UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FISICA

ESTUDIO DE RASGADO Y DEFORMACIÓN DE PELÍCULAS DELGADAS

JUAN FRANCISCO FUENTEALBA DURÁN

Profesor Guía: Luis Eugenio Hamm Hahn

Trabajo de tesis presentado en conformidad a los requisitos para obtener el grado de Doctor en Ciencias con mención en Física

SANTIAGO - CHILE
2014

"ESTUDIO DE RASGADO Y DEFORMACIÓN DE PELÍCULAS DELGADAS"

JUAN FRANCISCO FUENTEALBA DURÁN

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Luis Eugenio Hamm, del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, de él candidato, Dr. Enrique Cerda, Dr. Sergio Rica, Dr. Alberto Monsalve y Dr. Juliano Denardin.

....
Dr. Enrique Cerda

....
Dr. Sergio Rica

....
Dr. Alberto Monsalve

....
Dr. Juliano C. Denardin

....
Profesor Guía: Dr. Eugenio Hamm

....
DIRECTOR(A)

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
DIRECTOR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIA

Resumen

El propósito de este trabajo es entender algunos mecanismos del rasgado, es decir, de la fractura frágil de una lámina elástica delgada sometida a grandes desplazamientos fuera del plano. En el caso del rasgado cuasiestático con presencia de una o más fracturas, la lámina está sometida en todo momento a estiramientos y doblamientos, de modo que la geometría de la lámina resulta de un balance energético en que las fracturas están en reposo. Una grieta progresa gracias al trabajo del operador, aunque también puede hacerlo a expensas de la energía elástica del sistema. A partir de un análisis energético asociado a esta clase de deformación, se quiere predecir la trayectoria de una fractura. El análisis de esta clase de problemas requiere una caracterización geométrica precisa de la forma que la lámina adquiere cuando es sometida a forzamiento.

En esta tesis se explora dos problemas: el primero consiste en estudiar la respuesta elástica del pliegue que se forma en una configuración de dos fracturas convergentes en una geometría de peeling sin adhesión. Para ello la solución se basa en un montaje previo que consiste en impedir la propagación de dos grietas mientras se aumenta la fuerza de tiro aplicada a la lengüeta que hay entre las dos fracturas. A partir de la medición de las dos curvaturas principales del pliegue se identifica una transición de un pliegue cilíndico a un pliegue de Witten, a medida que la fuerza aumenta. La transición se puede caracterizar a través de una longitud de corte que resulta ser el ancho del pliegue de Witten para una largo del pliegue y una espesor de la lámina dados.

El segundo problema corresponde a un estudio de rasgado de una lámina elástica y frágil en una geometría circular. A partir de la indentación de la lámina preparada con n cortes radiales iniciales, se encuentra que si $n \geq 4$ las fisuras se propagan radialmente, pero si $n < 4$ las trayectorias divergen en forma de espirales logarítmicas. Se presenta un modelo geométrico basado en el concepto de involuta y que desprecia los efectos elásticos, el cual permite entender la existencia y la forma de dichas espirales. Al incorporar los efectos elásticos se logra explicar la existencia de $n = 4$ fracturas espirales en una configuración modificada.

Abstract

The purpose of this work is to understand some mechanisms of tearing, i.e., brittle fracture of a thin elastic sheet subjected to large displacements out of the plane. In the case of quasi-static tearing of one or more fractures, the sheet is subjected at all times to stretching and bending, so that the geometry of the sheet results from an energy balance in which fractures are at rest. A crack progresses driven by the work of the operator, but may also do so at the expense of the elastic energy of the system. From an energy analysis associated with this kind of deformation, we want to predict the trajectory of a fracture. The analysis of this kind of problems requires a precise characterization of the geometry of the sheet when subjected to forcing.

In this thesis we explore two problems: first, we study the elastic response of the crease formed in a configuration of two converging fractures in a peeling configuration without adhesion. To this end we prevent the two cracks from propagating while the pulling force applied to the strip between the two cracks is increased. From the measurement of the two principal curvatures of the fold as the force increases, we identify a transition from a cylindrical fold to a Witten - Li ridge. The transition can be characterized by a cut-off length which happens to be the width of the Witten - Li ridge, for a given length of the ridge and given thickness of the sheet.

The second problem consists in the tearing of a perforated sheet in a circular geometry. The sheet is prepared with n initial radial cuts, and perforated with a cone. We find that if $n \geq 4$, cracks propagate radially, but if $n < 4$ paths diverge in the form of logarithmic spirals. A geometric model based on the concept of involute which neglects the elastic effects, allows us to understand the existence and form of such spiral shapes. By including the elastic effects we are able to explain the existence of $n = 4$ spiral fractures in a modified configuration.

Dedicado a mis amados padres Juan y Ana ...

Agradecimientos

He recorrido un largo camino de ya 5 años donde me he desarrollado como un profesional de la investigación de lo cual me siento muy orgulloso, pero el conseguir esto no ha sido gratuito, me siento un afortunado porque he contado con innumerable ayuda durante este largo viaje tanto en el aspecto académico como en el humano.

En primer lugar debo agradecer a mis "jefes“ del laboratorio de Estructuras Delgadas, el Dr. Eugenio Hamm y el Dr. Enrique Cerda, ambos científicos brillantes a los que admiro tanto por su competencia profesional como por su calidad de personas y de los cuales aprendí muchísimo durante el transcurso de estos años. Al Dr. Hamm, mi director de tesis, le agradezco toda la disposición y el tiempo dedicado en la elaboración y corrección de este documento como también por su paciencia, consejos y discusiones de trabajo a lo largo de esta investigación. De la misma forma agradezco al Dr. Cerda el tiempo y el empeño que dedicó a trabajar conmigo este tiempo, especialmente en uno de los experimentos de este trabajo, horas y horas de largo trabajo midiendo y discutiendo. Muchas Gracias.

De la misma forma quiero agradecer al Dr. Benoît Roman el darme la oportunidad de trabajar en su laboratorio en la ESPCI, y también por darme todas las facilidades para que mi estancia en París fuera lo más cómoda posible. Gracias por las discusiones y por el soporte en el trabajo experimental de mi investigación. Agradezco también el aporte del resto de los integrantes de MECAWET que de alguna u otra forma hicieron que mi estancia en Francia fuera más agradable, al Dr. Jose Bico, Dr. Étienne Guyon, Dr. Miguel Trejo, y Suomi Ponce.

Dentro de la Universidad de Santiago es mucha la gente a la que le debo algo, a los profesores que me instruyeron durante los cursos del programa de doctorado, en especial al Dr. Jorge Gamboa quien ademas de darme clases de física también me dió algunas de violín; al profesor Jorge Ferrer por su ayuda en la automatización de los primeros montajes de este trabajo y por las largas charlas de música. También agradezco a mis compañeros del laboratorio Sergio, Cesar, Nelson, Camila y Marinka por generar un ambiente de trabajo grato y de intercambio constante de conocimientos. Por último quiero mencionar a mis colegas y amigos dentro del departamento de Física varios de los cuales se convirtieron en compañeros de ruta, Juan Luis Palma, Vicente Salinas, Sebastián Michea, Alejandro Riveros, Daniela Briceño, Antonella Rescaglio, Romina Muñoz, Victor Romero, Alejandro Pereira, Nicolás Vargas, Franco Tapia, Nelson Sepúlveda y Milenka Van Hemelryck. Gracias por este tiempo juntos!.

No puedo dejar de agradecer a mis padres, Juan Fuentealba y Ana Durán, por el apoyo incondicional entregado durante todos mis años de estudiante desde mi etapa escolar hasta la época de alumno de doctorado, sin ellos seguramente nada de lo que estoy viviendo hoy habría sido posible. Gracias por todo!. Agradezco también de forma especial a esas personas que me bendijeron con su amistad y cariño y que forman parte de ese otro mundo muy querido y no académico al que pertenezco, mi hermana Paulina, mis amigos Alexis, Peyo, Pepa y mi comunidad de vida.

Agradezco de forma especial también a mi pareja Loreto quien ha estado conmigo durante estos últimos tres años, en los buenos y malos momentos, siendo mi amiga, mi confidente y muchas veces mi cable a tierra. Muchas gracias por quererme e intentar entenderme.

Finalmente agradezco el aporte financiero de la comisión nacional de investigación científica y tecnológica (CONICYT) mediante la beca para Estudios de Doctorado en Chile año académico 2009 (**Proyecto GRANT Nº D-21090746**), a la Embajada de Francia en Chile por la beca de mobilidad doctoral año 2011, y a la Dirección de Graduados de la Universidad de Santiago por los diferentes aportes mediante las becas de apoyo a la investigación.

Muchas Gracias a todos!

Tabla de Contenido

1. Introducción **1**

1.1. Antecedentes Históricos 2

1.2. Teoría de la Elasticidad 4

1.2.1. Energía almacenada en una placa 6

1.3. Fracturas 9

1.3.0.1. La fractura frágil 11

1.3.1. Criterio de Griffith 11

1.3.2. Tasa de liberación de energía y energía de fractura 12

1.3.3. Fracturas en láminas delgadas 13

1.4. Rasgado 15

1.4.1. Pliegues en el rasgado 17

1.4.1.1. Tirando de una cinta 18

1.4.1.2. Empujando una cinta 19

1.4.2. Fracturas Convergentes o Divergentes 21

1.4.3. Espirales en rasgado 24

2. Transición de estados de un pliegue asociado al rasgado sin adhesión **27**

2.0.4. Condiciones de Borde 29

2.1. Experimento 31

2.2. Modelo 34

2.2.1. Pliegue Cilíndrico 34

2.2.1.1. Integración 36

2.2.2. Pliegue de Witten - Li 37

2.3. Definición de los Parámetros geométricos relevantes y Procesamiento de imágenes 41

2.3.1. Parámetros en la descripción asintótica del pliegue 41

2.3.2. Medición de R frontal 44
2.4. Resultados 45
2.4.1. Evolución de h 45
2.4.2. Evolución de R frontal 48
2.5. Pliegue Cilíndrico 50
2.5.1. Elástica 52
2.6. Pliegue de Witten - Li 56
2.7. La Transición 58
2.8. Conclusiones 59

3. Fracturas en forma de espirales Múltiples **62**
3.1. Fragmentación 62
3.2. Experimento 64
3.2.1. Experimento A (fracturas por empuje) 65
3.2.1.1. Dependencia con la geometría 66
3.2.1.2. Dependencia con el espesor de la lámina 67
3.2.2. Experimento B (fracturas por rasgado) 68
3.3. Análisis de datos 70
3.3.1. Fracturas en forma de espiral por empuje y rasgado 78
3.4. Conclusiones 81

4. Conclusiones Generales y Trabajos Futuros **82**
Bibliografía 84

Indice de Ilustraciones

1.1. Antecedentes históricos. Experimentos de Galileo y Hooke 2
1.2. Mr. Elástico y el coeficiente de Poisson 5
1.3. Placa en doblamiento puro 7
1.4. Fracturas 10
1.5. Criterio de Griffith 12
1.6. Ejemplos de modos específicos de deformación en láminas delgadas 15
1.7. Rasgado en papel 16
1.8. Modos de fractura en un material 17
1.9. Rasgado: Tirando de una lámina 18
1.10. Rasgado: Empujando una lámina 20
1.11. Doble fractura con trayectorias divergentes. Experimento de *concertina* 20
1.12. Referencias y fuerza de tiro en un experimento de rasgado 22
1.13. Rasgado de una lámina delgada en diferentes configuraciones de carga 23
1.14. Etapas de la formación de una espiral en rasgado 25
1.15. Fracturas divergentes con trayectorias de espiral 26

2.1. Rasgado en geometría de peeling con adhesión [21]. 28
2.2. Condiciones de borde en el rasgado con o sin adhesión para una lámina delgada con espesor $t << W, L$ 29
2.3. Esquema experimental para el rasgado de una lámina sin adhesión 30
2.4. Esquema del sistema de tracción 32
2.5. Montaje Experimental 33
2.6. Pliegue cilíndrico 35
2.7. Pliegue de Witten - Li 37
2.8. Pliegue con una fuerte componente de estiramiento 38

2.9. Representación lateral del pliegue de Witten - Li 40
2.10. Definición de h a cargas bajas 41
2.11. Definición de h a altas cargas 42
2.12. h_a y h_b 43
2.13. Definición de R frontal 43
2.14. Representación h_a y h_b en función de la fuerza aplicada F 45
2.15. Curva Experimental típica $F - h$ 46
2.16. Curvas experimentales $F - h$ para diferentes espesores y diferentes W 47
2.17. Evolución del perfil de curvatura frontal W/R en función de la carga aplicada . . . 48
2.18. Curva Experimental $F - R$ 49
2.19. Representación $\log - \log$ de curva Experimental adimensional $f - h/L$ 51
2.20. Representación $\log - \log$ de curva Experimental adimensional $\bar{f} - h/L$ 52
2.21. Simulación Numérica curva elástica 54
2.22. Representación $\mu - h/L$ 55
2.23. Representación $\log - \log$ de valores experimentales para h_∞ y R_∞ 56
2.24. Representación $\log - \log$ de curvatura gaussiana 57
2.25. Transición 59

3.1. Experimento de Vermorel et al. 63
3.2. Fragmentación de una lámina delgada 64
3.3. Diseño de experimento de rasgado de múltiples fracturas por empuje 65
3.4. Espirales y dependencia de la geometría del objeto que empuja 66
3.5. Espirales y dependencia del espesor de lámina 68
3.6. Diseño de experimento de rasgado de múltiples fracturas por la acción de una fuerza de tiro perpendicular al plano 69
3.7. Trayectorias de Múltiples fracturas en forma de espiral para $n = 1, 2, 3$ 71
3.8. Trayectorias de Múltiples fracturas radiales para $n = 4, 5$ 72
3.9. Representación semi$-\log$ de trayectorias de fracturas 73
3.10. Geometría de la trayectoria de la fractura 74
3.11. Involuta y Tanvoluta de una curva 76
3.12. Curva espiral involuta de sí misma 77
3.13. Valores experimentales del paso de las espirales para rasgado por empuje y tiro . 80

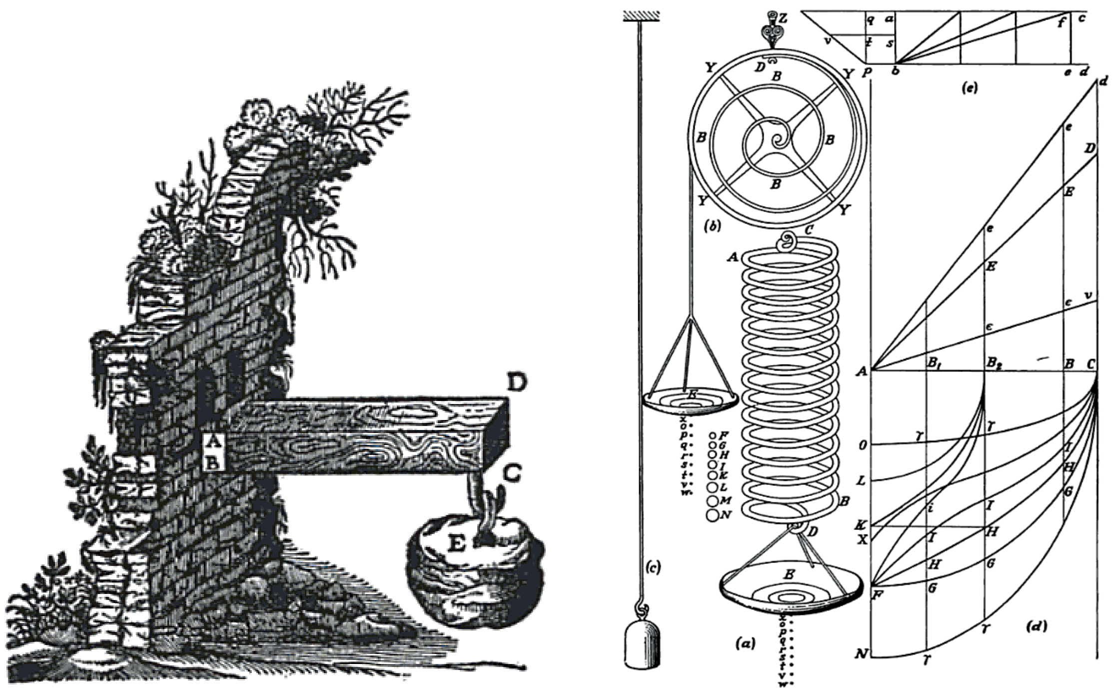
Capítulo 1

Introducción

Desde hace muchos siglos el hombre ha estado interesado en construir grandes monumentos, desde grandes pirámides en el borde del río Nilo, pasando por las grandes catedrales medievales europeas, hasta llegar a los gigantes rascacielos que inundan gran parte de las metrópolis actuales. Los diversos elementos que forman parte de estas obras de ingeniería, deben tener un tamaño físico definido. Estas partes deben estar preparadas para resistir las fuerzas a las que puedan estar sometidas durante su vida útil, en el caso de grandes puentes sus cimientos deben ser capaces de resistir la enorme presión de su propio peso para que no se produzcan fisuras que pueden llevar en un futuro al colapso de la estructura. Del mismo modo los brazos de un robot deben ser lo suficientemente rígidos para que no se produzcan deformaciones excesivas y el robot tenga la precisión adecuada para realizar la tarea programada. Por estas razones el estudio de la elasticidad y resistencia de los materiales ha alcanzado un importante desarrollo no sólo en trabajos de arquitectura, si no que su campo se ha expandido en diferentes áreas. En este trabajo, el estudio se enfoca en el análisis de algunos de estos comportamientos en estructuras delgadas.

1.1. Antecedentes Históricos

Los orígenes de la elasticidad y resistencia de los materiales se remontan a la época de Galileo. Galileo publicó en 1638 sus “Discorsi e dimistrazioni matematiche" donde aborda problemas tales como el de la viga en voladizo (cantilever beam) (figura 2.2(a)). Galileo encontró que la resistencia del material a la fractura se incrementa a razón del cubo del radio de la viga cilíndrica. Este resultado proviene del hecho de que la resistencia del material es proporcional a la sección de la viga y que el brazo de apoyo es proporcional al radio [1]. Las investigaciones de Galileo marcaron el punto de inicio que después seguirían otros investigadores interesados en esta disciplina en los años siguientes.



(a) (b)

Figura 1.1: a) Experimento de Galileo con la viga de voladizo. b) Experimento de Hooke con resortes. Imagen extraída de [1]

Durante ese mismo siglo, Robert Hooke, del que se ha escrito que era un hombre de carácter iracundo, con un aspecto físico muy poco agraciado, y que mantuvo durante muchos años terribles disputas con Isaac Newton, publicó en su obra “De potentia restituida" (1678) resultados sobre el comportamiento de lo que él llama “springy bodies" (resortes y objetos de similar comportamiento), constatando que si se se dobla la fuerza aplicada sobre un resorte el desplazamiento que éste experimenta, debido a la fuerza, también se duplica. Este hecho se conoce como linealidad entre fuerzas y desplazamientos.

Un par de años después, Mariotte (1686), publicó independientemente el mismo resultado de Hooke pero aplicado a la viga de Galileo. Fue el primero en afirmar que la viga en voladizo soporta el peso colgado de su extremo porque algunas de sus fibras se estiran y otras se contraen.

A pesar de que Hooke y Mariotte fueron los primeros en estudiar la distribución de esfuerzos en una viga, es Jacob Bernoulli el que obtiene la ecuación diferencial de la *elástica* (1744). Jacob llega a esta ecuación que gobierna la deformación elástica de una viga mediante consideraciones de equilibrio. Simultáneamente, en el mismo año, Leonardo Euler llega también a deducir la ecuación de la *elástica*, pero basado puramente en consideraciones energéticas minimizando la integral que representa el trabajo absorbido por la viga en flexión. La sugerencia de seguir este camino parece ser que le vino de una carta de Daniel Bernoulli (sobrino de Jacob), escrita en 1742. Lo asombroso de esta historia es la clara y desleal competencia que había entre los mismos miembros de la familia Bernoulli ampliamente documentada [2].

A pesar del esfuerzo de varios científicos muy reputados, hasta principios del siglo XIX no se tenía una teoría unificada para el estudio de los cuerpos elásticos. Más bien se contaba con una especie de colección de problemas resueltos de diferentes tipos (flexión de vigas, nociones de pandeo, etc.). No fue hasta 1821 que Navier partiendo de la hipótesis de que la fuerza establecida entre dos partículas materiales era proporcional al cambio de distancia entre ellas, establece las primeras ecuaciones de equilibrio generales para cuerpos elásticos, sin embargo durante los años siguientes entró en una famosa discusión con Poisson por la naturaleza de éstas. Los trabajos de Navier atrajeron la atención de Cauchy, quién corrigió la hipótesis de Navier y presentó a la academia de Paris un año después una versión mejorada de aquellas ecuaciones.

Pese a todo siguió habiendo controversia sobre algunas de las hipótesis usadas por Cauchy hasta que finalmente en 1837, George Green formuló el principio de conservación de la energía elástica a partir de la mecánica analítica de Lagrange. Dichas ecuaciones son las que se conocen y utilizan hoy en día. Durante el siglo pasado, el autor que más aportó fue Timoshenko, quien con numerosos libros recopiló toda la información en torno a la resistencia de los materiales en sus libros de docencia e investigación, los cuales son bibliografía obligada sobre cualquier trabajo en el tema.

1.2. Teoría de la Elasticidad

La “elasticidad" es la propiedad de un cuerpo de cambiar de forma cuando sobre él se ejerce una fuerza deformadora, y de recuperar su forma original cuando la fuerza deformadora deja de actuar [3].

La teoría de la elasticidad no es precisamente la explicación física de la elasticidad, sólo se encarga de estudiar la respuesta mecánica de un modelo de material llamado sólido elástico al ser aplicadas cargas o imponerse pequeños desplazamientos superficiales sobre él. Se denomina sólido elástico a un material deformable, es decir, un material tal que las distancias entre sus puntos pueden variar bajo la acción de las cargas. De la misma forma suponemos que este sólido es homogéneo: misma composición y propiedades en cualquier parte, y además isótropo: sus propiedades no dependen de la dirección que se considere.

