente diseñada para conectar el flujo de aire con un sensor de presión diferencial que puede resolver con precisión variaciones muy pequeñas de presión. La configuración experimental para la adquisición de la presión no se encuentra sujeta a alteraciones por señales espúreas inducidas por el movimiento vibratorio del sistema, además, está libre bloqueos o pérdidas de carga que interfieran con el comportamiento natural de la columna.

La física del sistema, revela que cuando la capa inferior de la columna se despega de la plataforma de vibración, el aire comienza a ser succionado en esta brecha, induciendo una caída de presión que llega a un mínimo, y posteriormente la presión comienza a subir debido a la fuerza con que la columna comienza a presionar el aire debajo de ella ante su inminente aterrizaje, llegando a un máximo de presión que en el momento de colisión de la capa, comienza a relajar debido al drenado del aire que fue incorporado durante el ciclo. La señal de presión es claramente asimétrica, y esta asimetría puede controlarse a través de la manipulación de la frecuencia de vibración y de la aceleración inyectada. Una propuesta teórica muy simple y ampliamente usada en sistemas

bajo vibración (modelo de von Kroll), permite en primera aproximación reducir la capa a un pistón poroso indeformable, donde las variables que describen la física se obtienen monitoreando la evolución temporal de la brecha entre la columna y la plataforma de vibración, o la presión del aire en esta zona. Ambas variables, son descritas por ecuaciones analíticas trascendentales, cuyo único elemento de ajuste es la porosidad efectiva del medio granular. La presión, es la variable que con mejor precisión revela la porosidad del medio, pero debido a su sensibilidad, muestra un fuerte acoplamiento con la aceleración del sistema, donde incrementos sostenidos de la misma terminan por dificultar la relajación del aire ingresado al medio granular, provocando una especie de retardo en el despegue de la capa, que hace cada vez más difícil que un modelo simple como von Kroll, describa toda la evolución temporal de la señal, pues los efectos de dilatación se hacen más relevantes; sin embargo, los rasgos límites del flujo si pueden ser capturados en todos regímenes experimentales explorados en este trabajo, obteniendo cuantitativamente la porosidad efectiva del medio granular, y con ella la respuesta del mismo ante los efectos del aire a través del control de la vibración.

La caracterización completa de la dinámica de la columna requiere incorporar los efectos de la dilatación. Una nueva propuesta matemática para ello formulada en este trabajo, apunta a que la descripción es compleja y requiere un modelo sofisticado. Nuestras observaciones muestran que una columna granular se dilata porque las partículas de la superficie libre se mueven en régimen balístico libres de fricción, mientras que las zonas inferiores experimentan una fuerte fricción, entonces en primera aproximación, un modelo simple de dilatación se puede construir incorporando vuelo libre en la superficie y fricción tipo von Kroll en la base, este último planteamiento captura en esencia nuestros resultados experimentales; pero no da luces acerca de la naturaleza de la dilatación, además, nuestros resultados señalan, que el gradiente de empaquetamiento

que sufre la columna no es trivial, y ello induce a nuestros modelos a realizar predicciones que delicadamente contrastan con el análisis de la señal de la presión, que se mantiene como el mejor indicador de la estructura del sistema.

Las gotas granulares son estructuras porosas hechas de polvo seco. La dirección del mojado granular que inducen la gotas en superficies no horizontales, sugiere que un diseño apropiado de la superficie donde se colocan las gotas ofrece la oportunidad de guiar su trayectoria, por lo tanto, es posible seleccionar gotas para medir el flujo de aire en ellas, a través de la implementación del sistema de adquisición de presión que anteriormente se mencionó.

Diversos dispositivos experimentales son presentados en este trabajo para guiar controladamente el movimiento de las gotas y también se ofrecen soluciones para aislarlas y estabilizarlas. En cada una de estas configuraciones, se incorpora un sistema para la medición en tiempo real de la presión debajo de la gota, que junto la adquisición de imágenes de sus movimientos, permiten cuantificar por primera vez, la evolución de la fuerza en estas estructuras. La medición de la presión del aire debajo de la gotas no es invasiva y no altera su comportamiento. Las configuraciones experimentales que se presentan, permiten medir con precisión, presiones capilares para gotas estabilizadas o en movimiento de reptación; para ambos casos, la señal de presión es claramente asimétrica y comparte los mismos rasgos físicos que la presión en columnas bajo vibración, por lo que es posible determinar la porosidad efectiva una gota granular. La asimetría de la presión es la responsable de que cuando las gotas están en superficies inclinadas, la fuerza neta en ellas posea una componente horizontal que deriva en el mecanismo de ascenso de las gotas. La extensión del modelo que describe los límites de la presión en columnas granulares, adaptado al régimen de polvo de las gotas, captura exitosamente todas las observaciones experimentales presentadas en este trabajo incluyendo, aquellas que fueron documentadas cuando se descubrió por primera vez la inestabilidad que provoca

la reptación de la gotas, permitiendo dilucidar el significado físico del umbral de la inestabilidad, que se postula a partir de la condición crítica necesaria para lograr hacer despegar una gota una cierta fracción del tamaño de grano que la compone.

La investigación realizada durante esta tesis, ha generado las siguientes publicaciones:

- **Javier C Pastenes**, Jean-Christophe Géminard and Francisco Melo, *“Oscillating gas flow induces reptation of granular droplets”*. Phys. Rev. E. 88, 012201 (2013).
- **Javier C Pastenes**, Jean-Christophe Géminard and Francisco Melo, *“Interstitial gas effect on vibrated granular columns"*. 2013, draft.

Índice general

1. Introducción **8**

1.1. Generalidades 9

1.2. Relajación de la presión en un medio poroso:
∼*snowboard y sandboard*∼ 14

1.3. *Heaping*: formación de pilas bajo vibración 17

1.4. Lechos fluidizados 20

1.5. Eyección de columnas granulares por impacto en lechos 21

1.6. Volcanes y gotas granulares 23

1.6.1. Volcanes 25

1.6.2. Gotas 26

1.7. Mojado granular y gotas escaladoras 28

2. Efectos del aire instersticial **31**

2.1. Dispositivos experimentales 32

2.2. Resultados experimentales 35

2.2.1. Modelo de von Kroll para un medio poroso en vibración . . . 37

2.2.2. Dinámica de la brecha entre la columna y la base oscilante. . 43

2.2.3. Dilatación de la columna 44

2.3. Modelos de dilatación 49

2.3.1. Adimensionalización de las ecuaciones 51

2.3.2. Resultados y comparaciones 53

2.3.2.1. Discusión 56

3. Gotas Granulares 58

3.1. Consideraciones iniciales 59

3.1.1. Cohesión 60

3.1.2. Criterio de falla: ∼*Ángulo de avalancha*∼ 65

3.2. Rasgos de la inestabilidad 68

3.2.1. Configuración experimental 68

3.2.2. Diagrama de fases 69

3.3. Mojado Granular 71

3.3.1. Efectos de la rugosidad superficial 73

3.3.1.1. Umbral de la inestabilidad en Rugosidades controladas 73

3.3.1.2. Impacto de la rugosidad en el ascenso de las gotas 74

3.3.2. Geometría de las gotas y ∼*Flores granulares*∼ 78

3.3.3. Mecanismo de ascenso de las gotas 81

3.3.3.1. Influencia de las condiciones ambientales en mojado granular 81

3.3.3.2. Medición in situ de la presión durante la reptación . 83

3.3.3.3. Medición de la presión en gotas estables aisladas . 89

3.4. Modelamiento del umbral de la inestabilidad 94

3.5. Conclusiones 96

4. Conclusiones y Proyecciones 98

4.1. Capítulo 2: Dinámica de una Columna Granular bajo vibración . . . 99

4.2. Capítulo 3: Gotas y Mojado Granular 102

A. Modelo de Permeabilidad 105

B. Dinámica de Dilatación de Capas Granulares 107

B.1. Apéndice: Flujos intermitentes de polvos granulares secos 107

B.1.1. Ecuaciones en el referencial del Laboratorio. 108

B.1.2. Cambios para el sistema de referencia inercial 109

B.1.3. Ecuaciones Adimensionales 110

B.2. Soluciones generalizadas 111

B.2.1. Aproximación: *Capa en reposo en contacto con la plataforma* 111

B.2.2. Colisión durante el aterrizaje. 113

C. Oscillating gas flow induces reptation of granular droplets 115

Índice de figuras

1.1. Red Porosa 13
1.2. Jet 16
1.3. Heaping 18
1.4. Capa Fluidizada 21
1.5. Jets Granulares 22
1.6. Efecto Volcán 25
1.7. Efecto Rayleigh-Taylor Granular 27
1.8. Gotas Granulares Trepadoras 28
1.9. Velocidad de ascenso de Gotas granulares 29

2.1. Celda Tubo: Montaje para la medición de la presión debajo de una capa granular 34
2.2. Rasgos de una capa en vibración 35
2.3. Señales coherentes 39
2.4. Respuesta en Γ de la presión mínima y máxima de la capa granular 40
2.5. Asimetría de la señal de presión 41
2.6. Respuesta en frecuencia de la presión mínima y máxima de la capa granular 42
2.7. Respuesta en Γ y h_0 de la Brecha entre la capa y la plataforma . . . 44
2.8. Estructura de la Columna Granular bajo vibración 46
2.9. Movimiento de los bordes de la capa granular 47

2.10. Rasgos de la Dilatación de una capa granular 48
2.11. Comparación entre los modelos propuestos para la descripción de la dinámica de la columna granular 55
2.12. Predicción de la Dilatación de la capa 56

3.1. Gotas granulares de gel de sílica en superficie horizontal 59
3.2. Cohesión en Vidrio 60
3.3. Protocolo Experimental para Medir el Contenido de Líquido. 61
3.4. Cohesión en gel de sílica 64
3.5. Medidor de Avalanchas 65
3.6. Distribución de tamaños de granos de Vidrio 66
3.7. Distribución de tamaños de granos de Gel de Silica 67
3.8. Ángulos de avalanchas. 68
3.9. Celda horizontal 68
3.10. Formación de Gotas 69
3.11. Detalle de la transición de las gotas en Γ_S 70
3.12. Diagrama de Fases de la inestabilidad 71
3.13. Celda: Plano Inclinado 71
3.14. Efectos de la rugosidad superficial 74
3.15. Velocidad de subida y rugosidad 76
3.16. Flores Granulares 78
3.17. Aislador de Gotas: Celda Convexa 79
3.18. Pétalos Granulares: Celda Cóncava 80
3.19. Celda Helicoidal 81
3.20. Efectos de la viscosidad en el mojado Granular 83
3.21. Celda para la medición de la presión en vuelo 84
3.22. Rasgos de la presión durante la reptación de la gota 86
3.23. Señal de Presión vs. d 89

3.24. Celda de presión para gotas aisladas estables 89
3.25. Rasgos de estabilización de gotas granulares 90
3.26. Dilatación de Gotas Granulares 91
3.27. Estudio de la Presión en gotas estables 93
3.28. Modelando el umbral de la inestabilidad 96

A.1. Red Porosa 105

B.1. Análisis del aterrizaje de la columna de granos 112

Índice de cuadros

1.1. Clasificación de Medios Granulares 10
1.2. Análogos Físicos entre Líquidos y Polvos acelerados 27

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

Los fenómenos de transporte en estructuras fibrosas o porosas han cobrado gran relevancia debido a la numerosa presencia de este tipo de sistemas en la naturaleza. Este tipo de materiales se componen por unidades unidireccionales de fibras/cilindros distribuidas en posiciones que pueden llegar a ser completamente aleatorias en algunos casos. Un polvo granular [1], es esencialmente un medio poroso ante el paso de un fluido.

La caracterización de las propiedades de los flujos granulares, reviste a una gran variedad de aplicaciones industriales. Procesos tales como el secuestro de CO2, migración de hidrocarburos, hidrofractura, recuperación de suelos, disposición de desechos radioactivos, y reactores de lechos fluidizados, son sólo un breve ejemplo de la incidencia física de los flujos granulares y su incorporación en la industria. Todas estas técnicas, subsisten bajo una serie de dificultades de comprensión acerca de cómo la estructura de un medio granular se transforma debido al paso de un fluido: cambios en la permeabilidad, apariciones de fracturas, decompactación del medio debido a la evolución espacial de los caminos recorridos por el fluido, o bien reacciones químicas entre el fluido y el material granular, son ingredientes que incrementan la complejidad del análisis de estos materiales.

Por ejemplo, en condiciones normales, los efectos termodinámicos sobre una partícula no pueden ser ignorados a temperatura ambiente para tamaños de grano $d \leq 1\mu m$, pues: $k_B T \approx mgd \approx \frac{1}{2}mv^2$. Entonces, para una velocidad realista v $\sim$1 cm/s, partículas de hasta 10 μm suspendidas en aire pueden presentar tiempos de deposición infinitos o muy largos.

En la línea de la interacción grano-aire, se puede construir un análogo al número de Reynolds ($\Re$) que identifique la energía gastada en el transporte de una partícula esférica de tamaño d tanto en régimen laminar:

$$\Re_l = \frac{1}{36}\frac{\rho_b}{\eta}dv, \tag{1.1}$$

como en el caso turbulento:

$$\Re_t \approx \frac{25}{6}\frac{\rho_b}{\rho_a}. \tag{1.2}$$

La construcción recién expuesta, indica que para partículas de densidad ρ_b sometidas a un entorno de viscosidad η y densidad ρ_a, los efectos de la fricción viscosa debido a la fuerza de roce grano-aire, debe ser tomada en cuenta si $\Re \leq$1. Lo anterior ocurre para partículas del orden de 10 μm. Como un grano de este orden de tamaño se mueve en régimen laminar, la velocidad terminal (momento en que la caída libre es frenada por la fuerza de Stokes) que adquiere queda: $v_t = \frac{d^2}{18\eta}\rho_b g$. Para cuantificar la intensidad de esta interacción, un sencillo cálculo permite establecer -por ejemplo- que para una partícula de vidrio de 10 μm, la velocidad terminal es del orden de 25 mm/s, que es similarmente muy cercana a la velocidad límite de una roca de 10 cm moviéndose en lava, o el de un grano de 100 μm cayendo en agua.

Finalmente, la interacción viscosa que presentan los polvos granulares es responsable, en parte, de que su comportamiento en aire replique en ocasiones los rasgos de los fluidos densos. En esta misma línea, Duran [1] propone una clasificación por interacciones para delimitar el comportamiento de los materiales granulares.

Clasificación	Categoría	Tamaño [μm]	Interacción
Polvo	Ultrafino	0.1-1	Temp. y Gas
Polvo	Superfino	1-10	Gas
Polvo	Granular	10-100	Líquido
Sólido Granular	•	100-3000	Fluido Viscoso
Sólido Particionado	•	>3000	Fluido Viscoso

Cuadro 1.1: Clasificación de Medios Granulares

Ceñidos a la clasificación recién expuesta, la presente tesis se enmarca dentro de los límites de los polvos granulares, analizando los efectos intersticiales que el aire es capaz de provocar en la dinámica de lechos granulares bajo vibración vertical, y cómo a partir de la sintonización de dichos efectos es posible generar una inestabilidad muy particular que conduce a la generación de patrones de nucleación similiares a los que se observan en líquidos [2, 3], pero cuya naturaleza subyace en mecanismos de transporte de flujo inherentes a los medios granulares.

Una propiedad característica de los materiales porosos que entrega información de su nivel de conductividad ante el paso de un fluido de densidad ρ_f, es la **permeabilidad**. Como la razón a la que un fluido pasa a través de los intersticios de una matriz porosa está supeditada a los gradientes de presión y la estructura geométrica del medio, no existe una representación satisfactoriamente universal para calcular la permeabilidad, por lo que diferentes aproximaciones son usadas. Cuando el sistema es altamente poroso, los intersticios se pueden considerar como cilindros espaciados completamente independientes los unos de los otros, donde la forma del arreglo de los poros no tiene efecto en la permeabilidad. Por otro lado, en sistemas densos donde las fracciones de volumen son altas, los poros pueden ser tratados como tubos capilares enlazados como redes (aproximación de lubricación [4]).

En la literatura se pueden encontrar diversos estudios que modelan como ley de potencia la permeabilidad a partir de la porosidad [5], o incorporando un factor de fricción [6, 7]. Recientemente, Kozeny [8] y Carman [9, 10] desarrollan -por separado- una ecuación para determinar la permeabilidad en un empaquetamiento aleatorio de esferas de tamaño d, considerando que el espacio entre partículas es lo suficientemente pequeño como para que la velocidad del flujo,$\vec{u}$, a través de los poros caiga en régimen laminar y las ecuaciones de Navier-

Stokes se reduzcan a

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{1.3}$$

$$\rho_f \left(\vec{u} \cdot \nabla \cdot \vec{u}\right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}. \tag{1.4}$$

Donde, η: viscosidad dinámica del fluido, ρ_f: densidad del fluido, y p: presión del fluido

Además, el paso de un flujo a través de un medio poroso en el régimen laminar, está regulado por la ecuación empírica de Darcy [11]; que establece que la velocidad media superficial de un fluido Newtoniano e incompresible, es proporcional al gradiente de presión en el medio, donde la constante de proporcionalidad representa la permeabilidad,

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla P. \tag{1.5}$$

Usando la hipótesis de Carman-Kozeny (C-K), los poros de tamaño D, son redes capilares donde la caída de presión sigue la ecuación de Poiseuille: $\vec{u} = -\frac{D^2}{32\eta}\nabla p$. Para un fluido de volumen V_f, la velocidad media superficial puede escribirse como: $\vec{v} = \frac{1}{V}\int_V \vec{u} dV = \psi \langle \vec{u} \rangle$, donde la razón entre V_f y el volumen total ocupado, es la porosidad del sistema ψ.

Esta última expresión fue modificada (ver Apéndice A) para tomar en cuenta que la velocidad del fluido en los capilares formados por los poros, debería ser proporcionalmente mayor a lo estimado, pues en realidad, la longitud del canal es mayor que el espesor de la capa porosa. Carman obtiene así un radio hidráulico como factor de forma que modela el tamaño del poro D en función de d, y que combinando con la ley de Darcy y la ecuación de Poiseulle arroja finalmente:

$$\kappa = \frac{1}{C_\kappa} d^2 \frac{\psi^3}{(1-\psi)^2}. \tag{1.6}$$

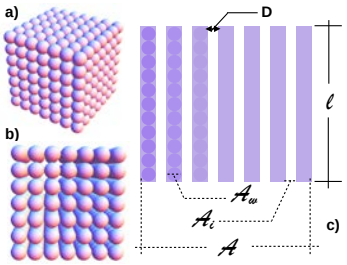

Figura 1.1: Red Porosa modelada a partir de una estructura granular periódica. (a) Red SC de partículas esférica. (b) Detalle de los intersticios de la red granular. (c) Aproximación de la red granular a un arreglo de tubos capilares de tamaño D.

La permeabilidad resulta ser una función potencial que va con el cuadrado del tamaño de las partículas, y es a la vez, aún más sensible al cambio en la porosidad. La constante numérica C_κ incorpora los factores de forma y desviación del flujo dentro de los ductos, que en la aproximación de una red cilíndrica (que se empleó arriba) arrojan que C_κ =72. Sin embargo, empíricamente se ha encontrado que esta ecuación funciona muy bien para valores de C_κ entre 80 y 320 [9, 12, 4, 11], y en el caso de que el medio granular esté compuesto de partículas esféricas empaquetadas aleatoriamente y sueltas (*random loose packing*, RLP) para maximizar la porosidad, se obtiene que C_κ =180.

Unos de los límites del modelo *C-K*, es que no reproduce la conductividad en materiales granulares altamente deformables, arcillosos u otros sistemas en donde existe interacción química entre el sólido y fluido que se transporta [12]. Además, cuando la velocidad del flujo es alta, los efectos inerciales y los cambios de densidad del fluido son importantes, y la caída de presión se modela más adecuadamente a través de la relación de Ergun [11, 13]:

$$\frac{dp}{dx} = E_1 v + E_2 v^2. \tag{1.7}$$

Donde,

$$E_1 = \frac{150\eta}{d^2}\frac{(1-\psi)^2}{\psi^3}, \tag{1.8}$$

$$E_2 = \frac{1{,}75\rho_f}{d}\frac{(1-\psi)}{\psi^3}. \tag{1.9}$$

Nótese, que a bajas velocidades sólo el primer término cobra relevancia, recuperando la ley de Darcy con la permeabilidad C-K. La diferencia entre los coeficientes numéricos proviene de la precisión en la expansión de ambas ecuaciones [11].

1.2. Relajación de la presión en un medio poroso: ∼*snowboard y sandboard*∼

Seguiremos nuestra discusión dando algunos elementos de la física del deslizamiento sobre medios porosos deformables tales como nieve y arena. El efecto del aire intersticial se revela en diversos problemas de la vida cotidiana, uno de ellos es el deporte de deslizamiento sobre una tabla, que puede ser el snowboard o la más recientemente y popular sandboard. Sorprendentemente, ambos deportes comparten los mismos principios físicos en cuanto a los mecanismos de sustento y disminución de la fricción sobre la tabla. Para ilustrar el efecto del aire, consideremos un pistón de masa m que se apoya paralelamente sobre la superficie de un medio poroso a una velocidad vertical, dh/dt. Mostraremos primero que para dimensiones físicas acordes con los tamaños de los dispositivos de deslizamiento, la presión del aire permite sostener una fracción significativa de la fuerza aplicada, manteniendo una baja fricción sólida en el proceso. Optimizando la velocidad de deslizamiento, la porosidad del medio y la geometría del deslizador, pueden obtenerse fuerzas de sustento significativamente altas. La presentación que sigue esta inspirada en el trabajo de Weinbaum et al. [14].

El balance de fuerzas sobre el pistón conduce a,

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg + F_{aire} + F_{poroso} \tag{1.10}$$

donde F_{aire} resulta de la integración de la presión del aire $P(r,t)$ sobre la superficie del pistón,

$$F_{aire} = \int_0^R 2\pi r P(r,t) dr. \tag{1.11}$$

Por otro lado, el flujo de aire saliente del sistema $\mathbf{q}$, está relacionado con la ley de Darcy (ec. 1.5) y además debe satisfacer la ecuación de continuidad,

$$\nabla(\rho\mathbf{q}) + \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} = 0. \tag{1.12}$$

Aquí, ψ es la porosidad del material y ρ la densidad del gas intersticial. Considerando el aire como incompresible, y combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene una ecuación de Poisson para la presión,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\eta}{\kappa}\frac{h_0(\psi_0 - 1)}{h^2}\frac{dh}{dt} = 0, \tag{1.13}$$

donde h_0 y ψ_0 son el espesor y la porosidad inicial del medio granular respectivamente. La solución de la ecuación anterior, con las condiciones de contorno, $q_z \mid_{z=0} = 0$, $q_z \mid_{z=h} = \frac{dh}{dt}$, $\frac{\partial P}{\partial r} \mid_{r=0} = 0$, $P \mid_{r=R} = 0$, es compleja pero se puede encontrar en el trabajo de Weinbaum et. al [14].

Para completar una descripción simplificada del sistema basta con especificar la fuerza aplicada por el medio poroso sobre el pistón. Esta fuerza proviene de una ley constitutiva que debe tener en cuenta la respuesta friccional y elástica inherente a la reología compleja de estos materiales. Weinbaum et. al, suponen que esta relación sólo depende de la compresión de la columna granular (lo que se verifica a velocidades relativamente pequeñas [15]) a través de una relación del tipo,

$$\frac{F_{poroso}}{mg} = f\left(\frac{\Delta h}{\Delta h_{max}}\right), \tag{1.14}$$

donde f es una función nolineal obtenida empíricamente en un ensayo de compresión cuasiestático.

La Fig. 1.2 ilustra la presión de gas medida al centro del pistón (de radio $R =$5 cm, sometido a una carga de 5.9 kg, sobre una columna de nieve de altura $h_0 =$11.4 cm y su respectivo ajuste (obtenido por la integración de las ecuaciones anteriores) para varios valores de permeabilidad, κ.

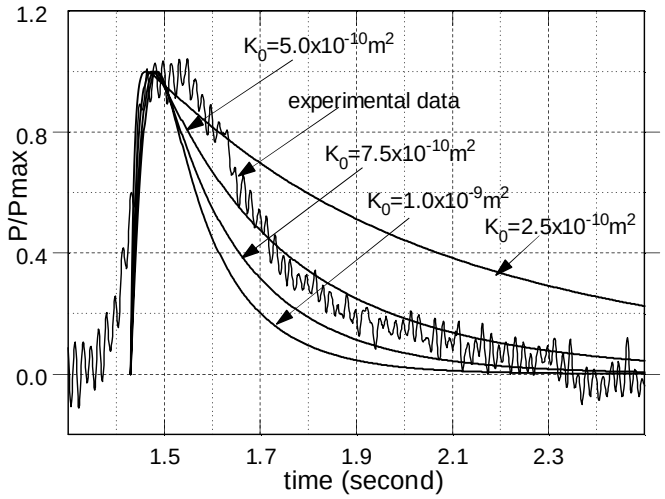

Figura 1.2: Experimento Weinbaum et al. Columna de nieve (h_0 =11.43 cm). Masa de la carga (m =5.9 kg).Deformación: h_{max}/h_0 =0.22, P_{max} = 788 Pa.

Es interesante notar que el tiempo de relajación de la presión en este caso es aproximadamente 0.8 s y que la presión máxima es cercana al 10 $\%$ del peso hidrostático del pistón. Notemos ahora que si consideramos una plancha de snowboard de 1.5 m de largo, deslizándose a una velocidad de 10 m/s, una sección de nieve permanecerá en contacto con la tabla durante un tiempo cercano a 0.15 s, lo que implica, que la presión del gas no alcanzará a relajar y que existirá sustentabilidad, proveniente de la presión del aire. Una expresión para el tiempo de relajación de la presión se obtiene fácilmente de la ec. 1.13, equilibrando el término de curvatura radial y el término en la derivada temporal. Para sustratos deformables se obtiene,

$$\tau_R = \frac{\eta \pi R^2}{8\kappa P_{mg}}, \tag{1.15}$$

con $P_{mg} = mg/\pi R^2$. Lo anterior sugiere que es posible soportar pesos considerables en sustratos deformables, con la consideración que el tiempo de tránsito sea pequeño comparado con τ_R. Por ejemplo, para una tabla de snowboard cuya área sea 0.5 m^2, la presión necesaria para soportar 75 kg es cercana a 1.5 kPa, lo que se logra fácilmente con permeabilidades $\kappa \lesssim 10^{-8}$

m^2. Naturalmente, el medio debe ser lo suficientemente deformable, en caso contrario, dominará la elasticidad de éste. El criterio más simple de deformabilidad se obtiene pidiendo que $F_{poroso} \ll F_{aire}$ a tiempos cortos, lo que conduce a $\frac{\eta}{\kappa} h_0 \frac{dh}{dt} \gg E_{efec} \frac{\Delta h}{h_0}$ o equivalentemente, a exigir que el tiempo característico de compresión $\tau_{com} \ll \frac{\eta}{\kappa E_{efec}} h_0^2$, donde hemos introducido un módulo de compresión efectivo, E_{efec} del material poroso. Finalmente, como se dijo en un comienzo, la física presente en el sandboard se sustenta -entre otros elementos- en que la arena es un medio poroso, donde permeabilidad típica en las dunas donde se practica este deporte es del orden 2×10^{-10} m^2, obteniéndose tiempos de drenado del orden de $\sim$3.7 s respecto a su análogo en snowboard, y nuevamente, para velocidades de tránsito de 10-30 m/s, gran parte de la carga no es sustentada por el contacto sólido.

1.3. *Heaping*: formación de pilas bajo vibración

A fines de los años ochenta, uno de los fenómenos que despierta el interés en los materiales granulares es la aparición de pilas que forman un ángulo característico bajo vibración vertical. Aunque el fenómeno se comprende en términos cualitativos por medio de la fricción del aire atravesando los intersticios del material, hasta hoy, quedan interrogantes por resolver y no se cuenta con un modelo de algún poder predictivo.

Comúnmente, la formación de pilas se asocia con la convección granular, y ésta, con el efecto del aire intersticial. Sin embargo, la convección persiste -aunque con mucho menor intensidad- cuando se evacúa el gas en el contenedor, mostrando que otros efectos participan. Entre ellos, se ha demostrado que la fricción de las paredes del contenedor también contribuye al movimiento convectivo [16]. Entre los escasos trabajos sistemáticos, encontramos aquel de R. Behringer [17], que estudia la altura L de una pila en función de la presión

en el contenedor para distintos gases, incluyendo, aire, helio y propano, de viscosidades: 182, 196, 80 μP, respectivamente. La línea sólida en la Fig.1.3 corresponde al ajuste, $(L - c)/b = \tanh(KP)$, donde b, c y K son parámetros que dependen de la viscosidad del gas, la altura inicial de la columna y el tamaño de los granos. En variables dimensionales, la transición en presión ocurre para presiones entre 10 y 30 Torr, para tamaños de partículas que van desde 0.2 a 0.6 mm de diámetro. Notemos que la saturación de L ocurre a presiones que están lejos de la transición a un régimen molecular, donde el recorrido libre promedio se compararía con el tamaño de partículas. Notemos también que la viscosidad dinámica de los gases es independiente de la presión en el régimen explorado. A nuestro entendimiento, los mecanismos que determinan el cambio de régimen todavía no han sido dilucidados completamente. Sin embargo, en lo que sigue, se interpretarán algunos de los elementos dados por Behringer.

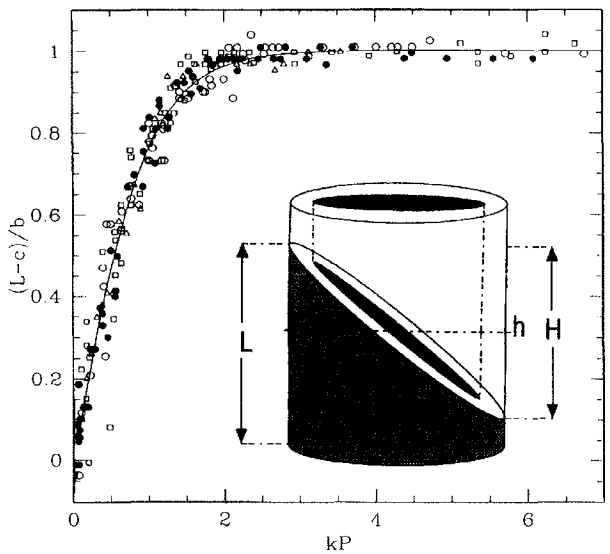

Figura 1.3: Altura de la pila de granular como una función de la presión de gas en el interior del contenedor.

Berhinger asume que los efectos de compresibilidad son responsables de la existencia del atrapamiento del gas en el medio poroso y que el escape de éste es el motor del heaping. Con el objeto de identificar los parámetros involucrados

en este mecanismo, Behringer considera que el gas obedece a una ley de Darcy, que con la ayuda de la ecuación de continuidad: $\nabla(\rho\mathbf{q}) + \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = 0$, conduce a una ecuación de difusión para la presión,

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} = D\nabla^2 \delta P, \tag{1.16}$$

donde hemos considerado que ρ y P están ligados por la compresibilidad isotérmica, $\kappa_g \simeq P^{-1}$ y por lo tanto sus fluctuaciones, $\delta\rho = \rho\kappa_g\delta P$. El coeficiente de difusión D, para la presión, se ha definido: $D \equiv \frac{\kappa}{\psi\eta\kappa_g}$. En consecuencia, todos los modos en la dirección z, $(\delta q_z, \delta P) = (q_{0z}, P_0)\exp(-t/\tau + ikz)$ decaen exponencialmente y satisfacen $\tau^{-1} = Dk^2$. Con las condiciones de borde del problema, $\delta P = P_0 \exp(-t/\tau_k)\cos(kz)$, lo que indica que el modo más lento corresponde a $k = \pi/2h$ y tiene un tiempo de relajación, $\tau \approx h^2/D$. Para estimar la fuerza neta sobre un grano -dado que τ es pequeño respecto del periodo de vibración-, se integra el gradiente de presión sobre una partícula, conduciendo a:

$$\left\langle \frac{F}{mg} \right\rangle = 4 \times 10^4 \left(\frac{h\eta}{d^2}\right)^2 \frac{\Gamma}{P\rho_p}, \tag{1.17}$$

lo que para las condiciones experimentales normales, da un valor aceptable de empuje $\langle \frac{F}{mg} \rangle$ $\simeq$0.5. Por otro lado, la ec.1.17 predice que la fuerza disminuye dramáticamente a medida que el diámetro de las partículas aumenta, lo que parece cualitativamente bien verificado experimentalmente. En resumen, la formación de pilas es claramente un efecto originado por la presencia de gas en el contenedor en vibración, sin embargo, a nuestro juicio, más experimentos serían necesarios para establecer una conexión más directa entre las fuerzas involucradas en el problema. En particular, mediciones de presión en la capa deberían ayudar a establecer cómo los gradientes de ésta conducen el movimiento del gas y producen el arrastre necesario de los granos. Naturalmente, estas mediciones deben ser resueltas en tiempo, a fin de poder identificar las diversas etapas del ciclo. En el capítulo II de esta tesis, se presentan algunas

mediciones de presión en la base del material poroso que pueden aportar en este aspecto.

1.4. Lechos fluidizados

El fenómeno de fluidización es bien conocido y se manifiesta cuando se inyecta aire a presión en la base de una capa relativamente gruesa de material particulado fino (generalmente no cohesivo). Este proceso ha sido muy utilizado en los hornos de centrales eléctricas a carbón, y por esta razón capturó considerable atención en los años ochenta. Asimismo, los lechos fluidizados encuentran su utilidad en el lavado o lixiviación de partículas sólidas y reacciones catalíticas heterogéneas, lo que incluye la descomposición catalítica del petróleo. A pequeños flujos, la fluidización suele ser estable, lográndose un lecho relativamente homogéneo y relativamente poco fluctuante. Sin embargo, cuando el flujo de gas es más alto y la permeabilidad del material pequeña, bolzones de aire ascienden por el lecho, generando una situación muy similar a un líquido en ebullición: pequeñas burbujas se forman en el distribuidor, se fusionan y mueven verticalmente hasta romperse en la superficie libre. Con flujos aún más altos, el gas formará incluso cavidades parecidas a chorros o tubos. La Fig.1.4 ilustra estas situaciones. De izquierda a derecha el flujo crece. El primer panel muestra la preparación estratificada antes del paso del gas. Paneles sucesivos presentan un régimen de fluidización permanente (donde puede lograse una alta mezcla del material), la formación de burbujas y el régimen de canales.

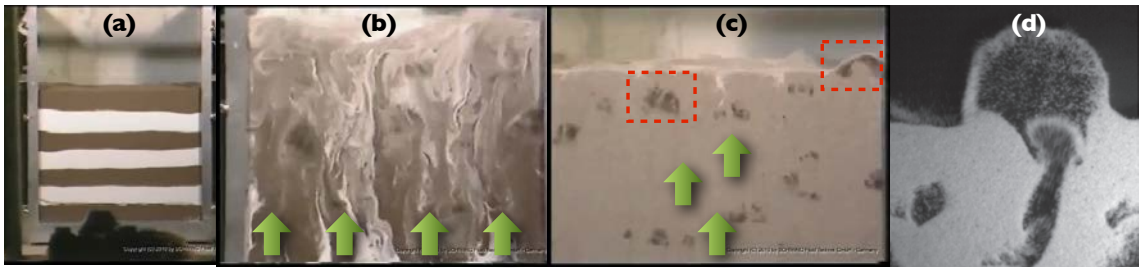

Figura 1.4: De izquierda a derecha el flujo es creciente: Preparación estratificada antes del paso del gas; régimen de fluidización permanente; formación de burbujas; régimen de canales. copyright SCHWING Fluid Technik GmbH/Germany y Procedyne Corp./USA.

Una descripción matemática de estos procesos esta fuera del alcance de esta tesis, por lo que nos limitamos sólo a mencionar que la formación de burbujas se atribuye corrientemente a que el flujo del gas en la interface del lecho, justo arriba del agujero, es mayor al que puede atravesar por los poros con una resistencia menor al peso del lecho. Bajo estas condiciones, la capa sólida arriba del agujero es empujada hacia los lados para crear una cavidad que crece hasta que la velocidad del gas (flujo) corresponda a aquella de fluidización incipiente. Veremos en las secciones a continuación, que probablemente este efecto de burbujeo es el responsable del "*efecto volcán* "descubierto en 2002 por Duran [18] en polvos acelerados verticalmente (*tapping*).

1.5. Eyección de columnas granulares por impacto en lechos

Un ejemplo que ilustra que la interacción entre granos finos y el aire intersticial no es fácilmente capturada por un modelo simple de fluidos granulares, es la formación de chorros de salpicadura (*Jets*) a raíz del impacto de un proyectil esférico en una capa de polvo [19, 20, 21]. Los rasgos de este fenómeno recuerdan lo que homólogamente sucede en líquidos, a pesar de la ausencia de fuertes fuerzas cohesivas que mantengan a los granos sujetos entre sí.

A diferencia de los líquidos, un Jet granular se compone de dos estructuras [19]: primero se genera un chorro angosto que emerge a partir del colapso de la cavidad dejada por el impacto del proyectil que penetró la columna, y un segundo chorro mucho más robusto que se suma posteriormente debajo del primero. Estudios de rayos X conducidos por Jaeger et al. revelaron que debido al colapso gravitacional de la cavidad originada por el hundimiento del proyectil en la columna de polvo, se forma una bolsa de aire que queda atrapada debajo de la superficie de la columna (fig.1.5(a)-(e)).

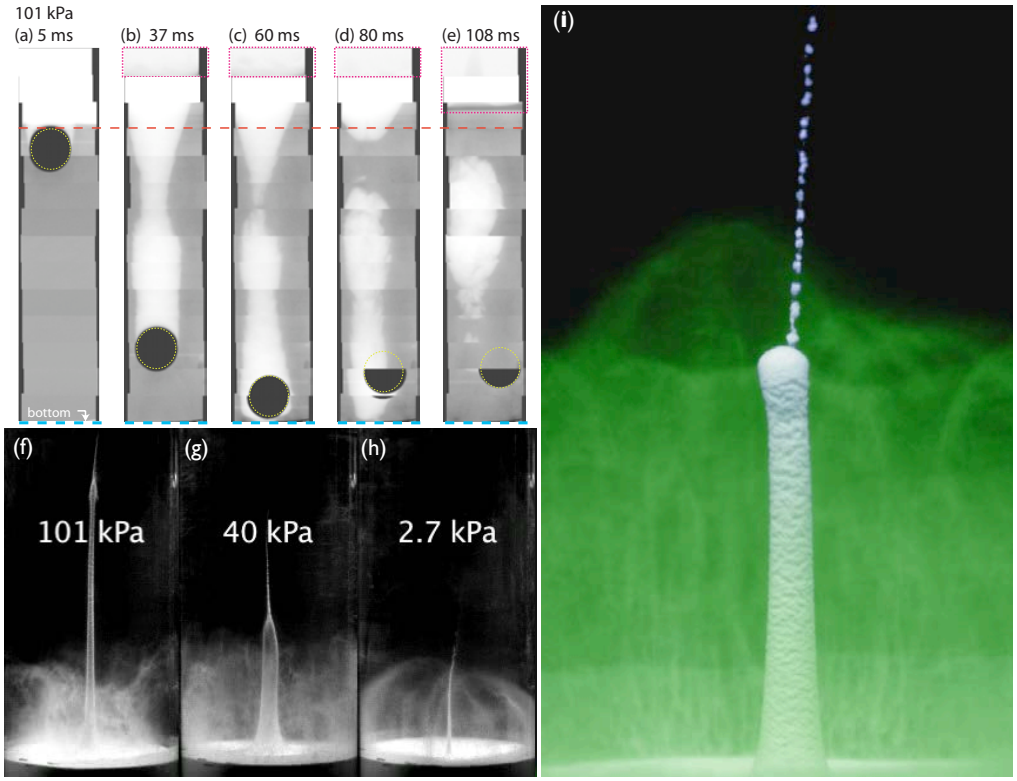

Figura 1.5: Jet Granular.(H. Jaeger PRE 2008).

Si dicha cavidad es lo suficientemente profunda, el gas atrapado y comprimido adentro, empuja material hacia la superficie, emergiendo el jet más robusto (fig.1.5(i)). Análogo a lo mencionado en la sección 1.2, el gas almacenado entre los granos, actúa como un colchón que causa que el material de la columna

fluya como un fluido incompresible, permitiendo que el proyectil se hunda. En consecuencia, cuando la presión medio ambiental decrece: aumenta la intensidad del contacto grano-grano, se reduce la compactación de la columna, y se añade una mayor respuesta disipativa, que provoca entonces, que la profundidad alcanzada por el proyectil disminuya, resultando una cavidad más pequeña que aloja menos aire y finalmente hace que el jet robusto sea cada vez más pequeño, hasta que desaparece cuando se llega a $\sim$4 kPa [19] (fig.1.5(f)-(h)).

Curiosamente, el jet angosto que fue el primero en formarse, permanece inalterable aún a presiones muy bajas (0.15 kPa). Cuando la presión se reduce lo suficiente como para que el camino libre medio del gas comience a ser comparable con el tamaño de los granos, la fricción de Stokes decrece. Jaeger et al. concluyen, que el jet más pequeño es independiente del gas medioambiental y continuaría siendo observado incluso cuando la presión va a cero, sin embargo, se requieren más estudios para dilucidar el mecanismo. Una de las observaciones más espectaculares hechas en estos Jets, es su ruptura en pequeños clusters como gotas (fig.1.5(i)), fenómeno que ha generado varias investigaciones y sobre el cual no hay marco teórico *ab-initio*.

1.6. Volcanes y gotas granulares

Nuevos fenómenos asociados al efecto del gas intersticial se desarrollan cuando una superficie cubierta con una capa -inicialmente horizontal- homogénea de polvos es sometida a suave inyección de aire o aceleración vertical rápida (*tapping*) de manera repetida. Duran observó que si la capa es relativamente gruesa, montañas y valles irregulares se forman en la superficie después de unas decenas de golpecitos verticales en el contenedor [1]. El proceso de excitación no necesita ser periódico pero si repetible en intensidad para obtener estructuras de características reproducibles (ver panel inferior izquierdo de la Fig. 1.6), además,

dichas estructuras saturan en el tiempo, de manera que una vez formadas, permanecen estables sin importar que se continúe golpeando la superficie. Para explicar la selección del tamaño de la estructura, Duran propone un mecanismo de apantallamiento del escape del gas a través del medio poroso durante la etapa de compresión del mismo. Intentaremos reproducir los principales ingredientes de este efecto en el párrafo a continuación.

Consideremos las capas de material cercanas a la superficie libre inclinada de unas de las pilas formadas. Duran argumenta que durante el proceso de avalancha, estas capas deslizan según la pendiente y los granos se apoyan unos sobre otros. Como resultado de la fricción, estos granos superficiales no pueden ser eyectados individualmente de hacia la superficie por el gas saliente, y una parte importante del peso de la avalancha se apoya entonces en los valles de las estructuras. El panel superior izquierdo de la Fig. 1.6 esquematiza este efecto. Si p es el número de capas, N el número de partículas en la capa lineal sobre el punto considerado y θ el ángulo de la pila, la masa de una partícula equivalente en el manto es, $Np\sin(\theta)$. También puede escribirse, $Np = (h_T - h)p/D$, donde h es la posición en el punto dado y D el diámetro de los granos. La velocidad necesaria para eyectar esta partícula equivalente sería entonces $v_{ah} = v_f(h_T - h)p\sin(\theta)/D$, donde v_f es la velocidad límite de Stokes. Así, esta última expresión determina la altura h_C a partir de la cual los granos pueden ser expulsados por el flujo de gas, y finalmente se deduce,

$$\frac{A - A_i}{hv_f}\frac{\alpha}{p\sin(\theta)\frac{h_T - h_C}{D}} \approx 1, \tag{1.18}$$

donde A y A_i son las amplitudes del tapping, y la amplitud umbral respectivamente. Para llegar a esta expresión, Duran hace la suposición [1] que la velocidad del gas v_{ah} es proporcional a la amplitud de tapping respecto del umbral [$v_{ah} = \alpha(A - A_i)$], con αA ~7.2 cm^2/s. Claramente, Duran no presenta evidencia experimental de que esta relación se satisfaga, y por lo tanto, éste constituye

el punto más débil de su análisis. Sin embargo, su hipótesis conduce a predecir un tamaño de estructura en acuerdo con las observaciones. Los dos paneles al extremo derecho de la Fig. 1.6 muestran la compatibilidad entre los resultados experimentales y el análisis recién presentado. En el panel superior, la línea punteada corresponde al ajuste con la relación que lo encabeza, para la longitud típica Λ, donde C es un factor geométrico de la pila que revela la porción más inestable de la misma, $h_T - h_C = C(h_T - h_B)$. Experimentalmente Duran encuentra que alrededor de sólo el 5 $\%$ de la pila es inestable ante el paso de un flujo vertical de aire.

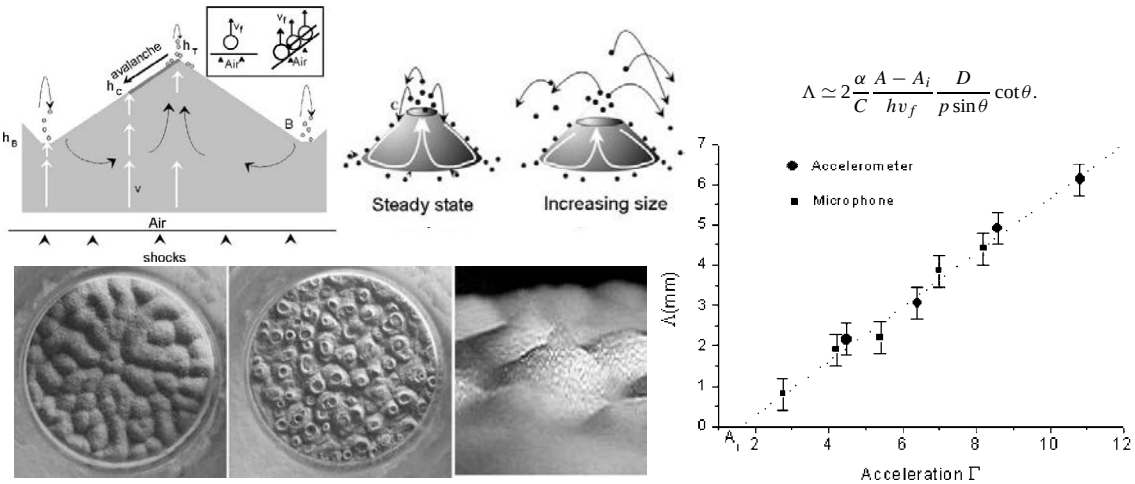

Figura 1.6: Izquierda. Esquema del efecto de apantallamiento y definición de variables. Abajo: Vista desde arriba de las corrugaciones bajo tapping. Centro: Caricatura del efecto volcán. Abajo: vista lateral del fenómeno volcán. Derecha: Relación entre el tamaño característico de la estructura y la aceleración adimensional Γ. Arriba: La relación funcional ajustada por la línea punteada en el mismo panel.

1.6.1. Volcanes

Cuando se reduce la cantidad de material sobre la superficie, incluso hasta una mono capa, Duran observa un nuevo fenómeno al que denomina "*efecto volcán*-[18, 1]. Pequeñas gotas granulares se forman al cabo de unos cuantos *taps*. En el centro de éstas, granos son eyectados en cada tap, en similitud a

pequeños minivolcanes en erupción (ver paneles centrales Fig. 1.6).

1.6.2. Gotas

Duran aplica el mismo análisis, con la única diferencia que ahora usa la ley de Darcy para estimar el flujo del gas a través del material. Entonces la velocidad necesaria para eyectar la partícula equivalente, ubicada a la altura h_C, se escribe

$$v_{h_C} = \frac{\kappa \Delta P}{\eta h_C} = v_f \frac{C}{1-C} \frac{h_C p \sin(\theta)}{D}, \tag{1.19}$$

lo que fácilmente conduce a una expresión que puede interpretarse como un equilibrio de dos presiones antagonistas, a saber,

$$\frac{\kappa \Delta P}{D h_C} = \rho \left(\frac{1}{18} \frac{C}{1-C} p \sin(\theta) \right) g h_C. \tag{1.20}$$

El primer término puede ser interpretado como la presión de Laplace con un radio de curvatura efectivo de h_C, mientras que el de la derecha corresponde a una presión hidrostática efectiva que evoluciona como $\rho^* g h_C$, con $\rho^* = \rho \frac{1}{18} \frac{C}{1-C} p \sin(\theta)$. Así, Duran argumenta que la gota obedece a una ecuación de Young-Laplace granular dada por,

$$P_l = \frac{\kappa \Delta P}{D h_C} = \gamma^* \left(\frac{2}{h_C} \right). \tag{1.21}$$

A partir de esta relación que fija la altura h_C, es directo obtener el ancho característico de la gota, lo que conduce a,

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\pi}{3e \tan^2 \theta}} \left(\frac{\kappa \Delta P}{D} \frac{1}{\rho^* g} \right)^{3/4}. \tag{1.22}$$

La Fig. 1.7 muestra una vista de la distribución de gotas en la superficie y cuyo tamaño promedio obedece razonablemente a la ley propuesta (panel a la derecha). Asimismo, la tabla inferior resume la analogía gota-granular/gota-líquida propuesta por Duran.

El trabajo de Duran abre muchas interrogantes y ofrece varios flancos difíciles de contener. Por ejemplo, al no disponerse de mediciones de la presión y el flujo involucrados en la ley de Darcy en esta geometría, es difícil defender su aplicabilidad. Duran asume que el gradiente de presión es constante en la gota, lo que *a priori* no es obvio, en especial porque la gota tiene bordes por los cuales probablemente debe haber pérdidas de carga. En el capítulo 3 de esta tesis, se implementa un método no invasivo para medir estas cantidades, sin embargo, nuestros resultados no nos permiten verificar o desechar la analogía de Duran.

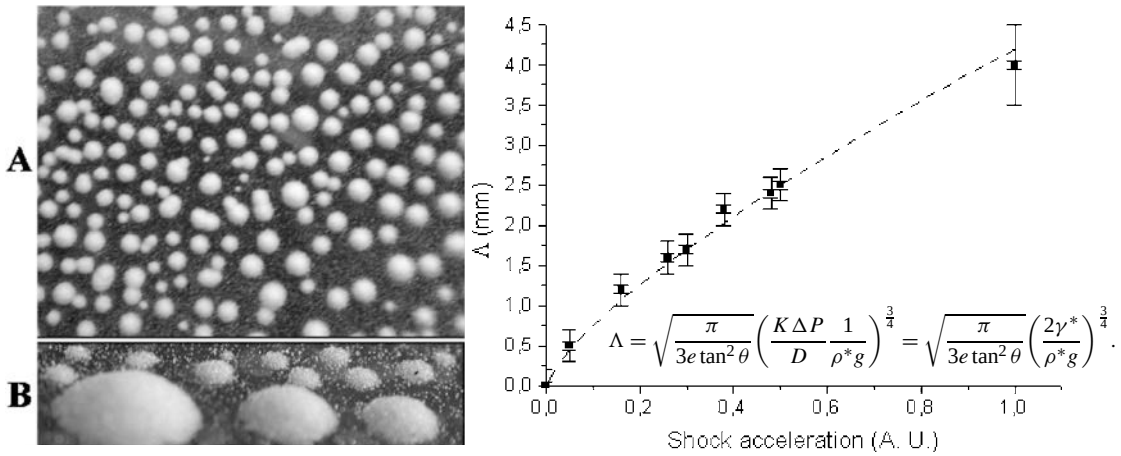

Figura 1.7: (A) vista aérea de patrón de gotas luego de 40 golpecitos sucesivos en una superfice horizontal cubierta con partículas de vidrio de 30μm. (B) Alargamiento de la imagen (A). Cada gota está separada de sus vecinas por ~ 5mm. Las gotas muestran una cima redondeada debido a la hipótesis del "*efecto volcán*"de Duran. Panel derecho: Resultados experimentales de la separación media Λ entre partículas, versus la aceleración adimensional A.U.$= \frac{A\omega^2}{g}$ (con g aceleración de gravedad, $\omega = 2\pi f$ y A amplitud), ajustada con la expresión indicada en el mismo gráfico.

Líquidos	Ecuación	Apilados de Polvos Acelerados	Ecuación
Tensión Superficial	$\gamma = \frac{dF}{dl}$	Fuerza de Convección	$\gamma^* = \frac{\kappa \Delta P}{2D}$
Radio de Gota	R	Altura de la pila	h_C
Ley de Young-Laplace	$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$	Ec. 1.21	$\Delta P^* = \frac{2\gamma^*}{h_C}$
Equilibrio de la Gota	$\frac{2\gamma}{R} = \rho g R$	Equilibrio del Apilamiento	$\frac{2\gamma^*}{h_C} = \rho^* g h_C$

Cuadro 1.2: Análogos Físicos entre Líquidos y Polvos acelerados: Ecuaciones básicas propuestas por Duran

1.7. Mojado granular y gotas escaladoras

Aunque la analogía granular-líquido podría catalogarse como una curiosidad cuyo aporte a la comprensión de los fenómenos de polvos bajo *tapping* esta todavía por demostrarse, en el 2004, Caballero y Melo [22], descubrieron otra manifestación capilar de estas gotas granulares. En efecto, en superficies inclinadas bajo vibración vertical sinusoidal, estas gotas son capaces de trepar la superficie, si la inclinación de ésta es inferior al ángulo de avalancha del material. El proceso conduce a la formación de lágrimas granulares, de características similares a gotas de líquido que escurren siguiendo la dirección de la máxima pendiente. En la Fig. 1.8 (panel izquierdo), se observa que el escurrimiento ocurre de abajo hacia arriba y se desarrolla como si la gravedad estuviese invertida. Claramente, el fenómeno no tiene su origen en algún defecto experimental, ya que la celda de simetría de revolución elimina cualquier duda al respecto. A la derecha de la figura, los autores citados entregan un diagrama de existencia simplificado para las gotas. Existe un umbral de aceleración para el movimiento ascendente Γ_C, que aumenta monótonamente con la frecuencia y un umbral de inestabilidad de gotas Γ_S.

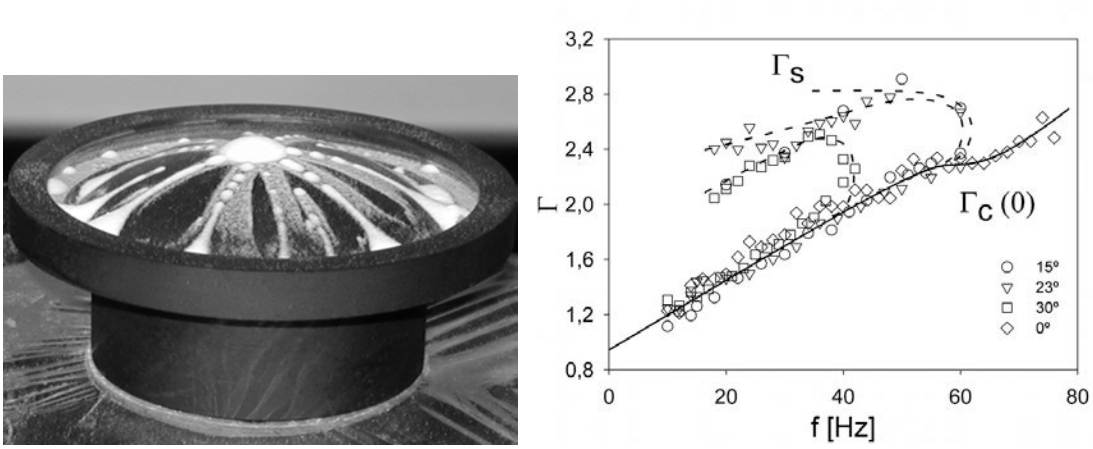

Figura 1.8: Izquierda: Partículas de silica $60\mu m$ de tamaño sobre un domo de $9cm$ de diámetro vibradas verticalmente a $15Hz$ y aceleraciones 2g. Derecha: Diagrama de fase simplificado en el plano y definido por la aceleracion adimensional Γ y la frecuencia, f para varios ángulos de inclinación de la superficie vibrada.

Las primeras mediciones mostraron que sorprendentemente la velocidad ascendente de las gotas aumenta linealmente con el ángulo, α, de inclinación de la superficie vibrante (Fig. 1.9). Cuando α excede el ángulo de avalancha del material, las gotas pierden masa hasta desaparecer. Adicionalmente, se observó que la velocidad ascendente es una función lineal con la distancia al umbral, y en esta representación, este resultado es independiente de la frecuencia.

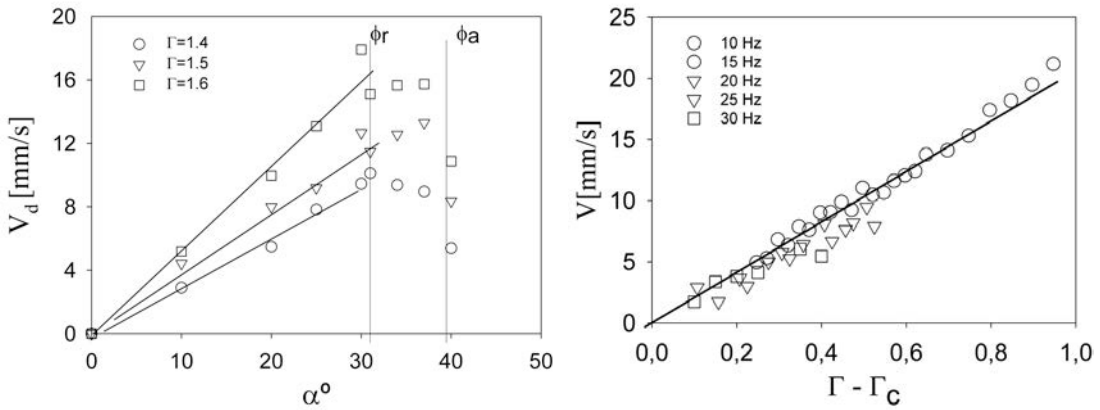

Figura 1.9: Izquierda: Velocidad ascendente de gotas granulares en función del ángulo α para varios Γ. Derecha: velocidad en función de la distancia al umbral, para varios valores de frecuencia de vibración.

El fenómeno recién descrito ha desafiado nuestro entendimiento por varios años. Para dilucidar el mecanismo que induce esta especie de *mojado granular* se exhiben en este trabajo, una serie de estudios sistemáticos organizados como se detalla a continuación:

En el siguiente capítulo, se realiza la caracterización dinámica de los efectos del aire en el comportamiento de capas granulares bajo vibración vertical. Se expondrá y validará un método experimental que permite medir de la presión del aire en tiempo real debajo de columnas granulares, y se estudiarán propuestas teóricas para la descripción de estos sistemas, discutiendo algunas extensiones a modelos teóricos ya conocidos como el caso de von Kroll. En el tercer capítulo se desarrollan una serie de configuraciones experimentales para cuantificar la fuerza sobre una gota granular, mediante la adaptación del

sistema de adquisición de la presión del aire presentado en el capítulo 2, además, se identifican los parámetros que permiten sostener la inestablidad y cómo es posible sintonizarla. Se expondrá además, un modelo simple generalizado a partir de las propuestas del capítulo anterior, para describir la dinámica y la formación de las gotas. Finalmente, se presentan las conclusiones y proyecciones de nuestro trabajo.

Capítulo 2

Efectos intersticiales del aire en columnas granulares bajo vibración

Antes de abordar en detalle el estudio de las gotas trepadoras, presentaremos una caracterización de la dinámica de una capa granular seca al interior de un tubo cilíndrico sometido a vibración vertical. Nos focalizaremos en el diseño de un método para la medición de la presión del gas en la base de la capa granular, junto con la descripción de otros rasgos relacionados con la estructura de la columna de granos. La exploración del comportamiento de una columna de granos permite evitar las complicaciones geométricas presentes en las gotas granulares, y busca capturar las fuerzas intersticiales que conducen a la formación de gotas y su reptación. Asimismo, esta configuración nos ofrece mejores oportunidades para la implementación de la instrumentación necesaria y un análisis teórico más simple. Primeramente se describirá el diseño experimental, y en seguida se presentará un resumen de nuestros resultados experimentales para posteriormente introducir un análisis basado en un modelo simplificado (modelo de von Kroll). Asimismo, describiremos varios intentos para descifrar los mecanismos de dilatación de la capa que no pudieron ser capturados por el modelo más simple.

2.1. Dispositivos experimentales

Nuestro dispositivo se compone de un tubo de plexiglas transparente de 46 mm de altura, 10 mm de radio interno y 4 mm de espesor de pared, cuyo eje principal se orienta verticalmente. Una montura de duraluminio que sirve de base horizontal se adhiere al extremo inferior del cilindro y se hace vibrar verticalmente por medio de un vibrador electromagnético. La figura 2.1 esquematiza nuestra configuración . En todos los experimentos reportados aquí usamos una excitación sinusoidal de frecuencia f que varia entre 15 y 60 Hz. La vibración se monitorea con un acelerómetro de carga Brüel $\&$ Kjær DANAK 4374 con una precisión de $\pm$ 0.01g, cuyo eje aceleración se alinea con la vertical y se ajusta para ir en fase con

la posición. El acelerómetro se ubica en la parte superior del tubo, lo que permite detectar el momento de colisión entre la capa granular y el fondo del tubo, pues el choque induce ruido de alta frecuencia en la señal de aceleración. El extremo superior del tubo permanece abierto para que el flujo de gas entre libremente a través de la capa.

El acelerómetro nos proporciona una medición directa de la aceleración adimensional $\Gamma = A\omega^2/g$, donde A es la amplitud de vibración, g la aceleración de gravedad y $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular. Este parámetro permite comparar la aceleración local respecto de g. Γ varia entre 1 y 4. En los experimentos a continuación, se usaron partículas de acero de densidad ρ =7.4 $\pm$ 0.2 gr/cc y diámetro, $d = (465 \pm 73)$ μm y variaremos la altura de la capa al interior del tubo entre 2.5 mm y 18 mm.

Simultáneamente, la presión del gas se registra inmediatamente abajo de la base de la capa, por medio de un sensor de presión diferencial OMEGA-PX277, que tiene un rango de unas decenas de Pascal ($-$125 Pa a 125 Pa), y entrega la presión $\Delta P(t)= P(t) - P_0$ (P_0: presión atmosférica). La detección de la presión -sin interferencias con la vibración- es posible gracias a un pequeño canal perforado en bloque de duraluminio con forma de *L* de 2 mm de radio, en la base del tubo (ver Fig.2.1). El extremo superior del agujero está protegido con una grilla de TEM, que bloquea el paso de las partículas pero ofrece pequeña resistencia al paso del gas. La salida de la cavidad está conectada al sensor por medio de una pequeña manguera en forma de *S*, que minimiza variaciones indeseadas de la presión a raíz de posibles deformaciones por torsión debidas a la vibración, y el sensor mismo se fija firmemente a una estructura sólida que no vibra. Las prestaciones de esta configuración fueron verificadas y sometidas a varias pruebas para evitar señales espurias debidas a pequeñas variaciones de volumen de gas que pudieran inducirse en la cavidad flexible debido a la vibración.

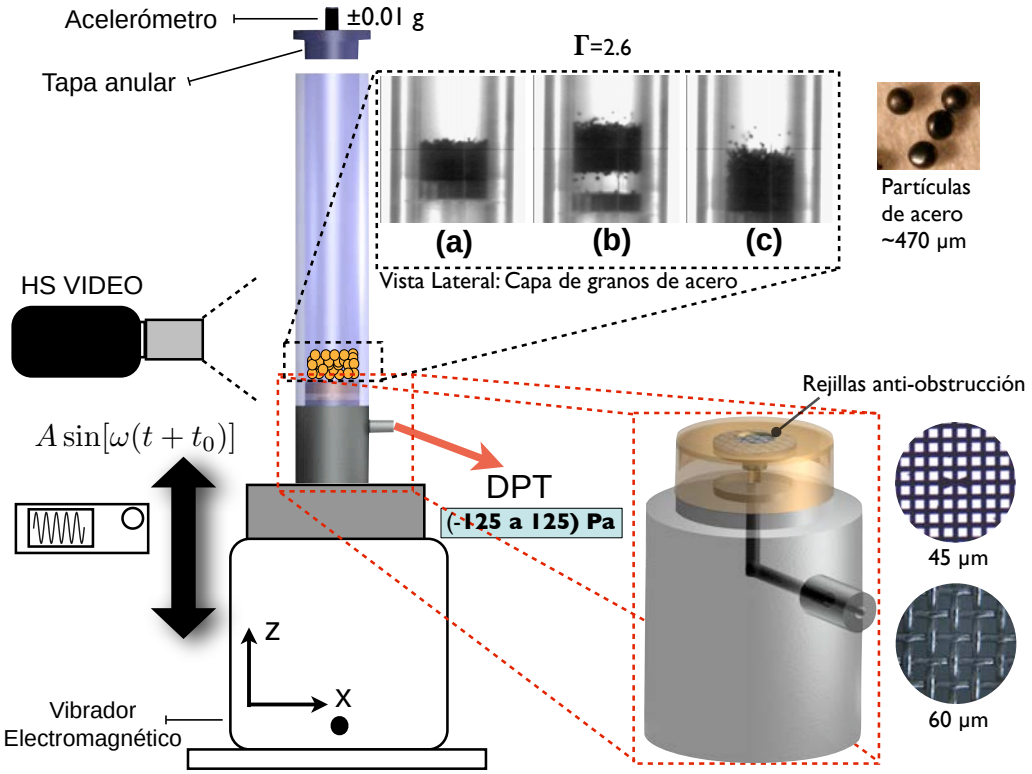

Figura 2.1: Diagrama experimental mostrando los detalles internos de la cavidad en la montura de duraluminio, y vistas de la rejilla TEM. Cuadro: Grabación típica de una capa de acero a Γ =2.6 (a) Etapa inicial de contacto de la capa antes del despegue(b) Brecha generada durante el vuelo de la capa (c) Colisión Capa-Plataforma

Una cámara rápida (HISIS2000) de 1200 cuadros por segundo y 256$\times$256 px^2 de resolución, permite obtener vistas laterales de la capa granular desde el referencial fijo del laboratorio. La posición de la superficie vibrante, es seguida mediante el procesamiento de las imágenes obtenidas. Para el seguimiento de la posición de la la zona inferior de la columna granular y la superficie libre, se emplea un criterio de binarizado que escanea verticalmente cada pixel del tubo hasta encontrar los límites de la columna a lo largo de todo el diámetro.

2.2. Resultados experimentales

Nuestra metodología consistió en imponer una frecuencia f dada, y barrer la aceleración adimensional Γ. Para cada par de valores de (f, Γ) registramos la evolución temporal de la columna en unos pocos ciclos. La figura 2.2 presenta las series temporales obtenidas después de un análisis de imágenes para extraer las posiciones de la superficie vibrante y los extremos de la columna.

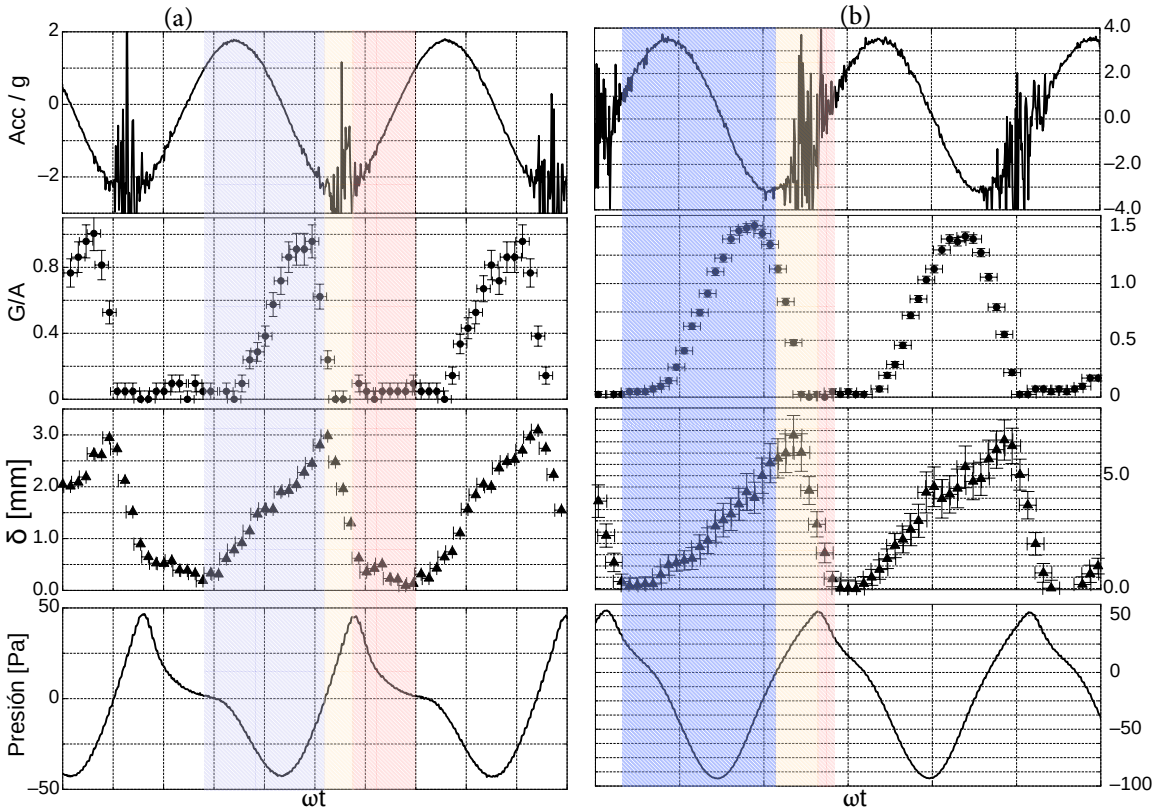

Figura 2.2: Señales temporales para una columna de h_0 =10 mm, formada de partículas de acero de diámetro d =463 μm vibrando a f =15 Hz y aceleración (a) Γ =1.8 y (b) Γ =3.6. Para paneles en orden descendente: Aceleración adimensional, cuya amplitud maximal es Γ; Brecha G entre la plataforma de oscilación y la base de la columna normalizada a la amplitud, A; Dilatación, $\delta = h_{max} - h_0$; Presión debajo de la capa.

En cada ciclo, debido a la colisión de la columna con la base, una señal de relativa alta frecuencia es detectada por el sensor de aceleración. Esta señal se

usa para detectar el comienzo de dicho impacto. Cabe señalar que el despegue se espera que ocurra en el momento en que la aceleración de la superficie es igual a $-g$, i.e. $\Gamma = 1$. El panel de arriba, indica que en cada ciclo una brecha se abre entre el fondo del contenedor y la base de la columna; llamamos a esta cantidad G y la normalizamos a la amplitud de vibración A. El comienzo de la zona azul indica el momento en que la aceleración es igual a $-g$ lo que marca el despegue. Se observa, sin embargo, que la brecha parece comenzar a abrirse posterior a este instante. Este efecto puede deberse a que la brecha es una función muy lenta del tiempo al momento del despegue, discutiremos esta observación más adelante. La dilatación, definida como, $\delta = (h_{max} - h_0)$, representa el cambio de altura de la capa, y crece a partir del instante previsto para el despegue. Un aumento significativo de δ se observa al momento del despegue, y un pequeño cambio de curvatura de la señal se observa cerca del máximo de aceleración. Asimismo, una clara compresión ocurre al momento del contacto entre la celda y la base de la columna. Notamos que la compactación tiene una duración muy próxima al tiempo en que la columna permanece en contacto con la celda vibrante, indicando que la columna podría volver a despegar antes de que la columna haya alcanzado su altura en reposo.