La relación más sencilla entre la tensión σ aplicada a un sólido elástico y la deformación ϵ que experimenta el cuerpo es la ley de Hooke que establece la linealidad entre ambas cantidades,

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{1.1}$$

Para el caso unidimensional $\sigma = \varepsilon\epsilon$ donde ε es el módulo de elasticidad o módulo de Young del material. El módulo de Young es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, mientras más grande el valor de ε, más rígido es el material.

Cuando se tracciona un material en la dirección de x se produce un estiramiento unitario en la misma dirección de acuerdo a (1.1), pero además se produce una contracción en el sentido transversal. Esta deformación adicional es cuantificada en función del coeficiente de Poisson ν.

$$\nu = -\frac{\epsilon_{trans}}{\epsilon_{long}} \tag{1.2}$$

Figura 1.2: Mr. Elástico es capaz de estirar y contraer su cuerpo sin ninguna dificultad, por lo que las deformaciones que experimenta son elásticas al ser éstas reversibles. El problema es que Mr. Elástico no ha considerado el efecto de Poisson al estirar sus extremidades. En caso de hacerlo, si desea estirar su brazo en un largo de 2 m, el ancho de éste debería disminuir y ser comparable al diámetro de un lápiz, lo que en la práctica le produciría muchos inconvenientes al querer levantar algún objeto

Debido al argumento anterior, se concluye que para conocer la deformación completa de un material, ésta debe ser una combinación lineal de las deformaciones y esfuerzos en todos los ejes. De esta forma se escribe la ley de Hooke generalizada como [4]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{\varepsilon}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\varepsilon}\mathrm{Tr}(\sigma)\delta_{ij} \tag{1.3}$$

En Mecánica se define la energía como la capacidad de realizar un trabajo mecánico. Este trabajo es igual al producto entre la fuerza aplicada y el desplazamiento en la dirección de la fuerza. En los sólidos elásticos deformables las tensiones o esfuerzos multiplicados por sus áreas son fuerzas mientras que la deformación es una medida de cambio de longitud por unidad de longitud. El producto de ambas magnitudes corresponde al trabajo mecánico realizado por una fuerza externa sobre el sólido. Este trabajo se almacena en el cuerpo como energía elástica de deformación. Si se parte de un sólido elástico inicialmente no deformado, se producirá un trabajo, E_{el}, si al aplicar fuerzas externas el cuerpo presenta un nuevo estado que incluye una deformación. Esta energía elástica de deformación equivale a la energía mecánica que adquiere un cuerpo elástico y que en caso de no superarse el límite elástico es capaz de recuperar la forma que tenía originalmente.

Cada material tiene un límite elástico propio que marca un punto muy importante en la curva esfuerzo - deformación. Si se supera ese límite el material está dentro de un régimen no elástico, también llamado plástico o inelástico, donde sólo una pequeña parte de la energía es recuperable. La mayor parte de la energía es dispersada en deformaciones permanentes (no reversibles) y también en forma de calor. En la naturaleza se les denomina materiales dúctiles a aquellos que presentan una importante zona plástica. Por otra parte, a los materiales como el vidrio se les denomina frágiles porque tienen una zona plástica muy pequeña y se fracturan casi inmediatamente después de superar el límite elástico.

1.2.1. Energía almacenada en una placa

Debido a que en este trabajo se considerarán cuerpos elásticos delgados (láminas) se debe analizar la forma que adoptan las ecuaciones de la elasticidad para estos sistemas. Cuando se habla de una placa elástica delgada se entiende que una de sus dimensiones (el espesor) es mucho menor que sus demás dimensiones. Al igual que en el estudio de un sólido elástico, toda la teoría de elasticidad está desarrollada para pequeñas deformaciones, pero en este caso el criterio es que los desplazamientos de los puntos de la placa deben ser pequeños comparados con el espesor de la placa [5].

La densidad de energía elástica de una placa isótropa que ha sido deformada, se puede escribir en función de la traza y la determinante del tensor de deformaciones γ [6],

$$E_{el} = \frac{\varepsilon}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{1-\nu}{2} \left[\mathrm{Tr}^2(\gamma) - 4\mathrm{Det}(\gamma) \right] + \frac{1+\nu}{2} \mathrm{Tr}^2(\gamma) \right) \tag{1.4}$$

Si la lámina es deformada solamente en el plano natural donde reside, el espesor t no introduce una nueva coordenada en la descripción de las deformaciones. De esta forma los desplazamientos observados en cualquier dirección serán extrapolados en todo el espesor, por lo tanto la energía total se escribe como la siguiente integral de área

$$E_s = \frac{\varepsilon}{2(1-\nu^2)} \int \frac{1-\nu}{2} \left[\text{Tr}^2(\gamma_s) - 4\text{Det}(\gamma_s)\right] + \frac{1+\nu}{2}\text{Tr}^2(\gamma_s) dA, \tag{1.5}$$

donde γ_s hace referencia a las deformaciones en el plano de la lámina. Si la lámina sufre doblamientos (deformaciones fuera del plano natural), los desplazamientos en la superficie ya no son representativos de todo el espesor. Si se dobla una placa de dimensiones $a \times b$ y se forma un cilindro de radio $R = a/2\pi$ y altura b se tiene, debido al espesor, una superficie externa dilatada y una superficie interna comprimida (figura 1.3). Debido a la continuidad espacial de las deformaciones dentro de la lámina se tiene una superficie neutra (o media), sobre la cual no existe deformación alguna. Las deformaciones se pueden escribir como una función de la curvatura local $\gamma_{ss} = \frac{\delta S' - \delta S}{\delta S} = \frac{\chi}{R}$, donde χ es la coordenada asociada a la posición radial dentro del material medido desde la superficie neutra.

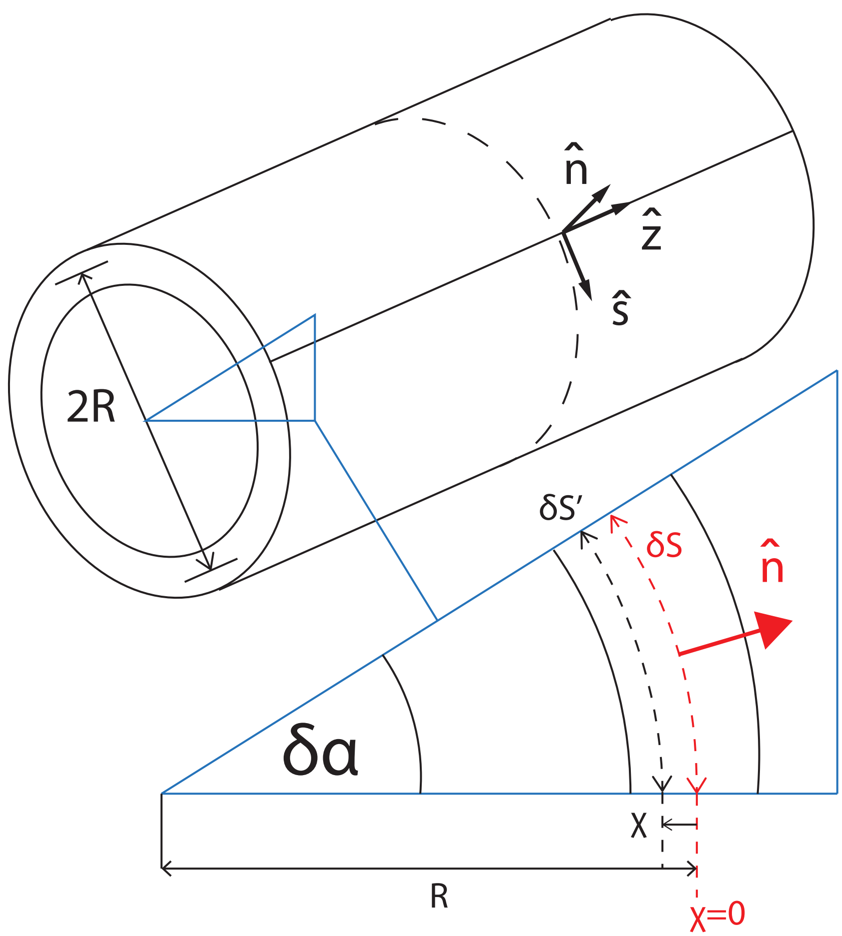


Figura 1.3: Esquema de las deformaciones existentes para un placa en un doblamiento puro donde $\chi = 0$ corresponde a la posición de la línea neutra.

Cuando una lámina es deformada fuera del plano de modo que $\gamma = 0$ en toda la superficie neutra, se dirá que la placa posee doblamiento puro o que la superficie neutra es desarrollable. Una superficie desarrollable tiene curvatura gaussiana cero en todos sus puntos [7], por lo tanto la superficie neutra podrá considerarse en ausencia de estiramientos solamente cuando todas las posiciones puedan describirse haciendo uso de una sola curvatura. Si en todo instante la longitud de la superficie neutra corresponde a un estado de referencia neutro, las deformaciones locales medidas respecto de las longitudes de la superficie media (en analogía al cilindro de la figura 1.3), podrán ser expresadas en términos de las curvaturas principales

$$\begin{pmatrix} \chi/R_1 & 0 \\ 0 & \chi/R_2 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

donde χ es una coordenada transversal a la superficie neutra, con $\chi = 0$ en la superficie neutra y R_1 y R_2 los radios de curvatura en las direcciones preferenciales. Utilizando directamente la ecuación (1.4) se tiene la siguiente energía asociada

$$E_B = \frac{\varepsilon t}{2(1-\nu^2)} \int \int_{\chi=-t/2}^{\chi=t/2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - 2(1-\nu)\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} \right] \chi^2 d\chi dA \tag{1.7}$$

Finalmente

$$E_B = \frac{B}{2} \int \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - 2(1-\nu)\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} \right] dA, \tag{1.8}$$

donde $B = \frac{\varepsilon t^3}{12(1-\nu^2)}$ es el módulo de doblamiento del material. La expresión (1.8) corresponde a un sistema dominado por doblamiento puro sin considerar extensiones ni contracciones. El valor total del tensor de deformaciones corresponde a la deformación conjunta de doblamientos y estiramientos, por lo que la expresión para la energía total es una combinación de ambos efectos y se escribe simplemente como la suma de ambas contribuciones. Es importante decir que sólo γ_B depende de la coordenada χ.

$$E_{el} = \frac{\varepsilon}{2(1-\nu^2)} \int \int_{\chi=-t/2}^{\chi=t/2} \left(\frac{1-\nu}{2} \left[\mathrm{Tr}^2(\gamma_s + \gamma_B) - 4\mathrm{Det}(\gamma_s + \gamma_B) \right] + \frac{1+\nu}{2} \mathrm{Tr}^2(\gamma_s + \gamma_B) \right) d\kappa dA \tag{1.9}$$

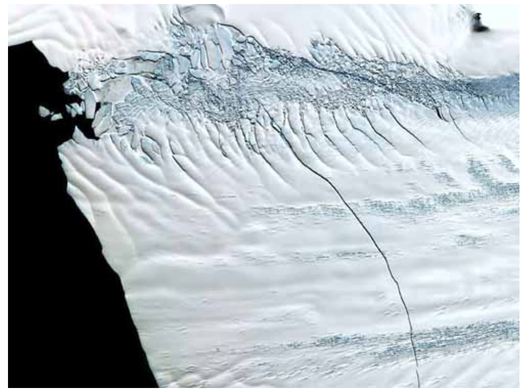
Se puede interpretar esta suma de energías asociada a γ_s y γ_B simplemente como $E_{el} = E_s + E_B$.

1.3. Fracturas

Las grietas o fracturas se observan comúnmente en varios contextos [8], como por ejemplo una ventana rota [9], en placas de hielo [10], en colisiones entre témpanos de hielo flotante [11], y en pilares macizos de roca [12], entre otros. Durante los últimos 30 años el estudio de fracturas ha tenido gran impacto en el análisis de la estabilidad de estructuras industriales y en construcción con el objeto de evitar y predecir fallos. Entre los años 70 y 80, hay accidentes gigantescos que pudieron haberse evitado con un debido análisis de fracturas del problema. Por ejemplo, en el año 1979, el buque petrolero *Kurdistan* se partió literalmente en dos mientras navegaba por el Atlántico. La razón fue un gradiente de esfuerzos considerable dentro del casco de la nave debido a la diferencia de temperatura entre el petróleo caliente del barco y el agua fría. La fractura comenzó desde la quilla del barco y aunque el acero del casco tenía la tenacidad adecuada para prevenir la fractura, falló al no poder detener la propagación de la grieta. Por ejemplos como estos, actualmente el estudio de fractura en materiales ingenieriles como en concreto y acero tienen aplicaciones directas en la industria aeronáutica, minera, y metalúrgica.

Se dice que un material se fractura cuando se le aplica un esfuerzo lo suficientemente grande en algún nivel de sus constituyentes primarios para romper los enlaces que los mantienen unidos. Este proceso ocurre principalmente a nivel atómico en la vecindad de la punta de la grieta donde la energía se concentra. A pesar de esto, las escalas en que se presentan fracturas pueden variar desde microfisuras en huesos hasta redes de fracturas que pueden abarcar muchos metros como redes de fracturas en el pavimento o el resquebrajamiento de los cascos polares.

(a)



(b)

Figura 1.4: Ejemplos de fracturas. a) Fotografía del hundimiento del *Kurdistan* después de fracturarse en dos partes, b) Imagen satelital que muestra el resquebrajamiento en capas del hielo ártico.

Los primeros experimentos en fractura se deben a Leonardo da Vinci. Él midió la resistencia de los alambres de hierro que fabricaba en su trefiladora y encontró que su resistencia variaba de forma inversa a la longitud de éstos. Este resultado implicaba que los defectos del material gobernaban la resistencia de los alambres, pues en un alambre mas largo (mayor volumen del material), hay una mayor probabilidad de encontrar una zona con defectos.

Debieron pesar más de 300 años para que estas observaciones meramente cualitativas fueran traducidas en ecuaciones. Griffith, en el año 1920, estableció la conexión entre la fractura y el tamaño de los defectos de un material. De acuerdo con Griffith una grieta se hace inestable y se produce la fractura cuando el cambio en la energía tensional que resulta de un incremento en la longitud de la grieta es suficiente para superar la energía superficial del material [13]. El modelo de Griffith estableció un método útil para predecir la propagación de fracturas en materiales muy frágiles como el vidrio o materiales cerámicos, pero no pudo aplicar su teoría en materiales dúctiles como metales ya que estos que pueden deformarse sostenidamente sin romperse.

1.3.0.1. La fractura frágil

En términos generales se dice que un material es frágil si no se puede realizar una deformación apreciable sin provocar su rotura. Esto no implica necesariamente que su resistencia a la rotura sea débil (la resistencia es el resultado de la tensión máxima que puede soportar un material justo antes de la fractura).

La fractura frágil es un tipo de fallo que normalmente se produce sin una deformación plástica (permanente) previa. Esta fractura está limitada a una región cercana a la superficie de ruptura, es decir, sólo se modifica la superficie de contacto de las partes que resultan de la fractura. Este tipo de procesos, en general, no liberan mucha energía ya que no cambian mayormente la forma del material.

1.3.1. Criterio de Griffith

El criterio de Griffith, en el cual se basa gran parte de la mecánica de fractura, plantea que si un cuerpo que tiene una respuesta mecánica elástica al ser sometido a un esfuerzo arbitrario se podrá generar una grieta en su estructura (o una grieta existente puede crecer), cuando la disminución de energía elástica que experimenta el cuerpo por unidad de espesor y por unidad de longitud de avance del vértice de la grieta sea igual o mayor al incremento de energía superficial de la grieta que se producirá como consecuencia de la creación de nuevas superficies debidas a dicha propagación.

Se considera una placa semi-infinita, homogénea e isótropa de espesor B, de módulo elástico ε, con una grieta central de forma elíptica de longitud $2a$ que es deformada por tensiones de tracciones σ (figura 3.1). En este caso, a partir de la solución de Inglis [13], Griffith encontró que la energía almacenada en placa por unidad de espesor equivale a:

$$E_{el} = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{\varepsilon} \tag{1.10}$$

La energía de superficie E_{sup} se define como:

$$E_{sup} = 4aB\gamma_s \tag{1.11}$$

Donde γ_s es la energía específica de superficie y $4a$ corresponde al área de la superficie de agrietamiento (el área se multiplica por dos debido a que ese es el número de caras que tiene la grieta).

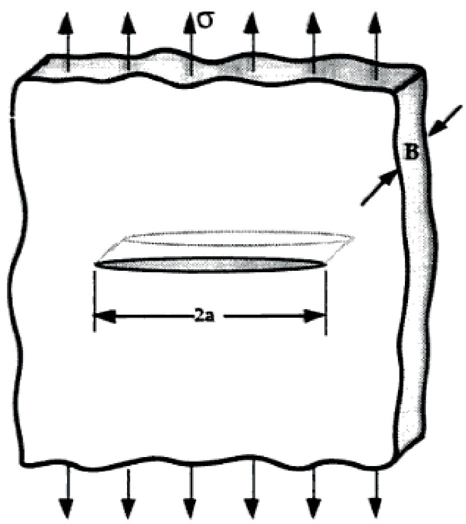


Figura 1.5: Placa homogénea e isótropa con una grieta central elíptica de longitud $2a$ traccionada en sus extremos. Imagen extraída de [14]

Las investigaciones de Griffith e Inglis hicieron dos aportes fundamentales para sentar las bases de la mecánica de la factura: en primer lugar muestran que el desarrollo de una fractura corresponde a un proceso de conversión de energía que está ligado no solamente a la tensión aplicada al material si no que también al tamaño de los defectos. En segundo lugar, mediante (1.11) se tiene una relación entre la tensión de fractura y el tamaño de la grieta que ha sido verificada repetídamente en ensayos de tracción en materiales frágiles.

1.3.2. Tasa de liberación de energía y energía de fractura

El criterio de extensión de grietas de Griffith puede generalizarse en términos de un balance entre energía disponible (suministrada fundamentalmente por fuerzas externas) y energía requerida para que se presente tal extensión.

La energía disponible para la extensión de una grieta usualmente se denomina tasa de liberación de energía G y como lo estableció Griffith es igual a dE_{el}/da, de manera que la ecuación se puede escribir como:

$$\frac{dE_{el}}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{\varepsilon} = G \tag{1.12}$$

Por otra parte, la energía requerida (dE_{frac}/da), también conocida como energía de fractura o tasa de liberación de energía (G_{IC}), es una propiedad del material que se puede considerar constante si la respuesta del material es elástica. La condición de G_C se presenta cuando la tensión σ adquiere un valor crítico σ_c, para el cual $dE/da = dE_{frac}/da$ y por lo tanto:

$$G_C = \frac{\pi\sigma_c^2 a}{\varepsilon} \tag{1.13}$$

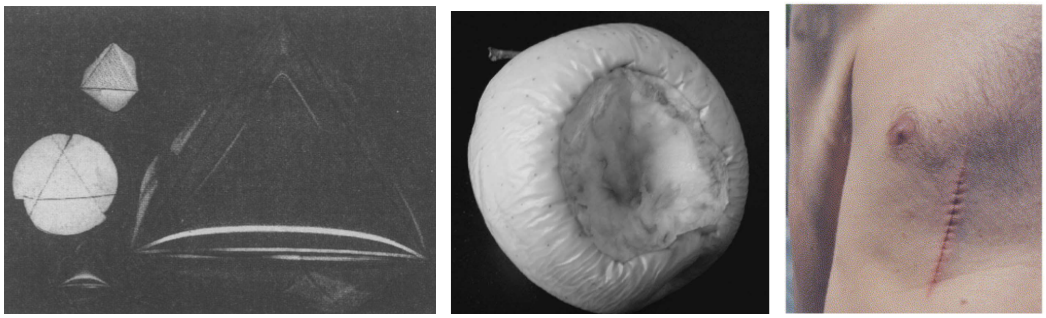
La relación (1.13) es la forma más general para expresar la tensión de agrietamiento en un objeto y tiene la ventaja que no es necesario conocer la energía de superficie γ_s del material. De esta forma, el criterio de fractura dice que si $G < G_C$ no habrá fractura, pero si $G \geq G_C$ entonces $da \geq 0$ y la fractura comenzará avanzar. Si G es igual o levemente mayor a G_C la fractura es controlada y avanza en un régimen cuasi-estático sin que se manifiesten efectos dinámicos.

El criterio de Griffith no predice la dirección en la cual se propaga una fractura, solo predice las condiciones bajo las cuales ésta se genera. Para determinar la dirección en la que crece la fractura usamos un criterio conocido como tasa máxima de liberación de energía (maximum energy release rate criterion) [15], éste indica que la fractura se propagará a lo largo de la dirección en la cual la energía liberada es máxima o de forma equivalente en la dirección que signifique una menor fuerza de tiro.

1.3.3. Fracturas en láminas delgadas

Las láminas delgadas están definidas porque una de sus dimensiones, el espesor t, es mucho menor que las otras dos dimensiones. Los espesores de estos materiales pueden ir desde decenas de microns como el papel de escribir y cintas de envoltorio hasta unos pocos nanómetros como películas de grafeno. Una consecuencia muy importante de la reducción del problema en una dimensión es que se genera una fuerte dependencia de la respuesta mecánica de estos objetos con la geometría. Parámetros como curvatura gaussiana, curvatura media, y en general muchos de los teoremas de geometría diferencial son usados para explicar el comportamiento de láminas delgadas [7].