En panel inferior de la figura también ilustra la presión de gas medida al momento de la apertura de la brecha. Tres etapas se pueden distinguir durante el vuelo libre de la columna; al momento de la apertura de la brecha, una disminución significativa de la presión resultante de un gradiente de presión necesaria para llenar la brecha. Asimismo, un aumento de la presión se hace presente durante el aterrizaje inminente de la capa (zona anaranjada Fig.2.2), para lograr un máximo de presión que comienza a relajar para evacuar el gas atrapado en la brecha al momento de la compresión por la colisión con la plataforma (zona roja). Vale la pena notar que el máximo de depresión no corresponde a la brecha máxima; la brecha continua su crecimiento más

allá del máximo de depresión. Una clara relajación de la presión se observa inmediatamente después de la colisión. Las mismas características de estas cuatro señales para un valor de Γ más elevado se presentan en el conjunto de paneles de la derecha. Las características generales de estas señales permanecen, sin embargo, vale la pena notar que la señal de presión se hace muy asimétrica; la mayor parte del ciclo corresponde a una depresión. Asimismo, se hace progresivamente más difícil distinguir en esta señal el momento del despegue. En otras palabras, la relajación de la presión a la presión externa se hace progresivamente menos definida, así, el despegue parece comenzar antes de que la presión relaje a la presión externa. En cada experimento, la señal de presión se estabiliza inmediatamente una vez iniciada la vibración y no es necesario esperar alguna cantidad de ciclos para establecer un protocolo de medición, pues no se registraron transcientes de presión.

2.2.1. Modelo de von Kroll para un medio poroso en vibración

En la aproximación más simple, despreciaremos la convección granular (que ha sido reducida por la elección de partículas grandes y de densidad elevada) y la fricción con las paredes del cilindro, considerando solamente que la capa esta sometida a una fuerza viscosa debida al flujo de gas que atraviesa sus canales porosos. Esta pérdida de carga indica que la columna granular esta sometida a un gradiente de presión en la dirección vertical. Si la altitud del centro de masa de la columna respecto del sistema de referencia en movimiento se denomina z, esta obedece a

$$\ddot{z}(t) + \ddot{z}_p(t) = -g + \frac{1}{\rho V}\int_{S_T} P(r,t)\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{dS}, \tag{2.1}$$

donde, $z_p(t) = A\sin\omega t$ es la posición vertical de la plataforma en vibración y $\hat{\mathbf{z}}$ es el vector unitario vertical, ρ y V la densidad y el volumen de la columna

respectivamente. La integral se calcula sobre la superficie externa total de la columna, S_T.

Considerando la presión promedio $\langle \Delta P(t) \rangle_S$ en la base de la columna a tiempo t, podemos reescribir la última relación como:

$$\ddot{z}(t) + \ddot{z}_p(t) = \frac{S}{\rho V} \langle \Delta P(t) \rangle_S - g. \tag{2.2}$$

Por otro lado, la diferencia de presión en la columna induce un flujo de gas a través de los intersticios entre los granos. El flujo instantáneo es aproximadamente dado por la ley de Darcy (ec. 1.5), con la permeabilidad κ modelada por la relación de Ergun (ec. 1.7). Finalmente, asumiendo que el gas es incompresible [23], se deduce que la variación de la brecha $\dot{G}(t)$ entre la base de la columna y la superficie sólida vibrante es $\dot{G} = q_z$, con $q_z = \frac{\kappa}{\eta} \frac{\langle \Delta P(t) \rangle_S}{\langle h \rangle}$. Notemos que en ausencia de dilatación de la columna, $\dot{z} = \dot{G}$; entonces, combinando la incompresibilidad con la ecuación dinámica 2.2 se obtiene,

$$\ddot{G}(\tau) + \frac{\dot{G}(\tau)}{\tau_\kappa} = \frac{A}{\Gamma} [\Gamma \sin(\tau + \tau_0) - 1], \tag{2.3}$$

donde hemos definido $\tau = \omega t$, $\tau_0 = \omega t_0 = \arcsin 1/\Gamma$, siendo t_0 el tiempo al despegue de la columna. El parámetro $\tau_\kappa = \omega \kappa \rho / \eta$ corresponde a un tiempo de relajación adimensional que cuantifica la intensidad de la fricción en un ciclo. La ec. 2.3 es conocida como el modelo de von Kroll (descripción de un pistón poroso oscilando) y tiene solución analítica [24, 25], a partir de ella y de la ley de Darcy se puede recapturar la presión a partir de

$$\frac{\langle \Delta P(\tau) \rangle_S}{\rho g \langle h \rangle} = -\frac{\Gamma}{\tau_\kappa} \dot{G}(\tau), \tag{2.4}$$

quedando finalmente que:

$$\langle \Delta P(\tau) \rangle_S = -\frac{\rho g \langle h \rangle}{1+\tau_\kappa^2}[\sqrt{\Gamma^2-1}(\sin\tau - \tau_\kappa \cos\tau) + \tau_\kappa \sin\tau - \tau_\kappa^2 + \cos\tau + \tau_\kappa(\sqrt{\Gamma^2-1}+\tau_\kappa)e^{-\frac{\tau}{\tau_\kappa}} - 1]. \tag{2.5}$$

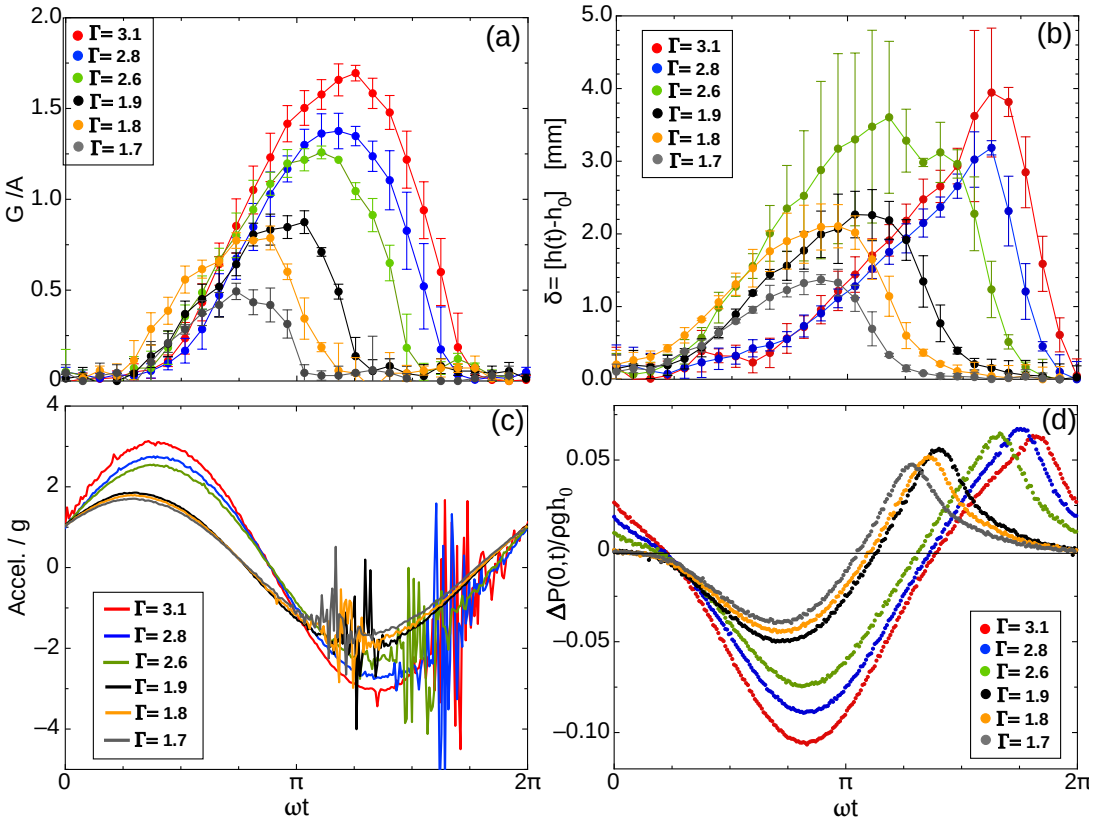

Figura 2.3: Señales coherentes en función de Γ para un ciclo de vibración: (a) Brecha, G, (b) Dilatación δ, (c) Aceleración normalizada a g, (d) Presión, $\Delta P(t)$. Tiempo de inicio de medición a partir del momento en que la aceleración de la celda es igual a $-g$.

En el panel (d) de la figura 2.3 se superponen curvas de presión en la brecha como función de Γ. Se distinguen un mínimo de presión en la etapa de succión (despegue) y un máximo en la etapa de compresión (colapso de la columna). La descripción teórica simplificada captura las principales características de estas señales. En particular, también muestra que la diferencia

de presión exhibe un mínimo, $\langle \Delta P \rangle_{S,min}$, el cual, en el límite $\tau_\kappa \gg 1$ y $\Gamma > 1$, se obtiene por la minimización de la ec. (2.5) con respecto a τ, y es de la forma

$$\langle \Delta P \rangle_{S,min} = -\frac{\rho g \langle h \rangle}{\tau_\kappa} \left[\arccos\left(\frac{2}{\Gamma^2} - 1 \right) - 2\sqrt{\Gamma^2 - 1} \right]. \tag{2.6}$$

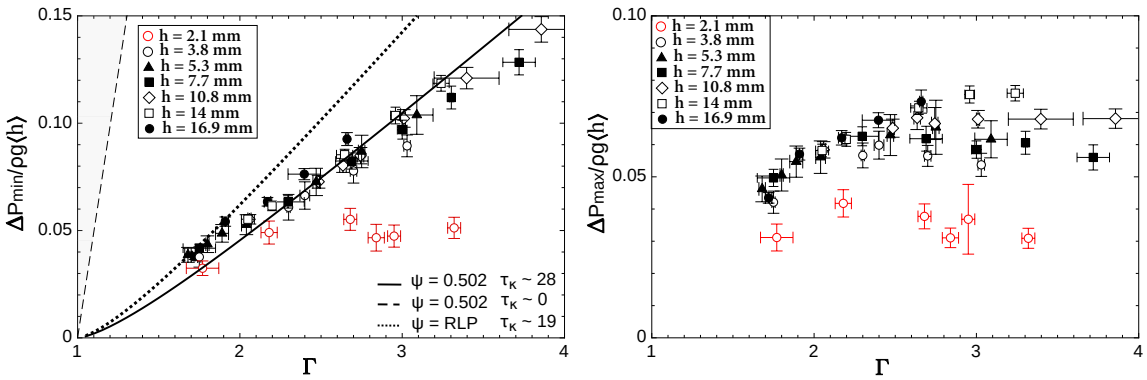

Figura 2.4: a) Presión mínima (succión máxima) en el gap normalizada a la altura promedio de la columna como función de Γ. Linea sólida es el ajuste a los datos experimentales a partir de la ecuación 2.6 por medio del ajuste fino de ψ. Zona en Gris representa el ajuste análogo de la presión pero en el límite $\tau_\kappa \sim 0$ que será analizado en el capítulo 3. b) Presión máxima como función de Γ.

La figura 2.4a presenta la presión mínima obtenida en el ciclo de vibración cuando se incrementa la aceleración Γ a una frecuencia fija f =15 Hz. Cada punto del gráfico es obtenido de un promedio coherente de 10 ciclos de señales de presión. La ecuación 2.6 captura satisfactoriamente el comportamiento de la succión observada durante el ciclo. Adicionalmente, en acuerdo con ec. 2.6, se verifica que la presión escala linealmente con la altura de la columna. La línea continua en la figura 2.4a representa el mejor ajuste a los datos experimentales, utilizando como parámetro la porosidad promedio ψ, de la columna. Cabe notar que el valor de porosidad obtenido ψ ~0.5 es ligeramente mayor al valor en reposo de la columna (ψ ~0.47) indicando que la dilatación de la columna es relevante. La porosidad en reposo de la columna es estimado gracias a la medición de la masa ingresada en tubo y la altura de la misma antes de

comenzar la vibración. Para la reproducibilidad de los resultados no se requiere ninguna preparación especial de empaquetamiento de la columna sino solamente el control de la aceleración.

Por otro lado, la presión máxima en el ciclo igualmente escala con la altura de la columna, como lo indica el panel b de la figura 2.4. Esta presión máxima sin embargo, satura a un valor de aceleración cercano a $\Gamma \sim 2$. Este comportamiento puede capturarse de la ec. 2.5 imponiendo que τ sea igual al tiempo de vuelo adimensional. La figura 2.5, ilustra directamente la asimetría de la señal de presión detallada en el gráfico 2.4; el eje vertical de la fig.2.5 muestra que la preponderancia de la succión del aire se hace cada vez más significativa después de Γ =2.2, debido a la saturación que experimenta la presión máxima (gráf. 2.4b), en cambio, a la izquierda de la línea segmentada vertical, la asimetría de la presión favorece el drenado del aire.

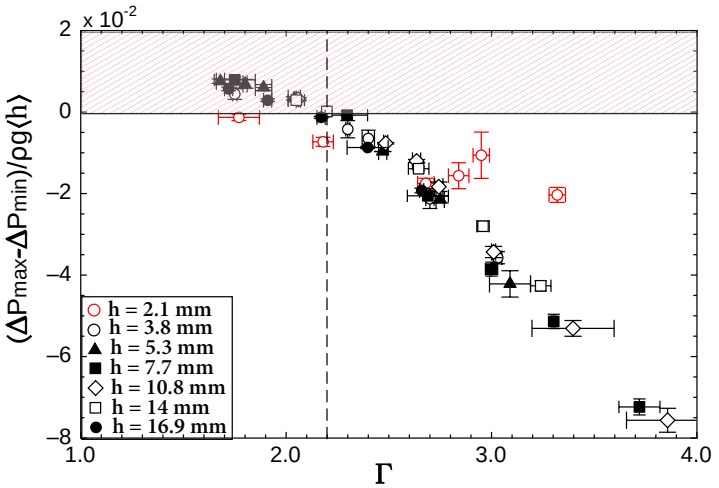

Figura 2.5: Asimetría de la señal de presión obtenida de la figura 2.4 El eje vertical representa la diferencia entre el máximo de la presión positiva (2.4b) y el máximo de la depresión (2.4a).

Cuando se fija el valor de la aceleración Γ, ambas presiones decrecen como $1/f$. Este comportamiento también es capturado satisfactoriamente con la ec. 3.5, puesto que $\tau_\kappa \propto f$. Notemos sin embargo, que el valor de porosidad obtenido ψ =0.464 es muy cercano al valor de la capa en reposo (0.47) indicando que, a medida que se incrementa la frecuencia, la dilatación de la columna es menos significativa y se comprime un poco. Para frecuencias mayores a 98 Hz, la señal de presión es siempre negativa (2.6 zona gris panel(b)), y por ende, la columna se mantiene succionando aire hacia su interior.

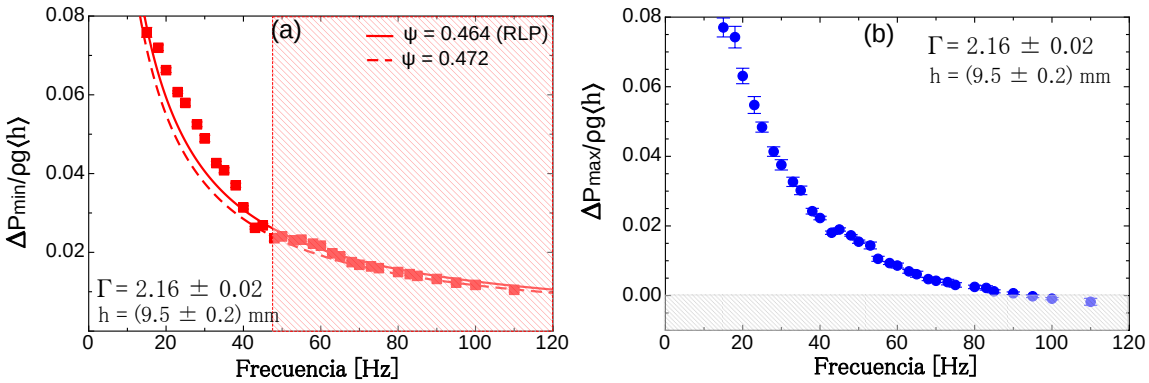

Figura 2.6: a) Mínimo de presión en el gap durante la etapa de despegue como función de f para un valor constante Γ. Región achurada en rojo muestra inicio visible de fluidización b) Presión máxima al momento del aterrizaje como función de f para un valor constante Γ.

La máxima presión de aire succionado (fig.2.4a) llega a ser casi del 15 $\%$ del peso hidrostático de la columna cuando Γ $\sim$4, y el aire drenado (fig.2.4b) casi el 7 $\%$. Más adelante veremos que para partículas más pequeñas y capas considerablemente más finas, se logran valores significativos de succión, los que integrados sobre la superficie son inferiores pero comparables al peso de la capa porosa, lo que tiene consecuencias dramáticas por ejemplo, en la dinámica de gotas.

2.2.2. Dinámica de la brecha entre la columna y la base oscilante.

El análisis resumido por la ecuación 2.3 permite encontrar también una predicción para la evolución de la brecha. En efecto, la integración de la ecuación 2.3 conduce a,

$$\frac{G(\tau)}{A} = \frac{\tau_\kappa}{\Gamma\left(1+\tau_\kappa^2\right)}\Big[\tau_\kappa - \tau + \sqrt{\Gamma^2-1}\big(1+\tau_\kappa^2 - \tau_\kappa \sin(\tau) - \cos(\tau)\big) + \tau_\kappa\Big(\tau_\kappa^2 - \tau_\kappa\tau - \cos(\tau)\Big) + \sin(\tau) - \tau_\kappa^2\left(\sqrt{\Gamma^2-1}+\tau_\kappa\right)\exp^{-\frac{\tau}{\tau_\kappa}}\Big]. \tag{2.7}$$

Por otro lado, a partir de la figura 2.3 se observa que la brecha se abre y cierra periódicamente en un ciclo. Por medio del análisis de imágenes se determina la apertura máxima de la brecha cuya amplitud aumenta con Γ, lo que se encuentra resumido en la figura 2.7a. La línea continua corresponde a la predicción de la la ecuación 2.7 donde se ha ajustado el valor de la porosidad a un valor cercano dado por un empaquetamiento aleatorio suelto (RLP, $\psi =$0.464). Para valores más elevados de altura en reposo de la columna valores mas pequeños de porosidad son requeridos para capturar el comportamiento con la aproximación de von Kroll.

Paralelamente, la ecuación 2.7 predice que la brecha máxima normalizada a la amplitud de vibración debe ser una función independiente de la altura de la columna. Las líneas horizontales segmentadas en la figura 2.7b muestran que la predicción anterior (a porosidad constante $\psi =$0.464) se desvía significativamente de los datos experimentales para valores mas grandes de h_0, ésto puede interpretarse asumiendo que las columnas más altas exhiben una porosidad efectiva ligeramente menor a la correspondiente al RLP, lo que es aceptable. Sin embargo, debemos ser cuidadosos porque, como hemos visto que la columna se dilata, lo que parece contradictorio con lo anterior.

Veremos que en realidad la columna se dilata cerca de su extremo libre, pudiendo comprimirse en otras regiones cercanas a su base para dar una porosidad efectiva ligeramente menor a aquella del RLP.

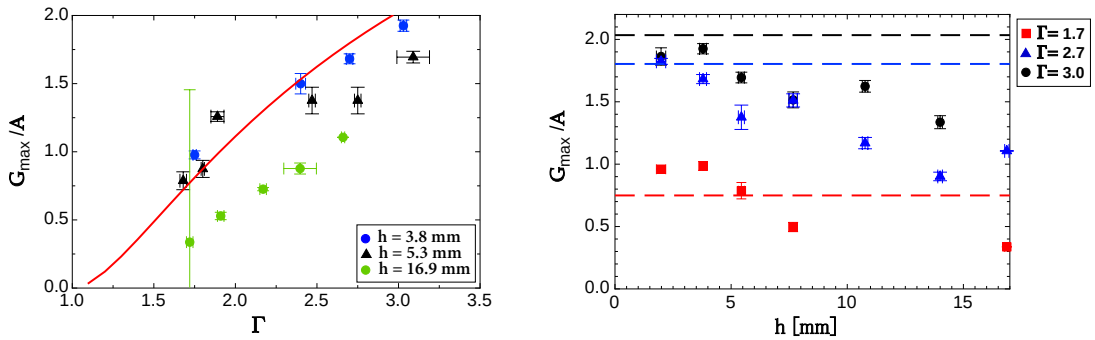

Figura 2.7: a) Brecha máxima vs Γ para varios valores de altura de la columna, h_0. La linea continua es predicción de la ecuación 2.7 con ψ =0.464. b) Brecha máxima normalizada a la amplitud de vibración en función de h_0 para varios valores de Γ.

2.2.3. Dilatación de la columna

Durante el despegue se observa un aumento de la altura de la columna, lo que revela una dilatación, que en algunos casos es significativa. Este efecto modifica los valores de porosidad de la columna por lo que esta variable pasa a ser un parámetro obtenible de los ajustes sobre el valor estimado por simple geometría. Los mecanismos que promueven la dilatación son relativamente complejos y no pueden ser descritos con el modelo simple presentado en las secciones anteriores que consideraron una columna rígida, ignorando totalmente las fuerzas de contacto y la pérdida de los mismos.

En lo que sigue nos limitaremos a proporcionar una caracterización experimental de la dilatación y expondremos, en varios intentos descritos en apéndices de este capítulo, las dificultades para modelar dicha dilatación.

Comenzaremos por analizar una secuencia típica del movimiento de la columna granular obtenida por extracción de bordes a partir de imágenes en alta velocidad.

La figura 2.8 presenta series temporales de la posición de superficie superior e inferior de la columna, junto con aquella de la superficie vibrante que sirve de referencia. En color verde (Fig. 2.8) se visualiza, la dilatación, $\delta = h - h_0$, es decir, la diferencia entre las dos extremos de la columna (en rojo y azul, respectivamente en la Fig. 2.8).

Se presenta además la brecha G normalizada a la amplitud y la presión en esta zona, que para el caso de una capa de 5.3 mm registra una variación de presión de poco más de 36 Pa.

Se observa que δ puede alcanzar valores máximos cercanos a 3 mm en un ciclo, lo que en principio debería afectar la permeabilidad de la columna.

En una primera mirada, esta dilatación ocurre en el proceso de vuelo libre de la columna y desaparece al momento de la colisión. Asimismo, se observa una alta correlación temporal entre la brecha y la dilatación.

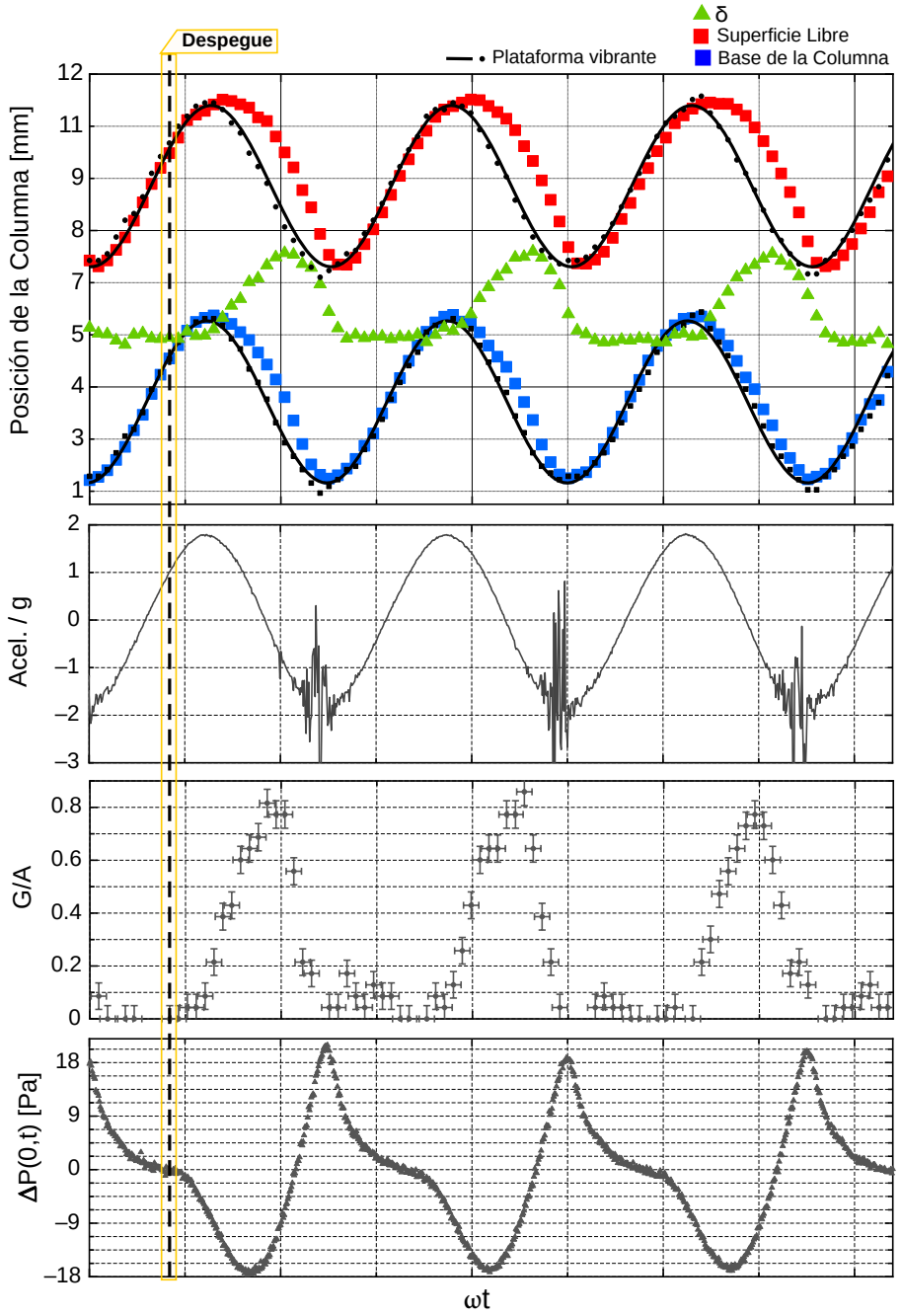

Figura 2.8: Movimiento de la superficie superior e inferior de una columna de 5.3mm de altura, de partículas de acero de $\sim$470μm, obtenidos por tratamiento de imágenes. En rojo,la posición de la superficie libre, en azul la posición de la base de la columna, en verde la dilatación δ (cambio de altura). Las curvas negras representan el movimiento de la plataforma de vibración respecto a la posición de las capas. La línea punteada vertical indica el momento en que la aceleración de la celda es igual a $-g$ a partir de la información del panel central. Paneles inferiores: La brecha (G) normalizada a la amplitud de vibración, y la presión ΔP en G

Para comprender mejor la dilatación investigamos primero la ley de evolución de la superficie libre de la columna en función del tiempo, encontrando que ésta obedece al movimiento de una partícula en vuelo libre a partir del momento de despegue de la columna. En la figura 2.9 la línea roja muestra la parábola que mejor describe el movimiento indicando una aceleración cercana a g, lo que es claramente compatible con un vuelo libre. En cambio, la coordenada del extremo inferior de la columna, proporciona un ajuste que aunque menos satisfactorio indica que su aceleración promedio es mayor que g, lo que indica que el efecto de la succión del gas es dominante en el ciclo, acelerando la capa hacia abajo.

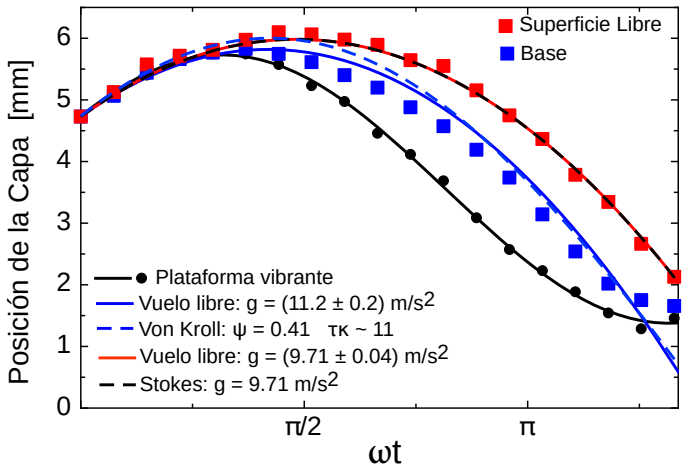

Figura 2.9: Detalle del movimiento de la superficie superior e inferior de la columna obtenidos por tratamiento de imágenes. Lineas de color ilustran los mejores ajustes suponiendo que tanto el extremo superior como inferior obedece a un vuelo libre.

Los resultados anteriores pueden desplegarse como función de Γ y la altura en reposo de la columna, h_0 (Fig. 2.10). La curva continua en Fig. 2.10a representa la evolución de la dilatación dimensional δ_{max}, asumiendo que la base de la columna está descrita por el modelo de von Kroll (ec. 2.7) y la superficie superior obedece a un vuelo libre con aceleración igual a $-g$. Con la incerteza experimental, vemos que esta aproximación captura lo esencial del fenómeno de

la dilatación. Por otro lado, tal como lo ilustra la Fig. 2.10b, sobre un orden de magnitud, δ_{max} varía muy lentamente con la altura de la columna, lo que sugiere que δ_{max} sería aproximadamente independiente de la altura de la capa, además a valores bajos de Γ la dilatación se describe con una porosidad global tipo random close packing (línea continua ψ =0.366) y a Γ alto la capa muestra mayor porosidad (línea segmentada ψ =0.464). Estas observaciones plantean una serie de interrogantes sobre el origen de esta dilatación.

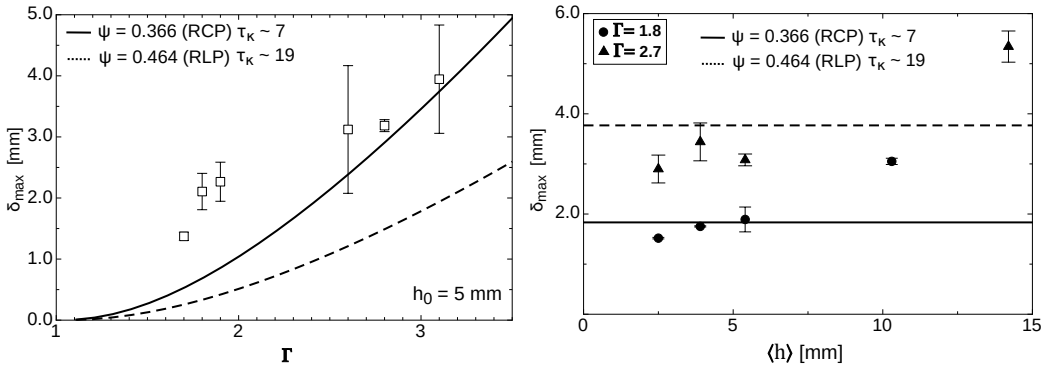

Figura 2.10: a) Dilatación δ_{max} vs Γ para h_0 fijo. La curvas son la estimación de δ_{max} resultante del modelo de bloque poroso para la base y de vuelo libre para la superficie superior de la columna. b) δ_d vs h_0 para Γ dado y su ajuste proveniente del modelo de bloque poroso para la base y de vuelo libre para la superficie superior de la columna.

En las secciones a continuación exploramos dos mecanismos posibles de dilatación. El primero tiene relación con la posible presencia de una variación del gradiente de presión en la columna, que mostraremos se acopla directamente a la variación de la porosidad de la columna en el régimen no cohesivo. Esto último conduce a una dilatación/compresión en la columna en la etapa de vuelo.

El segundo mecanismo considera simplemente la posibilidad de introducir un retardo entre la parte superior y la parte inferior de la columna en el momento de despegue. Puesto que se trata de ecuaciones de segundo orden, el retardo puede jugar ya sea en la posición o en la velocidad de los extremos de la columna al despegue.

2.3. Modelos de dilatación

En la descripción simple presentada en la secciones precedentes (modelo de von Kroll), la columna se aproxima a un bloque poroso indeformable, a través del cual fluye alternadamente el gas necesario para para abrir y cerrar la brecha entre la columna y la base en vibración. Este modelo describe adecuadamente las cantidades globales y predice correctamente las dependencias funcionales de la presión y la brecha. Sin embargo, un ajuste preciso de los datos sólo se logra sintonizando la fracción de empaquetamiento, que debe ser menor a aquella de la columna en reposo.

Por otro lado, los mecanismos responsables de la dilatación son totalmente desconocidos. El conjunto general de las ecuaciones que gobiernan la columna granular dilatable en vibración es demasiado complejo para aspirar a una solución simple y por lo tanto nos limitaremos a presentarlo en uno de los apéndices.

En esta sección presentaremos intentos por descifrar estos mecanismos, considerando aproximaciones que podrían parecer a primera vista como muy crudas, pero tratables. Nuestro modelo simplificado, aunque considera la columna como un todo, toma en cuenta al primer orden las variaciones del gradiente de presión a lo largo de la columna.

Precisamos P_0 como la presión en la superficie superior de la columna, P como la presión al interior (en el punto medio), y P_b como la presión en la base de la columna. Como antes la altura en reposo es h_0. Definimos, cuando la columna esta en contacto con la base vibrante, σ como el esfuerzo asociado con la fuerza de reacción. Escribiremos primero la ecuación que gobierna el movimiento del centro de masa, G de la columna,

$$\rho c_0 h_0 \frac{dV_G}{dt} = (P_b - P_0) - \rho c_0 h_0 g + \sigma, \tag{2.8}$$

donde c_0 y ρ son las fracciones de empaquetamiento ($c_0 = 1 - \psi_0$) y la densidad

del material respectivamente. Para describir la evolución de la presión en el interior del material granular, consideraremos cambios adiabáticos de la presión ($P\mathcal{V}^{\gamma}$ =cte). Entonces el volumen inicial del gas en el espacio vacio entre los granos es, $\mathcal{V}_0 = h_0(1-c_0)S$ para un área superficial S de la columna granular. Durante la vibración, existirán cambios de volumen debidos a los cambios en h y también debidos a flujos de gas. Con la ayuda de la ley de Darcy tales flujos se relacionan al gradiente de presión, $\Phi_b = \frac{\kappa}{\eta}\frac{(P_b-P)}{h/2}$ y $\Phi_e = \frac{\kappa}{\eta}\frac{(P-P_0)}{h/2}$, en la base y en la superficie respectivamente. Recordamos que η es la viscosidad dinámica del gas y κ es la permeabilidad que aquí esta dada por la relación de Carman-Kozeny 1.6 y 1.8,

Podemos considerar al orden mas bajo que

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = S\frac{dh}{dt} - 2\frac{\kappa S}{h_0\eta}(P_b + P_0 - 2P).$$

De este modo, la presión del gas en el interior de la columna obedece a,

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\gamma P_0}{h_0\psi_0}\Big[\frac{dh}{dt} - \frac{2K}{h_0\eta}(P_b + P_0 - 2P)\Big]. \tag{2.9}$$

Para completar el sistema de ecuaciones, necesitamos tomar en cuenta la variación de la altura. Nos fijamos en que la ecuación para el centro de masas puede escribirse para cualquier capa. Denotando z_1 la altura de la base y z_0 la altura de la superficie libre, podemos escribir las ecuaciones de movimiento para dos semi-columnas y obtener:

$$\rho c_0\frac{h_0}{2}\frac{d^2z_1}{dt^2} = 2(P_1 + \sigma - P + \sigma') - \rho c_0 g\frac{h_0}{2},$$

$$\rho c_0\frac{h_0}{2}\frac{d^2z_0}{dt^2} = 2\frac{P - P_0 - \sigma'}{h_0} - \rho c_0 g\frac{h_0}{2}.$$

Donde se ha introducido el esfuerzo σ' que las capas de la columna se ejercen una a otra. Nótese que sumando estas dos últimas ecuaciones, se recupera la ecuación para el centro de masa (ec. 2.8). A partir del la diferencia $h = z_0 - z_1$,

obtenemos la ecuación que gobierna la dilatación de la columna,

$$\rho c_0 \frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{2}{h_0}(P_0 + P_1 - 2P + \sigma - 2\sigma') \tag{2.10}$$

Consecuentemente, para recuperar la ecuación de la brecha G entre la plataforma y la base, basta con restar de z_1, el movimiento de la plataforma $z_p(t) = A \sin\left[\omega(t - t_0)\right]$.

Todavía nos falta la ecuación para el gas bajo la columna. Asumiendo que la transformación es adiabática ($P_b \mathcal{V}_b^\gamma$ =cte) , y tomando en consideración que el cambio de volumen es debido al flujo entrante y al cambio de la distancia G. Podemos entonces escribir para un paso de tiempo dt,

$$d\mathcal{V}_b = S\Big(\Phi_b + \frac{dG}{dt}\Big)dt$$

Usando que el flujo que ingresa a la brecha es $\Phi_b = 2\kappa(P_b - P)/h_0$, tenemos,

$$\frac{dP_b}{dt} = \frac{\gamma P_0}{G(t)}\Big[2\kappa\frac{P_b - P_0}{h_0} + \frac{dG}{dt}\Big] \tag{2.11}$$

Las ecuaciones (2.8), (2.9),(2.10), y (2.11) gobiernan el movimiento de la columna granular y la presión en la brecha.

2.3.1. Adimensionalización de las ecuaciones

Para trabajar con la versión adimensional de las ecuaciones mostradas más arriba, consideraremos A la escala de longitud y $\tau = \omega t$ como la escala de tiempo. Más aún, en el campo de gravedad, el esfuerzo típico hidrostático $p_m = \rho c_0 h_0 g$, será la escala de esfuerzo.

Denotando entonces:

- $\Gamma = A\omega^2/g$, Aceleración reducida.
- $\Omega^2 = \frac{4\gamma P_0}{\rho c_0(1-c_0)h_0^2}\frac{1}{\omega^2}$, que comprara el tiempo típico de propagación de una onda de densidad en la capa en un ciclo de movimiento.

- $\tau_\kappa = \frac{\omega\kappa\rho}{\eta}$, tiempo de relajación de von Kroll.
- $\frac{1}{\chi} = \frac{\Omega^2}{4}(1-\psi_0)\tau_\kappa$, Tiempo de difusión adimensional que compara la descarga de presión en los poros para un ciclo de movimiento de la capa.
- $H_0 = h_0/A$, que compara el espesor de la capa con la amplitud del movimiento vertical.
- $\zeta = G/A$, que compara la brecha G con la amplitud del movimiento vertical.
- $p_0 = P_0/pm$, que compara la presión atmosférica con el estress hidrostático de la capa.
- $p = P/pm$, que compara la presión en el centro de masas de la capa con su estrés hidrostático.
- $p_b = P_b/pm$, que compara la presión en la base de la capa con su estrés hidrostático.

Bajo este marco las ecuaciones para la capa granular quedan:

$$\Gamma\dot{V}_G(\tau) = p_b - p_0 + \frac{\sigma - 1}{p_m}, \tag{2.12}$$

$$\Gamma\ddot{\zeta}(\tau) = -2(p - p_b) - 1 + 2\frac{\sigma + \sigma'}{p_m} + \Gamma\sin(\tau + \tau_0), \tag{2.13}$$

$$\Gamma\ddot{H}(\tau) = -2(p_0 + p_b - 2p) - 2\frac{\sigma + 2\sigma'}{p_m}, \tag{2.14}$$

$$\dot{p}(\tau) = -\frac{\Omega^2}{4}\Gamma\dot{H}(\tau) + \frac{2}{\chi}(p_b + p_0 - 2p), \tag{2.15}$$

$$\dot{p}_b(\tau) = -\frac{H_0\psi_0}{G(\tau)}\Big[\frac{2}{\chi}(p_b - p) + \frac{\Omega^2}{4}\Gamma\dot{G}(\tau)\Big]. \tag{2.16}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener la trayectoria de toda la capa.

2.3.2. Resultados y comparaciones

El resultado más interesante que buscamos, es la evolución de la presión justo debajo de la capa durante el vuelo. Asumiendo que la capa está inicialmente en reposo y en contacto con la plataforma de vibración, y la presión $p_b(0) = p(0) = p_0$, a partir del conjunto de ecuaciones que gobiernan el movimiento de la capa, obtenemos que ζ (2.13) y H (2.14) despegan cuando la aceleración relativa de la plataforma es igual a -1. Esto ocurre en $\tau = \tau_0$ tal que $\sin(\tau_0) = 1/\Gamma$. Entonces, no existe retardo en el despegue (con respecto a un cuerpo ideal no sujeto a fuerzas de arrastre). Desde este punto, los esfuerzos σ y σ' se anulan.

Como primera aproximación despreciaremos la dilatación de la capa. Con este supuesto, la presión queda $p = (p_0 + p_b)/2$. Entonces, si consideramos la ecuación de ζ (2.13) y para la presión p_b (2.16) con $\sigma = \sigma' = 0$, finalmente se llega a que la brecha entre la base de la capa y la plataforma ζ es:

$$\frac{1}{\psi H_0}\zeta\dddot{\zeta} + \frac{1}{\chi}\ddot{\zeta} + \frac{\Omega^2}{4}\dot{\zeta} - \frac{1}{\psi H_0}\zeta\cos(\tau+\tau_0) + \frac{1}{\chi}\left(\sin(\tau+\tau_0) - \frac{1}{\Gamma}\right) = 0 \qquad (2.17)$$

Las condiciones iniciales para la solución del problema son de la forma $\zeta(0) = 0$, $\dot{\zeta}(0) = 0$ y $\ddot{\zeta}(0) = -1/\Gamma$.

Una vez que la solución para ζ es encontrada, se puede proceder a calcular p_b a partir de (2.13) llevando a:

$$p_b - p_0 = 1 + \Gamma\left(\ddot{\zeta} - \sin(\tau+\tau_0)\right) \qquad (2.18)$$

A partir del resultado anterior, podemos predecir la velocidad de la columna pues sabemos como evoluciona la presión debajo de la misma mientras está en vuelo. La única dificultad técnica para resolver la ec. 2.17 es que $\zeta(0) = 0$ es un punto singular. Entonces es necesario obtener el desarrollo en torno a cero; sin embargo, teniendo en cuenta, que experimentalmente existe permanentemente un volumen parásito de aire debajo de la capa, correspondiente al volumen de aire alojado en la cavidad en forma de *L* que se diseñó para medir la presión,

podemos modificar levemente ecuación de movimiento de la brecha corrigiendo $G(t) \longrightarrow G(t) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 L$, donde r es el radio de la cavidad, R es el radio del tubo, y L el largo total de la cavidad. La modificación anterior, permite resolver sin restricciones la ec. (2.17). Como ya se mencionó, la aproximación ec.2.17 incluye la compresibilidad del gas en la brecha pero excluye el término en $dH/d\tau$ (la dilatación), sin embargo tiene solución analítica.

En el caso más general, sin despreciar ahora los efectos del cambio de altura de la columna, las ecuaciones recién presentadas (ecs. 2.12 a 2.16) describen toda la física de la columna, y pueden resolverse numéricamente. La figura 2.11 presenta la evolución temporal de la brecha y la presión en ella (p_b) comparando el modelo de von Kroll y nuestra propuesta para: el caso en que se desprecia la dilatación (ec. 2.17), y la solución numérica de las ecuaciones generales. Se exploraron tres efectos principales incorporados en las condiciones iniciales del problema, a saber:

1. Capa en reposo (i.e. $\Delta p(0) = 0$ y $dh/dt|_{t=0} = 0$)
2. Leve curvatura en la presión al despegue (i.e $\Delta p(0) \neq 0$)
3. Leve retardo en la dilatación al despegue (i.e $dH/d\tau|_{\tau=0} \neq 0$)

Las condiciones 2,3, se usan para capturar un posible retardo de los granos ubicados en la superficie libre en el despegue. El gráfico 2.11(a) revela que en la predicción para la brecha, no se observa diferencia entre la aproximación de von Kroll, aquella de la ec. 2.17 y la solución general (Ecs. 2.12 a 2.16) cuando $\Delta p(0) = 0$ y $dh/dt|_{t=0} = 0$. Sin embargo, las tres aproximaciones se diferencian claramente, cuando se inyecta una leve curvatura (2) del orden del 1 $\%$ del peso hidrostático de la capa.

A su turno, la figura 2.11b presenta la evolución de la presión en la brecha. Se observa que la presión se modifica de manera muy poco significativa por estos dos efectos. Una razón que podría invocarse para este resultado, es que la

dilatación no se incluye como tal en la variación de la porosidad. Sin embargo, al corregir las ecuaciones anteriores por tal efecto, la corrección a la presión sigue siendo poco significativa. Como veremos en los párrafos siguientes, lo que ocurre es que la dilatación inducida por ambos efectos (curvatura de la presión y retardo) es demasiado pequeña para valores realistas de los parámetros experimentales y por lo tanto no existe un efecto significativo sobre la presión.

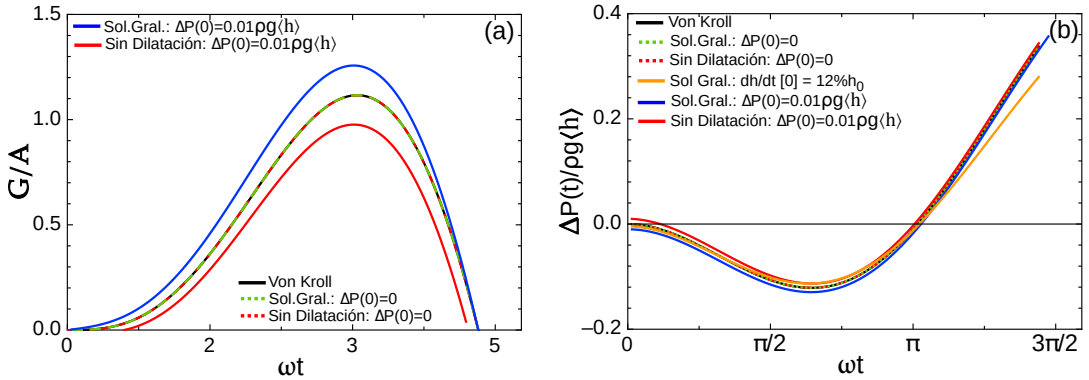

Figura 2.11: a) Comparación de la brecha G normalizada a la amplitud A del contenedor vs ωt para los modelos de: von Kroll, la solución general de las ecs. 2.12 a 2.16 sin curvatura en la presión (línea punteada verde) y con curvatura de la presión (línea azul); y la aproximación sin dilatación 2.17 sin curvatura en la presión (línea punteada roja) y con curvatura de la presión (línea roja continua) b) Comparación de la presión en la brecha vs ωt, obtenida por el: modelo de Kroll, la solución general de las ecs. 2.12 a 2.16 sin curvatura en la presión (línea punteada verde) y con curvatura de la presión (línea azul) y un gradiente al despegue, $dH/d\tau|_{\tau=0}$ =0.012H_0 (linea naranja continua); y la aproximación sin dilatación 2.17 sin curvatura en la presión (línea punteada roja) y con curvatura de la presión (línea roja continua).

En efecto, la integración de las ecuaciones (ecs. 2.12 a 2.16) también proporciona una estimación de la dinámica de la dilatación. En la figura 2.12a exploramos el efecto de un valor finito de $dH/d\tau|_{\tau=0}$ =0.012H_0 al despegue, que es el equivalente a indicar que el bloque superior de la columna ha despegado -un 12$\%$ del tamaño en reposo de la capa- primero que el bloque inferior, y observamos que δ crece casi linealmente con el tiempo. De este modo, al orden más bajo, el efecto de una pequeña velocidad de dilatación inicial es simplemente amplificada linealmente durante el vuelo. La figura 2.12b muestra

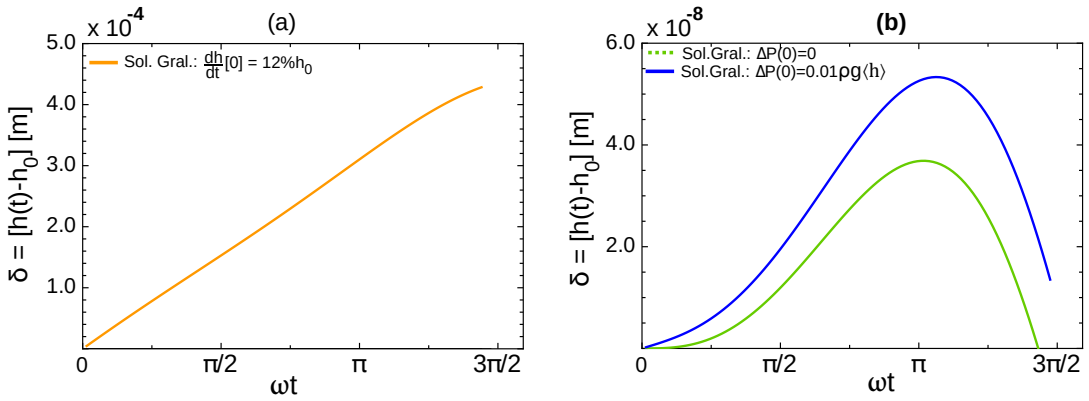

Figura 2.12: Dilatación δ vs ωt obtenida por el modelo refinado Ecs. 2.12 a 2.16. a) δ para $\Delta p(0) = 0$ y $dH/d\tau|_{\tau=0} = 0{,}012H_0$; b) δ para $\Delta p(0) = 0{,}01\rho g h_0$ y $dH/d\tau|_{\tau=0} = 0$.

que si $dh/dt|_{t=0} = 0$ y sólo se coloca un gradiente de presión $\Delta P(0) \neq 0$ al despegue, la dilatación obtenida es totalmente despreciable.

2.3.2.1. Discusión

Es importante señalar que Γ es independiente ante la manipulación de los parámetros anteriores. De hecho, el comportamiento de todo el sistema dependerá de la amplitud A y la frecuencia ω independientemente (o de manera compleja). En efecto, para una frecuencia dada ω, los parámetros χ y Ω permiten caracterizar el material granular; pero cambiar la amplitud no solo altera a Γ sino que también a H_0.

El modelo de dos bloques de capa que presentamos, ofrece una sofisticación al modelo de von Kroll, incorporando los efectos de una eventual dilatación, donde la elección de la condiciones iniciales permite estudiar toda la física responsable de la dinámica de la capa, facilitando el control y modificación de los gradientes de presión a lo largo de la capa y cambios de velocidad en el despegue. Sin embargo, no captura el cambio de altura de la columna granular de forma realista, y requiere incorporar un mecanismo que describa cabalmente,

que los efectos de dilatación no sólo se deben al cambio en la porosidad, sino también al despegue de las capas más cercanas a la superficie que se mueven en vuelo libre. Aún así, sin desmedro de nuestras observaciones, encontramos valiosas aproximaciones analíticas, en los modelos físicos que se han exhibido, que capturan, los rasgos más generales de los fenómenos recién descritos.

La presión del gas intersticial en un medio granular bajo vibración entrega una valiosa información de toda la dinámica del sistema. Los resultados que se han discutido en esta sección, revelan que nuestra propuesta experimental para la medición de la presión, no es invasiva y además resulta ser muy sensible a los parámetros físicos macroscópicos observables en la columna bajo vibración. Procederemos en el capítulo a continuación, a realizar la transición del régimen de sólido granular $\tau_\kappa \gg 1$ a polvos granulares $\tau_\kappa \sim 0$, para analizar el comportamiento de las gotas trepadoras, en aras de inspeccionar su comportamiento mediante las herramientas que se han descrito hasta ahora.

Capítulo 3

Dinámica y formación de gotas en polvos granulares bajo vibración

3.1. Consideraciones iniciales

Como se mencionó en el capítulo 1, es bien conocido que cuando se aplica una fuerza periódica externa a una capa conformada de pequeñas partículas, se producen efectos de apilamiento y convección [26, 27, 28]. Sin embargo, cuando se sustrae el contenido de gas que rodea a los granos, lo suficiente como para que los efectos volumétricos del gas sean despreciables, el apilamiento deja de ser observable [17], y en su lugar, han sido reportados una variedad de patrones espacio-temporales como ondas de superficie [29] y kinks [30], que emergen como resultado de una transición bien definida en el tiempo de colisión.

Se mostró además, que cuando una superficie horizontal cubierta de polvo granular se golpea levemente, emergen patrones de nucleación que se asemejan -en forma- a gotas [2]. Dicha investigación, establece una analogía entre la ecuaciones que gobiernan este fenómeno y la física de los líquidos que mojan. Consecuentemente, la inestabilidad de Rayleigh-Taylor sería el mecanismo de selección de tamaños para las gotas. Acá, el uso de polvos asegura una fuerte interacción aire-grano [1] de modo que la velocidad de caída libre de estas partículas $v_{ff} = D^2\rho g/18\eta$ es del orden de la velocidad que adquieren los granos debido a las fuerzas externas.

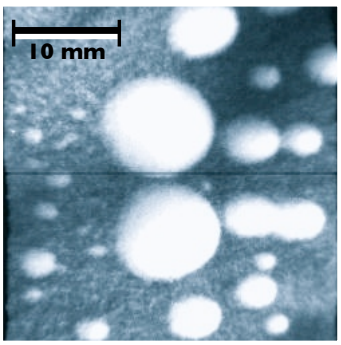

Figura 3.1: Vista aérea de gotas granulares de partículas de $\sim$100 μm de gel de sílica, formadas en una superficie horizontal bajo vibración vertical.

Similarmente, cuando la capa de polvo granular seco es sometida esta vez a vibración vertical lo suficientemente alta, las partículas rompen su estado formando nuevamente un patrón de nucleación en forma de gotas simétricas [22] (fig. 3.1) , que -a excepción de pequeños movimientos aleatorios- se encuentran descansando sobre el plano.

Estas gotas granulares son en sí estructuras porosas, de modo que la fuerza de arrastre del aire a través de los intersticios formados por los contactos entre partículas juega un rol primordial [17] en el comportamiento de esta inestabilidad (ver fig.3.28(b)), y debido a ello, es necesario controlar la humedad ambiental o de lo contrario, la presencia de puentes líquidos puede impedir la formación de las gotas.

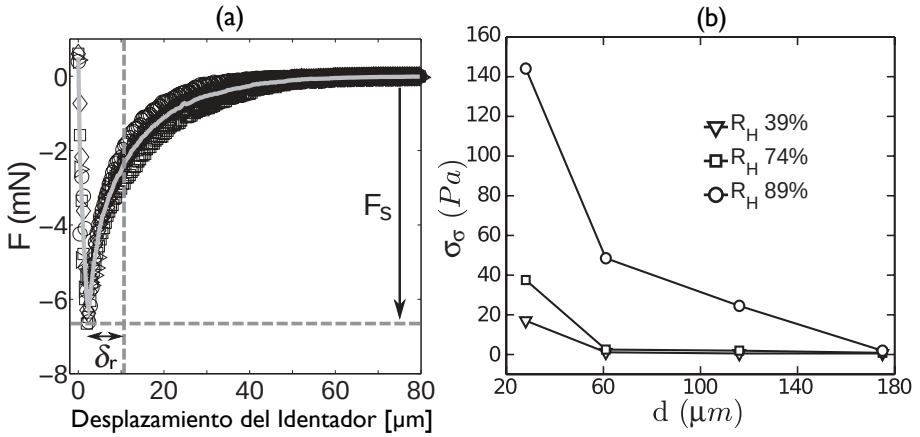

Figura 3.2: Cohesión en Vidrio. (a)Ensayos de Tracción mostrando el mínimo (F_s) y el plateau alcanzado luego de la pérdida de contacto identador-superficie de granos. (b) Dependencia del Esfuerzo de Tracción con el tamaño de partícula para distintas humedades ambientales.

3.1.1. Cohesión

El principal efecto resultante de la exposición de un medio granular a la humedad, deriva en el aumento de la cohesión grano-grano, y numerosos fenómenos han sido documentados a consecuencia de ello [31]. En particular el vidrio, es un material ampliamente usado en múltiples experimentos debido a: su relativa baja densidad, abundante presencia en la naturaleza, simetría (ver fig.3.8(c)) y control del tamaño de grano; pero resulta ser muy sensible a la humedad ambiental. La fig.3.2b obtenida por Alarcón et al. [31] muestra que la cohesión para partículas de vidrio decrece rápidamente con el aumento del tamaño de grano, por ejemplo, granos de $\sim$ 100 μm exhiben una cohesión del

orden de 500 μN/mm^2 a humedad ambiental típica (39 $\%$), que puede crecer casi 50 veces más si la humedad alcanza el 89 $\%$.

La cohesión se estima a partir de un ensayo de tracción -similar al experimento clásico de Noüy- mediante la adaptación de una balanza de precisión (de resolución: 0.1 mg), como medidor de fuerza. La idea consiste en medir la fuerza de tracción máxima F_s (ver Fig.3.2a y 3.4c) requerida para romper el contacto entre un identador y la superficie libre (cuidadosamente aplanada) de una capa de partículas que descansa sobre la balanza. La superficie del identador está cubierta del mismo tipo de partículas que las colocadas en la balanza.

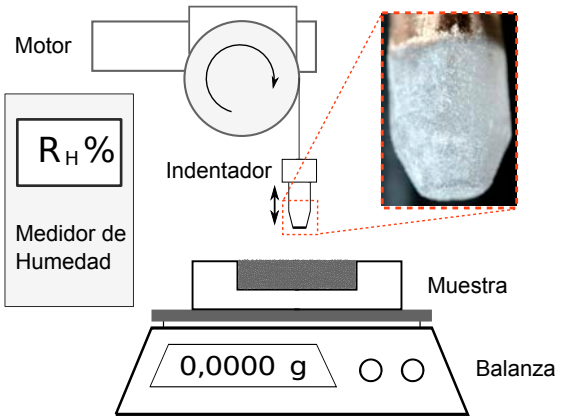

Figura 3.3: Montaje para medición de la fuerza de cohesión de una muestra de granos que se encuentra en un ambiente húmedo.

El identador esta sujeto a un hilo delgado inextensible, acoplado a un motor de rotación (THORLABS CR1/MZ6) controlado via PC, que permite sintonizar con precisión el avance del mismo. Inicialmente, esta apoyado en la superficie de la muestra de granos, induciendo un aumento en la masa detectada por la balanza. Cuando se retira el identador -a la velocidad apropiada [31]- la balanza detecta una reducción en la masa sobre la plataforma de medición, llegando a un mínimo para posteriormente volver a subir alcanzando un plateau que corresponderá al momento en que todos los puentes capilares fueron rotos y el identador ya no está en contacto con la superficie libre de la muestra. La medición de la masa

se realiza a 5 Hz (frecuencia máxima de muestreo de la balanza), y permite cuantificar el peso durante del ensayo de tracción obteniendo así F_s, entonces, el esfuerzo de tracción σ_s realizado en el área de identación S responderá a $F_s = \sigma_s S$. Finalmente, todo el sistema de adquisición mencionado se encuentra dentro de una cámara hermética donde se mantiene constante la humedad.

La humedad relativa (R_H) comúnmente presente durante el desarrollo de los experimentos de formación de gotas, fluctuaba entre el $38\,\%$ y el $42\,\%$. Bajo estas condiciones, leves incrementos en la humedad impedían la visualización de las gotas granulares hechas de vidrio.

Aún a pesar de que la humedad presente permitiera la visualización de la gotas, si el experimento era detenido por cierto tiempo entre mediciones sucesivas, era posible observar aglomeración en los granos, lo suficientemente importante como para interferir con el proceso de formación de gotas. Lo anterior indica que la reproducibilidad del experimento se ve fuertemente afectada por los efectos de envejecimiento [31] de los contactos entre partículas -*ageing*- que aumentan la cohesión granular.

Un mecanismo para reducir drásticamente el contenido líquido de los granos, consiste en inyectar aire seco (nitrógeno), sin embargo, debido a la naturaleza electrostática del vidrio, la fricción por colisión grano-grano, es responsable de la acumulación de carga en el material granular [32], introduciendo nuevas variables de monitoreo para el experimento, que pueden ser controladas con un celda de paredes metálicas puenteadas a tierra que les permitan a las partículas ceder la carga acumulada.

Debido a las consideraciones ya expuestas, se buscó un material que permitiera replicar la inestabilidad, descartando y/o reduciendo la presencia de cohesión por humedad o por acumulación de cargas electrostáticas. Para ello, se utilizaron granos de gel de silica. Este material, es un compuesto químico amorfo(ver fig.3.8b) inerte y no tóxico hecho a base de dióxido de silicio. Posee

además porosidad intragranular debido a una red interna de canales capilares que típicamente tienen un área interna del orden de 700-800 m^2/gr; dicho de otra manera, la superficie interna total de los poros contenidos en una cucharada de partículas de gel de sílica, tienen un área similar a la ocupada por un campo de fútbol [33]. Este material fue patentado en 1919 durante la primera guerra mundial como elemento de absorción de vapores en máscaras de gas, y desde ese entonces, se ha usado como agente deshidratador en la industria farmacéutica y como coadyuvante en el control contra los efectos dañinos de la humedad en exhibiciones de museos desde 1959, debido a que la humedad es absorbida por los poros intragranulares de los granos.

La densidad del gel de sílica se estima a partir de la medición la masa y el volumen más compacto de diversos tamaños polvo (50-60-70-100-200 μm) contenidos en un volumen fijo de 5 ml de un picnómetro graduado sometido a un vacío moderado de 10 mmHg. En adición a lo anterior, para afinar la medición del volumen de los granos se llenó 2/3 de la capacidad de un tubo ependolf de 1 ml con granos de gel de sílica de los tamaños ya mencionados, y se les removió el aire aplicando vacío de casi 10 mmHg, posteriormente, se inyectó agua hasta completar la capacidad graduada del recipiente, y finalmente la densidad se calcula a partir de la masa de la mezcla y del volumen alcanzado. Los resultados obtenidos permitieron estimar la densidad de las partículas (ρ_p) de gel de sílica en 0.49$\pm$0.03 gr/cc.

Utilizando el montaje detallado anteriormente (ver fig.3.3), se realizó la cuantificación de los efectos de la humedad para una muestra de granos de gel de sílica de [90-106] μm sometida a 12 horas de envejecimiento bajo humedad ambiental típica (38 $\%$) y a un medio ambiente altamente saturado (74 $\%$); la elección de estos regímenes permiten delimitar -con un amplio margen de tolerancia- la cohesión máxima esperada para estos granos. Se realizaron entre 40 a 60 ensayos, procurando que ninguna de las identaciones fuera hecha en la

misma zona.

Análogamente a lo observado en vidrio, la Fig.3.4a muestra una serie de ensayos típicos de identación, acá, el plateau en la fuerza de tracción es negativo debido a que parte de los granos de la superficie libre quedan atrapados en la punta del identador. Los histogramas 3.4(b)-(c) muestran la distribución de frecuencias -normalizada al número de identaciones- del esfuerzo de tracción σ_s realizado por el identador a 38 $\%$ y 74 $\%$ de humedad relativa respectivamente. El área de identación es de $\sim$ 12.6 mm^2 y fue elegida para asegurar que la medición de la cohesión se encuentre en el rango de sensibilidad que puede detectar la balanza.

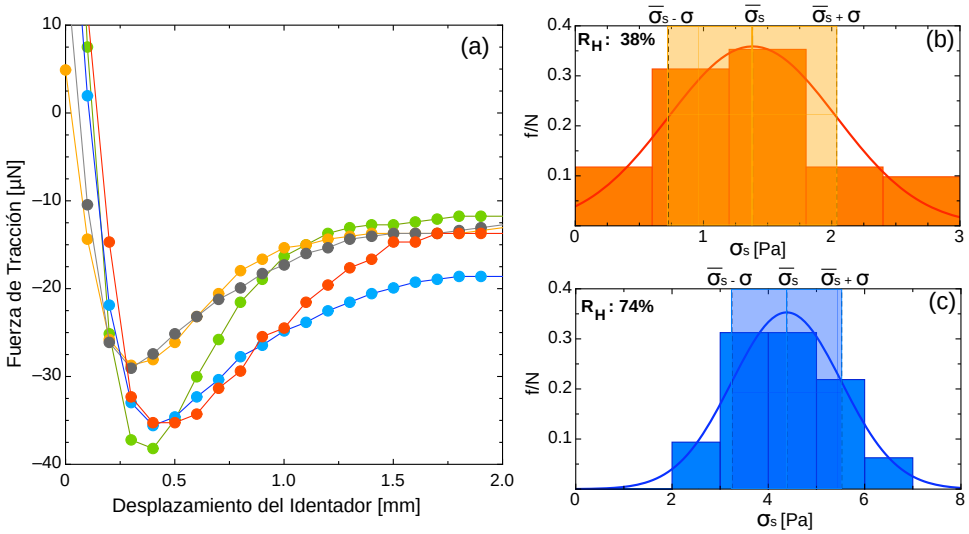

Figura 3.4: Cohesión en Gel de Sílica. (a)Ensayos de Fuerza de Tracción a humedad ambiente, mostrando que se alcanza un mínimo (F_s) y después un plateau al perderse el contacto identador-superficie de granos. (b)-(c) Distribución de Esfuerzos de Tracción con ajuste Gaussiano, para un identador de 5mm en partículas de [90-106] μm a 38 $\%$ y 74 $\%$ de humedad relativa respectivamente.

Los paneles *b-c* de la Fig.3.4 indican que a humedad ambiental, la cohesión entre granos de gel de sílica de $\sim$100 μm es 10 veces más pequeña que la cohesión típica de su homólogo en vidrio, y aún bajo alta humedad ambiental, la cohesión del gel de sílica permanece un orden de magnitud más abajo que lo observado en vidrio. Se puede estimar que en promedio, la fuerza de cohesión

por grano en el gel de sílica es 30 veces más pequeña que la fuerza de roce viscosa y 4 órdenes de magnitud más pequeña que la fricción que experimenta una gota granular típica de 1 cm, y sólo cuando la humedad alcanza el 74 $\%$, la cohesión alcanza a ser 5 a 6 veces menor que la fuerza de roce viscosa.

3.1.2. Criterio de falla: $\sim$*Ángulo de avalancha*$\sim$

En medios granulares secos, el ángulo de avalancha es una propiedad característica [11] que ilustra el nivel de cohesividad de un contenido granular. Como ya se mencionó, durante la subida de las gotas granulares por superficies inclinadas, el apilamiento y posterior falla de los granos son elementos que constantemente están presentes tanto en la rapidez de ascenso, como en la apariencia de la gotas (fig. 1.9). Cuando la superficie de contacto alcanza el ángulo crítico, avalanchas sucesivas frenan el avance de las gotas.

En diversos medios [1, 11, 26, 27, 31, 34] se reportado que el vidrio es un material formado por partículas esféricas en que tienen un ángulo de avalancha cercanamente independiente del tamaño de grano fluctuando entre $[30^{o} - 35^{o}]$; pero como ya se ha establecido anteriormente, la presencia de humedad y envejecimiento puede alterar dicho criterio de falla. Un dispositivo experimental fue diseñado para medir el ángulo de avalancha y así caracterizar su incidencia en la formación y dinámica de las gotas granulares. Un disco de acrílico transparente (ver figura 3.5) fijo en un pedestal con solamente un grado de libertad que le permite rotar en sentido horario/antihorario, contiene una cavidad semicircular donde se deposita material granular. Para determinar el ángulo de avalancha del material

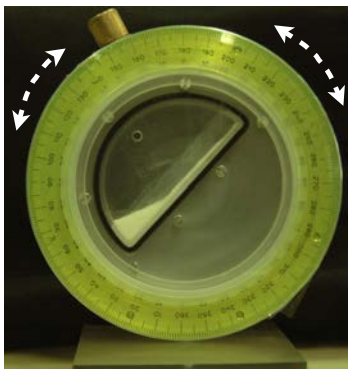

Figura 3.5: Dispositivo de medición de avalanchas.

ingresado, basta con girar el disco hasta que el material -inicialmente aplanado en la cavidad- falle. Un transportador de 360º es enmarcado en el disco para cuantificar la rotación, además, cada ensayo es fotografiado reduciendo la incerteza en la medición del ángulo hasta casi 0.1º. Para controlar la humedad del material dentro del dispositivo, se incorporó una entrada que permite comunicar la cavidad con una bomba de vacío mecánica.

La figura 3.8 muestra un estudio de la variación del ángulo de avalancha del gel de sílica y del vidrio con el tamaño de partícula. Para la determinación del tamaño de grano, partículas de vidrio y gel de sílica fueron sometidas a tamizado mecánico en mallas estandarizadas TYLER TEST SIEVE (ASTM E-11/ISO 3310-1) entre: [45-53-63-75-106-180-212] μm. Como resultado de cada separación, se seleccionaron muestras de granos que fueron fotografiadas con un microscopio óptico para un posterior análisis granulométrico usando herramientas de procesamiento de imágenes. El conteo y el tamaño de las partículas de vidrio se obtuvo implementado la transformada de Hough en un programa de detección de bordes que localizó cerca de 300 partículas.

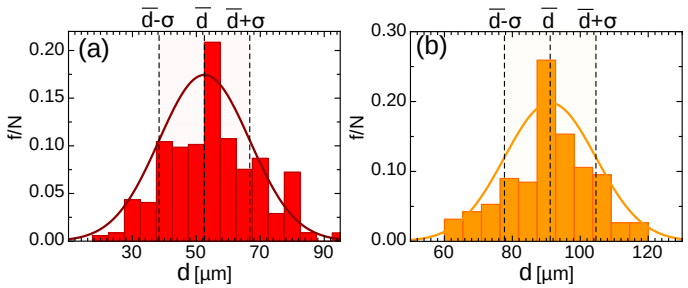

Figura 3.6: Distribución de tamaños de granos de Vidrio normalizada al conteo.(a) (53$\pm$14)μm. (b) (92$\pm$14)μm.

En cambio, para las partículas de gel de sílica que son amorfas, se usó el criterio de Feret [11] localizando la máxima longitud proyectada de cada grano. Dada la complejidad de la detección de la longitud de Feret en los granos de gel de sílica usados, una adaptación de detección de bordes y área fue implementada

en paralelo a una detección manual.

Sobre la base del conteo de cerca de 250-320 partículas se obtuvieron las siguientes distribuciones de tamaño:

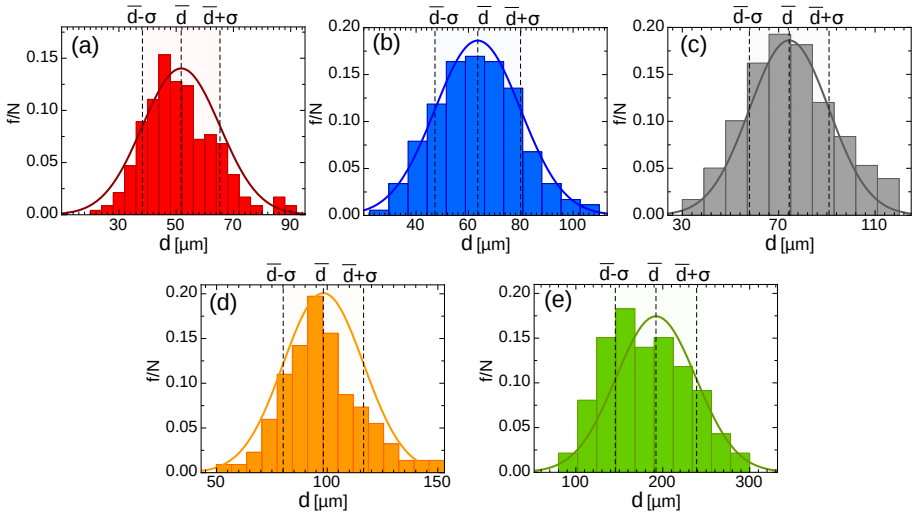

Figura 3.7: Distribución de tamaños de granos de Gel de Silica normalizada al conteo. (a) (52±14)μm. (b) (63±16)μm. (c) (74±21)μm. (d) (98±18)μm. (e) (192±48)μm.