En años recientes, dentro de la comunidad científica, ha crecido el interés en estudiar e identificar los modos específicos de deformación en láminas delgadas como arrugas (*crumpling* y *wrinkling*) y rasgado (*tearing*). Fenómenos como arrugas en una lámina delgada han sido largamente estudiadas por Witten et al., quienes ha sido pioneros en describir la distribución de energía en un pliegue (*stretching ridge*) [16]. Cuando un papel es arrugado es posible observar deformaciones permanentes distribuidas azarosamente en su superficie caracterizadas por bordes rectos conectados por singularidades puntuales. Estas deformaciones permanentes indican la concentración de energía en estas singularidades y pliegues. Otros investigadores han usado las ideas de Witten para evaluar el colapso de estructuras de envoltorios [17]. Los patrones de arrugas (*wrinkling*) han sido observados en diferentes situaciones como en capas de lípidos, películas de nanopartículas, tiras de poliestireno, entre otros. El análisis de los patrones de *wrinkling* en diversas configuraciones han sido estudiadas para medir las propiedades mecánicas de estas láminas a través de la determinación de la longitud de onda de los patrones [18]. El estudio de la mecánica de láminas y películas delgadas no sólo ha enriquecido el conocimiento básico de estos objetos sino que también ha abierto la puerta al desarrollo tecnológico en pequeñas escalas. Esto genera un reto tanto para ingenieros como científicos en entender el comportamiento de las estructuras delgadas.



(a) (b) (c)

Figura 1.6: Ejemplos de modos de deformación en láminas delgadas. a) Modelo microscópico de las caras de una bola de fullereno proyectadas en láminas delgadas transparentes. La forma óptima de estas estructuras dependen de un trabajo conjunto entre el estiramiento y doblamiento de éstas. [16] , b) Arrugas (wrinkling) inducidas en la cáscara de una manzana por el encogimiento del fruto. Las arrugas se orientan ortogonales a los bordes donde comienza el proceso de secado del fruto [18], c) Un corte superficial en la piel produce el característico ensanchamiento, contracción y arrugamiento de la epidermis (capa delgada externa de la piel). Lamentablemente el corte ilustrado es perpendicular a las líneas de tensión de la piel relajada lo que genera la formación de una fea cicatriz. [19]

El estudio de fracturas en láminas delgadas al igual que en el caso de las deformaciones está muy ligada con la geometría. Se puede considerar una grieta en una lámina delgada como un punto propagándose en una superficie bidimensional [20]. En general, las aproximaciones de láminas delgadas en mecánica se relacionan con el parámetro t/L, donde t es el espesor y L, una longitud en el plano de la lámina.

1.4. Rasgado

Se define rasgado como la situación donde la propagación de una fractura en una lámina delgada está asociada a grandes desplazamientos fuera del plano [20]. Estas situaciones son frecuentes en la vida diaria como cuando intentamos despegar un papel de una superficie [21], o cuando abrimos un envoltorio de algún material [22], y también en aplicaciones ingenieriles como diseños estructurales de edificaciones de mucha altura como puentes y edificios.

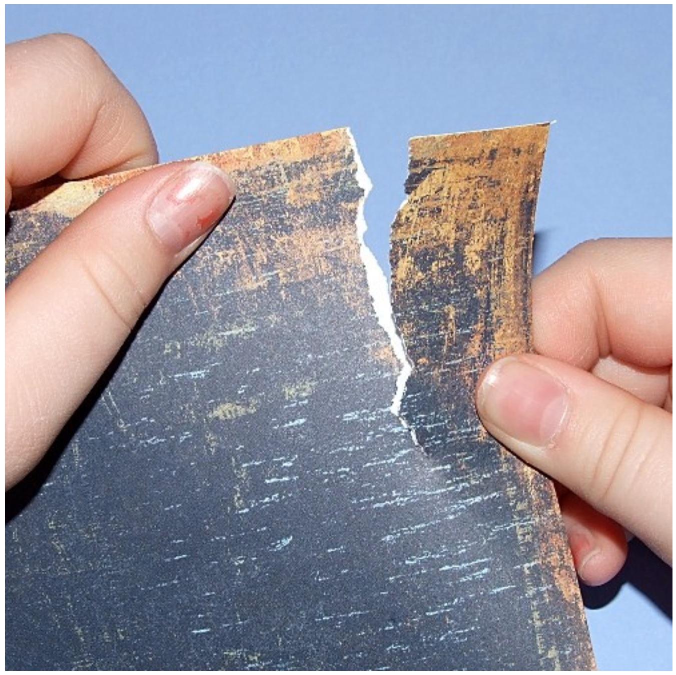


Figura 1.7: Rasgado típico en papel a través de una fractura

Existen tres formas diferentes de aplicar fuerza en un material que pudiera provocar la propagación de una fractura: si se aplica un esfuerzo de tracción, en el plano de la lámina y perpendicular a la línea de fractura (modo I o de tracción), en el plano y paralelo a la línea de fractura (modo II o de cizalle) o perpendicular al plano (modo III o de rasgado) [23]. Actualmente uno de los criterios más aceptados postula que la fractura generalmente se propaga a lo largo de la trayectoria donde el modo II desaparece (principio de simetría local) [24]. El modo III de fractura corresponde al modo de rasgado que equivale a deformaciones del tipo cizalle perpendicular al plano de la lámina, con esfuerzos tangenciales que actúan paralelos pero perpendiculares a las caras de la láminas y opuestos entre sí. Las características de las láminas delgadas ofrecen excelentes condiciones para experimentos donde predomina el modo de rasgado, ya sea para el estudio de propagación de una fractura aislada [25, 26], o para fracturas interactuantes, en particular para el rasgado de doble fractura con fisuras inicialmente paralelas [27, 28] (capítulo 2) y el rasgado múltiple, radial (capítulo 3).

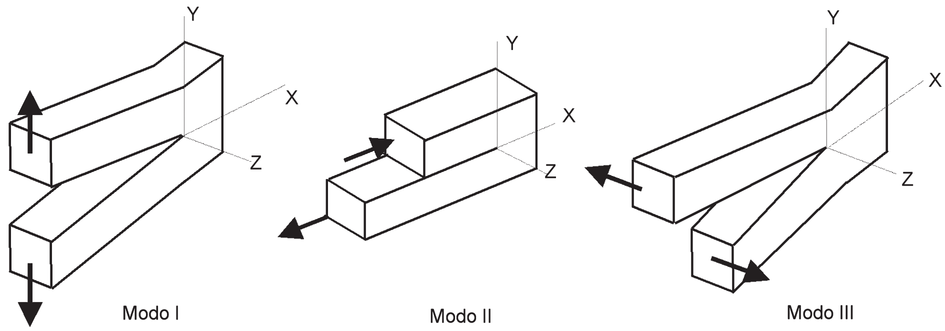


Figura 1.8: a Modos de Fractura en un material. Modo I (tracción), Modo II (cizalle), Modo III (desgarro) [13].

1.4.1. Pliegues en el rasgado

Por simple experimentación se sabe que para propagar una doble fractura por medio del rasgado de una tira en geometría de peeling[1], es necesario la existencia de un doblamiento (pliegue). Si el material tiene un espesor finito, el doblamiento tiene una deformación asociada a este proceso. El cambio geométrico que sufre la tira desde una superficie plana a una superficie con radios de curvatura finitos involucra una modificación hacia un estado energético más alto. La tira puede volver a su estado energético más bajo si desaparece la fuerza de tiro.

Si la fractura comienza a avanzar, la energía total del sistema se escribe como,

$$E = E_{el} + 2\gamma ts \tag{1.14}$$

donde el primer término al lado derecho de (1.14) corresponde a la energía elástica almacenada en la deformación localizada (pliegue), y el segundo a la energía de fractura, con t el espesor de la lámina. El factor $2ts$ corresponde al área que se ha formado debido a la propagación de la grieta.

Este simple modelo no incluye información acerca de la forma en que se introduce carga al sistema. En general en todos los experimentos de rasgado en láminas delgadas que involucren la propagación de fisuras, los sistemas se pueden clasificar en dos grupos según la forma en que

[1] *peeling*: Palabra en ingles para descascaramiento. Se utilizará peeling para describir una lámina que es tirada en $180°$ con respecto al plano donde está fija.

se aplica una fuerza: tiro y empuje.

1.4.1.1. Tirando de una cinta

Considérese el caso anterior donde una lámina entre dos cortes paralelos es tirada en una dirección fija ϕ. Si la lámina está empotrada en los bordes trazados en color plomo (figura 1.9), sólo la pestaña de tiro puede salirse de su posición inicial mientras que el resto permanece en reposo aferrado a sus bordes fijos. Si se introduce la aproximación de tela inextensible [20], el material no debe expandirse por efecto de la fuerza externa.

El criterio de tela inextensible o de elasticidad nula es una aproximación que sostiene que la lámina, además de no estirarse, tiene una rigidez de doblamiento igual a cero. Por esta razón el sistema no acumula energía elástica. De todas formas para objetos delgados inextensibles con una rigidez de doblamiento finita en los cuales el tamaño del sistema L (largo de la lámina) es mucho mayor que el tamaño del pliegue localizado se considera que la lámina es infinitamente flexible y tampoco almacena energía elástica.

Para el caso ilustrado en 1.9 cualquier desplazamiento de una porción del material que no sea la pestaña de tiro de ancho ω podría generar una elongación prohibida por la inextensibilidad, por lo que en principio se desprecian estos efectos.

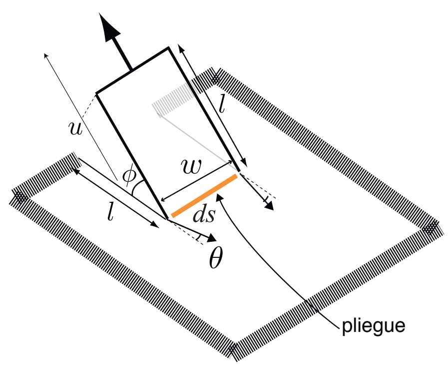


Figura 1.9: Configuración experimental para una doble fractura que está siendo tirada por una fuerza externa en dirección ϕ con respecto al plano. Imagen extraída de [20]

Si no hay energía elástica involucrada la condición energética (1.14) solo depende de la energía de fractura

$$Fdu = 2\gamma tds \tag{1.15}$$

En otras palabras, todo el trabajo externo se disipa en energía de fractura y aplicando el criterio de Griffith $G = \gamma$. Supóngase que la fractura se propaga en una dirección dada por θ. Las condiciones geométricas $du = dl(1 - \cos\phi)$ y $dl = ds\cos\theta$ llevan a la siguiente expresión para la tasa de energía liberada por grieta:

$$G(F, \theta) = \frac{F(1 - \cos\phi)}{2t}\cos\theta \tag{1.16}$$

El criterio de máxima tasa de liberación de energía predice que la fuerza debe ser mínima, lo cual ocurre si $\theta = 0$. Por lo tanto, las grietas se propagan perpendicularmente al pliegue. Así, la fuerza necesaria para la propagación de una fisura depende de las propiedades del material $F = 2G_ct/(1 - \cos\phi)$. Sin embargo, la dirección de propagación es independiente de todas las propiedades del material (energía de fractura G_c, rigidez del material, espesor t), y es también independiente de parámetros geométricos como el tamaño ω de la lámina, el ángulo de tiro ϕ, y la velocidad de tiro.

1.4.1.2. Empujando una cinta

Considérese el caso ahora de un objeto sin filo empujando un pliegue entre dos grietas. La lámina, al igual que el caso anterior, está fija en todos los bordes. Cuando el objeto llega al límite de la zona flexible inmediatamente una parte de la cinta es doblada fuera del plano. La línea efectiva que es empujada por el objeto se llama frente activo [20] (figura 1.10), este frente cubre aproximadamente la misma área que el pliegue del caso anterior (figura 1.9).

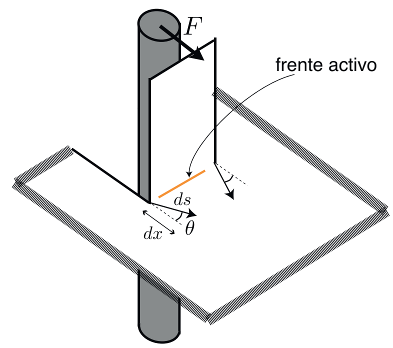


Figura 1.10: Configuración experimental para una doble fractura que está siendo empujada por un objeto sin filo en dirección perpendicular al plano [20]

La energía liberada está nuevamente dada por el trabajo del operador de acuerdo a $2Gtds = Fdx$, con la simple relación $ds \cos\theta = dx$. Así se llega a la misma ecuación (1.16) para $\phi = \pi/2$

$$G(F, \theta) = \frac{F}{2t} \cos\theta \tag{1.17}$$

De esta forma la tasa máxima de energía liberada para una configuración de empuje ocurre cuando $\theta = 0$ (equivalentemente la fuerza de tiro es mínima). Al igual que en el caso de tiro, la fractura se propaga en dirección perpendicular al pligue. Como regla general se puede concluir que en una lámina inextensible una doble fractura se propaga perpendicularmente al frente de empuje. Si se consideran los efectos de la elasticidad, en este experimento se aprecian pequeños ángulos de propagación negativos $(\theta < 0)$, dando lugar a que las grietas se separen lentamente [29]. Esto se explica porque en esta configuración domina el estiramiento de la lámina por sobre el doblamiento. Se puede demostrar que en ese caso la lámina libera energía elástica si el frente activo crece en longitud, lo que equivale a que la separación entre las grietas aumenta. Este hecho fue descrito in extenso en [30].

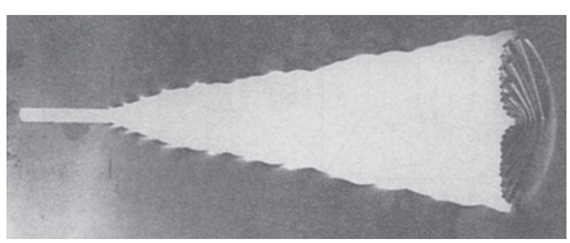


Figura 1.11: Experimento de una doble fractura empujada por un objeto no puntiagudo que describe dos trayectorias que se separan entre sí [29].

1.4.2. Fracturas Convergentes o Divergentes

A pesar de lo difícil que puede resultar el hecho de predecir la trayectoria de una fractura, en algunos experimentos de fracturas oscilantes, a través del análisis de la geometría, se han logrado identificar patrones cuando una lámina es cortada por un objeto en movimiento [25, 31]. Lo mismo para configuraciones tipo *trouser*[2] [26]. De todas formas, salvo algunas excepciones, para tener un completo entendimiento del rasgado de láminas delgadas se deben incluir efectos elásticos dados por el estiramiento y el doblamiento de la lámina. En experimentos de rasgado en configuración de peeling (1.4.1.1) las trayectorias de las fracturas interactuantes son extremadamente reproducibles y convergentes $(\theta > 0)$ [21, 32]. Este comportamiento, al igual que el caso de la concertina (figura 1.11), implica la necesidad de incluir los efectos elásticos en el problema.

Si se considera que la energía elástica almacenada por el pliegue de la figura 1.12 es $E_{el} \neq 0$, se dice que esta energía en una configuración estacionaria sujeta a las variales (W, x, L) debe ser equivalente al trabajo mecánico necesario para llevar el borde de la tira desde su plano natural hasta la posición x (sin alterar la magnitud L). Por lo tanto la energía elástica debe ser función de la posición de dicho borde respecto de la posición que tendría si estuviese completamente doblada. Así, considerando que el borde permanece recto y que ha rotado un ángulo de $180°$ respecto del plano natural, se concluye que la energía elástica es en realidad una función definida por $E_{el} = E_{el}(W, 2L - x)$.

La variación con respecto a los parámetros geométricos se escribe como,

$$\delta E_{el} = \left(\frac{\partial E_{el}}{\partial W}\right)_{x,L} \delta W + \left(\frac{\partial E_{el}}{\partial L}\right)_{x,W} \delta L + 2\gamma t \delta s \tag{1.18}$$

[2] *trouser*: Palabra en inglés para pantalón. Se refiere a un ensayo de rasgado donde se favorece la propagación de la fractura en modo III. La forma final de la lámina es parecida a la de un pantalón.

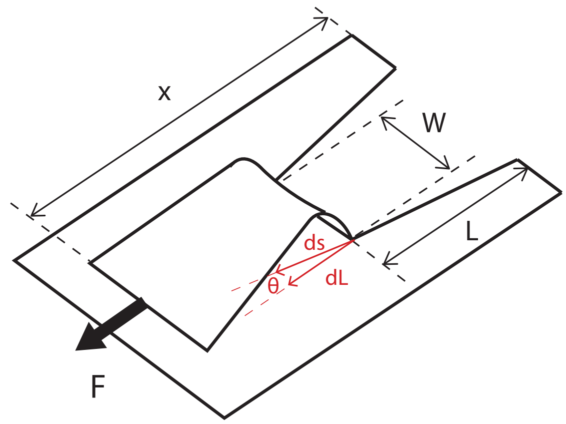


Figura 1.12: Referencia y fuerza de tiro en un experimento de rasgado.

La trayectoria natural del rasgado debe satisfacer la condicion de mínimo local $\frac{\partial U}{\partial S} = 0$ y de esta forma se establece la relación

$$0 = -2\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial W}\right)_{x,L} \sin\theta + -2F\cos\theta + 2\gamma t \tag{1.19}$$

Donde $\sin\theta = -\delta W/2\delta s$ y $\cos\theta = \delta L/\delta s$. Utilizando el teorema del trabajo que posibilita la representación de la fuerza de tiro $F = \left(\frac{\partial E_{el}}{\partial x}\right)_{L,W}$, pero debido a que $E_{el} = E_{el}(W, 2L - x)$, se ha escrito $\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial L}\right)_{x,W} = -2\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial x}\right)_{L,W} = 2F$ en la ecuación precedente. Para encontrar el camino de la fractura, según el criterio de tasa máxima de liberación de energía (TMEL), se requiere que la tira siga en la dirección en la cual se minimiza la fuerza, esto significa que $\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{L,W} = 0$, dado que la ecuación contiene explícitamente a F , la derivada implícita de la misma ecuación introduce la condición equivalente $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial x}\right)\right)_{L,W} = 0$ que da una segunda relación.

$$0 = -\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial W}\right)_{x,L} \cos\theta + F\sin\theta \tag{1.20}$$

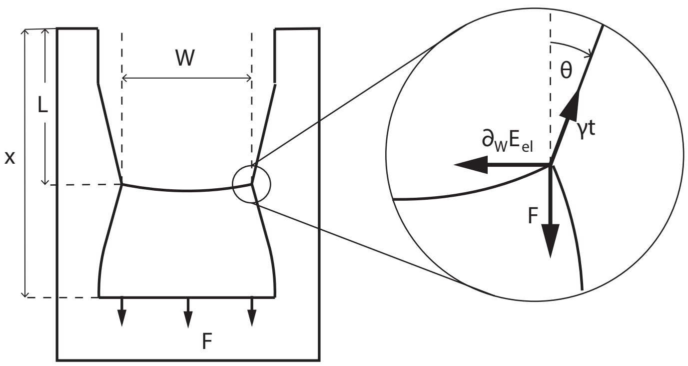
Despejando F de (1.20) y reemplazando en (1.19) se obtiene,

$$\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial W}\right)_{x,L} = \gamma t \sin\theta \tag{1.21}$$

y utilizando este resultado en (1.20) se encuentra

$$F = \gamma t \cos\theta \tag{1.22}$$

Las ecuaciones (1.21) y (1.22) que son totalmente análogas a las (1.19) y (1.20), tienen un clara interpretación en términos de un equilibrio estático de fuerzas que actúan sobre la fisura: la fuerza de fractura γt que se resiste en dirección tangente a la propagación de la fisura, la fuerza de tiro F y el gradiente lateral de energía elástica $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial W}\right)\right)_{x,L}$ observándose claramente que la referencia de ángulo θ involucra que las trayectorias serán convergentes si la energía elástica es una función que crece con W (figura 1.13(a)).



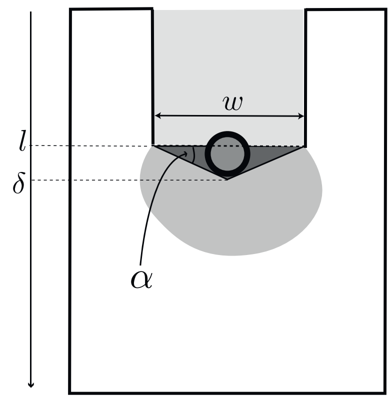


Figura 1.13: a) Descomposición de fuerzas interactuantes en una cinta que está siendo rasgada en geometría de peeling. b) Lámina indentada por un objeto macizo cilíndrico que produce la propagación de una doble fractura [20].

Para el caso de un pliegue que esta siendo empujado se puede mirar la figura 1.13(b), la fuerza F aplicada sobre el pliegue se traduce en una indentación de una línea frontal por una distancia $d = \delta - l$, donde l corresponde a la posición de la fisura. Es razonable asumir que la energía elástica es una función del ancho ω y de la distancia de indentación $E_{el} = E_{el}(\omega, l - \delta)$. Al igual que en el caso de tiro las relaciones obtenidas son muy parecidas,

$$F = 2\gamma t \cos\theta \tag{1.23}$$

$$\left(\frac{\partial E_{el}}{\partial \omega}\right)_{x,L} \sin\theta = 2\gamma t \tag{1.24}$$

La propagación hacia dentro es predicha, al igual que en el caso anterior, si la energía elástica incrementa con la distancia entre las fisuras. Para este caso se supone que la mayor parte de la energía está relacionada con el estiramiento porque supuestamente la lámina es infinitamente flexible. Una simple estimación es considerar que la distancia de indentación $d = l - \delta$ genera una deformación del orden $(d/\omega)^2$ sobre un área de tamaño ω^2 tal que la energía elástica obedece al siguiente escalamiento $E_{el} = \varepsilon t \omega^2 (d^4/\omega^4)$.

Para pequeños ángulos la ecuación (1.23) se escribe $F = 4\varepsilon t d^3/\omega^2 = \gamma t$ tal que la fisura descrita por las ecuaciones (1.23) y (1.24) se propaga en dirección:

$$\theta \sim -\left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3} = -\left(\frac{l_\varepsilon}{\omega}\right) \tag{1.25}$$

que es un ángulo negativo donde $l_\varepsilon = \gamma/\varepsilon$ es la longitud del material que caracteriza la fractura. La propagación hacia fuera $(\theta < 0)$ es en efecto predicha porque la energía elástica decrece con la distancia entre las grietas ω. El ángulo de propagación es independiente del espesor de la lámina, pero decrece con el ancho ω del frente activo o de empuje.