La figura 3.8 compila una serie de entre 30-50 ensayos. Para las partículas de vidrio usadas en nuestros experimentos, el ángulo de avalancha se aprecia ser aproximadamente independiente del tamaño de grano y del orden de 32º±4º. Para minimizar los efectos de cohesión por humedad, los granos fueron previamente secados por 2 horas a 60ºC y posteriormente se les inyectó nitrógeno dentro del medidor de avalanchas. El nivel de dispersión obtenido radica en la sensibilidad a la temperatura, humedad y cohesión electrostática que exhibe el vidrio. El gel de sílica en cambio, muestra una clara cohesión que crece cuando el tamaño de grano se reduce, por ejemplo, una pila de material de ∼40 μm tiene un ángulo de avalancha (∼50º) casi 30 % más elevado que una conformada con granos 5 veces más grandes.

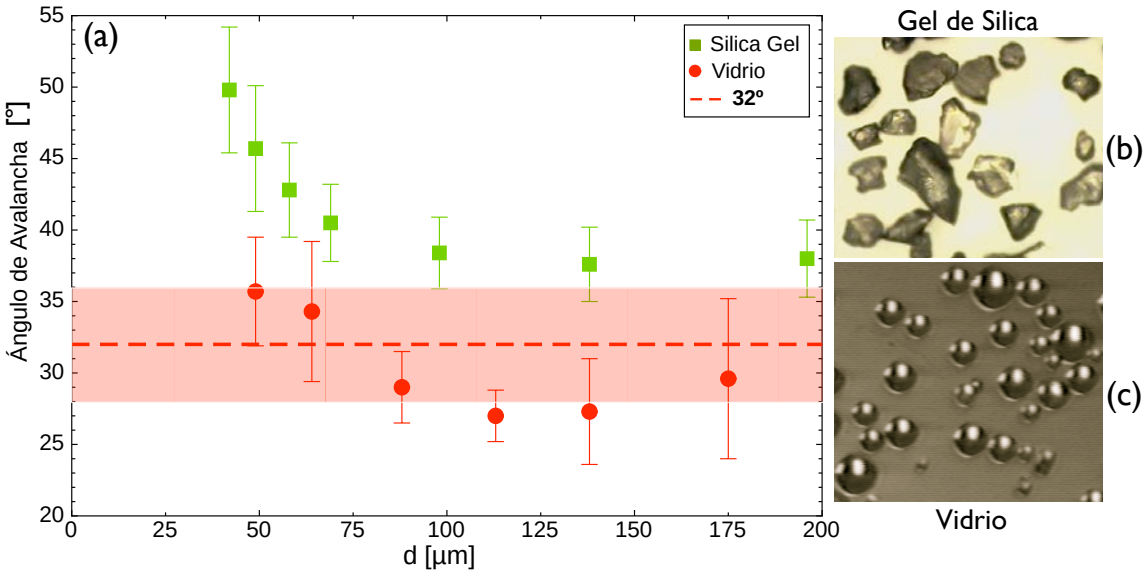

Figura 3.8: (a) Ángulos de Avalancha para gel de sílica y vidrio en función del tamaño de granos. Línea roja punteada indica el ángulo de avalancha promedio para las partículas de vidrio:$32^{o} \pm 4^{o}$. Franja roja indica la incerteza en la localización del ángulo de avalancha con una tolerancia de 3σ. Barras de error con 3σ de tolerancia.(b) Micrografia de una muestra de partículas de Gel de sílica de 192 μm. (c) Micrografía de una muestra de partículas de vidrio de 53 μm.

3.2. Rasgos de la inestabilidad

3.2.1. Configuración experimental

Figura 3.9: Celda plana horizontal.

Se empleará un sistema de vibración electrodinámico de un solo grado de libertad alineado con la vertical y alimentado con una excitación sinusoidal que provee de oscilaciones verticales a una celda cilíndrica de paredes de acrílico y de base plana horizontal. La superficie horizontal de la base esta compuesta de un plástico poroso hecho de robalón, que posee una rugosidad $\sim$100 μm rms. La estructura de soporte esta conformada por una aleación de aluminio, cuya permeabilidad magnética

permite atenuar los efectos del campo producido por el sistema de vibración. La aceleración de la celda es monitoreada mediante un acelerómetro de carga Brüel & Kjær DANAK 4374 con una precisión de $\pm 0.01g$, y análogamente a lo expuesto en la sección 2.1, usaremos Γ como variable de aceleración adimensional.

3.2.2. Diagrama de fases

En la línea de la discusión hecha en la sección 1.7, la figura 3.12 ilustra un diagrama de fases típico para gotas granulares conformadas por partículas de gel de silica y vidrio. Los puntos sólidos del diagrama marcan el umbral de la inestabilidad. Para valores de Γ inferiores a Γ_c el polvo dispuesto en la superficie permanece en estado *sólido*, donde los granos adquieren movimientos de relocalización aleatoria por deslizamientos locales y colisiones inducidas por la vibración (que se incrementan cuando la gravedad local vence a g, i.e. Γ=1). Se detectaron también en ciertas ocasiones, eventuales signos de formación de clusters o aglomerados amorfos muy cerca de Γ_c. Una vez formadas, las gotas permanecen estables en la superficie, salvo algunos ocasionales arrastres aleatorios, y cuando dos o mas gotas se encuentran próximas puede generarse coalescencia. Duran [2] argumenta, que la presión dentro de las gotas es similar a la presión en burbujas, de modo que gotas pequeñas poseen presiones internas mayores que gotas más grandes, y la dirección para la coalescencia obedece a que gotas más chicas son succionadas hacia a las gotas más grandes, de hecho, en la sección 3.3.3.3 mostraremos evidencia empírica que permite entender la coalescencia.

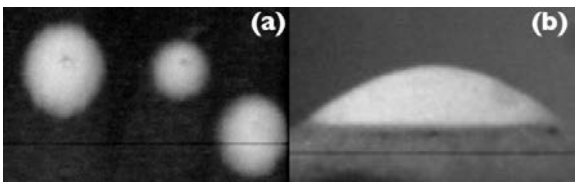

Figura 3.10: Vista aérea y lateral de gotas formadas en torno a Γ_c.

La existencia de las gotas se sostiene hasta que la aceleración alcanza un valor super-crítico Γ_s delimitado por los puntos no achurados del diagrama 3.12, acá, la gota pierde su estabilidad y se desarma debido a la elevada energía cinética que adquieren los granos, dando paso así a una zona de transición de fase tipo gas.

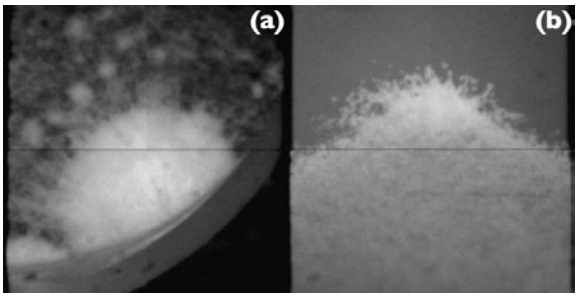

Figura 3.11: Transición Γ_S de las gotas. Vista aérea y lateral de las gotas.

La región de exploración de la inestabilidad está limitada a frecuencias que permiten sostener un valor de Γ_c tal, que la energía inyectada a las partículas no les permita *"sublimar"* (i.e después de la región Γ_s). La brecha entre Γ_c y Γ_s se reduce cuando el tamaño de grano es lo suficientemente pequeño. En el diagrama 3.12(b)-(d), el tamaño de las partículas genera zonas de coexistencia, donde simultáneamente sobreviven gotas robustas y mantos de partículas que constantemente se desarman como si estuvieran en ebullición. La identificación de las regiones Γ_c y Γ_s se hizo mediante observación directa, y se realizaron alrededor de 10-15 ensayos por cada frecuencia explorada. La delimitación precisa de Γ_s requiere más estudio y un criterio más afinado que se abordará en las conclusiones.

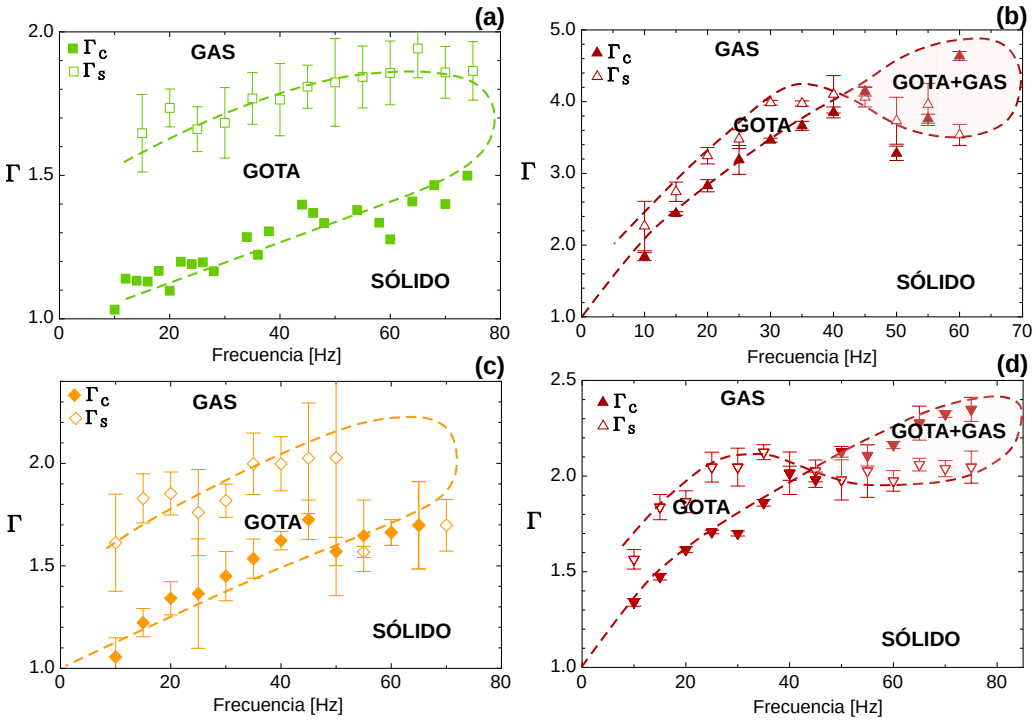

Figura 3.12: Diagrama de Fases típico de la inestabilidad. Partículas Gel de Sílica de: (a) $\sim$200 μm. (b) $\sim$50 μm, y Vidrio de: (c) $\sim$100 μm. (d) 50 μm. Los puntos sólidos representan la zona de inicio de la inestabilidad cuando $\Gamma = \Gamma_c$. Los puntos no achurados representan el límite de la inestabilidad cuando $\Gamma = \Gamma_s$. Las barras de error corresponden a 3σ.

3.3. Mojado granular

Uno de los rasgos más curiosos de las gotas granulares discutidos en 1.7, es el movimiento ascendente que adquieren cuando están sobre un plano no horizontal bajo vibración vertical. Las gotas no sólo reptan hacia la zona de mayor pendiente local, sino que corren si la aceleración inyectada Γ se incrementa [22], o si la superficie se torna más inclinada. Los estudios de Melo et al. no lograron identificar con precisión el mecanismo que

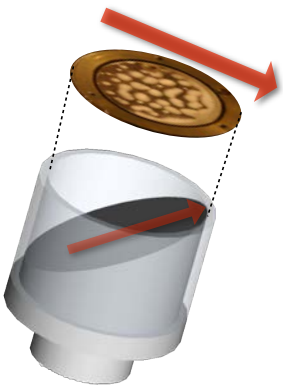

Figura 3.13: Configuración para mojado granular. Plano inclinado.

genera esta especie de *mojado granular*, que ocasiona que las gotas prefieran moverse bajo condiciones extremas.

Superficies no horizontales, revelaron que las gotas subsisten entre dos inestabilidades: una que ocasiona que el material se aglomere para formar una pila en forma de gota (Γ_h), y otra que genera el movimiento de arrastre ascendente (Γ_c). Cuando la superficie es horizontal, ambas inestabilidades se confunden pues no existe oportunidad de registrar movimiento ascendente, ni tampoco se observa algún indicio o comportamiento que las diferencie.

Las condiciones que permiten diferenciar Γ_h y Γ_c en planos no horizontales no están bien definidas y requieren más estudios. La visualización de estas diferencias se identificaron dependiendo del tamaño de partícula, la frecuencia y la viscosidad de medio; pero, no se encontró regularidad. En general, el *mojado* (ascenso) comenzaba poco después de que se formaban las gotas, apuntando a que $\Gamma_c > \Gamma_h$; sin embargo, en varias ocasiones ambos umbrales se confundían, e incluso se presentaron algunas oportunidades en las que $\Gamma_h > \Gamma_c$. En éste último caso, el mojado era en forma de *mantos, bloques o líneas de olas*, previos a la formación de gotas. La reducción de la presión o los cambios en la viscosidad ambiental (fig. 3.28(b)) permitieron la visualización del caso anterior ($\Gamma_h > \Gamma_c$).

Como fue documentado previamente por Melo et al. [22], en superficies planas e inclinadas, subsisten diferentes distribuciones de tamaños de gotas, todas ellas suben con las misma rapidez, y cuando dos o mas gotas se encuentran próximas, pueden eventualmente coalescer si sus trayectorias se cruzan. Cuando ésto sucede, la gota reduce momentáneamente su rapidez de ascenso mientras finaliza la coalescencia, y entonces, continúa trepando con la rapidez que tenía inicialmente.

A lo largo de esta sección, se caracterizará el comportamiento del mojado granular, y posteriormente se dará luces del mecanismo que lo emite, identificando los ingredientes que activan esta inestabilidad: Γ_c.

3.3.1. Efectos de la rugosidad superficial

De acuerdo a observaciones hechas por Daerr y Douady [35], rugosidades elevadas en bordes y paredes de celda pueden estabilizar ángulos de avalancha grandes, sin embargo, el efecto desaparece en capas que poseen grosores mayores a 10 diámetros de partícula. La rugosidad típica superficial presente en todos los experimentos de este capítulo, es del orden de $\sim$100 μm rms, que equivale a [0.5 y 2] veces el tamaño de los granos usados. En nuestros experimentos, la altura media de las gotas podía llegar a fluctuar entre 15 a 100 partículas. Melo et al.[22] previamente verificaron, que cuando la rugosidad disminuye, el ángulo límite para el cual las gotas desaparecen, decrece. En dicho estudio, conjeturan que grandes rugosidades pueden alterar la estabilidad de las gotas cuando la inclinación de la pendiente esta cerca del ángulo de fricción de la superficie, y la geometría de los granos ciertamente afectaría el dominio de existencia de las gotas durante el mojado.

Para dilucidar la incidencia de la fricción, se condujeron dos experimentos para analizar si el umbral de inestabilidad estaba afecto a esta variable, y si la velocidad de subida de las gotas era alterada.

3.3.1.1. Umbral de la inestabilidad en Rugosidades controladas

Para cambiar la fricción con la superficie, se recubrió cuidadosamente el plano de la celda con dos selecciones de papel de lija (P40 y P120).

Las lijas tienen rugosidades estandarizadas bien definidas (ISO 6344/FEPA). Los diferentes granos en el papel se obtienen por cribado, y el número de grano corresponde a la cantidad de cribas por pulgada cuadrada, de modo que cuanto menor es el número de grano, más rugosa se torna la superficie; entonces, una lija P40 corresponderá a un tamaño de grano de 425 μm y una P120 a 125 μm.

Sobre la base estadística de 5 a 10 ensayos de medición de Γ_c, la figura 3.14, indica que para nuestro rango de exploración, el umbral de la inestabilidad se muestra invariante al cambio de rugosidad en la superficie. La máxima rugosidad alcanzada es del orden de 2 a 4 veces el tamaño de las partículas.

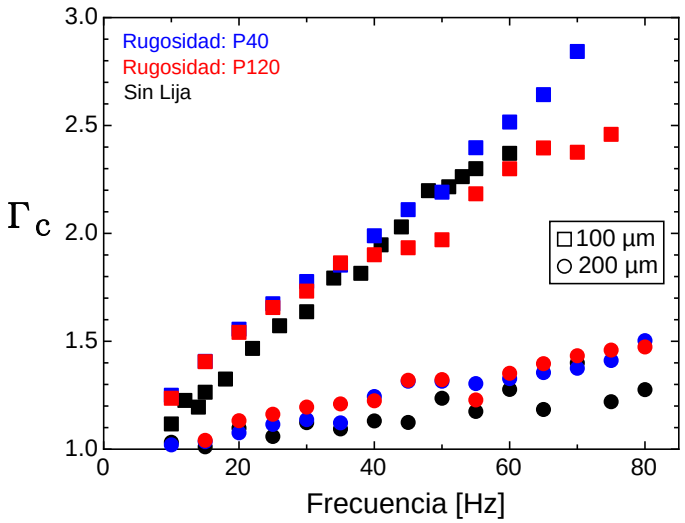

Figura 3.14: Efectos de la rugosidad superficial

3.3.1.2. Impacto de la rugosidad en el ascenso de las gotas

El efecto Leindenfrost, fenómeno bien conocido desde el siglo XVIII [36], muestra que cuando una gota de agua se coloca sobre una superficie cuya temperatura es mucho mayor que el punto de ebullición, la gota (cuerpo Leindenfrost) deja de estar en contacto con la superficie debido al sustento de una capa de vapor que se genera debajo ella, quedando en estado de *levitación*. Estudios conducidos por Clanet et al. [37] muestran que en una superficie rugosa con textura asimétrica, el flujo de vapor Leindenfrost se rectifica, generando un movimiento direccional. Lo anterior fue verificado construyendo una superficie tipo diente de sierra. Cuando se replica el experimento en la superficie dentada, la gota es deformada induciendo una modulación en la curvatura y consecuentemente se genera un gradiente de presión de Laplace. Al mismo

tiempo, un frente de onda se propaga de borde a borde, y los gradientes de temperatura, y la pérdida de masa de la gota, terminan provocando que el movimiento del flujo de gas sea rectificado.

Este mismo autor mostró curiosamente que lo mismo sucede en un bloque sólido de hielo seco, y mientras el vapor escapa de forma isotrópica desde el bloque, su flujo puede tornarse anisotrópico debido a la presencia de la rugosidad tipo diente de sierra.

Lo que sucede, es que para valores típicos (densidad del gas ρ_a $\sim$1 kg m^{-3}, viscosidad $\eta \sim$ 10^{-5} Pa·s, velocidad de escape radial U $\sim$1 m/s, y espesor de la capa de aire Leindenfrost $\sim$ 100 μm) el número de Reynolds es del orden de 10, de manera que no hay reversibilidad del gas; entonces, mientras el gas se mueve por cada escalón de la superficie dentada, se genera una contracción del fluido en dicho canal de modo que la resistencia al flujo se incrementa en la dirección opuesta a los dientes, y como consecuencia el vapor escapará preferentemente hacia la pendiente más pequeña de la textura, propulsando el cuerpo Leindenfrost.

Ahora bien, la presencia de flujos convectivos [27, 28, 38] en capas granulares bajo vibración, pueden detonar fuertes fuerzas de arrastre. El contenido de aire y su efecto en el *heaping* [17] son relevantes, y en nuestro caso en particular, se discutió en la introducción la hipótesis de Duran [18, 2] respecto al mecanismo del *efecto volcán*, y como la convección al interior de la pila sería la responsable de la eyección de partículas.

Para indagar en una posible fuente de propulsión para las gotas, en analogía al experimento de Clanet, se modificó la textura de un plano inclinado de 15º y de un plano horizontal, para tener una rugosidad tipo diente de sierra.

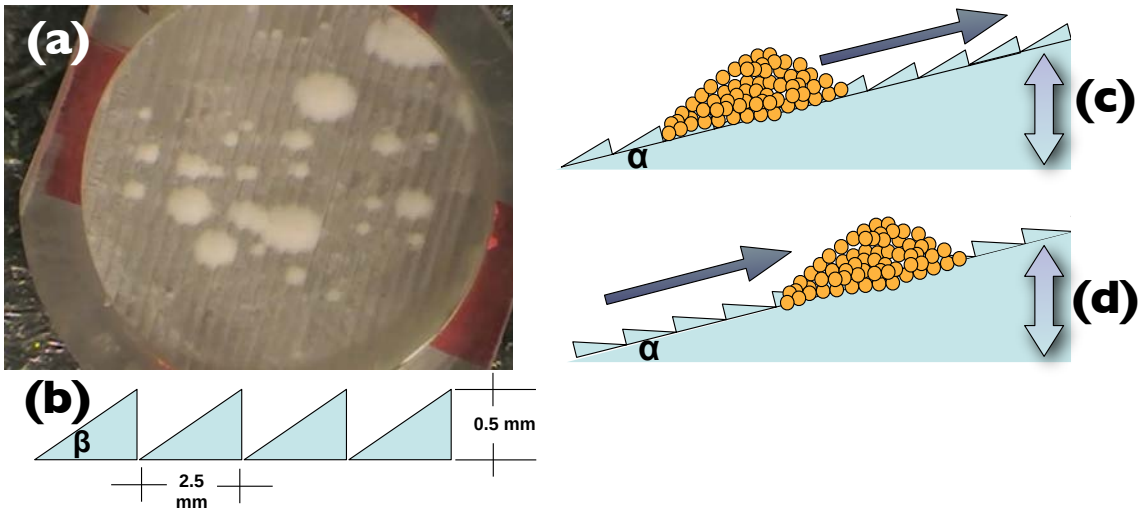

Figura 3.15: Velocidad de subida de las gotas en un plano inclinado (α =15°) con superficie tipo diente de sierra. (a) Vista aérea de la celda. (b) Detalle de la estructura del diente (β =11°). (c)-(d) Dos configuraciones de superficie: a favor del diente de sierra y en contra.

Sobre dicha superficie se estudió la velocidad de subida de gotas de gel de sílica compuestas de partículas de $\sim$100 μm. La celda fue hecha en acrílico, donde la longitud de onda del diente es equivalente a 25 partículas y la profundidad del canal a 5 partículas (ver 3.15), permitiendo alojar gotas de 1 a 10 espesores de canal. Estos parámetros fueron escogidos a raíz de que el espesor de la capa de vapor Leidendrost escala como $R^{1/2}$ [36]; procurando además, que la pendiente máxima en que se exponen los granos fuese menor que el ángulo de avalancha 3.8.

Las gotas fueron generadas a 20Hz y Γ =2.47$\pm$0.01, y mediante una cámara rápida HISIS 2000 de resolución 256$\times$256 px^2 a 1200 fps instalada con vista aérea a la celda, se midió el perfil de velocidad de subida de las gotas (velocidad proyectada en el plano donde se sitúa la cámara).

Los resultados obtenidos en la superficie horizontal dentada, no mostraron algún tipo de propulsión o dirección preferencial para el movimiento de las gotas; en su lugar, tal y como había sido observado previamente por Melo et al.[22], gotas granulares generadas en superficies horizontales permanecen estables con

eventuales arrastres aleatorios. Asimismo, en concordancia a lo expuesto en la sección 3.3.1.1, el umbral de inestabilidad permanece invariante a la rugosidad.

Rapidez [mm/s]	Tipo de Rugosidad
$6{,}6 \pm 0{,}5$	A favor del diente (Fig.3.15c)
$10{,}3 \pm 0{,}7$	En contra del diente (Fig.3.15d)

El comportamiento de las gotas tampoco cambió cuando la superficie dentada se inclinó 15º respecto de la horizontal. Midiendo la rapidez de subida de alrededor de 20 a 30 gotas, se determinó que todas y cada una de ellas escalaron la superficie hacia la zona de mayor pendiente local sin importar si se movían a favor o en contra de la dirección del diente de sierra. Sin embargo, como era anticipado, los cambios en la rugosidad afectaron la rapidez de ascenso (ver tabla 3.3.1.2). La menor rapidez de subida se registra cuando las gotas se mueven en el sentido del diente de sierra, esto se explica, porque a pesar de que la pendiente local sea superior a la que tendría el plano con la textura dentada en la dirección contraria, las partículas están constantemente cayendo por cada peldaño que escalan, obligándolas a reagruparse mientras cambia el ángulo reposo de la pila que formará la gota; precisamente, este proceso de re-conformación de la gota, termina por reducir un $37\,\%$ la rapidez de escalada de la gota, en comparación a la que exhibe cuando sube en contra del diente de sierra. Cuando la gota sube en contra del diente de sierra, los pequeños peldaños que encuentra a su paso, alojan granos de la gota facilitando la reptación y suavizando las discontinuidades de la superficie. Nótese, que en contraste al caso de Leidenfrost, donde la fricción viscosa e inercial son a lo más del orden de 0.1 μN, sólo la fricción viscosa en la gotas puede ser a lo menos del orden de 1 μN a 10 μN.

Estudios similares a los ya detallados en un plano inclinado y uno horizontal, se realizaron también en superficies mixtas, donde hay zonas

con texturas dentadas y otras planas. Esta mezcla de texturas se construyó aleatoriamente, y no se observó en ninguna ocasión que las gotas se re-orientaran siguiendo algún camino en particular. Finalmente, no se encontraron evidencias de un mecanismo de propulsión tipo Leindenfrost, esto indica que la dinámica del gas en las gotas no muestra fuertes señales de convección y el proceso de reptación de las gotas subyace en un mecanismo diferente.

3.3.2. Geometría de las gotas y ∼*Flores granulares*∼

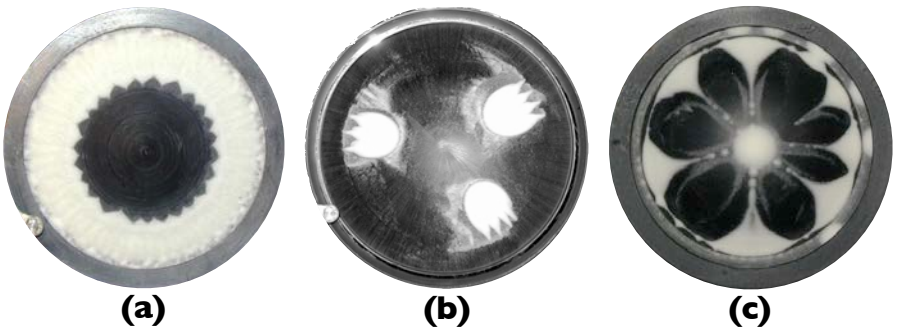

Figura 3.16: Flores Granulares hechas de gel de sílica: (a) Pétalos Granulares formados con granos de $\sim$ 60 μm, en una celda cónica de pendiente pronunciada y mayor que el ángulo de avalancha. (b) Pétalos Granulares formados en una celda cóncava con granos de $\sim$60 μm. (c) Pétalos Granulares formados en una celda convexa con granos de $\sim$100 μm

La gota granular es una estructura que se forma debido a la migración continua de granos de una superficie cubierta de polvo granular, hacia las colinas del material apilado gracias a la acción del flujo de aire. En nuestros experimentos, la convección no es significativa, y después de algunas colisiones con la plataforma de vibración, las gotas rápidamente adquieren una forma cónica estable. El cono no tiene un vértice afilado, sino más bien una punta levemente redondeada (ver fig.3.10 y fig.3.17) que es fácil de apreciar en gotas grandes.

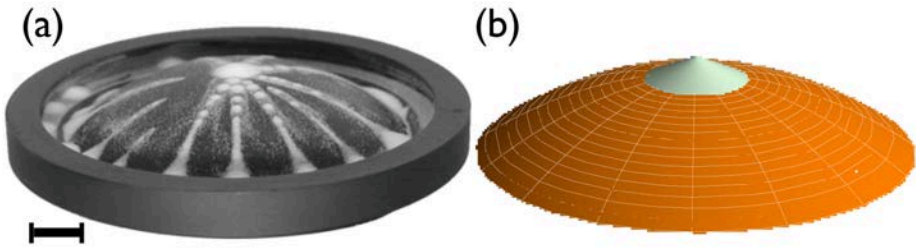

Figura 3.17: Aislador de Gotas: Celda de superficie Convexa. (a) Vista de las gotas trepadoras. (b) La forma de la gota obtenida por la intersección de un cono vertical con la superficie de la celda. Barras de escala: 10 mm.

Las gotas siguen el camino de máxima pendiente local, de manera, que si la superficie de sustento posee alguna clase de curvatura, la lucha de las gotas por trepar las termina por deformar, transformándolas en estructuras similares a pétalos o dedos (ver fig. 3.16). La geometría -aparentemente diferente y llamativa- que adquieren las gotas en superficies con curvatura no es fortuita y subyace en un sólo elemento común.

Considérese un cono vertical que representa el apilamiento de las partículas que conforman la gota, de modo que la punta del cono coincide con la cima de la gota. Entonces, la geometría de la gota, será el resultado de la intersección de dicho cono con la superficie de la plataforma de vibración. En la celda convexa, la forma de la gota que está en el ápice del domo, mantiene su forma cónica (figura 3.17b), en cambio, en la superficie cóncava, aparece un pétalo porque es el contorno obtenido de la intersección del cono, con la cuenca de la celda (figura 3.18b). Esta construcción permite no sólo explicar la forma de las gotas, sino que es capaz de reproducir nuestros resultados experimentales (figura 3.18a) a partir de los ángulos de avalancha medidos previamente(figura 3.8)

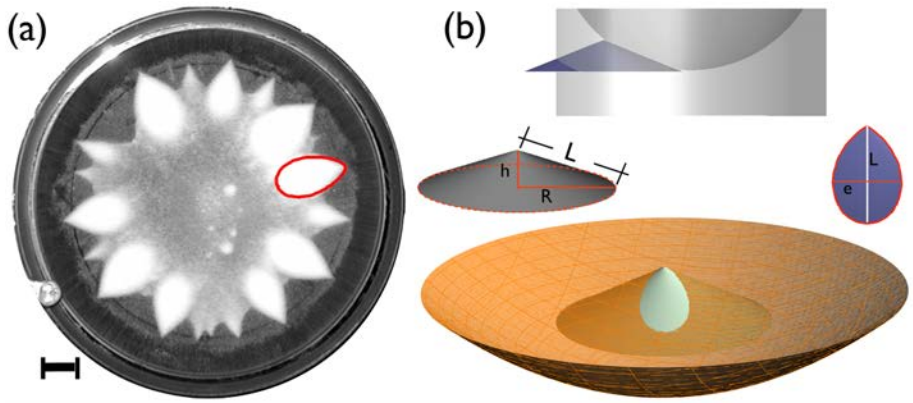

Figura 3.18: (a) Pétalos Granulares en una celda de superficie cóncava. Barras de escala: 10 mm. (b) Forma de la gota obtenida por la intersección de un cono vertical con la superficie de la celda. El borde rojo del panel (a) corresponde al contorno de la gota obtenido por este método.

En una superficie convexa, un frente radial de dedos granulares aparece porque el radio de curvatura genera una pendiente pronunciada donde la intersección del cono con la superficie, da como resultado una gota elongada. A medida que el radio de curvatura disminuye, la gota elongada se rompe en gotas más pequeñas que continúan trepando hasta llegar a la cima del domo, donde finalmente coalescen creando una gota robusta y aislada. Haciendo uso de este tipo de geometría, se diseñó una superficie que mantuviera el motor de ascenso de las gotas y las dosificara de forma controlada. La figura 3.19 consiste en una hélice de manto convexo. Esta construcción, concentra las gotas en la cresta del manto, y después, debido al cambio de la pendiente de la hélice, la sucesión de gotas generadas comienzan a subir. Una vez que han trepado y alcanzado la cima de la hélice, las partículas de la gota caen hasta la base de la hélice, donde el polvo nuclea nuevamente generando gotas que vuelven a transitar por la superficie.

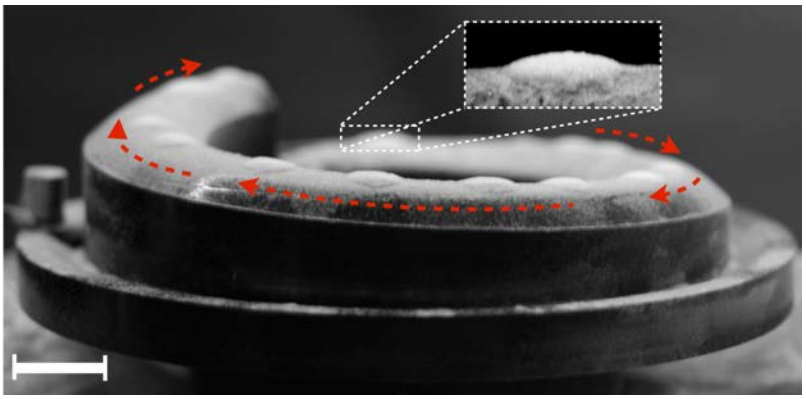

Figura 3.19: Gotas escalando una celda helicoidal. Flechas rojas punteadas muestran la trayectoria de las gotas.Segmento encajonado: magnificación de una gota de la superficie. Barras de escala: 10mm.

3.3.3. Mecanismo de ascenso de las gotas

3.3.3.1. Influencia de las condiciones ambientales en mojado granular

De acuerdo a la discusión generada en 1.7, una variedad de distribuciones de tamaños de gotas se forman cuando se alcanza el umbral Γ_c en un plano inclinado, y la rapidez de subida no depende sus tamaños. Para estudiar los efectos de la fricción del fluido intersticial durante la subida de las gotas, una celda cerrada de superficie plana e inclinada en un ángulo α =15º respecto de la horizontal, se somete a la inyección de varios gases. En orden a la discusión de la sección 1.3, la inyección apropiada de un gas permite controlar la viscosidad del ambiente donde se encierran los granos [17]. Cuatro diferentes tipos de gases: Neón (η =321 μP), Argón (η =229 μP), Aire (η =186 μP) y Butano (η =75 μP) son usados para este fin. La inyección de estos gases se controla mediante un sistema de bombeo de vacío en la celda; cada uno de ellos es ingresado luego de haber alcanzado un vacío prolongado de $\sim$10^{-2} mmHg mediante una bomba mecánica, hasta alcanzar la presión atmosférica. Para asegurar la evacuación del aire en los granos, las partículas son mantenidas a Γ =3.0 durante la etapa de vacío máximo, durante 5 min.

Durante el desarrollo del experimento, se observó que la reducción de la presión acarreaba la formación de gotas de mayor tamaño que no necesariamente eran de forma circular, sino más bien elípticas. También, se observó mojado que se manifestaba en estructuras aglomeradas como mantos amorfos, dedos o líneas de olas.

La rapidez de ascenso de las gotas de Gel de sílica hechas de granos de 100 μm vibrando a 15 Hz, es medido usando adquisición de imágenes provenientes de una cámara rápida en la misma configuración que la discutida en la sección anterior. En la figura 3.20, los cambios en las pendientes de las curvas de velocidad (panel (b)) apuntan a que la rapidez de la gotas se mantiene aproximadamente independiente al cambio en la viscosidad, y sólo se escapa de esta tendencia el comportamiento bajo gas Neón (zona de mayor viscosidad). Además, mediciones hechas en aire (panel (a)) indicarían también, que la velocidad de subida de las gotas tampoco depende apreciablemente del tamaño de los granos que las conforman. Las implicaciones de estos resultados, serán nuevamente analizadas cuando se realice la caracterización dinámica del gas en las gotas.