1.4.3. Espirales en rasgado

Supóngase que se tiene una lámina delgada con un corte recto. Si ahora se usa un objeto sin filo y se empuja uno de los bordes de la fisura justamente en la mitad del corte, se reduce al mismo problema que se estudió en la sección anterior de un pliegue empujado entre dos fracturas. Este problema que ya fue introducido tiene una solución conocida con trayectorias de fracturas divergentes [29, 27]. El problema se vuelve más interesante si en vez de empujar en el centro del corte, se empuja cerca de uno de los extremos. En tal caso la tensión en uno de los bordes es mayor con respecto al otro y es más probable que el material ceda sólo en el punto de mas tensión y no en los dos simultáneamente. Considérese ahora que el material es inextensible (modelo de tela inextensible), de forma tal que el material no puede almacenar energía elástica y todo el trabajo realizado debe ser aportado por la energía de fractura. En tal caso la fisura más cercana al punto de empuje avanza perpendicular al frente de fractura (que corresponde a la línea recta que uno los extremos del corte inicial). De esta forma si se comienza a empujar el pliegue de modo que la punta de la fractura τ avance perpendicular a la línea $\overline{AB}$ (figura 1.14) la trayectoria descrita será un círculo centrado en el punto fijo A. Después de superar un desplazamiento angular π la punta de la fisura τ ahora se centra en el punto fijo B trazando un radio r alrededor de éste. El resultado se vuelve aún más interesante al seguir desarrollándose la fractura ya que en algún momento antes de recorrer un ángulo 2π el punto en que se apoya la fisura τ deja de ser un punto fijo y pasa a ser un punto dentro de la misma curva ya descrita (punto D). En adelante, al avanzar τ el punto de tangencia también comienza a variar, situación que lleva a que la fractura ya no describa tramos circulares, sino que una trayectoria en forma de espiral [30].

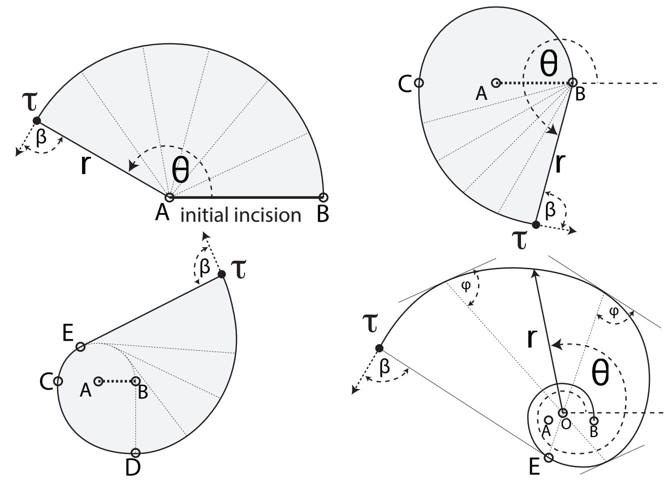


Figura 1.14: Etapas de la formación de una espiral en rasgado [30]

Los patrones en forma de espiral han sido observados en diferentes experimentos de fractura, cuando el material se delamina desde un sustrato [33], o espirales divergentes en fractura [34]. Sin embargo, en estos casos las espirales obtenidas corresponde a espirales de Arquímedes. En el experimento de [30] las espirales obtenidas son logarítmicas de modo que el radio de propagación aumenta de forma exponencial.

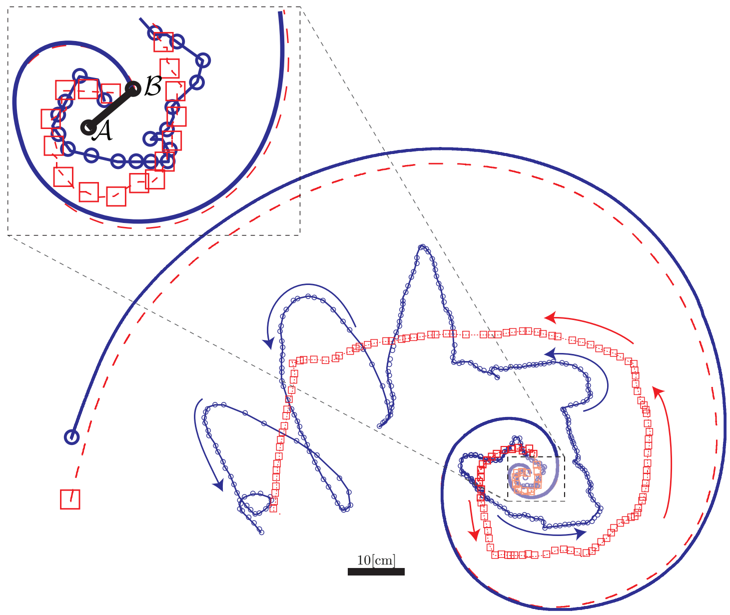


Figura 1.15: Fracturas divergentes en forma de espiral (líneas sólidas y cortadas), donde las fisuras se propagan en solo un extremo de la inicisión inicial $\overline{AB}$ como se muestra en la figura del extremo superior izquierdo [35].

El experimento de Romero et al. reportó que independientemente de la forma en que se aplique la carga, ya sea empujando o tirando una pestaña de la lámina, la trayectoria de la fractura converge a una espiral logarítmica de la forma $r(\theta) = r_0 e^{\theta \tan\phi}$ donde $\tan\phi$ corresponde al paso de la espiral y θ al ángulo polar. La influencia de la elasticidad queda retratada en un cambio en el paso de las espirales: una espiral generada en un proceso de tiro tiene un paso más pequeño que el de una generada por empuje [30].

Capítulo 2

Transición de estados de un pliegue asociado al rasgado sin adhesión

La trayectoria de una lámina en rasgado en geometría de peeling ha sido un punto de amplia discusión en diferentes artículos [32, 28, 36]. El primer artículo enfocado en este tipo de problemas fue conducido por Atkins [37], quien junto a su equipo estudiaron el rasgado de láminas metálicas. Usando una configuración de dos fracturas paralelas encontró que las fracturas siempre convergen. Durante los últimos años muchos experimentos de rasgado se han realizado usando láminas frágiles de polímeros debido a que al ser fracturadas no presentan signos de deformaciones permanentes. En estos materiales Hamm et al. estudiaron el rasgado de películas en láminas adheridas a un sustrato. Una tira rectangular es traccionada en $180°$ con respecto al plano en la que la lámina está fija. El resultado muestra que la doble fractura converge en un punto y la forma final es un triángulo perfecto resultado de la combinación de efectos elásticos, de adhesión y energía de fractura. Los autores sugieren que el ángulo en el vértice del rasgado está relacionado con las propiedades elásticas de la lámina y la adhesión entre el sustrato sólido y la película [21]. Bayart et al. usando una configuración inicial muy similar, pero sin considerar adhesión, encontró trayectorias convergentes pero curvadas. El autor sugiere que el avance de las fracturas, con respecto a la separación inicial de entre éstas, siguen leyes de potencia con exponentes característicos: $3/4$ para una configuración de peeling y $2/3$ en una configuración del tipo trouser, planteando además que la trayectoria de las fisuras son independientes de las propiedades del material [32, 38]. Este resultado todavía no ha sido entendido completamente debido a que no hay un modelo teórico que justifique estos resultados. Finalmente Brau (2014) [39] reportó un exponente de $8/11$ justificando que el pliegue desarrollado durante el rasgado es compatible con los pliegues estudiados en películas arrugadas [40, 41]. La motivación de este experimento es determinar la estructura de un pliegue (en configuración de peeling) que se forma durante el proceso de fractura, ya que ésta determina la forma como libera energía para la creación de superficies expuesta de una fractura.

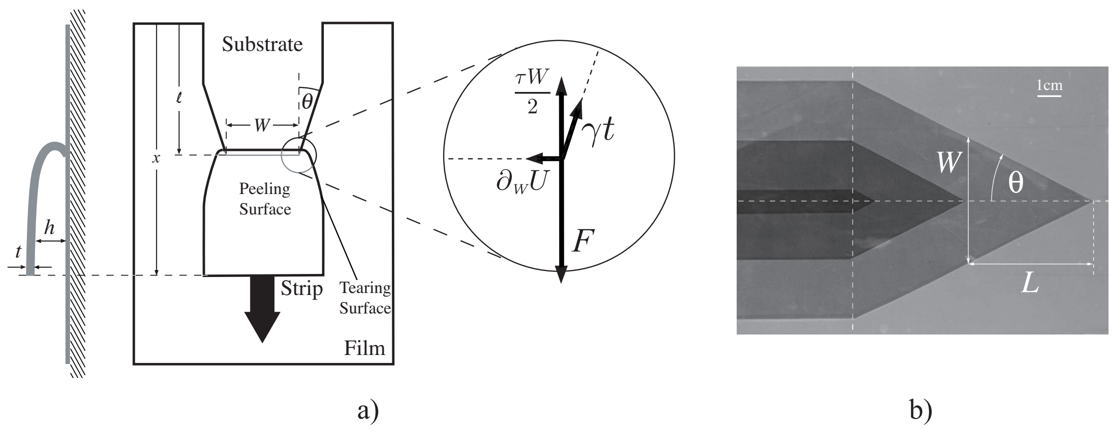


Figura 2.1: a) Esquema de rasgado de películas delgadas en geometría de peeling con adhesión. La dirección de propagación de las fracturas, de acuerdo al criterio TMEL, es resultado de la interacción de las distintas fuerzas involucradas en el problema. b) La propagación de las fracturas para diferentes anchos W convergen en un punto con un mismo ángulo θ. Ambas figuras fueron extraídas de [21].

Para estudiar experimentalmente la respuesta elástica del pliegue asociado al rasgado sin adhesión se propone observar las variaciones geométricas de éste relacionadas con un cambio paulatino de una fuerza externa aplicada. Para ello se ha confeccionado un montaje, basado en un estudio anterior [42], que impone las mismas condiciones de borde que la dinámica de rasgado, pero en ausencia completa de fracturas.

2.0.4. Condiciones de Borde

Las condiciones de borde del pliegue durante el rasgado (sin adhesión), se entienden como una relajación de la condición de borde de un pliegue cilíndrico. Supóngase que se tiene una lámina rectangular de largo L y ancho W. Sobre una de las caras de la lámina se dibuja una línea de longitud L justo sobre el centro (línea 1), perpendicular a ésta se traza otra línea que abarca la totalidad del ancho W (línea 2). Conjuntamente a esto se define una línea paralela a la primera línea trazada que sirve de referencia para doblar el material (figura 2.2).

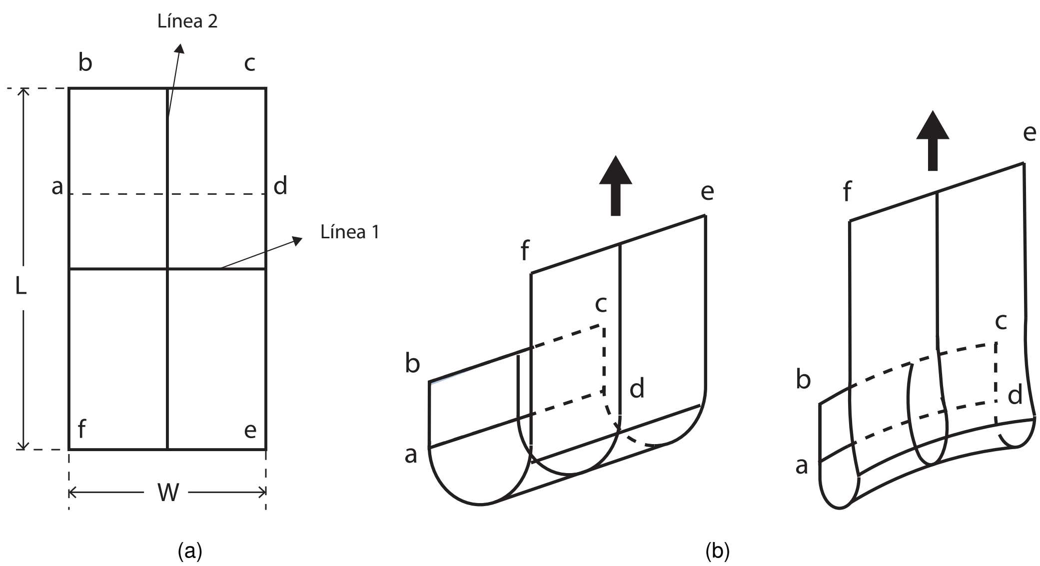


Figura 2.2: a) Lámina delgada de espesor $t << W, L$. b) Condiciones de borde involucradas en un pliegue cilíndrico comparadas con las condiciones de borde del pliegue que aparecen en el rasgado sin adhesión. En la figura izquierda el rectángulo $abcd$ permanece fijo (rasgado con adhesión), mientras que en la figura derecha sólo los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ no se deforman (rasgado sin adhesión)

Si se dobla la lámina respecto de $\overline{ad}$ con una fuerza F y se obliga al área que se encuentra dentro del rectángulo a permanecer fija se obtiene un pliegue cilíndrico. Las líneas trazadas no sufrirán alargamiento y la curvatura gaussiana es cero. Si se libera la condición del rectángulo a permanecer fijo y se restringe solamente al segmento $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$, el sistema buscará una configuración energética más baja que se traducirá en un incremento de la energía elástica almacenada en el pliegue. El pliegue adoptará una forma parecida a la de una silla de montar, cuya cresta, al igual que la línea 1, experimentará un estiramiento. El resultado de esto es que la curvatura gaussiana en la la zona deformada necesariamente tendrá un valor distinto de cero.

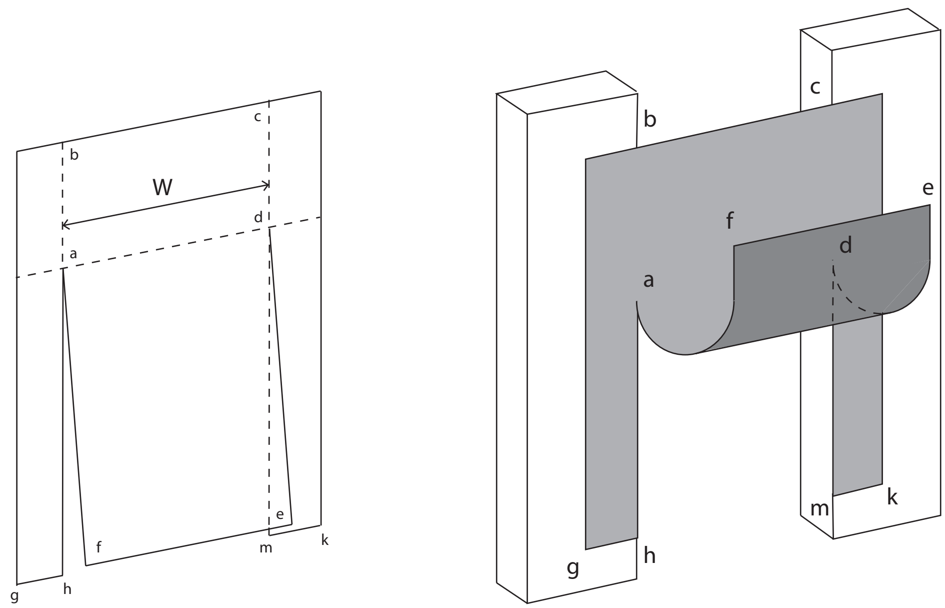


Figura 2.3: Geometría y posicionamiento de una lámina delgada que permite aplicar las mismas condiciones de borde presentes en el pliegue asociado al rasgado sin adhesión.

Para el caso cilíndrico, la porción material dentro del contorno $abcd$ no cambia en lo absoluto y la condición de borde se puede resumir diciendo que el segmento ad permanece empotrado. Por otra parte, cuando solamente los lados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ se mantienen fijos, la condición de borde se interpreta como un empotramiento en los puntos a y d. El pliegue que se quiere estudiar obedece al segundo caso y se puede entender su construcción como el resultado simple de combar una placa manteniendo dos puntos del borde empotrado. Se puede reproducir experimentalmente estas condiciones en una lámina recortada. La idea es pegar los márgenes a un soporte, y así, aplicando una fuerza vertical en el borde $\overline{fe}$, se doblará la tira $fecb$ respecto de los puntos fijos a y d. Un estudio de la variación geométrica del pliegue con el incremento de la fuerza aplicada tendrá sentido solamente si los puntos a y d permanecen estables en un rango de fuerzas bastante mayor comparado con la fuerza crítica de la fractura.

2.1. Experimento

Todas las cintas usadas en los experimentos fueron recortadas desde láminas transparentes de polipropileno (BOPP Innovia) de diferentes espesores t = 30, 50, 90 μm y de largo $L = 1$ m. Inicialmente las láminas vienen enrolladas en un tubo por lo que al cortarlas tienen una curvatura inicial asociada a la dirección de enrollamiento con respecto al tubo, es por esta razón que después de cortar las cintas se dejan reposar un día antes de hacer el experimento. Los materiales usados son bastante isotrópicos, con diferencias en el valor del módulo de Young no mayores a un 8 % entre sus ejes principales. Los módulos de doblamiento de cada lámina son $B = 0.6 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}$ y 15×10^{-5} Nm para espesores t = 30, 50, 90 μm respectivamente.

Las láminas son cortadas en cintas rectangulares de largo constante 1 m y de un ancho W, los bordes inferiores de estas cintas se fijan sobre un marco usando scotch de doble faz, la configuración del montaje permite que el marco pueda desplazarse horizontalmente por lo que es factible usar diferentes anchos W. Los valores de W usados abarcan un rango de valores entre 2 cm $< W <$ 20 cm para cada uno de los espesores. Las cintas son tiradas desde el extremo superior en 180^o con respecto al plano de la cinta con el cual está alineado verticalmente para controlar el efecto de la gravedad. El extremo superior de la cinta está pegado a una espátula que a su vez está acoplada con un motor paso a paso que se mueve a velocidad constante de 0.01 mm/s. La fuerza es medida a través de un sensor FUTEK que también está acoplado a la espátula de tiro (figura 2.4).

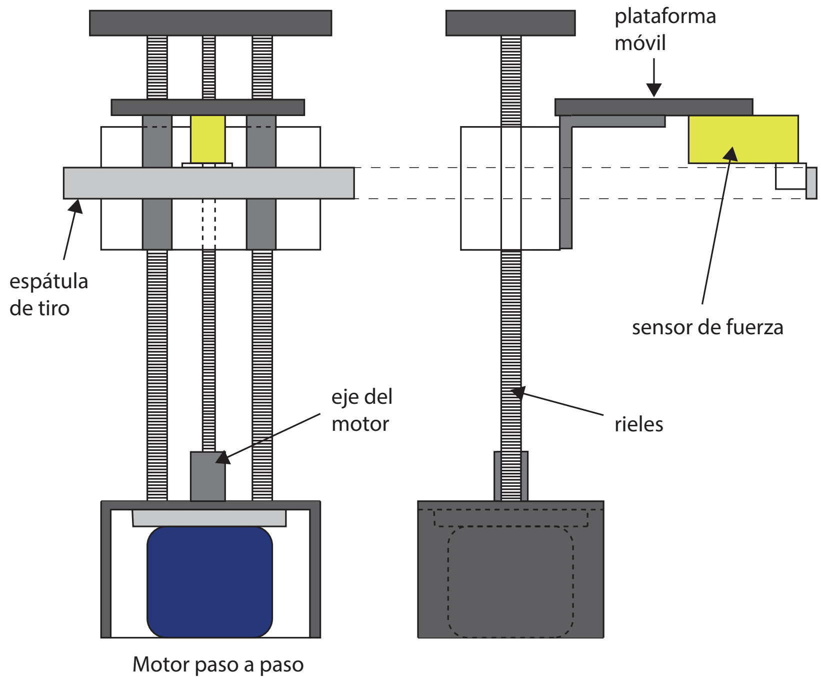


Figura 2.4: Vista Frontal (izquierda) y lateral (derecha) del sistema de tracción. Las tiras son pegadas en la espátula de tiro (acoplada al sensor de fuerza) que puede moverse en dirección vertical debido a la plataforma móvil.

El trabajo de fractura equivale a $\gamma = 1.7 \times 10^4$ [kg/s^2] para los tres materiales, esto implica que la fuerza de fractura necesaria γt para fracturar el material es de aproximadamente 2 [N] en el caso de la película más gruesa. En este experimento se quiere estudiar cómo se comporta la geometría del pliegue a fuerzas mucho mayores, por lo que es necesario generar un método para impedir la propagación de las fracturas en la lámina. Al alcanzar el distinto umbral de fractura dependiendo del espesor, el material con seguridad se rasgará en los puntos a y d (figura 2.3), para impedir que la fractura avance, se elimina la grieta a través de pequeños agujeros circulares de 2 mm de diámetro usando un cuchillo circular. Con este método se asegura que las tensiones no se concentren en los puntos a y d distribuyéndose en las regiones cercanas a los círculos, de esta forma el sistema no propagará fractura al menos hasta que la deformación en los bordes no sea importante. Además esta solución no afecta la forma natural de las deformaciones del pliegue. Naturalmente que mientras mas grande el valor de W menos afectará esta singularidad en los bordes.

Para tomar fotografías se usa una cámara que captura, en intervalos de cada 10 segundos, la región de la cinta donde se encuentra el pliegue en dirección perpendicular a la de tiro. Para este efecto y su posterior análisis esta región es pintada con pintura blanca al agua. Finalmente para caracterizar la evolución del pliegue en la dirección de tiro se instala un espejo a $45°$ con respecto a la dirección de tiro, de esta forma la fotografía es capaz de capturar ambas curvaturas al mismo tiempo. Es importante señalar que a pesar de que la lámina se deja reposando unas cuantas horas antes del experimento es inevitable eliminar la curvatura inicial de la cinta provocada por el enrollamiento, por esta razón para todos los casos se pega la cinta con la curvatura inicial convexa hacia la cámara.

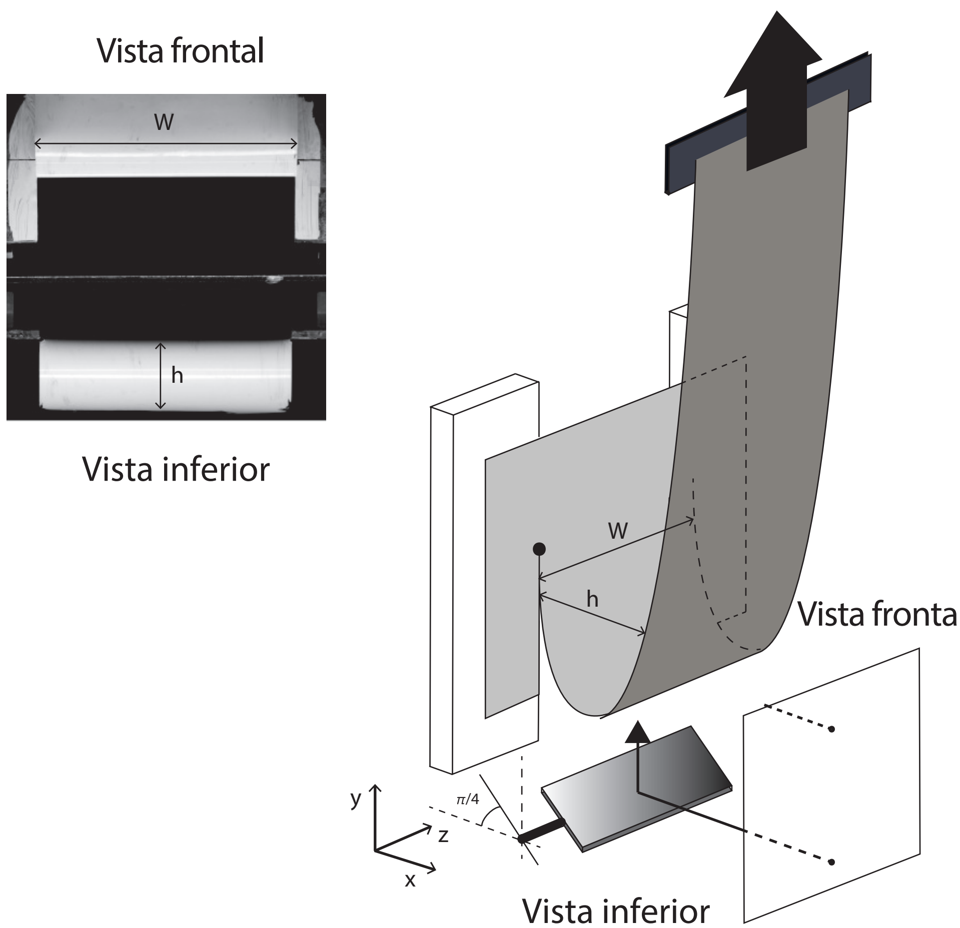


Figura 2.5: Esquema del montaje experimental. La figura del extremo superior izquierdo indica la vista del espejo que se encuentra a $45°$ del plano de la lámina.

2.2. Modelo

La geometría de un pliegue por lo general es dificil de predecir, pero en este caso al imponerse las condiciones de borde del problema y mediante observaciones experimentales se puede sugerir que a bajas cargas el pliegue presenta una geometría cilíndrica, mientras que en altas ya no satisface este tipo de geometría debido al estiramiento involucrado pareciéndose a un pliegue de Witten - Li [41].

2.2.1. Pliegue Cilíndrico

Si se dobla una lámina rectangular de ancho W y largo L de forma que un lado se ha empotrado completamente y en el otro se aplica una fuerza vertical F que produce una deformación fuera del plano natural de la lámina, el pliegue obtenido se conoce como pliegue cilíndrico debido a que su forma es parecida a la de un semicilindro. Si la lámina es lo suficientemente delgada la deformación corresponde casi a un doblamiento puro. Cada punto de la lámina tiene asociada una curvatura κ que es función de la coordenada intrínseca s. La energía elástica acumulada en el pliegue se escribe

$$E_{el} = \frac{BW}{2} \int_{s=0}^{s=L} \frac{ds}{R^2} \tag{2.1}$$

La curvatura representa la tasa de cambio angular del vector unitario tangente $\hat{s}$ a la curva, el radio de curvatura $R = 1/\kappa$. La energía elástica del pliegue se escribe como

$$E_{el} = \frac{BW}{2} \int_{s=0}^{s=L} \ddot{\theta}^2(s) ds \tag{2.2}$$

La energía potencial debido a fuerza constante vertical aplicada a la cinta es $E_P = F_y(L)$, tal que el lagrangiano efectivo a minimizar es

$$\pounds = \frac{BW}{2} \int_{s=0}^{s=L} ds\ddot{\theta}^2 + Fy(L) \tag{2.3}$$

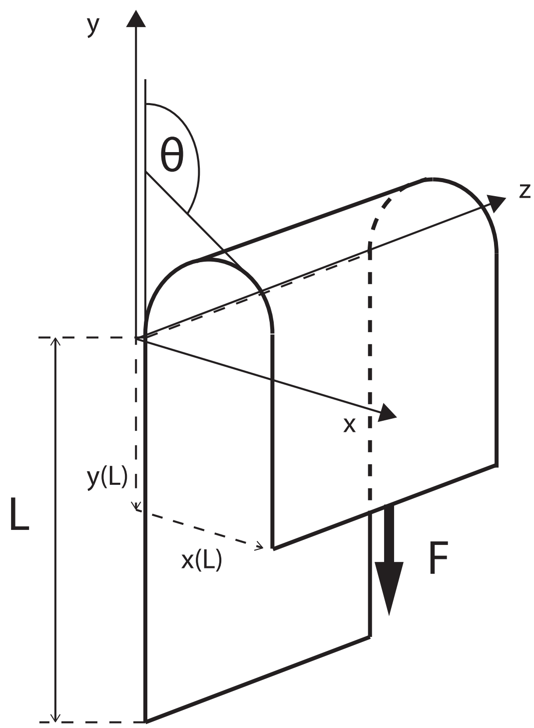


Figura 2.6: Pliegue cilíndrico.

El vector normal y tangente a la superficie puede escribirse como **t** $= \sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$ y **n** $= -\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$. Esto entrega las siguientes relaciones cinemáticas

$$\dot{x} = \sin\theta \tag{2.4}$$

$$\dot{y} = \cos\theta \tag{2.5}$$

De esta forma el lagragiano se escribe

$$\pounds = \frac{BW}{2}\int_{s=0}^{s=L} ds\ddot{\theta}^2 + F\int_{s=0}^{s=L} ds\cos\theta \tag{2.6}$$

La minimización del Lagrangiano lleva a:

$$\begin{aligned} \delta\pounds &= BW\int_{s=0}^{s=L} ds\dot{\theta}\delta\theta - F\int_{s=0}^{s=L} ds\sin\theta\delta\theta \\ &= BW\dot{\theta}\delta\theta\,|_0^L - \int_{s=0}^{s=L} ds\left[BW\ddot{\theta} + F\sin\theta\right]\delta\theta \end{aligned} \tag{2.7}$$

La ecuación a resolver

$$BW\ddot{\theta} + F\sin\theta = 0 \tag{2.8}$$

Las condiciones de borde se entienden de la siguiente forma, en el extremo donde se aplica la fuerza F la cinta es plana por lo que $\dot{\theta}(s = L) = 0$, mientras que en el otro extremo el borde está empotrado $\dot{\theta}(s = 0) = 0$.

2.2.1.1. Integración

Se nombra $\theta_L = \theta(L)$ el ángulo de deflección al final de la cinta y si similarmente llamamos $x_L = x(L) \equiv h$ e $y_L = y(L)$. Antes de resolver la ecuación se puede estudiar la expresión para obtener alguna relación útil. Usando las relaciones cinemáticas se puede reescribir la ecuación (2.8)

$$BW\ddot{\theta} + F\dot{x} = 0 \rightarrow BW\dot{\theta} + Fx = BW\dot{\theta}_L + Fx_L \tag{2.9}$$

Las condiciones de borde $\dot{\theta}_L = 0$, por lo que se obtiene una conexión entre un desplazamiento fuera del plano y la curvatura del pliegue. Evaluando en $s = 0$ se tiene

$$BW\dot{\theta}_0 = Fh \tag{2.10}$$

Donde $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$. La primera integración de (2.9)

$$\frac{BW}{2}\dot{\theta}^2 - F\cos\theta = \frac{BW}{2}\dot{\theta}_L^2 - F\cos\theta_L \tag{2.11}$$

Una evaluación en $s = 0$ y la condición de borde transforma la relación en

$$\frac{BW}{2}\dot{\theta}^2 = F(1 - \cos\theta_L) \tag{2.12}$$

Combinando (2.12) y (2.10) se obtiene una relación entre los parámetros geométricos del sistema

$$h\dot{\theta}_0 = 2(1 - \cos\theta_L) \tag{2.13}$$

En el extremo de la tira esta es plana por lo que $\theta_L \longrightarrow \pi$ y $h\dot{\theta}_0 \approx 4$. Finalmente en términos de la fuerza se obtiene

$$\dot{\theta}_0 = \left(\frac{2F}{BW}\right)^{1/2}(1 - \cos\theta_L)^{1/2} \approx 2\left(\frac{F}{BW}\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

$$h = \left(\frac{2BW}{F}\right)^{1/2}(1 - \cos\theta_L)^{1/2} \approx 2\left(\frac{BW}{F}\right)^{1/2} = h_C \tag{2.15}$$

2.2.2. Pliegue de Witten - Li

Cuando se dobla una película elástica, ya sea rasgándola o arrugándola se observan regiones de gran curvatura que son precisamente las regiones donde se localiza la mayor parte de la energía. Una importante cantidad de trabajos sobre el comportamiento de pliegues en estructuras arrugadas han concluido que esta singularidades representan la mayor parte del costo energético en este tipo de configuraciones que se caracterizan por ser una combinación entre doblamientos y estiramientos del material [16, 41, 43, 44, 45, 46] . Los pliegues obtenidos en general corresponden a crestas con fuerte estiramiento, pero también es posible obtener pliegues isométricos. Se han reportado experimentos en láminas traccionadas y/o torsionadas que muestran crestas isométricas con estiramiento que conectan dos regiones planas sin estiramiento [47, 48]. Witten muestra en [41] que redondear los extremos de un pliegue en una estructura arrugada relaja su curvatura y el pliegue se vuelve mas isométrico. De esta forma, la curvatura impuesta en los extremos domina la forma del pliegue (figura 2.7).

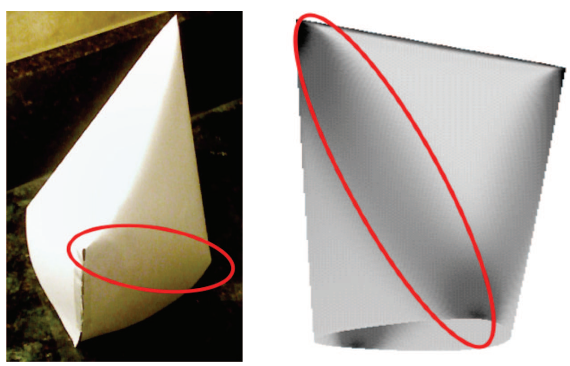


Figura 2.7: Transición representada por un pliegue isométrico que conecta dos regiones planas sin estiramiento [41].

Supóngase el mismo rectángulo pero ahora de dimensiones $2L \times W$ como se muestra en la figura 2.8. Si se dobla el material respecto de los puntos a y d de tal forma que estos dos puntos sean puntos singulares en el pliegue donde la curvatura es infinita, el resultado será que la línea 1 y línea 2 dejarán de ser rectas y podrán ser caracterizados con radios de curvaturas R_1 y R_2 respectivamente. Como la curvatura gaussiana es diferente de cero implica necesariamente que la lámina se ha estirado. La deformación que presenta este pliegue se le denomina como pliegue de Witten - Li que corresponde a una minimización de la energía elástica a través de la relajación de la hipotética arista $\overline{ad}$.

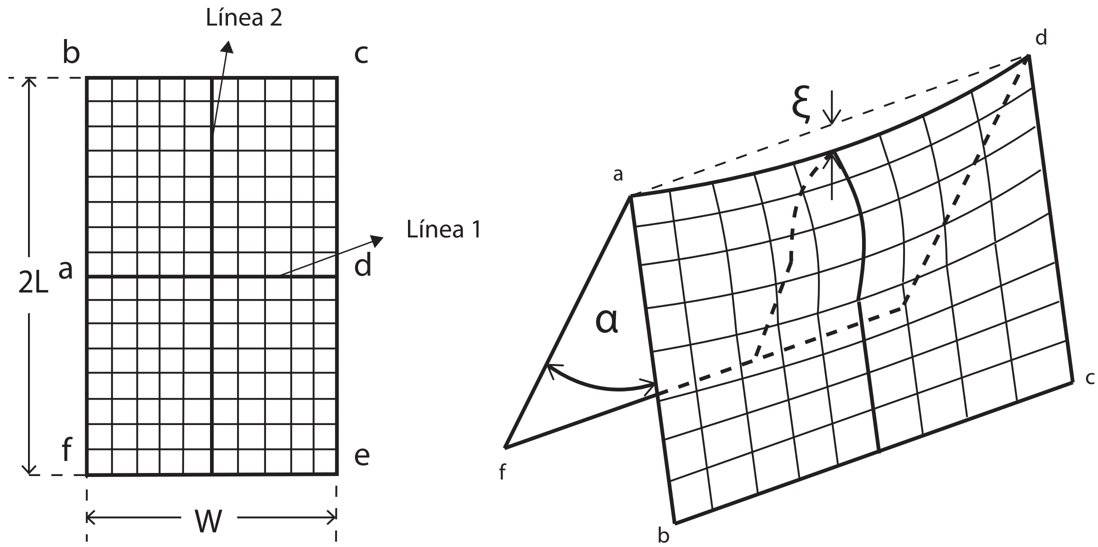


Figura 2.8: Lámina doblada con respecto a los puntos singulares a y d. La aparición de puntos singulares en el material permite que el material minimice energía redondeando el borde del pliegue.

La energía total de este sistema involucra una energía de estiramiento E_S de manera que la energía se puede escribir como $E = E_B + E_S + E_F$. Para conocer la energía elástica que es almacenada en un pliegue de Witten - Li se deben resolver las ecuaciones Fopp-von Kármán, sin embargo la extrema dificultad de este problema sugiere la idea de inferir a través de relaciones de escalamiento información del pliegue y su energía.

Se determina primeramente una relación de escala para la energía de estiramiento puro. Se considera entonces que las deformaciones se distribuyen exclusivamente en la cima del pliegue sobre un área del orden $W \times R_2$ y suponiendo que el sistema se estira localmente solo en la dirección tangente a las líneas paralelas a la línea 1, se puede utilizar el alargamiento de dicha línea como una descripción global del estiramiento de la superficie deformada.

El alargamiento relativo Δ de la línea 1 se puede escribir mediante una aproximación pitagórica en términos de un desplazamiento ξ.

$$\Delta = \frac{largo_{final} - largo_{inicial}}{largo_{inicial}} \approx \frac{\sqrt{\xi^2 + W^2} - W}{W} = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{W}\right)^2} - 1 \qquad (2.16)$$

Si $\xi \ll W$

$$\Delta = \left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{W}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\xi}{W}\right)^4 + ... - \cancel{1}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{W}\right)^2 \tag{2.17}$$

Como se dijo anteriormente la energía de estiramiento es importante por lo que se debe calcular directamente a través de (1.5).

Si Δ es el único elemento no nulo del tensor de deformaciones se obtiene la siguiente expresión para la energía de estiramiento donde WR_2 es el área característica del pliegue,

$$E_s = \frac{\varepsilon t}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{\xi}{W}\right)^4 (WR_2) \sim \varepsilon t R_2^2 \left(\frac{\xi^4}{W^3}\right) \tag{2.18}$$

La energía elástica almacenada por el pliegue se estima a través de la relación (2.1) obteniendo que $E_B \sim \frac{BW}{R_2}$. E_B y E_S compiten en un equilibrio mecánico, en general será mas fácil realizar un doblamiento que un estiramiento, por lo que el sistema comenzará a dilatarse cuando el costo energético de ambos procesos sea comparable.

$$\frac{E_S}{E_B} \sim 1 \rightarrow \frac{tR_2^2\varepsilon}{B}\left(\frac{\xi}{W}\right)^4 \tag{2.19}$$

De la definición del módulo de doblamiento se sabe que $B \sim \varepsilon t^3$. Reemplazando en la expresión (2.19)

$$\frac{R_2^2\xi^4}{t^2W^4} \sim 1 \tag{2.20}$$

La línea 2 no sufrirá alargamientos y su longitud será siempre de $2L$. Si se observa la figura 2.9 se deduce que la parte curvada de la línea representa un arco de orden $(2\pi - \alpha)R_2$. De esta forma si 2Γ es la porción recta, la longitud L se tomará como $L \approx (\pi - \alpha/2) + \Gamma$. Comparando las proyecciones con el eje vertical

$$\xi = L\cos\frac{\alpha}{2} - \left[\Gamma\cos\frac{\alpha}{2} + \int_{\alpha}^{\pi/2}(R_2\cos\phi)d\phi\right] \tag{2.21}$$

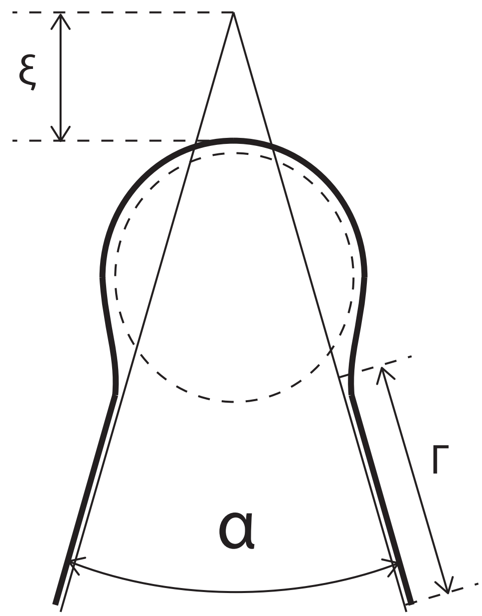


Figura 2.9: Representación lateral de un pliegue de Witten - Li.

Si se reemplaza L en (2.21) se obtiene,

$$\xi \approx R_2 \left[\left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right] \tag{2.22}$$

La variación geométrica debe ser del orden $\xi \sim R_2$

$$R_2 \sim t^{1/3} W^{2/3} \tag{2.23}$$

Por otra parte la curvatura $1/R_1$ es muy pequeña y puede tomarse directamente como $1/R_1 \sim \xi/W^2$ por lo que

$$R_1 \sim t^{-1/3} W^{4/3} \tag{2.24}$$

Finalmente la curvatura gaussiana no escala con el espesor y sólo depende de W

$$\frac{1}{R_1 R_2} \sim W^{-2} \tag{2.25}$$

2.3. Definición de los Parámetros geométricos relevantes y Procesamiento de imágenes

Al momento de analizar las secuencias fotográficas obtenidas de los experimentos, se deben definir parámetros adecuados en la descripción de la evolución geométrica del pliegue.

2.3.1. Parámetros en la descripción asintótica del pliegue

Cuando la fuerza de tiro es pequeña, el torque generado no es suficiente para deformar el sector posterior $abcd$ de la lámina, la traza formada por las posiciones de la máxima altura del pliegue, se le denomina horizonte que corresponderá a una recta paralela a la línea que une los puntos fijos a y d, todas las curvaturas podrán tomarse a lo largo de una misma dirección y la curvatura gaussiana permanecerá aproximadamente nula. Bajo estas condiciones se dice que el pliegue deberá presentar una geometría cilíndrica y este puede ser caracterizado por un parámetro h que corresponderá al ancho de éste (figura 2.10) .

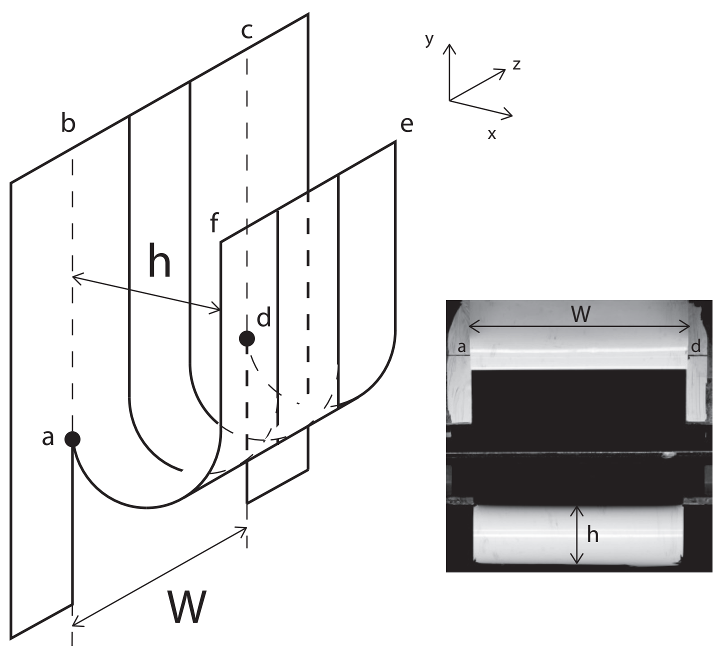


Figura 2.10: Experimento de rasgado sin fractura a cargas bajas. El valor de h es constante a lo largo de todo el ancho W.

Cuando la magnitud de la fuerza es más alta, el horizonte será representando en general por una línea curva y el sector posterior $abcd$ permanecerá notoriamente deformado. Debido al empotramiento de los puntos a y d el pliegue mostrará mayor curvatura en los bordes $\overline{af}$ y $\overline{de}$ (en los puntos fijos se generan reacciones a la fuerza de tiro, ocasionando en el entorno un crecimiento del torque y de la flexión local). El trabajo realizado por el sistema sobre el pliegue no deberá ser, en absoluto, consecuencia de que el material se esté estirando en la dirección de la fuerza F, pues entonces las tensiones involucradas estarían por sobre el régimen elástico y las deformaciones llevarían a la fractura del material. De esta forma se concluye que en todo momento los bordes $\overline{af}$ y $\overline{de}$ poseen la misma longitud.