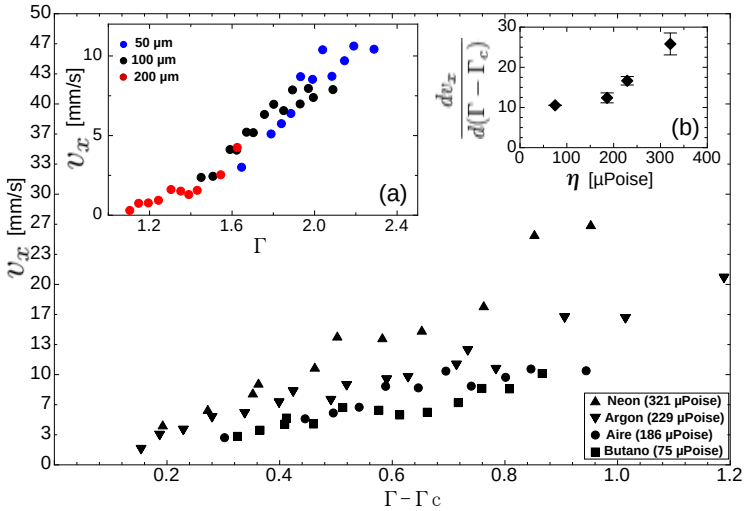

Figura 3.20: Efectos de la viscosidad en el mojado Granular hecho por gotas de gel de (d =100 μm,f =15 Hz). Subpanel(a): Respuesta en Γ de la velocidad de subida de gotas granulares de gel de sílica para varios tamaños de partícula d (f =15 Hz). Subpanel(b): Razón de cambio de la rapidez de ascenso en función de la viscosidad dinámica η

3.3.3.2. Medición in situ de la presión durante la reptación

La celda en forma de hélice (figura 3.19) da luces para elaborar un dispositivo que permite dirigir y aislar gotas escaladoras. En este contexto, se diseñó una configuración experimental para medir la presión de gas $P(t)$ que hay en la base de la gota mientras se encuentra reptando por una superficie inclinada, con el objetivo de dilucidar el mecanismo responsable del mojado granular a través de la cuantificación -en tiempo real- de la fuerza sobre las gotas.

El dispositivo experimental consiste en una celda hecha de un tubo de acrílico transparente (46 mm de diámetro interno y 80 mm de alto) unido a una montura de aleación de aluminio. La base de la celda es un cilindro de robalón, cuyo eje de simetría está inclinado en un ángulo α =12.8º respecto de la horizontal. Este arreglo garantiza una superficie inclinada con una sola curvatura, que guía las gotas a subir siguiendo una trayectoria rectilínea sólo por la cresta del manto cilíndrico (fig.3.21).

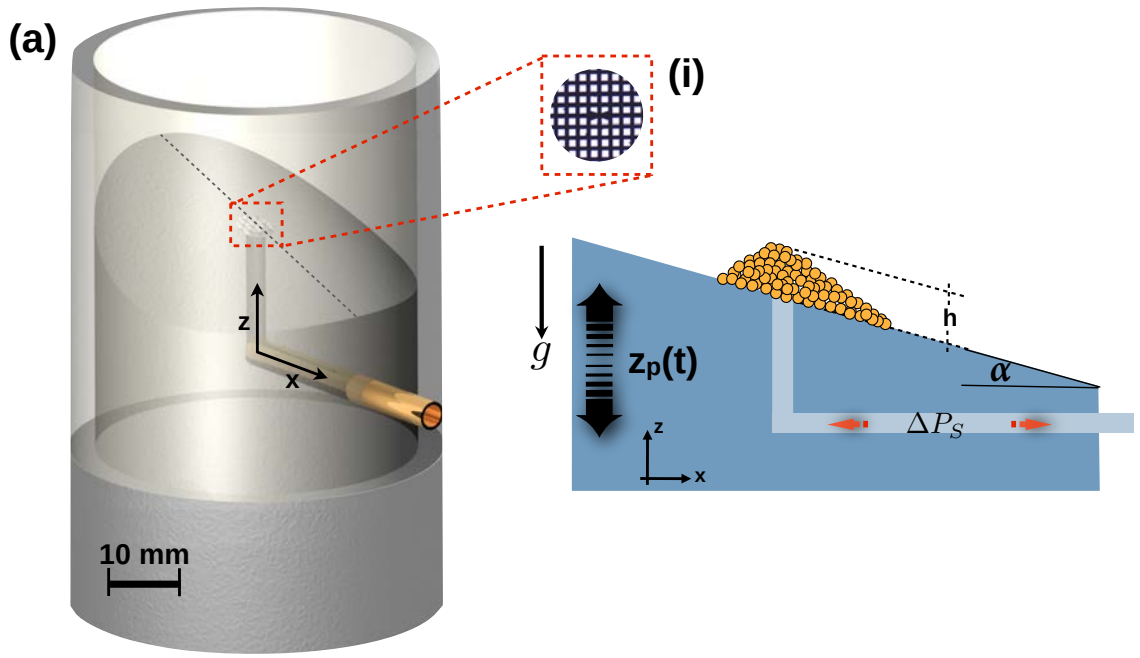

Figura 3.21: Celda para la medición de la presión debajo de la gota durante el mojado granular. Panel Izquierdo: Vista en perspectiva de la celda, mostrando un acercamiento (i) de la rejilla de protección. Panel Derecho: Diagrama de la reptación de la gota mientras pasa por la cavidad protegida por la rejilla.

La velocidad de subida de la gota, se midió utilizando la cámara rápida HISIS 2000, instalada con la misma configuración ya detallada en la sección 3.3.1.2.

La medición de la presión se realiza conforme a la exposición hecha en la sección 2.1, mediante un canal en forma de *L*, de 2 mm de radio (este tamaño evita la pérdida de carga), perforado en la base de robalón. El extremo superior de la cavidad emerge en un punto de la cresta de la base, intersectando el camino de la gota; y para evitar que las partículas tapen el canal, se cubrió esta entrada con una rejilla TEM similar a la usada en la sección 2.1. El otro extremo del canal se comunica con un sensor de presión diferencial OMEGA-PX277 que mide en el rango de -125 a 125 Pa. Para comunicar la cavidad y el sensor de presión, se emplea la misma manguera sin torsión usada en la sección 2.1. Esta configuración experimental entrega la diferencia de presión $\Delta P(t) = P(t) - P_0$ (P_0:

presión atmosférica), durante el tránsito de la gota granular por la rejilla (ver fig.3.21).

Para una gota trepando a velocidad conocida, la envolvente de $\Delta P(t)$ (ver fig.3.22a) entrega información detallada de todo el perfil de la presión a lo largo de la base de la gota. La amplitud de dicha envolvente es máxima cuando la cima de la gota coincide con la vertical de la cavidad *L*.

Dentro de un ciclo, en una gota granular, $\Delta P(t)$ exhibe el mismo comportamiento ya observado para la presión debajo de una columna granular vibrando verticalmente (2.2), y tres etapas son visibles (ver figura 3.22(b)): Una **depresión** (zona I) que comienza inmediatamente después de que la gota vence la fuerza normal (que ocurre cuando la aceleración local es igual a $-g$), una **sobrepresión** (zona II) ocasionada porque la gota se aproxima a la plataforma de vibración, y una **relajación** de la presión (zona III) por la expulsión del gas acumulado, que viaja través de los poros de la gota, debido a la compactación que experimenta por su colisión con la superficie de vibración en un tiempo t_c. El panel b de la figura 3.22 muestra la superposición de 3 ciclos donde $\Delta P(t)$ es máximo para una gota granular de gel sílica hecha con partículas de 100 μm, vibrando a 30 Hz y $\Gamma =$3.0.

El mecanismo responsable del mojado granular actúa de la siguiente forma:

Durante el despegue, el cambio de volumen generado por la brecha entre la gota y la plataforma inclinada provoca una disminución en la presión. La integración del perfil de la presión en la base de la gota entrega una estimación de la intensidad de la fuerza total.

Para que la gota, en vez de caer por la pendiente sea capaz de subir, la fuerza neta total debe mostrar una componente horizontal en dirección ascendente, esto ocurre siempre y cuando el resultado de la integración del perfil de presión sea negativo, es decir, que la fuerza resultante sea normal y atractiva

a la plataforma.

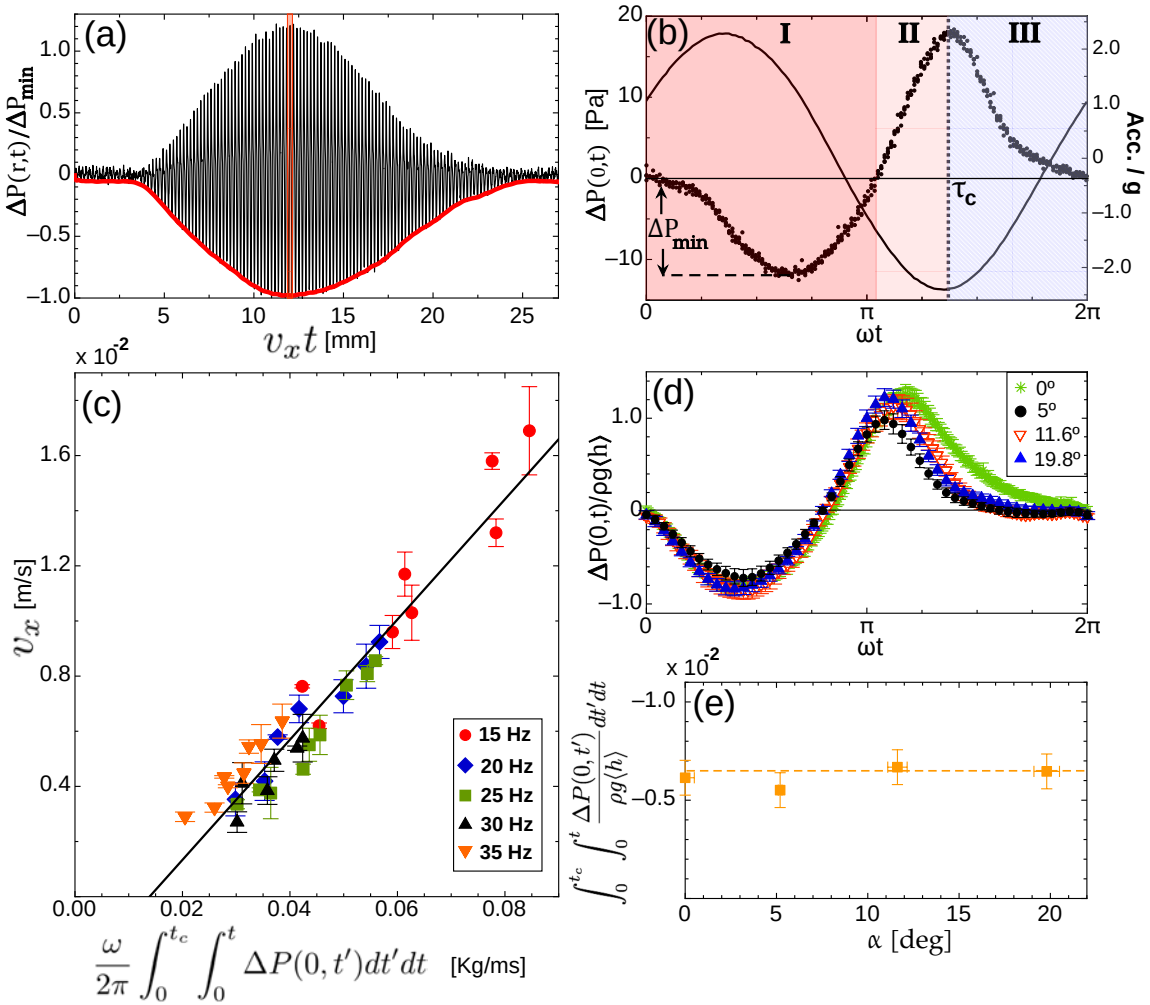

Figura 3.22: (a)Señal de presión durante el tránsito de una gota granular de gel de sílica por la rejilla de seguridad (velocidad de subida: 5.8 mm/s, gota hecha de partículas de d=100 μm, f=30 Hz, Γ =3.0, y α =12.8º). (b) Detalles de la señal de presión (puntos) y aceleración (línea sólida), en un ciclo, en la zona de máxima variación de presión (franja roja panel (a)): I Depresión (por despegue de la gota). II Sobre presión (por retorno de la gota a la plataforma). III Relajación (después del aterrizaje de la gota en la plataforma). (c) Velocidad de subida de las gotas en función de la presión integrada [Ec. (3.2)] para distintas frecuencias f; Los límites de integración [0, $\tau_c = \omega t_c$] están definidos en (b). (d) Ciclos de presión en varias superficies inclinadas, α respecto a la horizontal (f =20 Hz, Γ =2.2). (e) Presión integrada en función de la pendiente α.

Consideremos, una gota de altura promedio $\langle h \rangle$ y volumen $V = S\langle h \rangle$, escalando a lo largo de una pendiente de inclinación α respecto a la horizontal.

La ecuación de movimiento para el centro de masa de la gota a lo largo de la dirección horizontal (ver fig.3.21), lleva a:

$$\rho V \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \int_S (P(\vec{r},t) - P_0)\sin(\alpha)dS, \tag{3.1}$$

Donde $x(t)$ es la posición horizontal de la gota, $P(\vec{r},t)$ la presión en la posición $\vec{r}$ en un tiempo t dentro del plano de la base de la gota, y S, el área de la sección inferior de la gota.

Entonces, el promedio de la velocidad horizontal de la gota, se puede estimar de la expresión:

$$v_x = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\sin(\alpha)}{\rho\langle h\rangle}\left[\int_0^{t_c}\int_0^t \langle\Delta P(t')\rangle_S dt'dt\right], \tag{3.2}$$

donde $\langle\Delta P(t)\rangle_S$ es el promedio de la diferencia de presión $P(\vec{r},t) - P_0$ sobre la superficie S en un tiempo t.

Para verificar el cumplimiento experimental de la ec.(3.2), se produjeron gotas de gel de sílica (hechas de partículas de $100\mu m$) con la misma altura promedio, $\langle h\rangle$, asegurándonos que todo el polvo granular en la celda formara una sola gota. Se midió la velocidad de las gotas junto con las variaciones de presión asociadas a su subida. En orden para estimar los efectos de la fuerza motriz, consideramos en vez de $\langle\Delta P(t)\rangle_S$, la diferencia de presión $\Delta P(t)$ en la zona de máxima variación de presión (franja roja fig.3.22(a)). Sin pérdida de generalidad, se puede anticipar que $\langle\Delta P(t)\rangle_S = C\Delta P(t)$, donde C representa un factor de corrección geométrico menor que la unidad.

De la figura 3.22b, la asimetría de la señal de presión anticipa que en los límites de integración de la ec.3.2, la región I predomina por sobre la II, de modo que la fuerza motriz es efectivamente atractiva. Los resultados mostrados en la fig.3.22c, reafirman la dependencia lineal entre la velocidad de subida de las gotas, v_x, con la integral de la fuerza motriz para distintas frecuencias de vibración. El ajuste experimental de la pendiente del gráfico, revela que $C \approx$0.85

lo cual indica que la presión varía lentamente a través de la base de la gota, excepto en las cercanías de los bordes de gota, donde eventuales fugas de gas pueden estar presentes.

Los trabajos previos de Melo et al.[22], mostraron que v_x es aproximadamente lineal con el ángulo de la pendiente (α) de la plataforma, lo cual es consistente con la ec.(3.2), siempre y cuando la variación de la presión sea independiente de la inclinación α. Consecuentemente, la fig.3.22d muestra que la señal de presión es casi invariante cuando se cambia la inclinación de la plataforma, y más aún, el panel (e) sostiene que la presión integrada es independiente de α, validando la ec.(3.2).

Vale la pena notar, que el tamaño de la rejilla de seguridad de la celda (45 μm), limita el tamaño de las partículas que pueden estudiarse. Basados en el nivel de polidispersión mostrado en los histogramas 3.7, resulta seguro trabajar con partículas de hasta d $\sim$[70-80] μm sin riesgo de obstrucción de la cavidad para la medición de la presión.

No hay que olvidar además, que de acuerdo a los resultados señalados en la fig.3.20a, la exploración de la rapidez de subida de gotas hechas de granos de diferentes tamaños está supeditada a la elección apropiada de la aceleración Γ, pues como se indicó en los diagramas de fase 3.12, el umbral de la inestabilidad Γ_c es muy sensible al tamaño de partícula (d), dificultando caracterizar ampliamente la dependencia de v_x con el tamaño de grano, pues no es posible encontrar una región Γ donde coexistan simultáneamente gotas conformadas por granos de tamaños muy diferentes. Asímismo, se observó que no es posible crear gotas robustas para $d >$200 μm.

A pesar de todas las dificultades detalladas, logramos observar que para Γ y f fijos, v_x parece exhibir muy baja dependencia con d (ver fig.3.23).

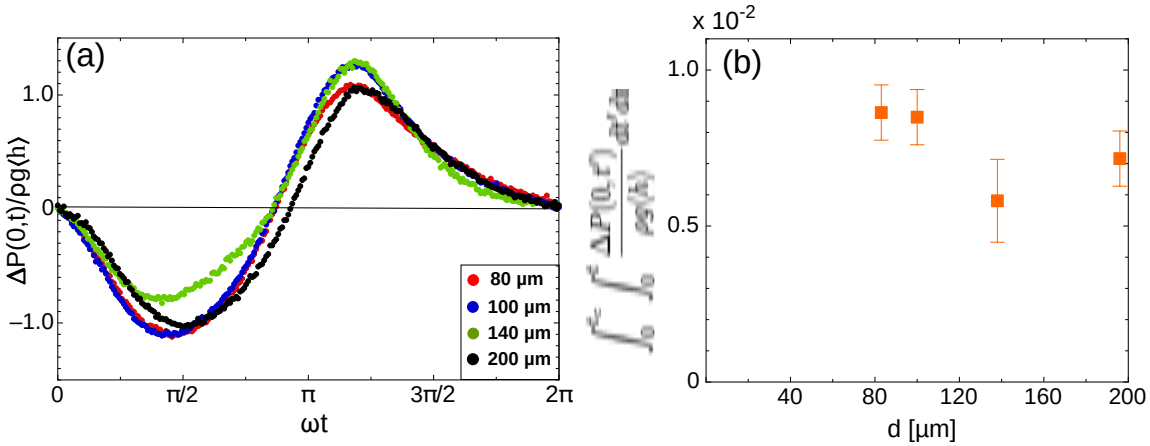

Figura 3.23: (a) Señales de Presión debajo de una gota granular hecha de partículas de distintos tamaños d (Γ =2.2; f =20 Hz). (b) Dependencia de la Presión integrada con el tamaño de grano d

3.3.3.3. Medición de la presión en gotas estables aisladas

Indagaremos ahora en la dinámica de la presión del gas y determinaremos el comportamiento de los ingredientes que permiten sostener a las gotas granulares. En vista ello, se aisló y estabilizó una sola gota granular valiéndose de una celda de superficie convexa de 97 mm de diámetro (figura 3.24), donde se puede estudiar sistemáticamente la dependencia del exceso de presión debajo de ella.

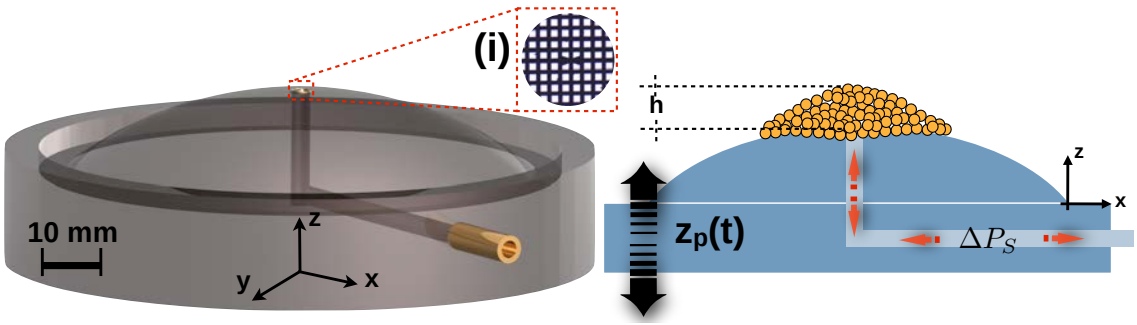

Figura 3.24: Celda convexa para medición de la presión de una gota estable. Panel Izquierdo: Vista en perspectiva de la celda, mostrando un acercamiento (i) de la rejilla de protección. Panel Derecho: Diagrama de la gota en estado estacionario situada encima de la cavidad (protegida por la rejilla de seguridad) para la medición de la presión.

La celda es construida a partir del vaciado de resina de poliéster en un molde convexo (membrana metálica de un twitter de audio de alta potencia) que asegura la esfericidad de la superficie. El radio de curvatura de la celda (57.5 mm) es mucho más grande que el tamaño típico de la gota.

Análogamente a lo descrito en 3.3.3.2, la presión debajo de la gota granular es medida gracias a una cavidad en forma de *L* que se encuentra al interior de la celda. El extremo vertical de la cavidad se se asoma justo en la cima del domo convexo, donde la gota permanece estable y el gap de la presión es periódico. La salida horizontal de la cavidad se comunica con el sensor de presión descrito en la sección 2.1 y 3.3.3.2.

La correlación temporal entre la pendiente de las gotas y el gap de la presión apunta a un acoplamiento complejo entre estas cantidades. Nosotros consideramos variaciones periódicas de la presión debajo de la gota que se mantiene rebotando verticalmente en la cima del domo convexo, y nuevamente, como en 3.3.3.2, tres etapas se distinguen en un ciclo de la presión (fig. 3.25a).

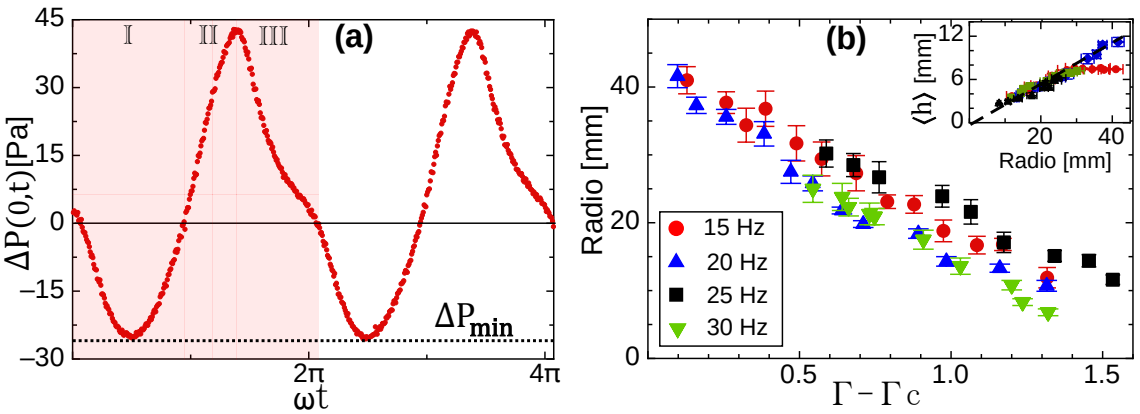

Figura 3.25: Celda convexa: Rasgos de estabilización de gotas granulares. (a) Señal típica de presión mostrando tres etapas principales: I, depresión, justo después del despegue de las gotas respecto a la plataforma; II, sobrepresión, debido al retorno de la gota a la plataforma; y III, relajación de la presión (Γ= 2.6, f =15 Hz). (b) Radio máximo de una gota estable como función de la aceleración Γ para diversas frecuencias f. Subpanel: Altura de la gota vs. su radio; la proporcionalidad entre las variables está en orden con la -aparente- forma cónica de la misma.

La figura 3.26 muestra la dilatación relativa máxima ($\delta_{max} = \frac{h(t)-h_0}{h_0}$) en el ápice de las gotas. La deformación de las gotas responde sensiblemente a la frecuencia cuando la diferencia entre Γ y Γ_c comienza a ser $\gtrsim 1g$. Vale la pena señalar, que las gotas son estructuras esencialmente cónicas (ver subpanel fig 3.25b), de modo que el frente de dilación mostrado, se amplifica en el eje radial de las gotas, y tal y como se observó en la columna granular estudiada en el capítulo 2, la dilatación se concentra en la zona más cercana a la superficie libre.

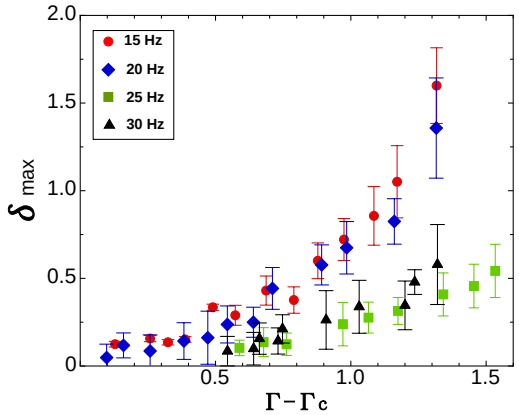

Figura 3.26: Dilatación relativa del ápice de una gota granular de gel de sílica compuesta de partículas de 100 μm.

Proponemos entonces, una simplificación geométrica para el análisis del patrón experimental, porque precisamente, el cálculo de la evolución temporal del gap de presión requiere encontrar la forma de la gota de manera autoconsistente para cada tiempo, lo cual, según lo que muestran nuestros resultados es difícil. Entonces, en primera aproximación, despreciamos la convección en los granos y que la gota mantiene una estructura cónica no deformable. Por una parte, la gota está sometida a la fuerza de la presión, de modo que la altura $z(t)$ del centro de masas de la gota en el sistema de referencia inercial (Lagrangiano) obedece:

$$\ddot{z}(t) + \ddot{z}_p(t) = -g + \frac{1}{\rho V}\int_{S_T} P(r,t)\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{dS}, \tag{3.3}$$

donde $z_p(t) = A \sin \omega t$ es la posición vertical de la superficie sólida, y $\hat{\mathbf{z}}$ el vector unitario en dicha dirección.

La integral se calcula sobre toda el área, S_T, del manto de la gota. Considerando la presión media $\langle \Delta P(t) \rangle_S$ en la base de la gota en un tiempo t, se puede reescribir a posterioridad la relación: $\ddot{z}(t) + \ddot{z}_p(t) = \frac{S}{\rho V} \langle \Delta P(t) \rangle_S - g$.

Por otro lado, la diferencia de la presión a través de la gota induce un flujo de gas hacia los granos. La tasa de cambio instantánea del flujo es aproximadamente dada a partir de la Ley de Darcy 1.5, y la permeabilidad κ, la continuamos usando a partir de la relación de Ergun 1.8, y ψ es la porosidad.

Sobre la base de la discusión hecha en B.11, debe notarse que los efectos de la compresibilidad en las gotas granulares pueden ser despreciados cuando $f\tau_D << 1$, con $\tau_D = \langle h \rangle^2 / D$. Donde $D \equiv \kappa / \psi \eta K$ es el coeficiente de difusión y K representa la compresibilidad del gas, que para los efectos del caso en estudio, en aire, este efecto se vuelve significativo a relativas bajas frecuencias superiores a 40 Hz.

Finalmente, contemplando las consideraciones hechas arriba, asumiendo que el gas se comporta como un fluido incompresible, se puede estimar que la variación $\dot{G}(t)$ de la brecha, $G(t)$, entre la base de la gota y la superficie sólida bajo vibración, es sólo permitida por el flujo de gas a través de la gota, el cual impone que $\dot{G} = q_z$, con $q_z = \frac{\kappa}{\eta} \frac{\langle \Delta P(t) \rangle_S}{\langle h \rangle}$ (Ley de Darcy). Nótese entonces, que en ausencia de dilatación de la gota, $\dot{z} = \dot{G}$. Entonces, combinando la ecuación que gobierna el movimiento vertical de la gota con la condición impuesta por la incompresibilidad del gas, se obtiene la ecuación de von Kroll [24, 25]:

$$\ddot{G}(\tau) + \frac{\dot{G}(\tau)}{\tau_\kappa} = \frac{A}{\Gamma} [\Gamma \sin(\tau + \tau_0) - 1], \tag{3.4}$$

Tal y como se discutió en el capítulo 2: $\tau = \omega t$ y $\tau_0 = \omega t_0 = \arcsin 1/\Gamma$,con t_0 siendo el tiempo en que la gota despega. El parámetro $\tau_\kappa = \omega \kappa \rho / \eta$ es un tiempo de relajación. Recogemos la solución analítica de esta ecuación descrita

previamente en 2.5, para indagar en el límite experimental de la diferencia de presión, $\langle \Delta P \rangle_{S,min}$ pero en la región de polvos granulares (de los cuales está compuesta la gota). Esta depresión, se captura mediante la minimización de la ec. 2.5 con respecto a τ, en el límite τ_κ <0.7 y Γ cercano a 1. Todo esto conduce a:

$$\langle \Delta P \rangle_{S,min} \approx -\rho g \langle h \rangle \Big[(\Gamma - 1) - \frac{\Gamma}{2} {\tau_\kappa}^2 \Big]. \tag{3.5}$$

Asumiendo que la diferencia de presión medida en el centro de la base de la gota $\Delta P(0, \tau)$ fig. 3.25(a), difiere de $\langle \Delta P(\tau) \rangle_S$ sólamente por una constante multiplicativa, se puede estimar finalmente que la amplitud máxima de la variación de la presión es simplemente proporcional a $\langle \Delta P \rangle_{S,min}$. Con esta suposición, la ec. 3.5 predice correctamente que la amplitud de la variación de presión es proporcional tanto a $\langle h \rangle$ como a $(\Gamma - 1)$, en correspondencia a los datos experimentales mostrados en la fig 3.27(a) y (b) respectivamente. Nótese además, que $\langle \Delta P \rangle_{S,min}$ es una función que varía lentamente con τ_κ y que regímenes donde $\tau_\kappa >> 1$ no son ni capturados por la ec. 3.5, o vistos por nosotros con los parámetros experimentales explorados en nuestros estudios sobre las gotas granulares.

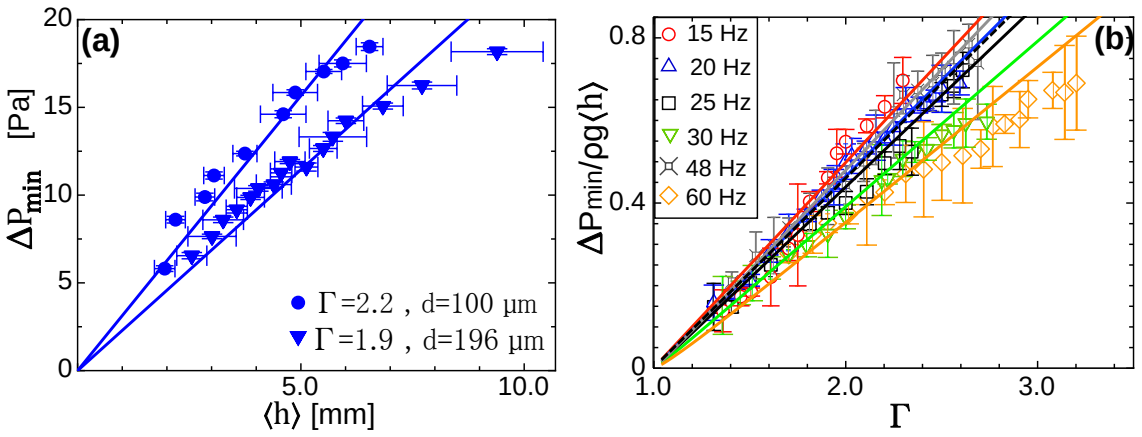

Figura 3.27: Estudio de la Presión en gotas estables. (a) Depresión Máxima de la gota vs la altura de la misma (f =20 Hz). (b) Respuesta en Γ de la depresión máxima originada por una gota conformada por partículas de gel de silica de 100 μm. Las líneas corresponden al ajuste de los resultados a partir de la expresión 3.5 con una porosidad ψ =0.54.

Finalmente, ya que el exceso de presión es proporcional a $\langle h \rangle$ (ec. 3.5), la ec. 3.2 inmediatamente predice que la velocidad de la gota es independiente del tamaño de la misma, tal y como fue confirmado experimentalmente por Melo et al. [22] previamente.

3.4. Modelamiento del umbral de la inestabilidad

Como consecuencia de la medición de la presión, discutiremos a continuación una formulación para entender el umbral de la inestabilidad que genera el mojado.

Una condición para la formación de apilados granulares por vibración (*heaping*) discutidos en la sección 1.3, es que el trabajo de la presión en un ciclo, debe exceder la energía potencial -necesaria- para levantar una monocapa de granos hasta una cierta altitud igual al espesor de dicha capa. Esta condición, puede ser escrita de la forma,

$$\int \left(\langle P \rangle_S - P_0 \right) dz \geq \rho g \langle h \rangle d.$$

La expresión anterior conduce a obtener un valor crítico para la aceleración adimensional que lleva al *heaping*, que llamaremos Γ_h, que en el límite $\tau_\kappa \ll 1$ está dado por:

$$\left(\Gamma_h - 1 \right) \Gamma_h \geq \frac{d\omega^2}{g}$$

Como se señala en la fig.3.28(a), la aceleración crítica Γ_c para la cual se activa la gota es aproximadamente lineal con la frecuencia ω y decrece rápidamente cuando aumenta d. Asimismo, Γ_c disminuye con el aumento de la densidad del material del cual se componen las gotas. Es interesante notar, que las mediciones de Γ_c como función de la presión medioambiental del gas circundante que se muestra en la fig. 3.28(b), señalan que Γ_c no es una función

de la densidad del gas sino mas bien indican, que el parámetro relevante es la viscosidad dinámica η, con la cual tiene dependencia lineal.

El parámetro correcto para escalar Γ_c puede recuperarse estableciendo la existencia de una brecha mínima, del orden del tamaño de partícula d, que representa la escala de tamaño requerida para activar la formación de gotas; es decir, que el umbral ocurre cuando las partículas despegan de la plataforma de vibración una distancia equivalente a una fracción de partícula d. A partir de la expresión 3.4, reemplazando el gap máximo por un factor βd, con β un número constante, encontramos que:

$$\frac{150\beta(1-\psi)^2\eta\omega}{d\psi^3 g\rho} \approx \int_0^{\tau_s} [\Gamma_c \sin(\tau+\tau_0) - 1]\, d\tau, \tag{3.6}$$

donde τ_s es el tiempo adimensional en el cual el gap es máximo. Hay que destacar, que para $\tau_\kappa << 1$, el lado derecho de la ec. (3.6) puede aproximarse a $\Gamma_c - 1$, lo que conlleva a:

$$\Gamma_c - 1 \approx \frac{150\beta(1-\psi)^2\eta\omega}{d\psi^3 g\rho}. \tag{3.7}$$

La ec. 3.7 suministra una dependencia funcional de Γ_c consistente con todos nuestros resultados experimentales (incluyendo aquellos documentados por Melo et al. [22]), tal y como se presentan en la fig. 3.28(a).

Todas las curvas experimentales mostradas, son ajustadas a partir de la relación 3.7 utilizando un único parámetro numérico β =0.3. Para $\tau_\kappa > 1$, el lado derecho de la ec. 3.6 es -en adición- una función de τ_κ, conduciendo a una expresión implícita para Γ_c que se puede calcular numéricamente. Hay que notar, que en éste último rango, la solución numérica se genera de forma autoconsistente, pues para obtener Γ_c se necesita el tiempo τ_s que depende fuertemente de τ_κ y cíclicamente de Γ_c.