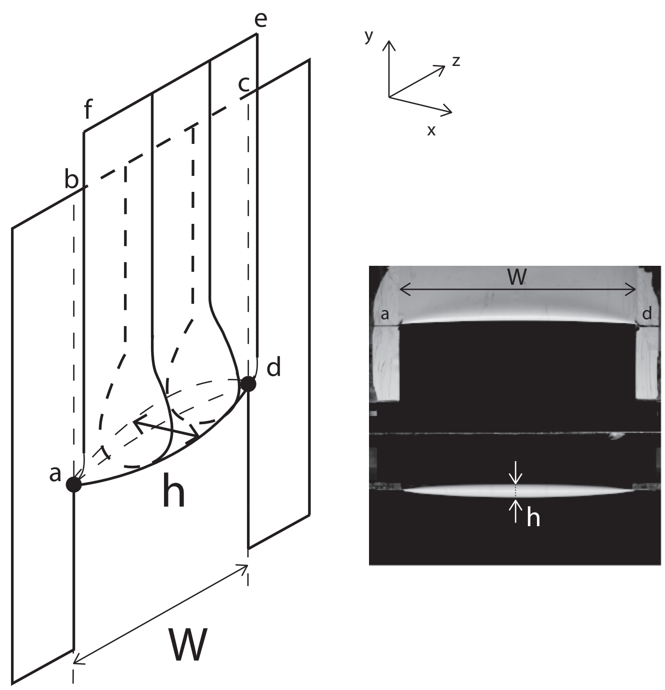


Figura 2.11: Experimento de rasgada sin fractura a cargas altas. El valor de h representa el máximo del ancho del pliegue isométrico.

A medida que la fuerza aumenta, el horizonte se curvará más e irá desplazándose al límite en que los mismos puntos fijos sean parte del horizonte. En los puntos fijos las curvaturas serán divergentes y el resto de los bordes permanecerá prácticamente rectos. En esta situación se supone que el pliegue no podrá acumular más doblamiento elástico y la geometría dejará de cambiar con el aumento de la fuerza. Es de esperarse que el parámetro h , definido en el caso cilíndrico deje de ser una constante asociada al sector plano del pliegue (figura 2.10), pero si se observa la vista inferior, a pesar de la deformación del pliegue, se puede notar que la zona central exhibe una geometría continua y simétrica, lo que obligará a redefinir el parámetro h como el ancho máximo del pliegue (figura 2.11). En general h corresponderá a la suma de la proyección frontal anterior h_a y posterior h_b tomando como referencia el plano de la lámina sin deformar. De esta forma la construcción de h es una competencia entre ambas proyecciones.

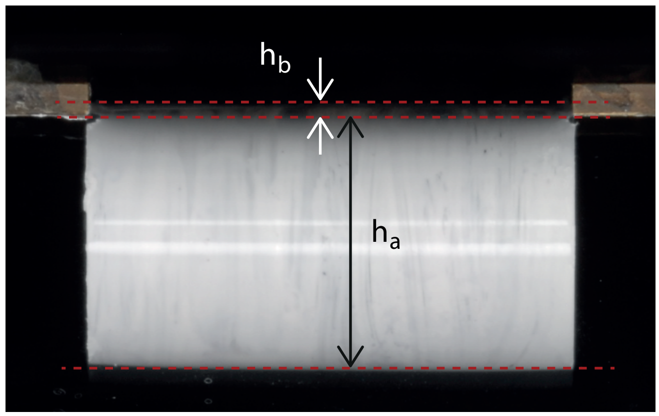


Figura 2.12: Representación de parámetros geométricos. Para cargas bajas (configuración cilíndrica) $h_b \sim 0$ y $h_a \sim h$.

De la misma forma que el parámetro h evoluciona a medida que aumenta la carga, el horizonte del pliegue $\overline{ad}$ también va cambiando siendo posible capturar esta deformación a través de la medición de un radio de curvatura frontal a la cámara. Este parámetro R frontal será el segundo parámetro geométrico importante para caracterizar el pliegue.

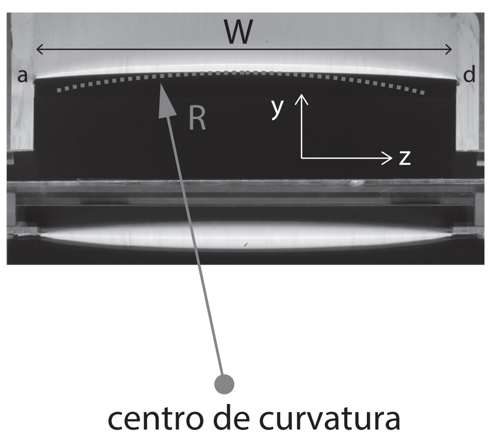


Figura 2.13: Fotografía donde se aprecia el horizonte $\overline{ad}$ curvado debido a la aplicación de altas cargas. La deformación del horizonte se captura trazando diferentes círculos de radio R.

2.3.2. Medición de R frontal

La medición de R frontal se hace a través de un algoritmo que calcula la curvatura del perfil frontal a la cámara. El algoritmo funciona a través de los siguientes pasos,

- Primeramente se hace una detección de contornos del horizonte del pliegue usando un umbral de blancos y negros. A través del software MATLAB se digitaliza este perfil en forma de un vector.
- Para cada punto del arreglo vectorial que representa el horizonte del pliegue se ajustan círculos tomando una vecindad finita de puntos (generalmente 100 puntos, 50 a la derecha y 50 a la izquierda). El radio del círculo que estadísticamente ajuste con mas precisión el arreglo, será el valor del radio de curvatura para el punto analizado. Se repite la operación con todos los puntos del arreglo. Es importante señalar que en los bordes, en los primeros y últimos 50 puntos, el algoritmo no funciona bien porque la cantidad de puntos vecinos hacia la izquierda no es la misma que hacia la derecha. De todas formas no es algo grave ya que el análisis de los datos se hará sobre el sector central del pliegue que es el que presenta una deformación mayor. Finalmente como para cada punto hay un radio asociado se tiene entonces un vector que contiene toda la información sobre el radio de curvatura del horizonte.
- Para cuantificar el error del algoritmo se toma este perfil de curvatura obtenido en el proceso anterior y se integra numéricamente con el objeto de obtener el horizonte original. La comparación de ambos horizontes (el original y el integrado), nos indicará qué tan bien funciona el algoritmo. El error típico del software es de un $5\,\%$ con respecto al valor de la medida.
- Finalmente para calibrar el algoritmo se hicieron pruebas con cortes con geometrías conocidas como círculos y se reescala para los valores obtenidos en el experimento.

2.4. Resultados

2.4.1. Evolución de h

A través del análisis de las fotografías tomadas se puede observar en la figura 2.14 cómo se comporta el parámentro h cuando se descompone en h_a y h_b.

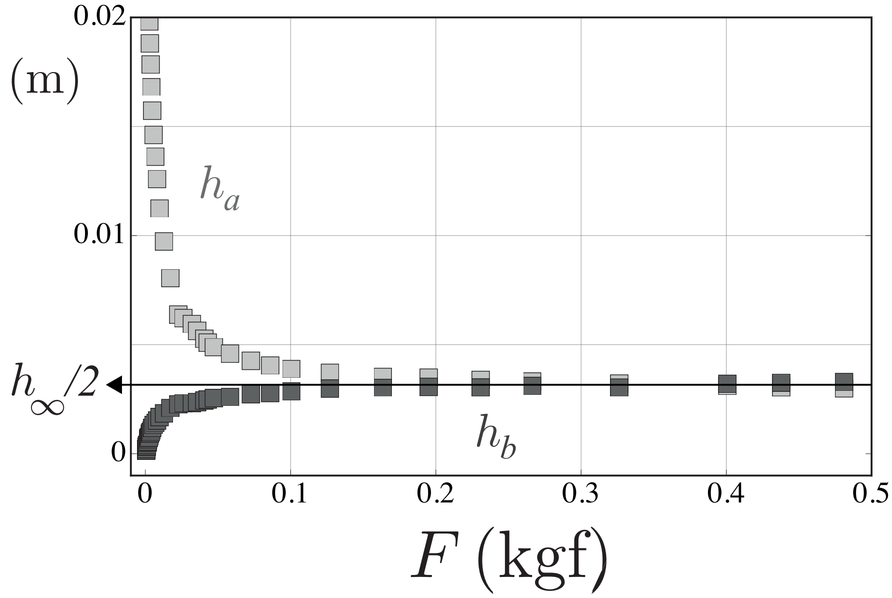


Figura 2.14: Curva experimental típica para t=50 μm y $W = 10$ cm que muestra la variación de h_a y h_b en función de la fuerza F aplicada. A cargas altas ambas curvas convergen a un valor de $h_\infty/2$

Del gráfico mostrado anteriormente se observa que a grandes regímenes de carga $h_a \sim h_b$ y convergen a un valor $h_\infty/2$. De esta observación notar que a fuerzas altas el pliegue converge a un configuración simétrica. Esta observación es importante ya que en el análisis vamos a considerar que a partir de la condición de simetría ($h_a = h_b$), el pliegue se encuentra en un estado asintótico. Analizando el parámetro $h = h_a+h_b$ para el mismo experimento (figura 2.15), se puede notar dos cosas: la primera es que la geometría cilíndrica del pliegue se conserva sólo en un pequeño intérvalo de carga, y lo segundo es que para fuerzas altas el tamaño del pliegue ya no depende del incremento de ésta y converge a un valor de h_∞.

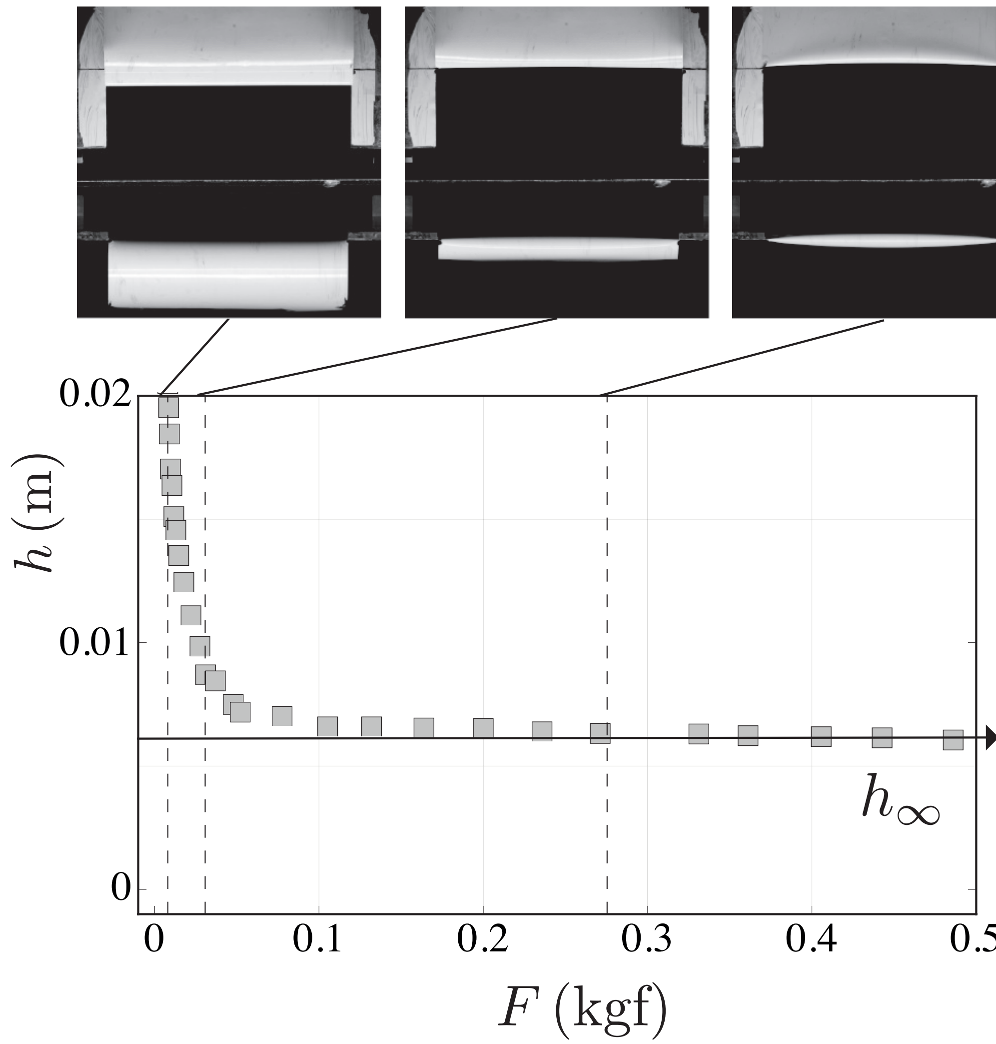
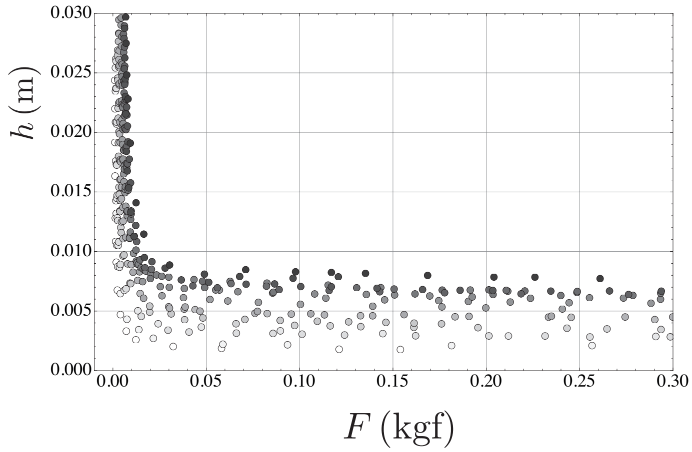
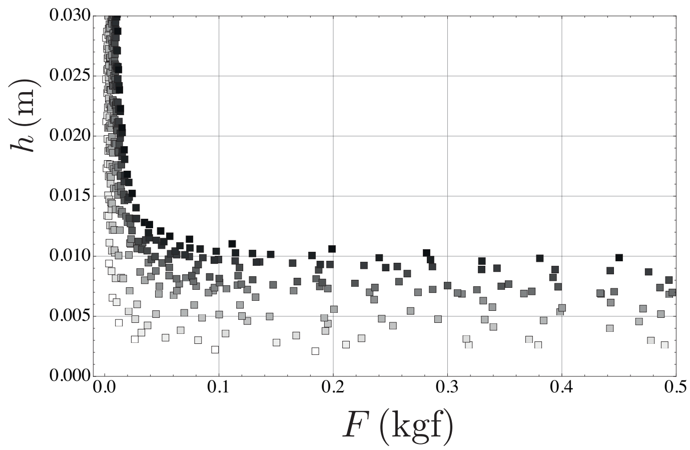


Figura 2.15: Curva experimental típica para t=50 μm y $W = 10$ cm donde el tamaño del pliegue h varía en función de la fuerza F aplicada. En el extremo superior se adjuntan fotografías que muestran la evolución de la vista frontal e inferior del pliegue para valores específicos de carga

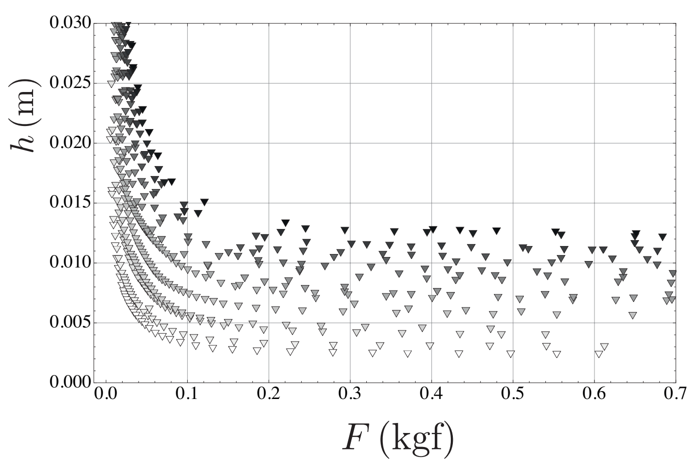
Las figuras 2.16 muestran las curvas experimentales obtenidas para h en función de la fuerza aplicada F con diferentes espesores en donde se varió el ancho W de la tira entre 2$<$ W $<$20 cm. Se puede apreciar que en los tres casos a medida que aumenta W (curvas oscuras), lo hace también el valor asintótico de h_∞. Otra observación interesante es que para las láminas de 30 μm y 50 μm el valor de h converge mas rápidamente a un h_∞ que para las mas gruesas de 90 μm.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.16: Curvas Experimentales de h en función de F para diferentes anchos del pliegue W desde 2 a 20 cm. Los valores oscuros en la escala de grises corresponde a los anchos máximos de W). Las figuras están divididas en diferentes espesores a) 30 μm, b) 50 μm, c) 90 μm.

2.4.2. Evolución de R frontal

Como se explicó anteriormente, el radio de curvatura frontal a la cámara también va cambiando a medida que aumenta la fuerza de tiro. A cargas bajas, el horizonte del pliegue es simplemente una línea recta por lo que no merece mayor análisis ya que el radio de curvatura es infinito. Por otro lado, cuando la fuerza de tiro se incrementa, el material se comienza a estirar y el horizonte empieza a curvarse lentamente. A partir de este punto se puede caracterizar el perfil de curvatura y su evolución. La figura 2.17 muestra la evolución del perfil de curvatura de un experimento típico al incrementarse la carga.

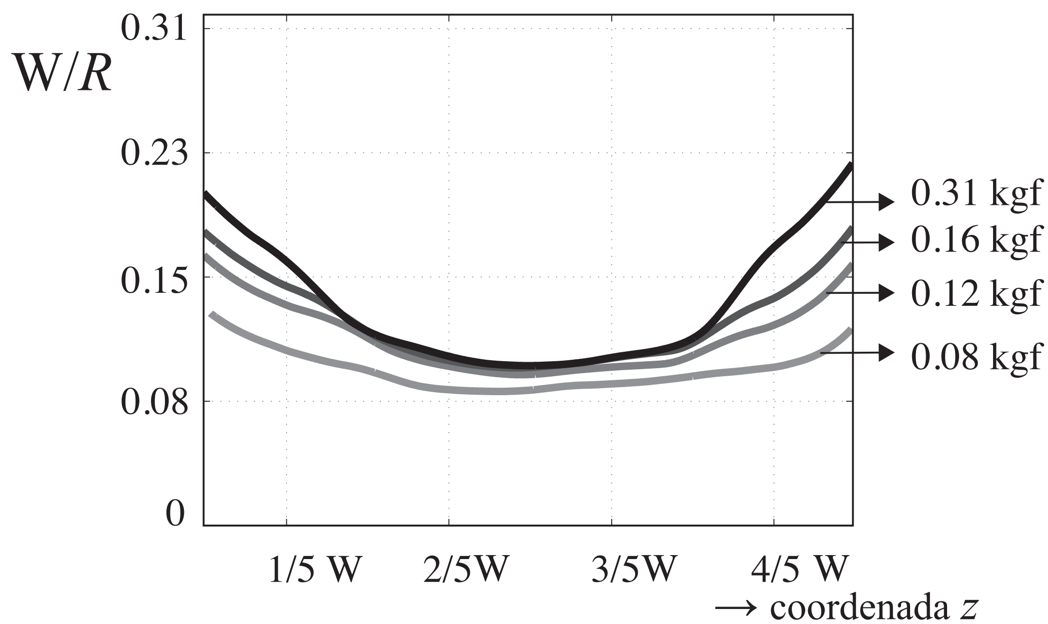


Figura 2.17: Evolución del perfil de curvatura frontal W/R en función de la carga aplicada para una tira con $t = 50\mu$m y $W = 10$ cm. El gráfico tambiíen muestro el cambio de curvatura a lo largo del ancho W ya que el eje horizontal indica el desplazamiento en la coordenada z en fracciones de W (figura 2.24), donde 0 y 1 corresponden a los extremos de la cinta (puntos a y d respectivamente).