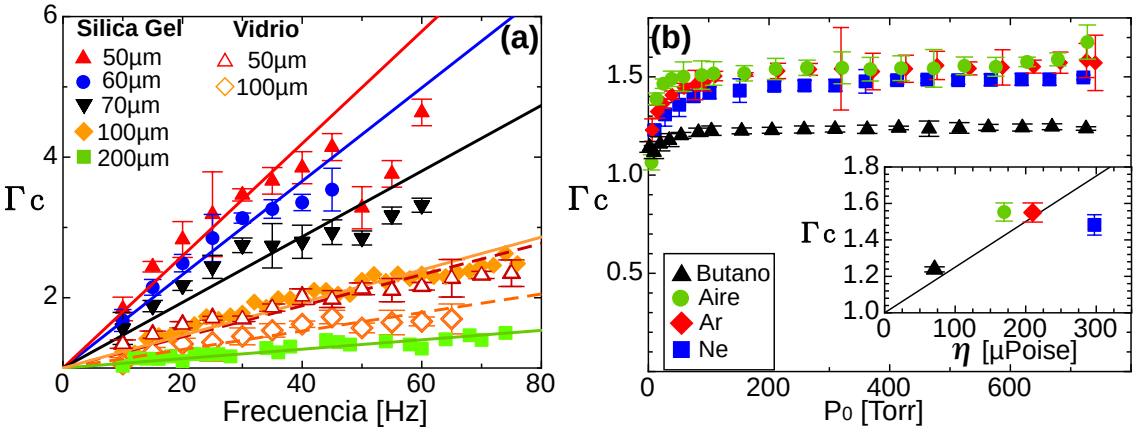

Figura 3.28: Modelo del umbral de la inestabilidad. (a) Evolución en frecuencia de Γ_c para distintos tamaños de partículas para gotas hechas de vidrio y gel de silica. Las lineas continuas representan el mejor fit logrado con la ec 3.7 con β =0.3. (b) Respuesta de Γ_c con la presión medioambiental P_0, para gases con distintas viscosidades. Las gotas analizadas corresponden a partículas de gel de sílica de tamaño $d = 100$ μm, a $f = 20$ Hz. Panel interno: Dependencia de Γ_c con la viscosidad del medio η para: Neón,Argón,Aire y Butano; acá, el ajuste proviene de la ec 3.7 con β =0.3

3.5. Conclusiones

Se ha mostrado que la formación de las gotas y su reptación, son cuantitativamente descritas mediante la medición y el modelamiento del exceso de presión debido al flujo del gas que pasa a través del medio poroso conformado por las gotas. Las verificaciones recogidas, sugieren que la fuga de gas esperada en los bordes de la periferia de las gotas no son dominantes en el rango experimental que se ha explorado en esta investigación. Además, un modelo simplificado rinde cuenta satisfactoriamente para describir la dependencia de la velocidad de las gotas en el régimen experimental, es más, en consideración a que el salto de presión es aproximadamente independiente de $\tau_\kappa = \omega\kappa\rho/\eta$ en el límite $\tau_\kappa << 1$, pues depende cuadráticamente con $1/\eta$ en un factor correctivo, se observa que la velocidad depende poco de la viscosidad dinámica del gas. Este resultado consolida las observaciones hechas en la fig. 3.20 que muestran -esencialmente- que la velocidad depende poco de la viscosidad, salvo una leve

variación registrada en neón, que es también observada en el subpanel de la fig. 3.28(b).

Mostramos también, que existe un límite máximo de tamaño que permite sustentar gotas granulares. El tamaño de las gotas puede controlarse en una celda de superficie convexa, sintonizando los parámetros de vibración mostrados en la fig.3.25(b), donde el tamaño decrece cuando se incrementa la aceleración Γ en el rango de las frecuencias de vibración generadoras de gotas. Y en consolidación a lo expuesto, las trayectorias de las gotas pueden ser definidas a partir de la geometría de las superficies, como se ilustra en la fig. 3.19, presentando nuevas estrategias para el control, manipulación y envío de polvos.

Capítulo 4

Conclusiones y Proyecciones

En esta última sección, recopilaremos los resultados detallados en el capítulo 2 y 3 de esta tesis, guiando al lector en un recorrido por la estructura generada a raíz de nuestros hallazgos, señalando simultáneamente, algunos de los desafíos y proyecciones de este trabajo.

4.1. Capítulo 2: Dinámica de una Columna Granular bajo vibración

Nuestra propuesta experimental para el estudio de la interacción aire-grano de una columna granular alojada en un tubo bajo vibración vertical, nos permite medir cuatro variables simultáneas que describen toda la dinámica del sistema: la aceleración local, la brecha entre la plataforma de vibración y la zona inferior de la columna de granos que es levantada por la aceleración del tubo (G), la dilatación (cambio de altura de la columna) y la presión del gas en la brecha.

La medición de la presión del gas, es realizada mediante un sistema no invasivo que permite cuantificar con precisión pequeñas variaciones en la presión, de a lo más 250 Pa.

Para el modelamiento matemático de nuestros resultados, se ha empleado la propuesta hecha por von Kroll (1954), que reduce una capa granular a un pistón poroso indeformable a través del cual está permitido el paso de un flujo de aire. Esta simplificación permite obtener una solución analítica que describe la brecha entre la plataforma y la base de la columna granular, y la presión alojada en la misma. Este modelo, contiene sólo un parámetro ajustable que revela la porosidad efectiva del medio ψ.

De acuerdo a nuestros resultados, el ajuste de la brecha arroja un amplio intervalo de tolerancia para encontrar la porosidad del medio, en cambio, la presión es la variable más sensible (fluctuaciones del 1 $\%$ de la porosidad, pueden

inducir cambios de presión del orden del 10 y el 15 $\%$) y por ende, es más apropiada para rescatar la porosidad.

El modelo de von Kroll no permite describir toda la evolución temporal ni de la brecha entre la plataforma y la base de la columna, ni de la presión. Esta dificultad, crece cuando la aceleración inyectada es cada vez mayor, pues la dilatación de la columna es más sustancial, alejándose de las simplificaciones del modelo; sin embargo, von Kroll si captura adecuadamente las cantidades globales, y predice correctamente las dependencias funcionales de los límites de la presión y la brecha mediante la sintonización de la porosidad.

La máxima succión del aire en un ciclo ΔP_{min} (presión mínima en la brecha), escala linealmente con el peso hidrostático de la columna ($\rho g \langle h \rangle$), decrece como $1/f$ y aumenta con la aceleración (ver ec.2.6). La dependencia con la aceleración a frecuencia constante es capturada con valores de ψ levemente mayores a la porosidad en reposo, debido a la relevancia que adquiere la dilatación. La respuesta en frecuencia a aceleración constante, apunta a que la porosidad disminuye un poco, acercándose a valores cercanos al RLP. Los mayores valores de succión logrados a alta aceleración (~ 4g), son del orden del 15 $\%$ del peso de la columna.

Por otro lado, el modelo de von Kroll predice que la brecha máxima es invariante al cambio de la altura de la columna, lo cual se desvía significativamente de nuestros resultados experimentales que señalan que la brecha máxima decrece con la altura. Para poder capturar este comportamiento con el modelo, se requiere que las columnas más altas exhiban una mayor compresión (tipo RLP) que las columnas menos profundas; esta conclusión es delicada, pues se ha observado claramente que la columna se dilata -a veces significativamente- en un ciclo, lo que parece contradictorio con lo anterior. En realidad, nuestras observaciones apuntan, a que la dilatación de la columna (δ) es el resultado de dos situaciones, por un lado, la superficie libre despega moviéndose en régimen balístico, mientras

la base de la columna experimenta una fuerte fricción debido al flujo que ingresa comprimiendo las capas cercanas a esta zona, pudiendo generarse un gradiente de empaquetamiento, de hecho es posible que la zona inferior de la capa se dilate un poco, y sólo por encima de esta zona, el bulk se comprime hasta que llega a la superficie libre, donde las partículas se despegan volando sin fricción. Ésta hipótesis parece ser compatible con los ajustes matemáticos que sugiere el modelo de von Kroll, pues en realidad, no hay una compresión directa en la base de la columna, sino que ésta se dilata un poco reduciendo el tamaño de la brecha.

Asumiendo que la base de la columna se describe por el modelo de von Kroll y la superficie superior obedece a un vuelo libre con aceleración igual a $-g$, nuestros resultados sugieren que δ_{max} sería aproximadamente independiente de la altura de la capa, además, a baja aceleración, la dilatación quedaría descrita con una porosidad global tipo RCP y a aceleración alta la capa muestra mayor porosidad tipo RLP. Estas observaciones plantean una serie de interrogantes sobre el origen de esta dilatación.

Lo anterior nos llevó a plantear un modelo matemático alternativo basado en una separación de la columna en dos bloques, donde se puede inyectar un retardo en el despegue de la capa, o una curvatura en la presión, para intentar promover un mecanismo de dilatación. El conjunto general de las ecuaciones que gobiernan la columna granular es complejo y requiere solución numérica. La corrección a la presión que obtuvimos sigue siendo poco significativa, y similarmente, la dilatación inducida (por efectos de curvatura de la presión y retardo) es despreciable en comparación a los valores reales experimentales. Finalmente, los ingredientes sobre los cuales subyace la dilatación permanecen desconocidos y requieren más investigación.

4.2. Capítulo 3: Gotas y Mojado Granular

Las gotas granulares, son estructuras hechas de polvo, que en superficies no horizontales bajo vibración vertical, adquieren un movimiento ascendente, siguiendo la dirección de máxima pendiente local, generando una especie de mojado granular.

La implementación del esquema experimental usado en el capítulo 2, junto con la cualidad recién descrita, nos permitió idear diversas estrategias para guiar controladamente el movimento de las gotas, y adquirir in situ y en tiempo real, la presión debajo de una gota granular durante su reptación hacia la cima de una superficie.

Nuestros experimentos indican, que el ascenso de las gotas, se debe a la asimetría en la señal de la presión del aire debajo de ellas. Esta asimetría provoca que la fuerza total sea normal y atractiva hacia la superficie de vibración, originando una componente horizontal que dirige las gotas hacia arriba. Establecemos además, una relación funcional entre la rapidez de subida y la fuerza motriz obtenida de la integración de la presión debajo de la gota, que es consistente con observaciones previas, que señalan que la rapidez aumenta con la inclinación de la superficie y no depende del tamaño de las gotas generadas. La dependencia de la presión con el tamaño de partícula no es significativo en el rango experimental que exploramos, y la integración de estos resultados, confirman nuestras observaciones acerca de que la velocidad de subida de las gotas sería aproximadamente independiente del tamaño de las partículas por las cuales están conformadas.

Una superficie convexa permite aislar y estabilizar en su cúspide, una sola gota. Implementando el mismo tipo de sistema para la adquisición de la presión, se puede indagar con precisión, en los ingredientes que generan y sostienen a las gotas. Se obtuvo la evolución de la presión debajo de la gotas con: el tamaño

de grano, la frecuencia, el tamaño de las gotas, y la aceleración.

Una sencilla adaptación geométrica al modelo de von Kroll, permite nuevamente capturar la máxima succión de aire (ΔP_{min}) realizada por la gota para todos nuestros resultados experimentales. En esta ocasión, la succión del aire es significativa, pudiendo llegar hasta cerca del 70 $\%$ del peso de la gota. ΔP_{min} es una función que evoluciona linealmente con el peso hidrostático de la gota y con la aceleración inyectada; pero varía lentamente con la viscosidad, el tamaño de partícula y la frecuencia. El ajuste de nuestros resultados, revela la porosidad de las gotas ($0{,}54$).

Además encontramos, un mecanismo de selección de tamaños de gotas, mediante la sintonización de la aceleración local, donde el aumento de la aceleración reduce el tamaño de las gotas.

Nuestras observaciones apuntan también, a que los efectos de dilatación, convección y fugas de aire en los bordes de gota, efectivamente no son relevantes, validando las aproximaciones hechas en nuestros análisis.

La formación de las gotas granulares subsiste entre una inestabilidad que ocasiona que el polvo se aglomere para formar una pila en forma de gota (Γ_h), y otra que genera el movimiento de reptación ascendente o mojado (Γ_c). Por lo general, $\Gamma_c > \Gamma_h$, de modo que la reptación aparece poco después de la formación de la gota; sin embargo, la reducción de la presión ambiental, junto con los cambios en la viscosidad y la reducción del tamaño de partículas, generaron instancias, en que el mojado era en forma de *mantos, bloques o líneas de olas*, previos a la formación de gotas ($\Gamma_h > \Gamma_c$). Ambos umbrales se confunden fácilmente, y son necesarios más estudios para entender Γ_h.

La región supercrítica Γ_s donde comienza la destrucción de la gota para dar paso a la sublimación granular, requiere más estudio. Al respecto, el monitoreo de la presión debajo de las gotas granulares, puede dar la oportunidad de afinar los límites de este umbral.

Para que la gota escaladora se forme, debe ser capaz de despegar de la plataforma de vibración para lograr reptar, y la brecha que debe vencer, es del orden del tamaño de un grano de su estructura, entonces, Γ_c representa físicamente la aceleración crítica necesaria para lograr dicho despegue. A través del modelo de von Kroll, es posible calcular el valor de Γ para obtener un despegue del orden de β veces el tamaño de una partícula d. Esta ecuación es compleja y debe resolverse numéricamente de forma autoconsistente; sin embargo, en el régimen experimental que exploramos, puede simplificarse, obteniéndose una aproximación analítica que señala que Γ_c crece linealmente con la frecuencia de vibración y la viscosidad del medio, y decrece como $1/d$ y $1/\rho$, con ρ la densidad de las partículas. Esta relación describe correctamente las fases de aparición de la gota para todos nuestros experimentos y para registros previos documentados en nuestro laboratorio desde el 2004, con $\beta \approx$0.3.

Observamos además, que en superficies con curvatura, el mojado granular induce la aparición de estructuras llamativas como flores o pétalos. En general, la geometría del mojado en cualquier superficie, emerge de la intersección de un cono con la misma pendiente de una gota granular, con dicha superficie. Esta construcción permite reproducir nuestras observaciones experimentales.

Con este último elemento, ofrecemos una serie de opciones para el control del envío, forma, tamaño y rapidez de gotas granulares, que eventualmente podrían servir como nuevos mecanismos de mezclado y dosificación de polvos.

Finalmente, en el mediano plazo, se explorarán otros mecanismos de control, como el cambio en la excitación para la vibración.

Apéndice A

Modelo Carman-Kozeny de Permeabilidad

La hipótesis de Carman-Kozeny (C-K), en la que los poros ,D, de una matriz son redes capilares donde la caída de presión sigue la ecuación de Poiseuille: $\overrightarrow{u} = -\frac{D^2}{32\eta}\nabla p$, establece que para un fluido de volumen V_f, la velocidad media superficial puede escribirse como: $\overrightarrow{v} = \frac{1}{V}\int_V \overrightarrow{u} dV = \psi\langle\overrightarrow{u}\rangle$; donde la razón entre V_f y el volumen total ocupado es la porosidad del sistema, $\psi = V_f/V$. Entonces, $\langle\overrightarrow{u}\rangle = \overrightarrow{v}/\psi$.

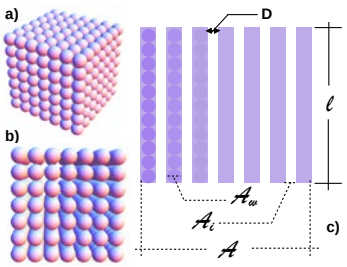

Figura A.1: Red Porosa modelada a partir de una estructura granular periódica. (a) Red SC de partículas esférica. (b) Detalle de los intersticios de la red granular. (c) Aproximación de la red granular a un arreglo de tubos capilares de tamaño D.

Carman, toma en cuenta que la velocidad del fluido en los capilares formados por los poros, debería ser proporcionalmente mayor a lo estimado, pues en realidad, la longitud del canal (l') es mayor que el espesor de la capa porosa, de modo que

$$\langle\overrightarrow{u}\rangle = \frac{\overrightarrow{u}}{\psi}\frac{l'}{l}.$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación de Poiseuille, se obtiene:

$$\nabla p = -32\frac{\eta}{\psi}\overrightarrow{v}\frac{l'}{D^2 l}. \tag{A.1}$$

A partir de la figura A.1, se puede relacionar la sección transversal de la capa porosa ($\mathcal{A}$) con la sección transversal de los intersticios ($\mathcal{A}_i$) y la de las paredes ($\mathcal{A}_w$), tal que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_w$. Como el caudal dentro de los poros es la velocidad media superficial por área, entonces $\mathcal{A}\overrightarrow{v} = \mathcal{A}_i\langle\overrightarrow{u}\rangle$, esto permite reescribir la porosidad como

$$\psi = \frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}}.$$

Multiplicando la expresión de arriba por (l'/l) se obtiene la porosidad en función del volumen del red interna,

$$V_i = \frac{\psi}{1-\psi}V_w. \tag{A.2}$$

Para simplificar los efectos geométricos, se puede modelar plausiblemente toda la red de intersticios como N tubos cilíndricos mediante la incorporación de un factor de forma, de modo que el volumen de la red queda: $V_i = \frac{N}{4}\pi l' D^2$, y de la misma manera, el área total de esos intersticios será $A_i = N\pi D l'$. Dividiendo por A_i entonces

$$D = \frac{\psi}{1-\psi}\frac{4V_w}{A_i}. \tag{A.3}$$

Finalmente, el factor de forma que modela el tamaño del poro (D) no es otro más que el diámetro hidraúlico. Si la pared de la matriz porosa está compuesta por n partículas esféricas de tamaño d, entonces $V_w = \frac{\pi}{6}nd^3$, además, el área total de los poros es también el área de las partículas, $A_i = n\pi d^2$, por lo que se puede reescribir D como:

$$D = \frac{2}{3}\frac{\psi}{1-\psi}d. \tag{A.4}$$

Combinando la Ley de Darcy 1.5 y la ecuación de Poiseulle para el radio hidráulico D descrito arriba, se obtiene finalmente,

$$\kappa = \frac{1}{C_\kappa}d^2\frac{\psi^3}{(1-\psi)^2}. \tag{A.5}$$

Apéndice B

Dinámica de Dilatación de Capas Granulares

B.1. Apéndice: Flujos intermitentes de polvos granulares secos

El siguiente análisis, se inspira en el trabajo de Bertho et al[39, 40] cuya formulación para el análisis del flujo proveniente de la caída de un polvo a través de tuberías puede ser adaptada para nuestros experimentos. A continuación analizaremos la zona correspondiente a la columna ya dilatada próxima a aterrizar y chocar con la plataforma de vibración, intentando extrapolar los resultados en la zona de relajación luego de la colisión (B.1 cuadro en negro).

Primero, reescribiremos las ecuaciones en el sistema Lagrangiano (plataforma de vibración como sistema de referencia).

B.1.1. Ecuaciones en el referencial del Laboratorio.

Sean $v(z,t)$ y $u(z,t)$ las velocidades correspondientes a la caída del frente de granos y del paso del aire respectivamente. La velocidad media superficial de los granos depende de las variaciones de la fracción de empaquetamiento c de la columna, obteniendo el flujo de masa $q = cv$ y el flujo de aire $q_a = (1-c)u$. A partir de la conservación del volumen, llegamos a:

$$\frac{\partial c}{\partial c} = -c\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z}. \tag{B.1}$$

Análogamente, la conservación de masa para el flujo de aire q_a de densidad ρ_a se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_a(1-c)\right[= -\frac{\partial}{\partial z}(\rho_a q_a). \tag{B.2}$$

Considerando que el gas se comporta adiabáticamente $\frac{p}{\rho_a^\gamma}$ =cte, la ec. anterior se transforma en:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1-c}{\gamma p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q_a}{\partial z} + \frac{q_a}{\gamma p}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{B.3}$$

Como el flujo de aire dentro del frente de granos obedece a la ley de Darcy 1.5, podemos encontrar una relación que vincule el flujo de aire con el flujo de masa, llegando a:

$$q_a = -\frac{\kappa}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{q}{c}(1-c_0) \tag{B.4}$$

Finalmente, en el sistema de laboratorio, combinando las ecuaciones B.1, B.3 y B.4, la dinámica de la presión a primer orden está gobernada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma p_0}{1-c_0}\frac{\partial v}{\partial z} + D\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{B.5}$$

El primer término corresponde a la advección, el segundo término está relacionado a la compresibilidad del fluido intersticial, y el último término toma en cuenta la porosidad $\psi_0 = 1 - c_0$. Para el siguiente orden en la solución

consideraremos que los coeficientes permanecen constantes ($p = p_0$, $c = c_0$, etc.).

El coeficiente de difusión D del gas en el medio, está dado por:

$$D = \frac{\gamma p_0 \kappa}{(1 - c_0)\eta}$$

En la expresión anterior, seguimos usando la permeabilidad κ proveniente de la ec. de Ergun 1.7-1.8.

Finalmente se necesita una ecuación dinámica para los granos y el aire contenidos en un tubo de radio R [40]:

$$\rho c_0 \frac{dv}{dt} = -\rho c_0 g - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial z} - \frac{2}{R}\sigma_{\mathrm{zr}} \tag{B.6}$$

El término de la derivada en σ_{zz} da cuenta de los efectos del gradiente de presión vertical responsables del esfuerzo normal entre las capas de granos de la columna, y en primera instancia, olvidaremos las condiciones de contorno en los lados, lo que equivale a despreciar el término σ_{rz} y reescribiremos las ecuaciones en el sistema de referencia inercial.

B.1.2. Cambios para el sistema de referencia inercial

Considerando una excitación sinusoidal, la posición z_p para la plataforma de vibración se escribe: $z_p(t) = A\sin(\omega t)$. Si denotamos ' a las ecuaciones en el cambio de coordenadas Lagrangiano, tenemos que:$z' = z - h(t)$, de manera que la velocidad media de los granos sería $v' = v - A\omega\cos(\omega t)$ y finalmente,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} - A\omega^2 \sin(\omega t)$$

La cual lleva a una ecuación de movimiento en el nuevo sistema de referencia, que refleja la conservación del momentum tanto de los granos como del aire:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v'\frac{\partial v'}{\partial z'} = (A\omega^2 \sin(\omega t) - g) - \frac{1}{\rho c_0}\left(\frac{\partial p}{\partial z'} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial z'}\right) \tag{B.7}$$

En el mismo orden de ideas, se obtiene que la ecuación que gobierna la presión permanece invariante bajo la transformación de coordenadas:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v'\frac{\partial p}{\partial z'} - \frac{\gamma p_0}{1-c_0}\frac{\partial v'}{\partial z'} + D\frac{\partial^2 p}{\partial z'^2} \tag{B.8}$$

B.1.3. Ecuaciones Adimensionales

Continuaremos con el tratamiento análogo mostrado en el capítulo 2, donde $1/\omega$ será la escala de tiempo, y A la escala de longitud. Entonces, considerando que $\rho c_0 A^2\omega^2$ es la escala de esfuerzo, podemos escribir en el plano de referencia inercial:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = \sin(t) - \frac{1}{\Gamma} - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial z} \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial z} = -\mathcal{C}_s^2\frac{\partial v}{\partial z} + \mathcal{D}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{B.10}$$

donde

- $\Gamma = A\omega^2/g$ denota la aceleración reducida.
- $\mathcal{C}_s^2 = c_s^2/A^2\omega^2$ compara la velocidad c_s de una onda de densidad, dada por $c_s^2 = \gamma p_0/\rho c_0(1-c_0)$, respecto de la escala de velocidad típica $A\omega$
- $\mathcal{D} = D/A^2\omega$ compara los coeficientes asociados con la difusión de la presión mediante la porosidad, con un coeficiente de difusión típico $A^2\omega$ asociado a los cambio de vibración en la plataforma.

Vale la pena notar, que para granos de acero de 465 μm de diámetro dispuestas en RLP, nosotros tenemos que c_s =8.8 m/s y D =8 m^2/s, para 15 Hz y Γ =2.5; esto lleva a que $\mathcal{C}_s^2$ =1148 y $\mathcal{D}$ =11500.

B.2. Soluciones generalizadas

La solución del problema, debe incorporar cada fase del movimiento de la capa. Una de las dificultades más importantes, es que el esfuerzo σ_{zz} que da cuenta del contacto intergranular, es desconocido. Este parámetro permite a los granos moverse a una velocidad dada cuando están en contacto con el substrato y puede cambiar bastante la física del sistema.

B.2.1. Aproximación: *Capa en reposo en contacto con la plataforma*

El panorama más simple corresponde a una columna granular en reposo y en contacto con la plataforma. En esta situación, $v = 0$ y la presión sigue una ecuación de difusión de la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \tag{B.11}$$

La presión fuera de la superficie libre es constante e igual a la presión atmosférica P_0, entonces, el tiempo característico adimensional, para la caída de presión $P(t)$ desde la base de la columna hasta su superficie libre (para relajar a P_0) es del orden de:

$$\tau \sim {H_0}^2/\mathcal{D} \tag{B.12}$$

Donde H_0 representa el espesor adimensional de la capa normalizado a la amplitud de vibración.

Para los efectos de nuestros experimentos, en una capa de 5 mm conformada por partículas de acero de d ∼465 μm en un arreglo RLP, le toma cerca de 3 μs difundir al aire, y casi 10 μs si la capa fuese de 10 mm. En relación a los experimentos fuera del equilibrio, estos tiempos son alrededor de 4 órdenes de magnitud más pequeños que la duración del ciclo de vibración (pensando en

f =15 Hz), y en relación a los datos de la fig.B.1, el tiempo de difusión de la presión marcada en el panel en negro, es del orden de 5.6 ms, lo que indicaría que el mecanismo difusivo, necesitaría un arreglo RCP de partículas de $\sim$20 μm para sostener dicho tiempo. Ciertamente, este tiempo depende mucho de c_0, y cómo se mencionó en el capítulo 2, la transición a polvos de gel de sílica de $\sim$100 μm ocasionan que este tiempo sea 1 orden de magnitud menor que el tiempo del ciclo de vibración, finalmente, la difusión comienza a ser significativa cerca de 60 Hz.

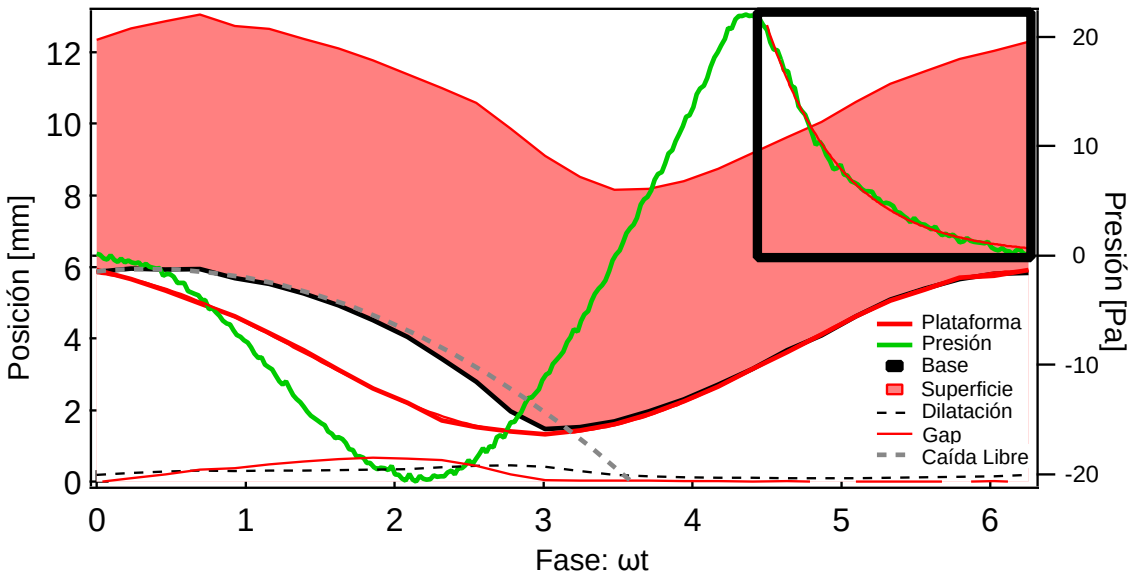

Figura B.1: Resultados para Γ =2.5, h = 5.4mm y $f = 15$ Hz. Curva roja gruesa, indica el movimiento de la plataforma. Línea negra gruesa, muestra la posición de la base de la capa, y la línea roja fina la posición de la superficie libre. Línea gris segmentada representa el ajuste por caída libre. Línea verde gruesa muestra la presión debajo de capa. El cuadro de selección en la parte superior, remarca la caída de presión exponencial cuando el tiempo avanza. La interpolación de los datos (línea roja) entrega la estimación del coeficiente de difusión. Nótese que, para valores de Γ elevados, el tiempo de contacto entre la capa y la plataforma es muy corto y provee de un medio confiable para medir el tiempo de difusión. Obsérvese además, que entre las fases 3 y 4.5, la capa parece estar en reposo por el contacto con la plataforma, pero, la curva de dilatación señala que la presión se incrementa porque en realidad la capa está compactándose. La presión comienza a decrecer sólo cuando la capa está en reposo con la plataforma.

B.2.2. Colisión durante el aterrizaje.

En esta situación, consideraremos una capa aterrizando sobre la plataforma en vibración. Separaremos el sistema en dos partes: una sección en contacto con la plataforma, y la capa todavía en caída.

Introduciremos acá $h(t)$, como el espesor de la capa depositada. En esta capa, los granos están en reposo, por lo que entonces, la presión obedece a: (B.11). En adición a lo anterior se debe tomar en cuenta la fracción volumétrica de los granos c_∞; y para el frente moviéndose hacia la superficie, el espesor $h(t)$.

Para la capa en vuelo, los granos no están en contacto y tenemos $\sigma_{zz} = 0$, reduciendo las ecuaciones a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = \sin(t) - \frac{1}{\Gamma} - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial z} = -\mathcal{C}_s^2\frac{\partial v}{\partial z} + \mathcal{D}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

El principal problema es tomar en cuenta la dinámica del frente de partículas en movimiento. La evolución temporal de h pude ser obtenida considerando la conservación de la masa, sin embargo, el problema no es trivial.

Consideremos ahora que la base del material entra en contacto con la plataforma. Entonces, el frente se mueve en dirección ascendente. Denotando c^* a la fracción de empaquetamiento de la porción de la capa en reposo (por el contacto con la plataforma), y c el empaquetamiento de las regiones superiores, podemos estimar, que la velocidad del frente de dilatación para este gradiente de empaquetamiento, se propaga como:

$$\dot{h}(t) \sim -\frac{1}{K}v$$

donde definimos K, como una constante numérica que representa el gradiente de la fracción volumétrica a lo largo de la columna, y es negativo en referencia a que las capas de la superficie están menos compactadas, es decir $c = (1 + K)c^*$.

En otras palabras, si la columna se dilata un 10 $\%$, el frente de dilatación sube unas 10 veces más rápido que la caída de los granos, y similarmente, para una dilatación del 1 $\%$, la razón es de 100. La duración de la fase entonces, sería del orden de:

$$\tau \frac{h^*}{\dot{h}(t)} = K \frac{h^*}{v_i}$$

Donde v_i representa la velocidad típica de impacto. Si la capa no se dilata mucho y si la velocidad del impacto es grande, la duración de esta fase se torna muy corta. Lo que pasa entonces, es que el sistema se compacta, comprimiendo el gas entre granos, induciendo repentinamente un alza de presión por cada altura del orden de:

$$\delta P = \gamma P_0 \frac{c^*}{1 - c^*} K$$

Donde asumimos que $K \ll 1$.

En la práctica, para una capa aterrizando desde una altura finita, la fase no será medida por el sensor en la base, debido a que el alza de presión ocurre mientras la capa se aproxima a la plataforma. Entonces, en primera aproximación, podemos considerar que la colisión es instantánea y no por capas. El problema se reduce a un aproximación de fases y de la difusión en el material que está descansando ya en la superficie de la plataforma, reduciendo entonces las ecuaciones a puramente un proceso de difusión.

Apéndice C

Oscillating gas flow induces reptation of granular droplets

Oscillating gas flow induces reptation of granular droplets

Javier C. Pastenes,[1] Jean-Christophe Géminard,[2] and Francisco Melo[1,*]
[1]*Departamento de Física Universidad de Santiago de Chile, Avenida Ecuador 3493, 9170124 Estación Central, Santiago, Chile*
[2]*Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Université de Lyon, CNRS, UMR 5672, 46 Allée d'Italie, F-69007 Lyon, France*
(Received 9 April 2013; published 3 July 2013)

We report on the reptation of vertically vibrated droplets of fine particles lying on a solid incline. On the one hand, time-resolved measurements show that the gas pressure in the gap between the droplet bottom and the solid surface can be accounted for by a Darcy law. The cumulative effect of the viscous drag is responsible for the droplet formation. On the other hand, we show that the gap pressure is responsible for an effective horizontal acceleration whose cumulative effect is the upward reptation of the droplets. Using various geometries of the solid substrate, we manipulate the droplets and study the effects of the substrate geometry and of the experimental parameters on the droplet shape and dynamics. The experimental results are discussed in the light of theoretical arguments. This study demonstrates that, by the choice of a suitable geometry of the surface and characteristics of the vibration, one can develop tools for precise powder handling and control.

DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012201 PACS number(s): 45.70.Mg, 45.70.Qj, 81.20.Ev

I. INTRODUCTION

In granular compacts formed of relatively small particles, a rich dynamics arises as the result of the interactions between the grains and the interstitial fluid. Booming sand [1,2] and the granular jet resulting from the impact of a solid object onto the surface of a granular bed [3–5] both illustrate the complexity of the coupling of a granular system with the interstitial fluid dynamics.

A thick layer of granular material, initially flat and horizontal, subjected to a vertical vibration, exhibits heaping and convection [6–9]. The phenomenon is due to the periodic gas flow in the interstices between grains. Heaping and convection have attracted considerable attention and debate, mainly because of the difficulty in discriminating the effects of the solid friction from those of the gaseous drag. To our knowledge, a simple functional relation between the convection intensity and the driving force is still lacking.

When the granular layer is sufficiently thin, under periodic tapping, granular droplets nucleate instead [10]. The droplet formation has been attributed to the interplay between the air flow through the material and the avalanche properties, which led to the proposal of a scaling for the droplet size [10]. The granular droplet dynamics was found to share common features with the liquid counterpart, leading to the proposal of a close analogy between the governing equations of the granular droplets and those of partially wetting liquids [10]. Although this analogy was tempting it has not been explored further, likely due to the lack of a precise definition of the surface tension for the granular materials [11].

If the bottom of the container submitted under vertical vibration deviates from the horizontal, a striking effect arises: droplets, instead of moving downhill as would be expected, climb up [12]. Moreover, droplets grow longer, like water droplets flowing along a wall, when the inclination angle is increased. Their velocity is observed to be independent of their size but to increase almost linearly with the tilt angle. However, when the angle exceeds the repose angle, the droplets loose stability and form elongated fingers which point upwards; the heads of the fingers quickly shrink by loss of mass while they climb. For inclination angles larger than the avalanche angle, droplets and fingers are no longer observed. In our previous work, the main experimental parameters were explored and a qualitative interpretation of the droplets dynamics was given [12]. However, the mechanism proposed to explain such nonintuitive behaviors remained to be proven by quantitative comparison with the experimental data.

In the present article, we approach the study of the granular droplets' motion from a heuristic point of view. By designing an experimental tool to assess the instantaneous gas pressure at the droplet base, we investigate quantitatively the driving mechanism. We show that droplet formation and reptation result from the cumulative effect of the horizontal component of the viscous drag force due to the gas flow. At relatively low frequency, a Darcy law accounts well for the functional dependence of the droplet velocity on its size and on the inclination angle, vibration frequency, and acceleration. In order to control the trajectories, we modify the surface geometry and observe that convex surfaces concentrate the droplets whereas concave ones disperse them. The selection of the principal curvatures thus makes it possible to guide the droplets along trajectories that are the crest lines of the surface.