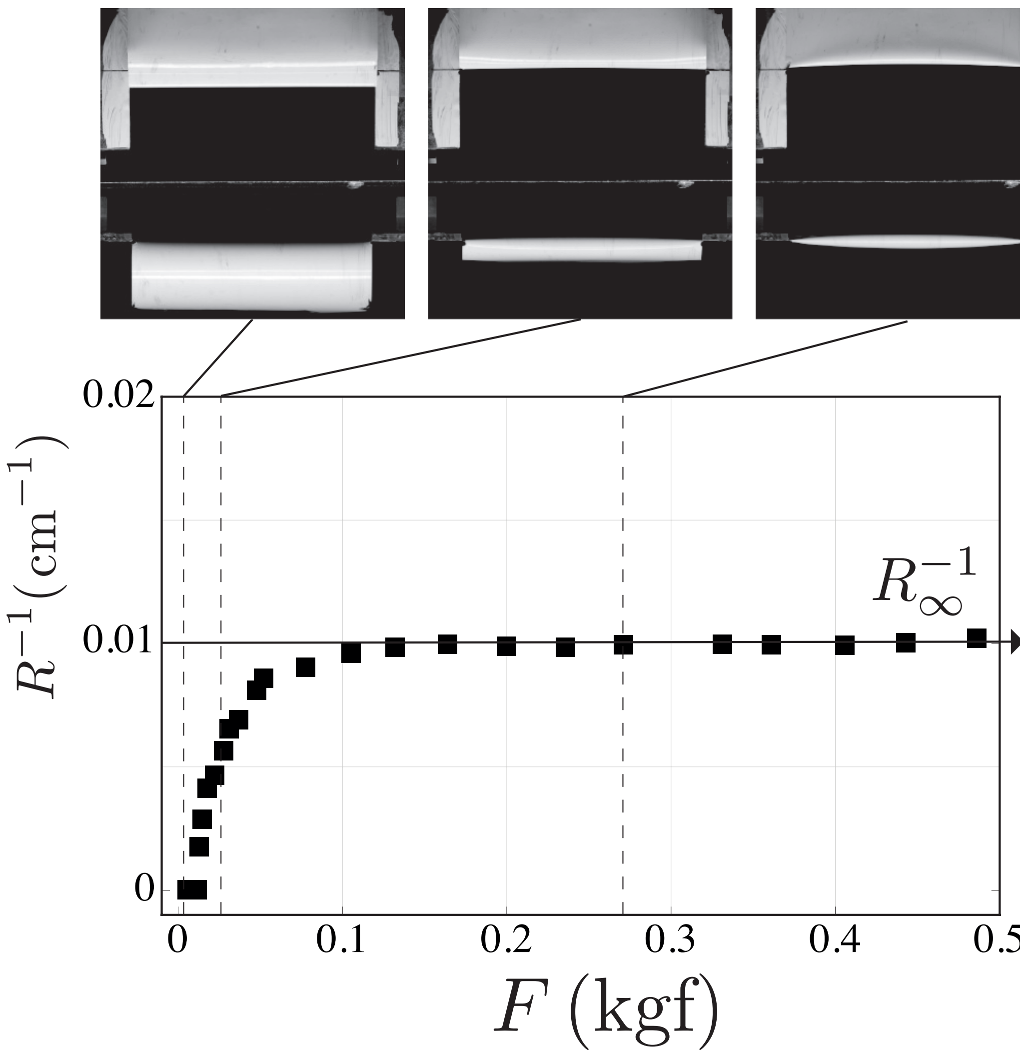


Figura 2.18: Curva experimental típica para $t = 50\mu$m y $W = 10$ cm donde el valor del R frontal a la cámara varía en función de la fuerza F aplicada. En el extremo superior se adjuntan fotografías que muestran la evolución de la vista frontal e inferior del pliegue para valores específicos de carga

La figura 2.17 muestra que junto con el incremento de la carga, la zona central del pliegue presenta una región de curvatura constante que corresponde aproximadamente a 2/5 del ancho total W de la tira y que está ubicada justo al centro de ésta. De la misma forma se puede apreciar que en los bordes la curvatura va creciendo a medida que se le inyecta carga al sistema. Debido a que se quiere estudiar el comportamiento asintótico del pliegue el análisis se centrará en la curvatura de la región media, por lo que de ahora en adelante cuando nos referiramos a R, éste será el radio de curvatura asociado a la región central del pliegue. La figura 2.18 muestra la variación de la zona central de la curvatura $1/R$ en función de la carga aplicada. Como es de esperarse a bajas cargas el radio de curvatura es infinito por lo que la curvatura es cero, mientras que a altas cargas converge a un valor asintótico R_∞.

Observando los resultados experimentales podemos concluir no cabe duda que en el desarrollo del pliegue tenemos dos comportamientos asintóticos, uno para regímenes de bajas cargas y otro para cargas altas. De esta manera se dividirá el análisis de acuerdo a estos dos estados y verificar si efectivamente en altas cargas se está en presencia de un pliegue de Witten - Li.

2.5. Pliegue Cilíndrico

El pliegue cilíndrico domina a regímenes de bajas cargas por lo que se espera que la forma del pliegue pueda ser explicado por la elástica de Euler con los bordes fijos en $s = 0$ y $s = L$ para una una fuerza vertical aplicada $F\hat{y}$ (figura 2.5). Si no se considera la gravedad el análisis es simple, el tamaño del pliegue está dominado por (2.15), y éste decae a través de $h \sim F^{-1/2}$. Sin embargo el tamaño del pliegue parece ser afectado por el efecto de gravedad al inicio del experimento debido a que las fuerzas a la que es sometida la tira es comparable al peso de ésta. De esta forma es conveniente usar parámetros adimensionales que incluyan la gravedad g y el largo L de la cinta. Se define entonces una fuerza aplicada adimensional como $f = FL^2/BW$ y una masa adimensional $m = MgL^2/BW$ donde M es la masa total de la cinta, tal que el ancho del pliegue está dado por una relación adimensional $h/L = \Pi(f, m)$. Es interesante notar que la masa adimensional m no depende del ancho de la cinta W, de esta forma el único parámetro que varía durante el experimento es el espesor t. Inesperadamente, el efecto de masa llega a ser más importante para cintas más delgadas dado que $m \sim t^{-2}$ para un material isotrópico donde $B = Yt^2/12(1 - \nu^2)$, siendo Y es el módulo de Young del material en dos dimensiones. La figura 2.19 muestra que las tiras más delgadas se escapan del valor de la aproximación cilíndrica $h = h_C$. De esta forma, para valores de f adimensionales, el ancho del pliegue es mayor para cintas mas delgadas ya que el peso es más relevante y contrarresta la fuerza de tiro del experimento.

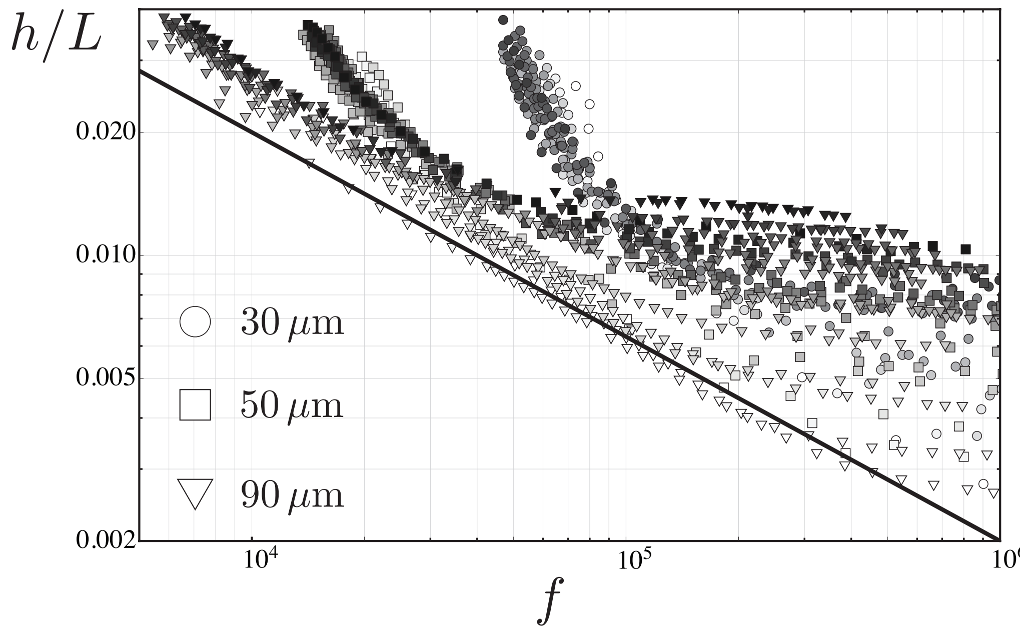


Figura 2.19: Representación $\log - \log$ muetras a h en función de la fuerza aplicada para tres diferentes espesores, La línea sólida corresponde a la aproximación cilíndrica $h_C/L = 2/\sqrt{f}$ obtenidas para $m = 0$. La gran cantidad de datos obtenidos para cada espesor corresponden a experimentos con diferentes valores del largo W incrementando desde 2 hasta 20 cm a intervalos de 1 cm. Los valores oscuros en la escala de grises corresponden a los anchos máximos de W

La figura 2.19 muestra que los datos se asocian en tres diferentes grupos donde cada grupo está asociado a los diferentes espesores usados. Sin embargo, el rango en los resultados para pequeñas fuerzas en cada grupo es mayor para cintas delgadas, mostrando que pequeñas variaciones en los valores de la masa adimensional m (como la pintura usada para aumentar el contraste) pueden tener un importante efecto en los datos. Para corregir estas variaciones se pesan las muestras después de cada experimento y se calculan sus masas adimensionales $m \sim 4.3 \times 10^4, 1.3 \times 10^4, 4.7 \times 10^3$ respectivamente. Se espera que la primera corrección del efecto del peso podría ser capturado por una traslación $f \to \bar{f} = (f - m)$ para pequeños valores de m. Aquí, $\bar{f}$ es la fuerza de tiro efectiva, tal que la fuerza decrece con m. De acuerdo con esto, el tamaño del pliegue está dado por la fórmula corregida $h_C/L = 2/\sqrt{\bar{f}}$. La figura 2.20 muestra que los datos pueden ser colapsados para pequeñas fuerzas usando una fuerza efectiva $\bar{f}$. La variación restante en los datos para fuerzas pequeñas es explicada por un segundo régimen observado cuando $f \sim m$. En ese caso, la fuerza de tiro es tan pequeña que está balanceada con la fuerza gravitatoria y el tamaño del pliegue está dominado por la longitud de elastogravedad $\ell_g = (BWL/Mg)^{1/3}$, donde los esfuerzos de flexión y la gravedad contribuyen de igual forma.

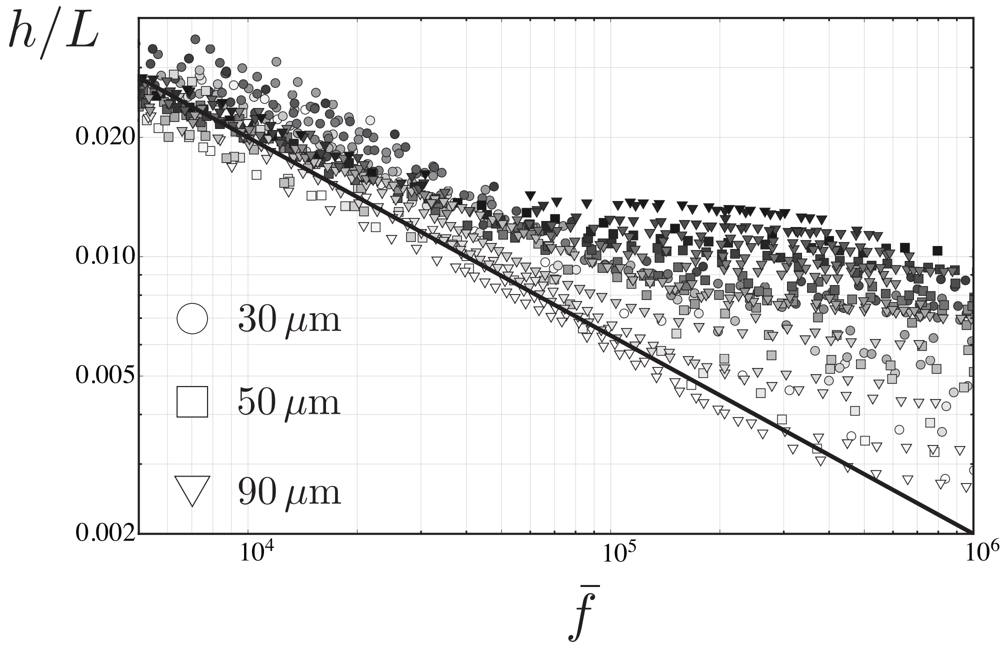


Figura 2.20: Datos corregidos usando la masa adimensional medida en cada muestra. La línea sólida corresponde a la aproximación $h_C/L = 2/\sqrt{\bar{f}}$ donde $\bar{f} = f - m$

Para fuerzas altas la predicción obtenida por la elástica de Euler ya no es válida como se muestra en la figura 2.20, el pliegue alcanza un estado asintótico que no es capturado por la aproximación cilíndrica que es una función decreciente con la fuerza.

2.5.1. Elástica

Como se ha visto al principio del experimento debido a que la fuerza de tiro es tan pequeña, ésta es comparable con el peso de la cinta, por lo que se tiene una región de la curva $h - F$ en la que compiten los efectos gravitacionales y el trabajo hecho por el operador de tiro. De esta forma, para usar la aproximación de la Elástica se debe resolver las ecuaciones de equilibrio introduciendo una diferencial de masa por unidad de área [5].

$$\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K} = 0 \tag{2.26}$$

$$\dot{\mathbf{M}} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} = 0 \tag{2.27}$$

Donde $\mathbf{K}$ es la fuerza externa por unidad de la línea de la tira, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{M}$ son la fuerza y el momento en la sección cruzada, y $\mathbf{t}$ es la tangente. Para el presente problema $\mathbf{K} = -\sigma\mathbf{W}\mathbf{g}\hat{\mathbf{y}}$ donde $\sigma = M/WL$ es la densidad de masa por unidad de área tal que una integración de la primera ecuación da $\mathbf{T} = [F - \sigma W g(L-s)]\hat{y} - R\hat{x}$. Aquí F y R son las fuerzas aplicadas en el extremo superior de la tira para mantenerla acoplada con la espátula. El sensor mide la fuerza vertical aplicada al sistema que corresponde a la fuerza de tiro F.

Se usa la relación Bernoulli - Euler entre momentos y curvaturas, $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{W}\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}$, y la relación cinemática $\mathbf{t} = \sin\phi\hat{x} - \cos\phi\hat{y}$ para obtener una ecuación para el ángulo ϕ (figura 2.21).

$$BW\ddot{\phi} + [F - \sigma W g(L-s)]\sin\phi - R\cos\phi = 0 \tag{2.28}$$

donde la posición de las coordenadas (x, y) están dadas por

$$\dot{x} = \sin\phi \quad \dot{y} = -\cos\phi \tag{2.29}$$

Las ecuaciones (2.28) y (2.29) han sido extensivamente estudiadas en conexión con el problema de la forma del cabello [49], tal que se limita el análisis resolviendo las ecuaciones numéricamente para las condiciones de borde particulares usadas en el experimento. La tira del presente experimento está fija en ambos bordes, tal que las apropiadas condiciones de borde son $x = y = \phi|_{s=0} = 0$, $x|_{s=L} = 0$ y $\phi|_{s=L} = \pi$. Se tiene entonces 5 condiciones de borde, la ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden entrega el valor de la fuerza desconocida R.

El escalamiento de las coordenadas vertical y horizontal más la longitud de arco por la longitud de elastogravedad ℓ_g entrega una ecuación simplificada

$$\ddot{\phi} + \frac{(f-m)}{m^{2/3}}\sin\phi + \bar{s}\sin\phi - k\cos\phi = 0 \tag{2.30}$$

Donde $\bar{s} = s/\ell_g$ es una longitud de arco adimensional y $k \equiv RL^2/BW$,el autovalor, representa la fuerza horizontal desconocida. El escalamiento muestra que $\mu \equiv (f-m)/m^{2/3}$ es un importante parámetro adimensional. Sin embargo el extremo de tracción está en la posición $\bar{s} = L/\ell_g = 1/m^{1/3}$ que incluye un nuevo parámetro adimensional al problema. Si ℓ_g es del orden de los centímetros (o menos) en las láminas estudiadas, se tiene $L \gg \ell_g$ o $m^{1/3} \gg 1$. Esto además muestra que las condiciones de bordes exactas en la posición de tiro, o equivalentemente el parámetro m en esta descripción, no son muy importantes en la determinación del tamaño del pliegue por lo que se espera una relación de la forma $h/\ell_g = \Pi(\mu)$.

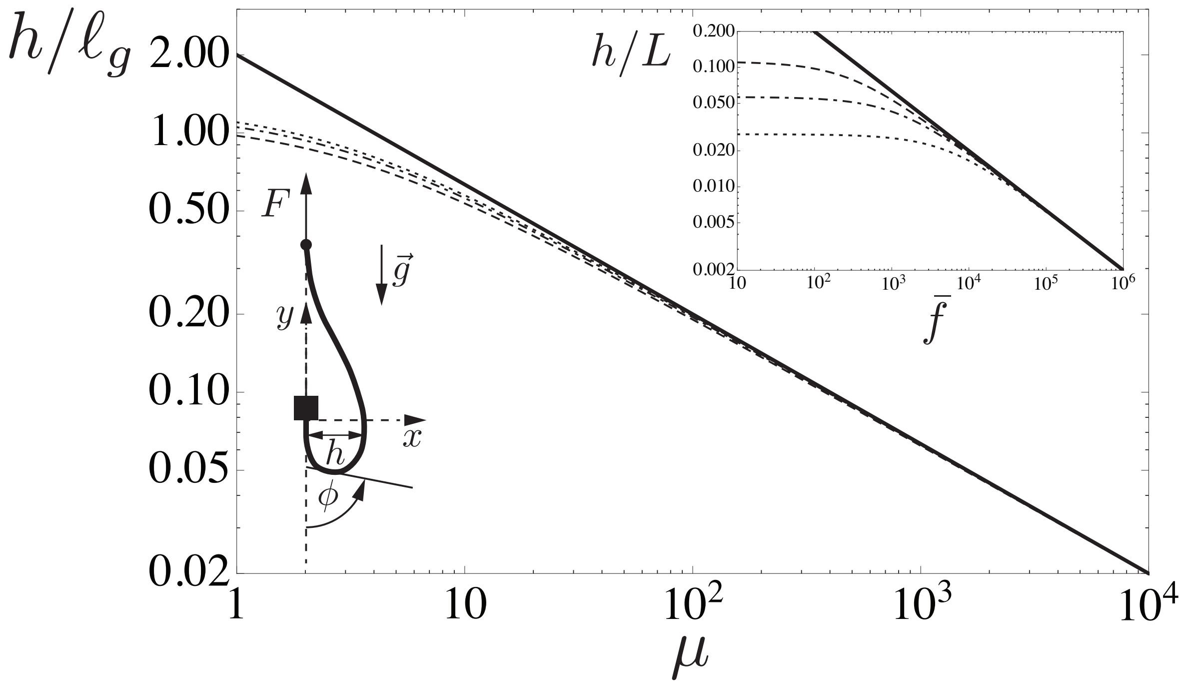


Figura 2.21: Simulación numérica de ecuaciones (2.28) y (2.29). La figura en el extremo superior derecho muestra el tamaño del pliegue en las coordenadas $\bar{f} - h/L$. Las líneas punteadas, punto-raya y de rayas discontínuas corresponde a diferentes valores de m adimensional tal que $m = 10^3, 10^4, 10^5$ respectivamente que son del orden de los valores usados en nuestros experimentos. La figura principal muestra el colapso de las curvas cuando usando coordendas $\mu - h/\ell_g$. La línea sólida corresponde a la aproximación cilíndrica y $h_C/\ell_g = 2/\sqrt{\mu}$ en ambas figuras. La figura inferior muestra un dibujo de las variables usadas para describir el pliegue en la aproximación cilíndrica.

La figura insertada en el extremo superior derecho de 2.21 muestra el tamaño del pliegue en las coordenadas $\bar{f} - h/L$ mostrando que el escalamiento $h_C/L = 2/\sqrt{\bar{f}}$ funciona bien para fuerzas grandes, pero no es correcto para $\bar{f} \sim 0$. El tamaño del pliegue converge en ese límite a diferentes valores dependiendo del valor específico de m. La figura además muestra que para el rango $m \sim 10^3 - 10^5$ se genera una región de cruce cuando la curva sólida en la que el tamaño del pliegue es dominado por h_C se superpone con las curvas discontinuas dominadas por la longitud de elastogravedad cuando el parámetro $\bar{f} \sim 10^3 - 10^4$. Estos valores de $\bar{f}$ son los mas pequeños usados en el experimento, de esta forma, se espera que los datos del lado izquierdo en la figura 2.20 se encuentren en esta región de cruce (región de crossover).

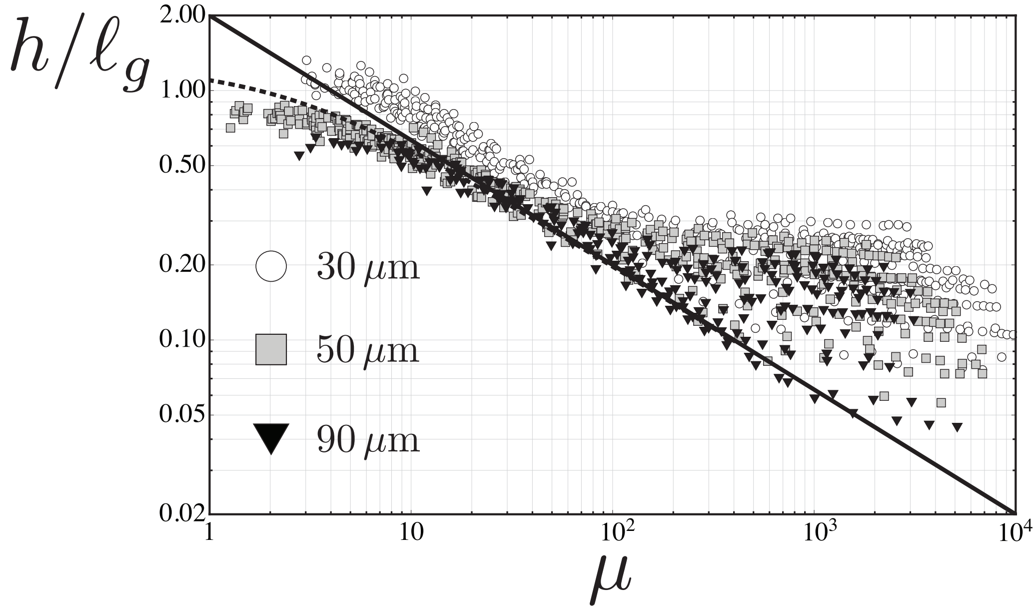


Figura 2.22: Los datos en las variables adimensionales $\mu - h/l_g$. La línea punteada corresponde a la simulación numérica para $m = 10^5$ y la línea sólida a la aproximación cilíndrica

Las curvas numéricas colapsan en una solo curva cuando se usa coordenadas $\mu - h/\ell_g$. Esto muestra que el tamaño del pliegue en la aproximación elástica es controlada por el parámetro adimensional μ para pequeñas y grandes fuerzas. La figura 2.22 muestra la curva experimental cuando se usa μ como parámetro. El colapso es muy bueno para pequeñas fuerzas para las cintas de espesor $t = 50, 90$ micrones, pero este no es el caso para cintas de 30 micrones. Estas láminas son mas sensibles a las variaciones en el módulo de doblamiento y a una distribución inhomogénea de masas debido al proceso de pintado de las películas. En efecto, un incremento del módulo de doblamiento entre un $30\,\% - 40\,\%$ hace que los datos experimentales para las curvas de 30 micrones se acerquen a la curva numérica de la figura 2.22 para fuerzas pequeñas. En el caso de las películas de 50μm y 90μm la variación del módulo de doblamiento producto de la pintura es menor a un $10\,\%$.