II. EXPERIMENTAL METHOD

The droplets' dynamics is investigated in various forms of containers which are vertically vibrated using an electrodynamic modal shaker fed with a sinusoidal wave of frequency f ranging from 15 to 60 Hz. The vertical acceleration of the container is monitored by means of an accelerometer with an accuracy of 0.01 g. From the maximum acceleration and from the frequency, one can estimate the dimensionless acceleration $\Gamma = A\omega^2/g$ and the maximum amplitude A (we denote g as the acceleration due to gravity and $\omega = 2\pi f$). The granular material consists of silica grains of density $\rho = (0.49 \pm 0.01)$ gr/cc and diameter ranging from $d = (50 \pm 15)$ μm to $d = (200 \pm 40)$ μm, except when specified. Layer depths range from 2.5 to 10 mm. A high-speed video

*francisco.melo@usach.cl

 ©2013 American Physical Society

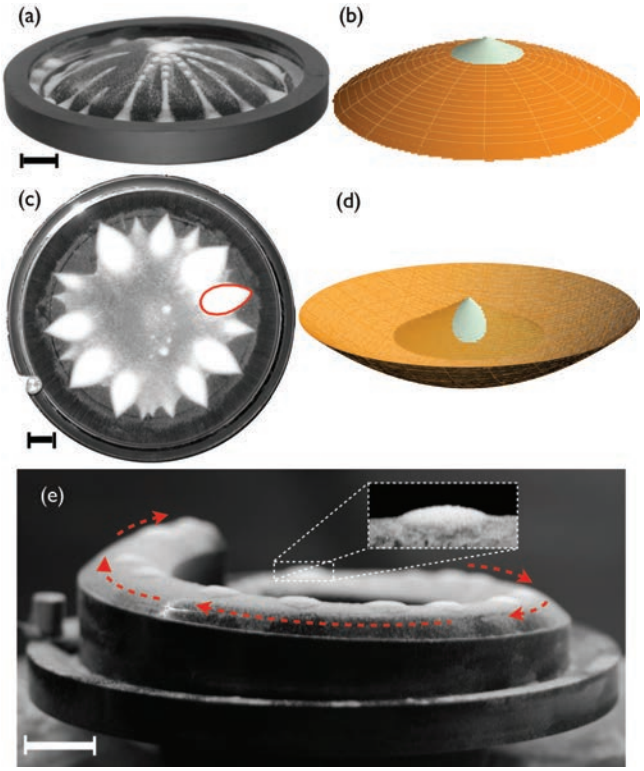

FIG. 1. (Color online) (a) Grazing view of droplets climbing on a convex surface. (c) Top view of petals on a concave surface. (b) and (d) Droplet shapes obtained as the intersects of a vertical cone with the vibrating surface. [The line in panel (c) is a contour obtained with this procedure.] (e) Droplets in a helical cell. Dashed arrows indicate the droplet's trajectories. Dashed box: Enlargement of a droplet [scale bars: 10 mm].

camera provides either top or lateral views of the droplets with a spatial resolution of 256×256 px^2 at 1200 frames/s.

From the previous experimental studies, we know that the droplets diffuse across a flat surface and that, as a consequence of their upwards motion, they tend to reach the top of convex surfaces [12], as shown in Fig. 1(a); since the droplets' motion proceeds along the local maximum slope, they reach the minimum slope. We take advantage of this effect to accurately measure the pressure at the bottom of either a moving or a steady granular droplet.

In a first experimental configuration, in order to measure the gas pressure, $P(t)$, at the base of a droplet in motion and, thus, to elucidate the driving mechanism, a single curvature cell was designed. The cell is made of a Plexiglass tube (46 mm in inner diameter and 80 mm in height) glued to an aluminum mount. The bottom is a cylinder whose axis makes the angle α with the horizontal [Fig. 2(a)]. In this geometry, the droplets climb up following the rectilinear crest line of the surface. The measure of the pressure is made possible by an internal L-shaped cavity (2 mm in radius) drilled in the aluminum mount. At one end, the cavity emerges somewhere along the crest line and thus intersects the droplets' trajectory. A flush-mounted grid (mesh, 45 μm) deters the particles from entering the cavity. The other end is connected to a differential pressure sensor (in the range -125 to 125 Pa) through a hose. The use of a nontorsional

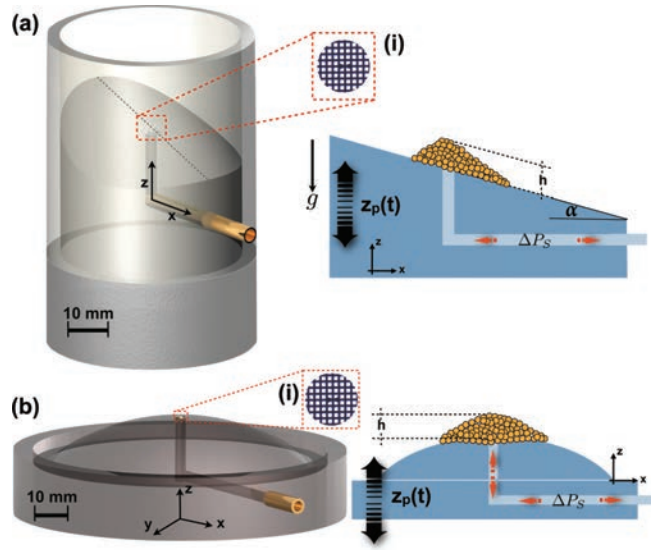

FIG. 2. (Color online) (a) Inclined bottom cell with view of the grid (i) protecting the cavity. Right panel: Sketch of a moving droplet passing above the grid. (b) Convex cell. Right panel: Sketch of the stationary droplet at the top of the convex surface.

hose prevents undesired pressure variations likely due to its own deformation.

In a second experimental configuration, in order to systematically study the dependence of the excess pressure at the base of the droplet on the experimental parameters, we use a convex cell (97 mm in diameter), as depicted in Fig. 2(b). The pressure underneath the granular droplet is measured as described above; the cavity arises exactly at the top of the surface (radius of curvature 57.5 mm, much larger than the typical droplet size). The droplet remains steady and the gap pressure is periodic.

III. EXPERIMENTAL RESULTS

A. Droplet shape

Basically, the droplet formation originates from the migration of the surface grains toward the hills under the action of the gas flow. The granular convection is not significant, and after a few collisions with the plate the droplets acquire stationary conical shapes, although the largest droplets (on flat and convex surfaces) have a tendency to be rounded at the top [Fig. 1(a)]. On the convex surface, the droplets grow longer along the maximum slope. On the concave surface [Fig. 1(c)], the droplets are petal shaped. These shapes which are apparently very different are accounted for by considering the intersect of the vibrating surface and of a vertical cone exhibiting the same slopes as the droplet [Fig. 1(d)]. The apex of the cone coincides with the apex of the droplet. This simple geometrical construction is in good agreement with the experimental shapes [Fig. 1(c)].

B. Droplet velocity and driving mechanism

The first experimental configuration makes it possible to measure the pressure difference, $\Delta P(t) = P(t) - P_0$

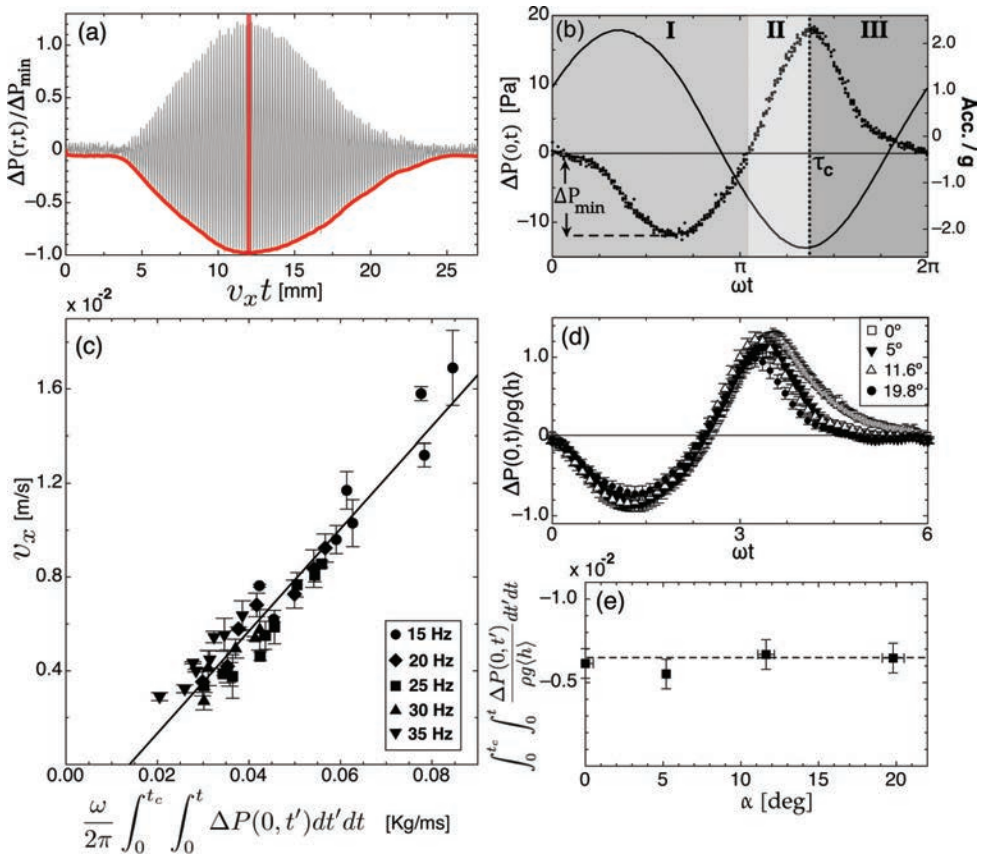

FIG. 3. (Color online) (a) Pressure signal associated with a droplet climbing at 5.8 mm/s [silica particles $d = 100\ \mu$m, $f = 30$ Hz, $\Gamma = 3.0$, and $\alpha = 12.8^\circ$]. (b) Details of pressure cycle close to the maximum of the pressure variations: zone I, a depression, right after the droplet takes off; zone II, an overpressure, during the droplet's return to the plate; and zone III, a pressure relaxation, after the droplet lands on the plate. The container acceleration is indicated by the solid line. (c) Droplet velocity as a function of the integrated pressure [Eq. (1)] for distinct f; integration limits (0, $\tau_c = \omega t_c$) are defined in panel (b). (d) Pressure cycles for various surface inclinations, α, showing superposition for $d = 100\ \mu$m, $f = 20$ Hz, and $\Gamma = 2.2$. (e) Integrated pressure as a function of α.

(P_0 stands for the ambient pressure), during the whole droplet transit above the grid [Fig. 3(a)].

Within a cycle, $\Delta P(t)$ has three stages as depicted in Fig. 3(b): a depression (zone I) beginning immediately after the droplet's takeoff (occurring when the container acceleration equals $-g$), an overpressure (zone II) observed as the droplet approaches the vibrating surface, and a pressure relaxation (zone III) due to the gas evacuation through the droplet which enters in contact with the surface at t_c, compacts, and finally comes to rest [13]. The envelope of such a signal, given that the droplet velocity is known, provides an indication of the pressure profile along the droplet bottom. The amplitude of the pressure variations is maximum when the droplet apex is at the vertical of the grid.

The mechanism driving the droplet motion is now seen as follows. During the takeoff, the pressure in the gap between the droplet base and the solid surface decreases, which leads to a net force, normal to the surface, pushing the droplet toward the surface. Integration of the pressure profile across the droplet base provides us with an estimate of the intensity of the latter force and, thus, of its horizontal component. One can then write the equation governing the motion of the droplet center of mass along the horizontal. Considering a droplet of average height $\langle h\rangle$ and volume $V = S\langle h\rangle$, climbing along a slope making the angle α with the horizontal, one gets $\rho V \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \int_S [P(\vec{r},t) - P_0]\sin(\alpha)dS$, where $x(t)$ is the horizontal position of the droplet, $P(\vec{r},t)$ is the pressure at the position $\vec{r}$ at time t in the plane of the droplet base, and S is the surface area of the droplet bottom. The average horizontal velocity of the droplet can then be estimated as follows:

$$v_x = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\sin(\alpha)}{\rho\langle h\rangle}\left[\int_0^{t_c}\int_0^{t}\langle\Delta P(t')\rangle_S dt'dt\right], \qquad (1)$$

where $\langle\Delta P(t)\rangle_S$ is the average, over the surface S, of the pressure difference $P(\vec{r},t) - P_0$ at time t.

In order to check Eq. (1) experimentally, we produced droplets having the same average height, $\langle h\rangle$, by ensuring that all the material in the cell was forming a single droplet. We measured their velocity and the associated pressure variations. In order to estimate the effects of the driving force, we considered, instead of $\langle\Delta P(t)\rangle_S$, the pressure difference $\Delta P(t)$ during the pressure cycle having the maximum amplitude [Fig. 3(b)]. One can indeed guess that $\langle\Delta P(t)\rangle_S = C\Delta P(t)$ with C being a geometrical factor smaller than unity. The data displayed in Fig. 3(c) corroborate the linear dependence of the

droplet velocity on the integrated effect of the driving force for distinct driving frequencies. The experimental slope leads to $C \approx 0.85$, which indicates that the pressure varies slowly across the droplet base, except near the periphery where some gas leak might be present. In our previous work [12] we showed that v_x is a nearly linear function of α, which is consistent with Eq. (1) if the pressure variation is independent of α. Consistently, Fig. 3(d) displays raw pressure data indicating that the pressure cycle remains almost unchanged when the angle α is varied. Moreover, Fig. 3(e) shows that the integrated pressure is indeed nearly independent of α, supporting the validity of Eq. (1). It is worth noting that the size of the grid limits the smallest particle size that can be characterized to $d > 45\ \mu$m. This fact, along with the observation that droplets are no longer robust for $d > 200\ \mu$m, makes it difficult to determine the dependence of v_x on the diameter d of the particles. Despite this difficulty, we observed that at fixed Γ and f, v_x exhibits little dependence on d.

C. Pressure pattern vs experimental parameters

In order to systematically study the dependence of the pressure pattern $\Delta P(t)$ on the experimental parameters, we use the second experimental configuration. We thus consider the periodic variations of the pressure underneath the droplet bouncing vertically at the top of the convex surface. As before, three stages are distinguished in a pressure cycle [Fig. 4(a)].

We propose a simplified approach to account for the experimental pattern. Indeed, the precise calculation of the temporal evolution of the gap pressure would require one to find the

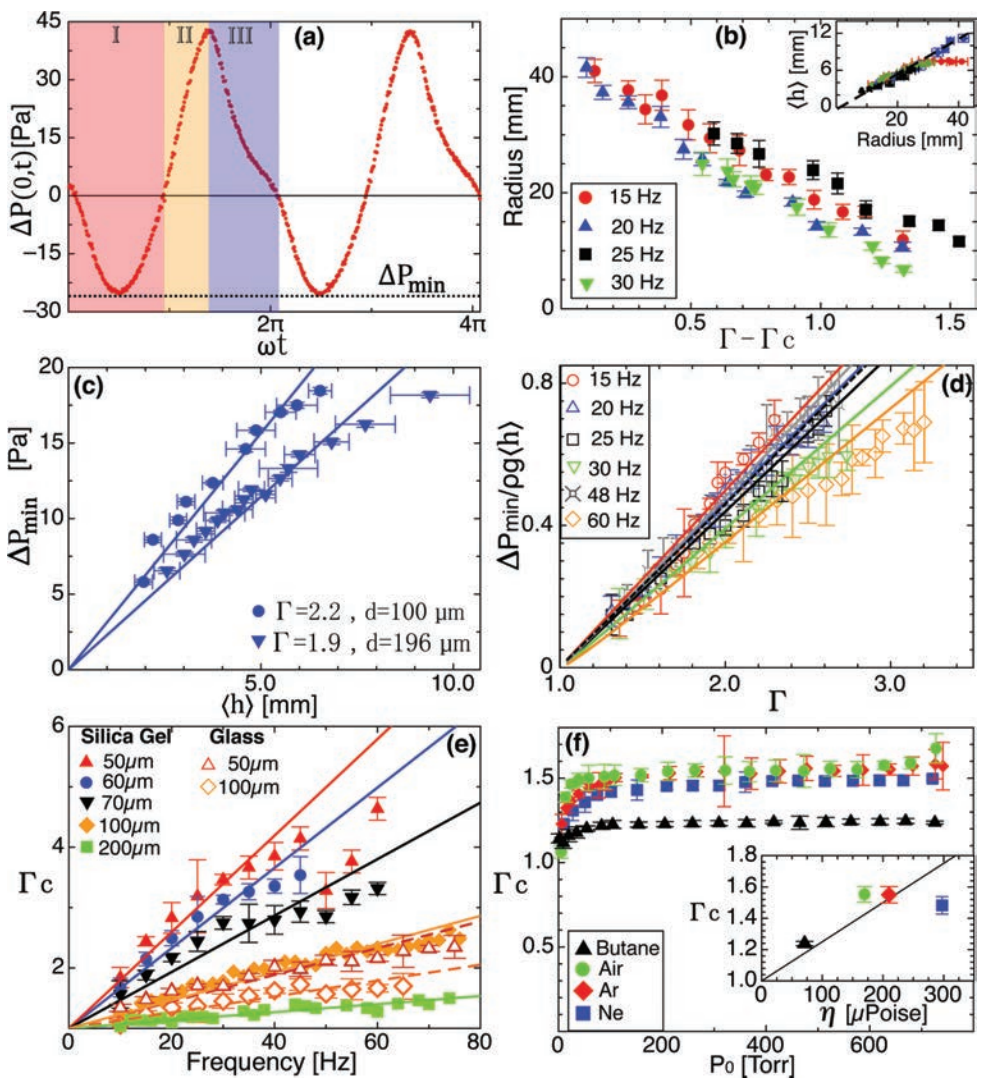

FIG. 4. (Color online) (a) Typical gap pressure showing three main stages: I, depression, right after the droplet takes off; II, overpressure, during the droplet's return to the plate; and III, pressure relaxation ($\Gamma = 2.6$, $f = 15$ Hz). (b) Maximum droplet radius as a function of Γ for distinct f. Inset: Droplet height vs droplet radius; proportionality is in agreement with the (supposed) conical shape. (c) Maximum depression versus droplet height ($f = 20$ Hz). (d) Maximum depression vs Γ for distinct f. Straight lines are the best adjustment to Eq. (4) which leads to $\psi \approx 0.54$. [(a)–(d) silica gel, $d = 100\ \mu$m]. (e) Creep onset, Γ_c, vs f for distinct d, silica gel and glass particles. Solid lines are best fits to Eq. (6) with $\beta = 0.3$. (f) Γ_c for variable gas pressure P_0 for distinct gases (silica gel, $d = 100\ \mu$m, $f = 20$ Hz). Inset: Γ_c vs η for increasing η: butane, air, argon, and neon. The solid line is from Eq. (6) with $\beta = 0.3$.

self-consistent droplet shape, which is difficult. Thus, in a first simplified approach, we neglect the grain convection and, even, consider that the droplet does not deform and exhibits a simple conical shape. On the one hand, the droplet is submitted to the pressure force so that the altitude, $z(t)$, of the droplet center of mass in the frame of reference moving with the solid surface obeys $\ddot{z}(t) + \ddot{z_p}(t) = -g + \frac{1}{\rho V}\int_{S_T} P(r,t)\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{dS}$, where $z_p(t) = A\sin\omega t$ is the vertical position of the solid surface and $\hat{\mathbf{z}}$ is the vertical unit vector. The integral is calculated over the whole area, S_T, of the external surface of the droplet. Considering the average pressure $\langle\Delta P(t)\rangle_S$ at the droplet bottom at time t, one can rewrite the latter relation in the form $\ddot{z}(t) + \ddot{z_p}(t) = \frac{S}{\rho V}\langle\Delta P(t)\rangle_S - g$. On the other hand, the pressure difference across the droplet induces a gas flow through the grains. The instantaneous flow rate is approximately given by a Darcy law, $\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{\eta}\nabla P$, where η is the gas viscosity. The permeability κ is given by the Ergun relation, $\kappa = \frac{\psi^3 d^2}{150(1-\psi)^2}$, where ψ is the porosity [14]. Finally, assuming that the gas is incompressible [15], one can estimate that the variation $\dot{s}(t)$ of the gap $s(t)$ between the droplet base and the solid surface is only permitted by the gas flow through the droplet, which imposes that $\dot{s} = q_z$, with $q_z = \frac{\kappa}{\eta}\frac{\langle\Delta P(t)\rangle_S}{\langle h\rangle}$. In addition, notice that, in the absence of dilation of the droplet, $\dot{z} = \dot{s}$. Thus, combining the equation governing the vertical motion of the droplet and the condition imposed by the gas incompressibility, one gets

$$\ddot{s}(\tau) + \frac{\dot{s}(\tau)}{\tau_\kappa} = \frac{A}{\Gamma}[\Gamma\sin(\tau+\tau_0) - 1], \tag{2}$$

where we defined $\tau = \omega t$ and $\tau_0 = \omega t_0 = \arcsin 1/\Gamma$, t_0 being the time of the droplet takeoff. The parameter $\tau_\kappa = \omega\kappa\rho/\eta$ is a relaxation time. Equation (2) was first obtained for a porous oscillating piston (the Kroll's model) and has an analytic solution which gives [16]

$$\langle\Delta P(\tau)\rangle_S = -\frac{\rho g\langle h\rangle}{1+\tau_\kappa^2}\Big[\sqrt{\Gamma^2-1}(\sin\tau - \tau_\kappa\cos\tau) + \tau_\kappa\sin\tau - \tau_\kappa^2 + \cos\tau + \tau_\kappa(\sqrt{\Gamma^2-1} + \tau_\kappa)e^{-\frac{\tau}{\tau_\kappa}} - 1\Big]. \tag{3}$$

The pressure difference exhibits a minimum, $\langle\Delta P\rangle_{S,\min}$, which, in the limit of small τ_κ (<0.7) and Γ slightly larger than 1, is obtained by minimization of Eq. (3) with respect to τ, leading to

$$\langle\Delta P\rangle_{S,\min} \approx -\rho g\langle h\rangle\left[(\Gamma-1) - \frac{\Gamma}{2}{\tau_\kappa}^2\right]. \tag{4}$$

Assuming that the pressure difference measured at the center of the droplet base $\Delta P(0,\tau)$ [Fig. 4(a)] differs from $\langle\Delta P(\tau)\rangle_S$ only by a multiplicative factor, one estimates that the maximum amplitude of the pressure variations is simply proportional to $\langle\Delta P\rangle_{S,\min}$. With this assumption, Eq. (4) correctly predicts the amplitude of the pressure variations is proportional to both $\langle h\rangle$ and $(\Gamma-1)$, in agreement with the experimental data displayed in Figs. 4(c) and 4(d), respectively. We mention that $\langle\Delta P\rangle_{S,\min}$ is a slowly varying function of τ_κ and that the regime for large $\tau_\kappa \gg 1$ is neither captured by Eq. (4) nor observed for the parameter range explored in the experiments.

IV. DISCUSSION

In the present section, we discuss thoroughly the consequences of the relations established above. First, we consider the condition needed for droplet formation. A condition for the vibration to heap the grains is that the work of the pressure in a cycle must exceed the potential energy necessary to raise a single layer of grains over a height equal to the layer thickness. The condition can be written $\int(\langle P\rangle_S - P_0)\,dz \geqslant \rho g\langle h\rangle d$, which leads to the minimum dimensionless acceleration, Γ_h, given by $(\Gamma_h - 1)\,\Gamma_h \geqslant \frac{d\omega^2}{g}$ in the limit $\tau_\kappa \ll 1$.

In addition, as shown in Fig. 4(e), the critical acceleration Γ_c for the droplets to creep is nearly linear with ω and decreases with d. Moreover, Γ_c depends linearly on the gas viscosity [see inset in Fig. 4(f)] and decreases with increasing material density. Interestingly, the measurements of Γ_c as a function of the gas pressure show that Γ_c is not a function of the gas density, which indicates that the relevant parameter is indeed the dynamical viscosity η [Fig. 4(f)]. The correct scaling for Γ_c can be recovered by assuming that a minimum gap, of the order of d, is required for the droplet to creep (the droplet effectively takes off, the pertinent scale being given by the grain size). From Eq. (2), by replacing the maximum gap by βd, with β a numeric constant, we find

$$\frac{150\beta(1-\psi)^2\eta\omega}{d\psi^3 g\rho} \approx \int_0^{\tau_s}[\Gamma_c\sin(\tau+\tau_0) - 1]\,d\tau, \tag{5}$$

where τ_s is the dimensionless time at which the gap is maximum. Interestingly, for $\tau_\kappa \ll 1$, the right-hand side of Eq. (5) can be approximated to $\Gamma_c - 1$, leading to

$$\Gamma_c - 1 \approx \frac{150\beta(1-\psi)^2\eta\omega}{d\psi^3 g\rho}. \tag{6}$$

Equation (6) provides a functional dependence on the parameters that is consistent with our experimental data (including those in [12]) as shown in Fig. 4(e). All experimental curves in Fig. 4(e) are fitted with Eq. (6) by using a single parameter $\beta = 0.3$. For $\tau_\kappa > 1$, the right-hand side of Eq. (5) is, in addition, a function of τ_κ, leading to an implicit expression for Γ_c that can be calculated numerically.

Finally note that, since the pressure variation is proportional to $\langle h\rangle$ [Eq. (4)], Eq. (1) immediately predicts that the droplet velocity is independent of the droplet size, as confirmed experimentally [12].

V. CONCLUSIONS

In summary, we showed that droplet formation and reptation are quantitatively accounted for by measuring and modeling the pressure excess due to the gas flow through the porous granulate. This agreement suggests that the gas leak expected to occur at the droplet periphery is not dominant in the range of the parameters we explored experimentally. A simplified model accounts satisfactorily for the dependence of the droplet velocity on the main experimental parameters. For instance, given that the gap pressure is almost independent of $\tau_\kappa = \omega\kappa\rho/\eta$ in the limit $\tau_\kappa \ll 1$, the droplet velocity is independent of the dynamical viscosity of the gas.

In addition, we show that the droplet size can be controlled on a convex surface by selecting the vibration parameters as

shown in Fig. 4(b) where the size is decreased by increasing the acceleration in a range of driving frequencies. In turn, droplet's trajectories can be defined by the choice of the surface geometry as illustrated in Fig. 1(e), where droplets follow the helical trajectory defined by the crest line of the surface. Thus, combining concave with convex geometries and selecting suitable vibration parameters, a variety of strategies and devices can be devised for powder handling and control (ranging from microdelivery to separation [17]).

ACKNOWLEDGMENT

The authors acknowledge financial support from Contracts ANR-09-BLAN-0389-01/Fondecyt-011 and anillo ACT95.

[1] R. A. Bagnold, *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes* (Methuen, London, 1954).
[2] B. Andreotti, L. Bonneau, and E. Clément, Geophys. Res. Lett. **35**, L08306 (2008).
[3] S. T. Thoroddsen and A. Q. Shen, Phys. Fluids **13**, 4 (2001).
[4] D. Lohse, R. Rauhe, R. Bergmann, and D. Van Der Meer, Nature (London) **432**, 689 (2004).
[5] S. Deboeuf, P. Gondret, and M. Rabaud, Phys. Rev. E **79**, 041306 (2009).
[6] P. Evesque and J. Rajchenbach, Phys. Rev. Lett. **62**, 44 (1989).
[7] C. Laroche, S. Douady, and S. Fauve, J. Phys. (Paris) **50**, 699 (1989).
[8] H. K. Pak and R. P. Behringer, Phys. Rev. Lett. **71**, 1832 (1993).
[9] H. K. Pak, E. Van Doorn, and R. P. Behringer, Phys. Rev. Lett. **74**, 4643 (1995).
[10] J. Duran, Phys. Rev. Lett. **87**, 254301 (2001).
[11] Y. Amarouchene, J.-F. Boudet, and H. Kellay, Phys. Rev. Lett. **100**, 218001 (2008).
[12] L. Caballero and F. Melo, Phys. Rev. Lett. **93**, 258001 (2004).
[13] Q. Wu, Y. Andreopoulus, and S. Weinbaum, Phys. Rev. Lett. **93**, 194501 (2004).
[14] See, for instance, R. M. Nedderman, *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992).
[15] Notice that the compressibility effect can be neglected when $f\tau_D \ll 1$, with $\tau_D = \langle h\rangle^2/D$, where $D \equiv \kappa/\psi\eta\chi$ is the relevant diffusion coefficient and χ is the gas compressibility. In our case, in air, this effect becomes significant at relatively low frequencies which are above 60 Hz.
[16] L. I. Reyes, I. Sánchez, and G. Gutiérrez, Phys. A **358**, 466 (2005).
[17] See, for instance, F. J. Muzzio, T. Shinbrot, and B. J. Glasser, Powder Technol. **124**, 1 (2002).

Bibliografía

[1] Jacques Duran. The physics of fine powders: plugging and surface instabilities. *C. R. Physique 3*, pages 1–11, Mar 2002.

[2] Jacques Duran. Rayleigh-taylor instabilities in thin films of tapped powder. *Phys. Rev. Lett.*, 87(25):1–4, Nov 2001.

[3] R Ledesma-Aguilar, R Nistal, A Hernández-Machado, and I Pagonabarraga. Controlled drop emission by wetting properties in driven liquid filaments. *Nat Mater*, 10(5):367–371, May 2011.

[4] K.Yazdchi, S Srivastava, and S Luding. On the validity of the carman-kozeny equation in random fibrous media. *II International Conference on Particle-based Methods*, pages 1–10, Jun 2011.

[5] A Hazen. Some physical properties of sands and gravels. *Mass. State Board of Health, Ann. Rept.*, pages 1–17, 1892.

[6] P.K. Swamee and A.K. Jain. Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the Hydraulics Division (ASCE)*, 102(5):1–7, 1976.

[7] H. Blasius. Das aehnlichkeitsgesetz bei reibungsvorgängen in flüssigkeiten. *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 131, 1913.

[8] J Kozeny. Uber kapillare leitung des wassers im bodem. *Acad. Wiss. Wien*, 136:1–35, 1927.

[9] P.C. Carman. Fluid flow through granular beds. *Transactions, Institution of Chemical Engineers*, 15:1–16, 1937.

[10] P.C. Carman. Flow of gases through porous media. *Butterworths*, 1956.

[11] Nedderman. *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge, New York.

[12] Robert P. Chapuis and Michel Aubertin. Predicting the coefficient of permealility of soils using the kozeny-carman equation. *Département des génies civil, géologique et des mines, journal*, Jan 2003.

[13] Sabri Ergun and A.A Orning. Fluid flow through randomly packed columns and fluidized beds. *Industrial and Engineering Chemestry*, 41(6):1–6, Nov 1949.

[14] Sheldon Weinbaum, Qianhong Wu, and Yiannis Andreopoulos. From red cells to snowboarding a new concept for a train track. *Phys. Rev. Lett.*, 93(19):1–4, Oct 2004.

[15] O Pouliquen. Velocity correlations in dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, 93:1–4, Dec 2004.

[16] James B Knight, E.E Ehrichs, Vadim Yu Kuperman, Heinrich M Jaeger, and Sidney R Nagel. Experimental study of granular convection. *Phys. Rev. E*, 54:1–13, Oct 1996.

[17] H.K Pak, E Van Doorn, and R P Behringer. Effect of ambient gases in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 74(23):1–4, Apr 1995.

[18] Jacques Duran. Ripples in tapped or blown powder. *Phys. Rev. Lett.*, 84(22):1–4, May 2000.

[19] John R Royer, Eric Corwin, Bryan Conyers, Andrew Flior, Mark Rivers, Peter Eng, and Heinrich M Jaeger. Birth and growth of a granular jet. *Phys. Rev. E*, 78(1):011305, Jul 2008.

[20] Detlef Lohse, Raymond Bergmann, René Mikkelsen, Christiaan Zeilstra, Devaraj Van Der Meer, Michael Verluis, Ko Van Der Weele, Martin van der Hoef, and Hans Kuipers. Impact on soft sand. *Phys. Rev. Lett.*, 93(19):1–4, Nov 2004.

[21] Detlef Lohse and Devaraj Van Der Meer. Structures in sand streams. *Nature*, 459:1–2, Jun 2009.

[22] Francisco Melo and Leonardo Caballero. Droplets of fine powders running uphill by vertical vibration. *Phys. Rev. Lett.*, 93(25):258001, Dec 2004.

[23] *Nótese que los efectos de compresibilidad pueden despreciarse cuando* $f\tau_D << 1$*, con* $\tau_D = \langle h \rangle^2/D$*. Donde* $D \equiv \kappa/\psi\eta\chi$ *es el coeficiente de difusión y* χ *compresibilidad del gas. En el caso de aire, este efecto se vuelve significativo a relativa baja frecuencia por sobre encima de 60 Hz.*

[24] L I Reyes, Iván Sánchez, and G Gutiérrez. Air-driven reverse buoyancy. *Physica A*, 358:1–9, Apr 2005.

[25] G Gutiérrez, L I Reyes, K Rodríguez, V Idler, and R Paredes. Vibration induced airflow through granular beds. *Physica A*, 356:1–5, Apr 2005.

[26] P Evesque and Jean Rajchenbach. Inestability in a sand heap. *Phys. Rev. Lett.*, 62(1):1–3, Apr 1989.

[27] C Laroche, S Douady, and S Fauve. Convective flow of granular masses under vertical vibrations. *J. Phys. France*, 50(7):699–706, Jan 1989.

[28] Keiko M Aoki, Tetsuo Akiyama, Yoji Maki, and Tatsuyuki Watanabe. Convective roll patterns in vertically vibrated beds of granules. *Phys. Rev. E*, 54(1):1–10, Jun 1996.

[29] H.K Pak and R P Behringer. Surface waves in vertically granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 71(12):1–6, Apr 1993.

[30] Francisco Melo, Paul Umbanhowar, and Harry L Swinney. Hexagons, kinks and disorder in oscillating granular layers. *Phys. Rev. Lett.*, 75(21):1–5, Apr 1995.

[31] Hector Alarcón, Jean-Christophe Géminard, and Francisco Melo. Effect of cohesion and shear modulus on the stability of a stretched granular layer. *Phys. Rev. E*, 86(6):061303, Dec 2012.

[32] T Pähtz, H J Herrmann, and T Shinbrot. Why do particle clouds generate electric charges? *Nature Physics*, 6(4):1–5, Apr 2010.

[33] Steven Weintraub. Demystifying silica gel. *Washington, DC: American Institute for Conservation*, 9:1–24, 2002.

[34] Bruno Andreotti. The song of dunes as a wave particle mode. *Phys. Rev. Lett.*, 98(238001):1–4, Nov 2004.

[35] A Daerr and S Douady. Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature*, 399, May 1999.

[36] Anne-Laure Biance, Christophe Clanet, and David Quéré. Leidenfrost drops. *Physics Of Fluids*, May 2003.

[37] Guillaume Lagubeau, Marie Le Merrer, Christophe Clanet, and David Quéré. Leidenfrost on a ratchet. *Nature Physics*, 7(5), Feb 2011.

[38] Peter King, Michael R Swift, K.A Benedict, and A Routledge. Surface stability of granular systems under horizontal and vertical vibration: The applicability of a coefficient of friction. *Phys. Rev. E*, 62(5):1–7, Nov 2000.

[39] Yann Bertho, Fréderique Giorgiutti-Dauphiné, Jean-Pierre Hulin, H J Herrmann, E.J Hinch, and T Raafat. Powder flow down a vertical pipe: The effect of air flow. *J. Fluid Mech.*, 459:1–29, Sep 2006.

[40] Yann Bertho, Jean-Pierre Hulin, and Fréderique Giorgiutti-Dauphiné. Intermittent dry granular flow in a vertical pipe. *Physics Of Fluids*, 15(11):1–12, Sep 2003.