2.6. Pliegue de Witten - Li

Ahora se analizará el comportamiento asintótico obtenido para fuerzas grandes donde domina el estiramiento. El principal resultado de este experimento como muestra en la figura 2.23, es que la geometría del pliegue está definida por dos radios de curvatura $R^{\parallel}$ y $R^{\perp}$, longitudinal y transversal al pliegue. Como se detalló anteriormente en 2.2.2, para un pliegue de Witten - Li $R^{\parallel} \sim t^{-1/3}W^{4/3}$ y $R^{\perp} \sim t^{1/3}W^{2/3}$. Por otro lado la curvatura Gaussiana está dada por $\left(R^{\parallel}R^{\perp}\right) \sim W^{-2}$. A través de los experimentos se tiene acceso a ambos radios de curvatura debido a que $R_{\infty} \sim R^{\parallel}$ y además que se espera que el ancho del pliegue sea proporcional a la curvatura transversal, o $h_{\infty} \sim 2R^{\perp}$. La figura 2.24 muestra valores de la curvatura transversal y longitudinal en función del ancho W y el espesor t.

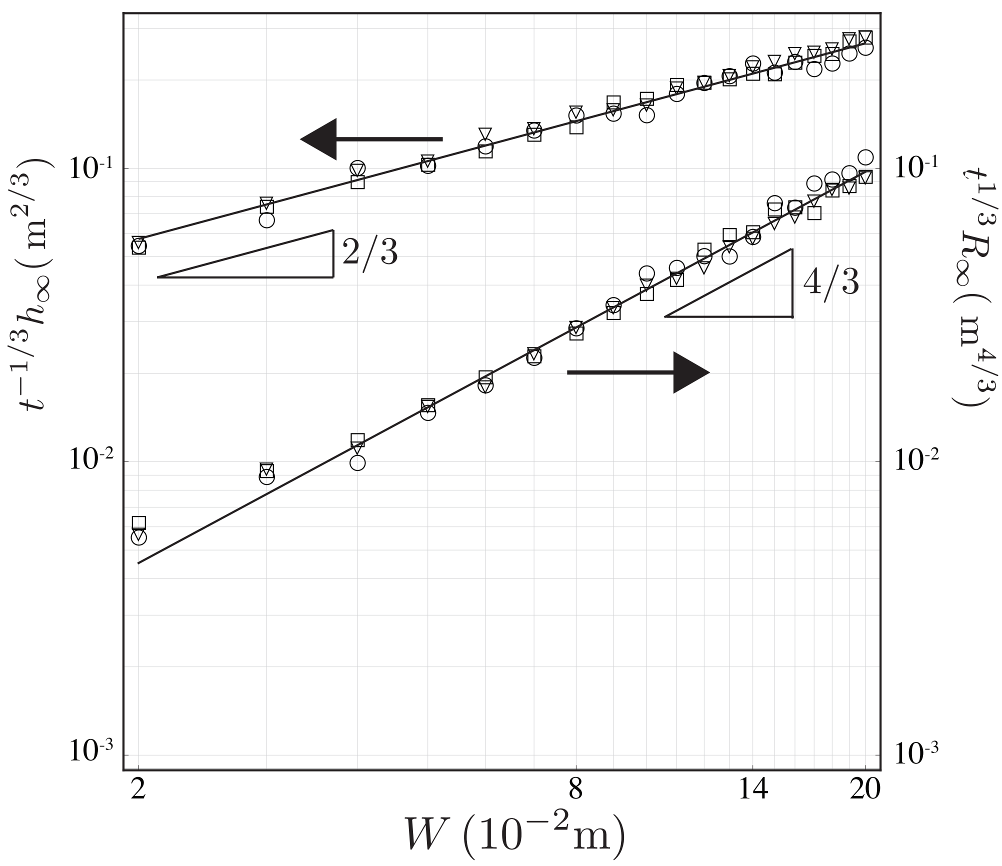


Figura 2.23: La curva $\log - \log$ muestra los valores experimentales de h_{∞} (eje izquierdo) y R_{∞} (eje derecho) como función de W para tres espesores t=30 μm, t=50 μm, t=90 μm . Estos valores son colapsados usando las leyes de escalamiento de un pliegue de Witten - Li (2.23) y (2.24).

Los radios de curvatura transversal y longitudinal pueden colapsar a través de las siguientes relaciones $h_\infty \sim 0.78t^{1/3}W^{2/3}$ y $R_\infty \sim 0.83t^{-1/3}W^{4/3}$, y la inversa de la curvatura gaussiana ajusta muy bien a la relación predicha por la ley de escalamiento $h_\infty R_\infty \sim 0.65W^2$. Estas relaciones confirman que el sistema estudiado converge asintóticamente a un pliegue de Witten - Li.

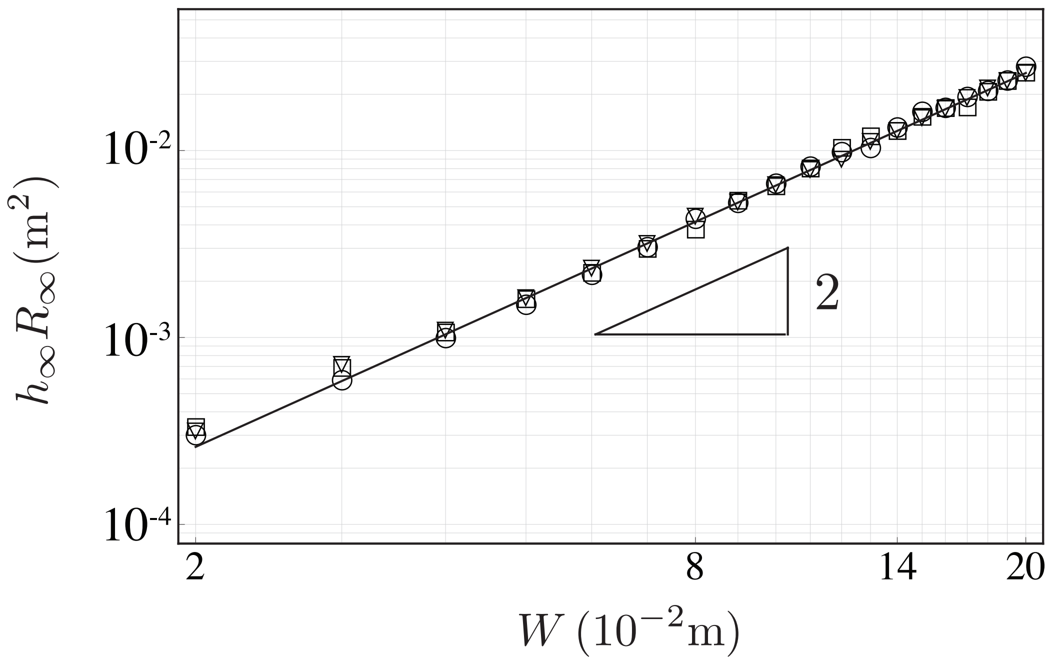


Figura 2.24: [Representación $\log - \log$ de la inversa de la curvatura Gaussiana para el estado asintótico $h_\infty R_\infty$ como función del ancho W del pliegue.

Notar que el número de von Kármán W/t en nuestros experimentos cubren el rango $222 < W/t < 6666$, esto incluye valores menores del rango $3000 < W/t$ que corresponde al rango sugerido en simulaciones numéricas para él cual la ley de escalamiento debiera funcionar. De esta forma los prefactores para los escalamientos descritos por la geometría del pliegue en estiramiento no son universales. Se puede comparar los resultados experimentales con el escalamiento numérico para la curvatura transversal dada por [45]. Para una cinta rectangular doblada por fuerzas normales es obtenida $W/R^\perp \sim 0.4\alpha^{4/3}\lambda^{1/3}$, donde $\lambda = (B/Y)^{1/2}/W$. Aquí $\pi - 2\alpha$ y $\nu \sim 1/3$, el escalamiento numérico predice una relación $h_\infty \sim 1.8t^{1/3}W^{2/3}$ donde el prefactor es mayor que el obtenido en los presentes experimentos.

2.7. La Transición

Como se ha visto y confirmado a lo largo de los experimentos el pliegue puede estar en dos estados asintóticos (Pliegue cilíndrico y pliegue de Witten - Li) . Sin embargo debe existir una condición en que el pliegue cilíndrico se transforme en un pliegue de Witten - Li, esa condición todavía no es completamente entendida. En nuestro caso esperamos un comportamiento parecido cuando el tamaño del pliegue dado por la elástica sea del mismo orden que el del pliegue de Witten - Li o $h_c \sim h_\infty$. De esta forma, si el tamaño del pliegue dado por la elástica h_c es mayor que el pliegue de Witten - Li h_∞, el pliegue va a preferir maximizar su tamaño (y minimizar su curvatura) al valor dado por el estado isométrico. Por el contrario, si h_c es menor que el valor de h_∞, el pliegue permanecerá en este último estado (minimizando nuevamente su curvatura). El balance entre $h_c \sim h_\infty$ indica que existe una fuerza crítica para esta transición.

$$F_* = 4\frac{BW}{h_\infty^2} = k\frac{B}{t^{2/3}W^{1/3}}. \tag{2.31}$$

Donde F_* es la fuerza de transición efectiva y $k \sim 6.6$. Notar que este análisis es equivalente a asumir un ajuste general de la curva experimental tal que $h = \left[2L/\sqrt{\bar{f}} - h_\infty\right] e^{-f/\bar{f}_*} + h_\infty$, con $\bar{f}_* = F_* L^2/BW$, que describe el comportamiento asintótico en todo los rangos de fuerza. Usando esta relación de fuerza crítica se obtiene que el ancho del pliegue esta dado por la relación $h/h_\infty = \left(2/\sqrt{\bar{x}} - 1\right) e^{-x/4} + 1$ donde $x = (h_\infty^2/L^2)\bar{f}$. La figura 2.25 muestra el ajuste propuesto que relaciona ambos regímenes, a fuerzas bajas los datos se escapan de la tendencia debido a que este trazo es dominado por la gravedad (mirar aproximación de la elástica 2.5.1), en el otro extremo, para fuerzas altas, el parámetro h no coincide completamente con la curva negra debido a que todavía sigue disminuyendo aunque en pequeñas cantidades.

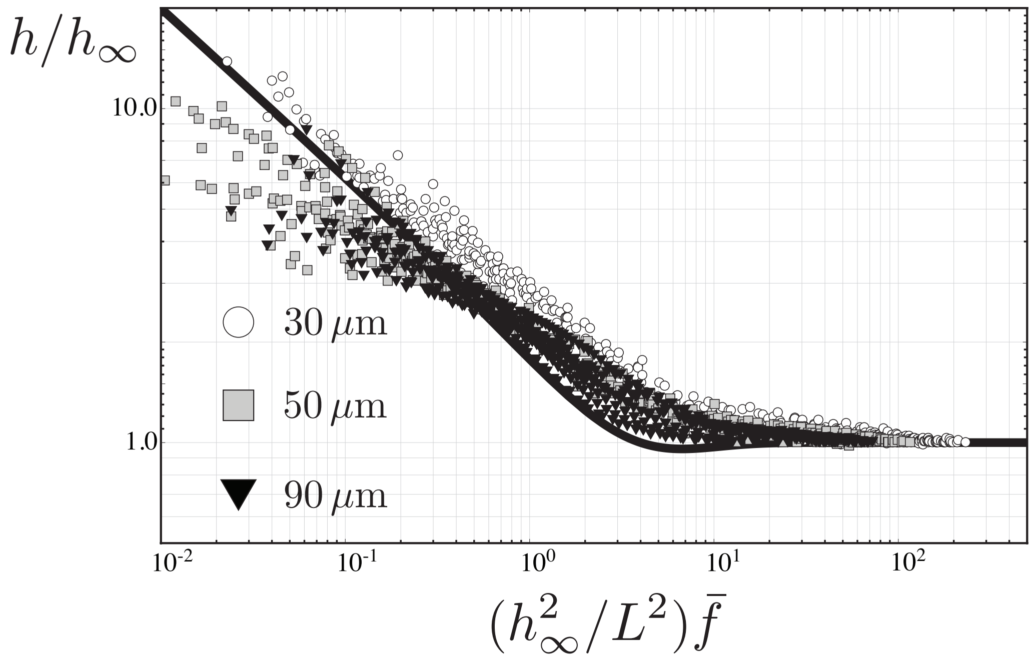


Figura 2.25: Representación $\log - \log$ de los datos de la figura 2.20 en variables adimensionales sugeridas por el comportamiento asintótico para fuerzas pequeñas y altas. La línea sólida corresponde al ajuste $h/h_\infty = (2/\sqrt{x} - 1)e^{-x/4}$+1, donde $x = (h_\infty^2/L^2)\bar{f}$.

2.8. Conclusiones

Con respecto a los resultados experimentales obtenidos para un pliegue asociado al rasgado sin adhesión, podemos establecer las siguientes conclusiones. El aumento sostenido de la fuerza aplicada al sistema genera que para algún valor específico de F_* de la fuerza, dependiendo del espesor de la tira, el pliegue colapsa siendo posible describir su nuevo estado en función de dos radios de curvatura $R^\perp$ y $R^\parallel$. La estructura de saturación del pliegue es compatible con un pliegue de Witten - Li satisfaciendo las relaciones de escalamiento (2.23), (2.24), y (2.25) . En el otro extremo, para un rango de fuerzas bajas el pliegue presenta un comportamiento cilíndrico pero sorpresivamente a cargas muy pequeñas (cargas comparadas con el peso de la tira), el tamaño del pliegue está dominado por la longitud de elastogravedad ℓ_g (figura 2.22), esto es indicativo de un régimen adicional dominado por la gravedad que es más importante a medida que el espesor disminuye.

La relación de transición entre los dos estados asintóticos del pliegue (2.31) nos entrega un criterio para saber cuándo una descripción isométrica deja de ser válida. Aunque este criterio es particular para el experimento estudiado (figura 2.13), nuestros resultados podrían aplicarse en otras geometrías , si generalizamos el resultado principal de nuestro trabajo de que la aproximación isométrica cercana a un pliegue es válida si el radio de curvatura impuesto por la condición de borde, o fuerza, es mayor que el tamaño h_∞ del pliegue de Witten - Li. De esta forma, h_∞, una longitud dominada por la elasticidad, actúa como una longitud de corte. Ya que este largo aumenta con el tamaño del sistema ($h_\infty \sim W^{2/3}$), o equivalentemente, la fuerza crítica decrece para valores grandes de W ($F_* \sim W^{-1/3}$), es razonable asumir una solución isométrica para pequeños sistemas o pequeñas fuerzas aplicadas en un experimento de desplazamiento controlado o fuerza contralada respectivamente.

Nuestros resultados tienen el interés de que pueden ser aplicados a una situación donde la propagación de grietas es permitida y así predecir la trayectoria de las fracturas a partir de saber cómo la energía es almacenada en el pliegue, como se dijo anteriormente. En un experimento de peeling sin adhesión la tasa de energía liberada determina el ángulo de propagación de las fracturas con respecto a la dirección de tiro. Para hacer el análisis con fractura basta con hacer $F \approx \gamma t$, donde γt es la energía de fractura del material. Nosotros esperamos observar un pliegue isométrico para pequeñas muestras durante el rasgado. Por otra parte, ya que $\ell_c = \gamma t/Y$ es similar a la longitud de elastocapilaridad [50] y está en el orden $\ell_c \approx 1\mu$m para típicas películas de polímeros [21, 20], predecimos que la aproximación isométrica sea válida durante el rasgado para un pliegue de largo menor que $W_* = t[pt/\ell_c]^3$ donde $p = k/12(1-\nu^2) \approx 0.6$. Esto significa que $W_* =$ 1.3m! para una película de 50 μm. Es importante señalar que W_* es muy sensible a las variaciones de ℓ_c por lo que para materiales distintos el comportamiento en rasgado podría variar considerablemente. De esta forma, en películas de polímeros, el entendimiento del rasgado de películas en aplicaciones prácticas [17] debe ser hecho en el marco de películas con deformaciones isométricas. Es por esta razón que estamos sorprendidos con trabajos recientes que explican que el rasgado en láminas delgadas asumiendo un pliegue de Witten - Li para calcular la distribución de energía elástica durante la fractura [32, 38, 39].

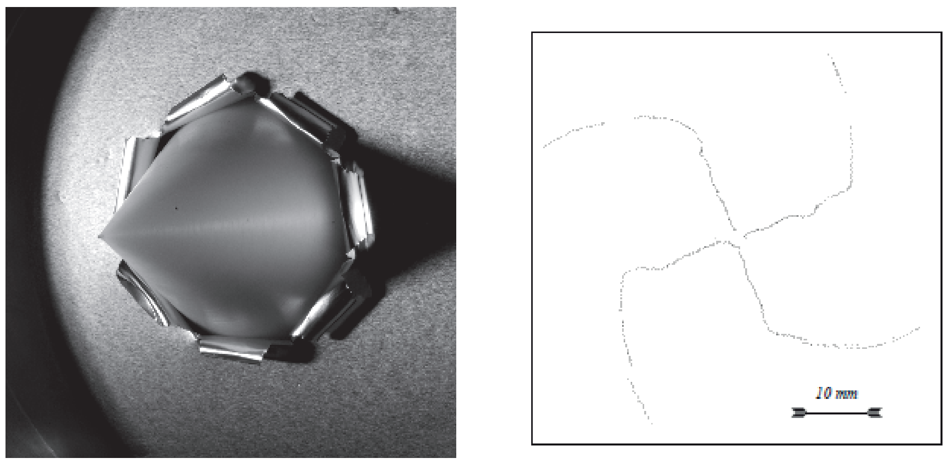
Una aproximación analítica que conecte estos dos estados asintóticos y que describa la transición en una configuración equivalente o similar a la nuestra se hace muy necesaria. Trabajos teóricos previos que estudian el pliegue de Witten - Li (o con estiramiento) se han hecho en el contexto de aproximaciones de grandes deflexiones , pero con pequeñas pendientes usando las ecuaciones de Föpp - von Kármán. Sin embargo, en nuestro experimento tenemos un ejemplo donde el marco teórico que da cuenta de grandes desplazamientos acompañados de deformaciones isométricas necesita ser corregido por una teoría que incluya la aparición de pliegues con estiramiento.

Capítulo 3

Fracturas en forma de espirales Múltiples

3.1. Fragmentación

Una fractura es por esencia la división de una o más partes de una estructura debido a algún esfuerzo aplicado, cuando un cuerpo es fracturado en muchas partes se habla de un problema de fragmentación para diferenciarlo del estudio de fracturas aisladas. Un ejemplo característico de fragmentación son los patrones de fractura radiales en una ventana rota provocados por un objeto que impacta la superficie. Si el objeto va a una velocidad lo suficientemente alta además de romper el vidrio, puede generar grietas circunferenciales secundarias alrededor del área de impacto. La perforación de las placas de sólidos es de interés para aplicaciones de seguridad. Se han reportado experimentos de fragmentación al estudiar la estabilidad de estructuras en capas de hielo [9], y también en análisis forenses a través del análisis de los tamaños y patrones de fracturas en materiales frágiles [51]. Otro estudio reportó e hizo una estadística de la cantidad de grietas que se generan en un proceso de fragmentación al perforar una lámina delgada con un objeto sólido a través de un pequeño agujero [52]. Sus resultados muestran que debido al estiramiento generado las trayectorias de las fisuras divergen en direccion radial. Estos resultados son similares al rasgado de una concertina (figura 1.11), sin embargo la dirección de propagación en este caso es dictada por la simetría. Vermorel et al. reportó que la lámina no se fragmenta en menos de 4 partes. De todas formas advierte que para el caso de 4 fragmentos, en ocasiones, obtiene una propagación donde la trayectoria de las fracturas dejan de ser radiales y comienzan a curvarse de forma similar a las reportadas por Romero et al. [30] (figura 3.1(b)).



(a) (b)

Figura 3.1: a) Fotografía montaje experimental usado por Vermorel et al. para perforar láminas delgadas metálicas [52]. b)Trayectoria observada por Vermorel en algunos casos cuando se propagan cuatro fisuras. Imagen extraída de [53]

Esta observación lleva a pensar en la factibilidad de la propagación de múltiples fisuras en forma de espiral pero que a diferencia de la espiral autodesarrollada reportada en [30], estas espirales deben satisfacer la condición de tangencia con otra de las espirales interactuantes.

Figura 3.2: El estudio de los patrones de fractura en una lámina fragmentada permite entender y sugerir la forma en que el material falló. Una interesante aplicación de este tipo de estudios es saber si para obtener una multifractura como la de la figura basta con aplicar uno o unos cuantos cortes en el material. Es posible que la trayectoria de las fracturas hechas por Porky al rasgar el paño estén mal dibujadas y en vez de fracturas radiales estas deban ser reemplazadas por espirales?

3.2. Experimento

Para los experimentos se usaron láminas transparentes de polipropileno (BOPP Innovia) de 30 μm de espesor, este material es frágil y bastante isotrópico. Las láminas fueron preparadas con una serie de cortes iniciales de largo 7 mm $\pm$ 1 que desarrollan la misma cantidad de fracturas. De la misma forma, se observó que el material difícilmente desarrolla una fractura sin la existencia de un corte previo.

En el presente experimento se usaron dos configuraciones experimentales, en la primera se favorece la propagación de las fracturas a través del empuje de la lámina por un objeto sólido sin filo, mientras que en el segundo se hace a través de un experimento de tiro donde la carga aplicada es perpendicular al plano donde se fija la lámina.

3.2.1. Experimento A (fracturas por empuje)

En este experimento las láminas se fijan usando cinta adhesiva de doble faz en un marco rígido de aluminio de tamaño 48 $\times$ 50 cm. Este marco está acoplado en uno de sus lados a un eje que permite que el sistema pueda desplazarse verticalmente. En la base del riel y justo en el centro del marco se fija un cono de altura 29 cm y un radio basal de 12.5 cm. La idea del experimento es que el cono, al momento de que el marco comience a descender en altura, perfore el material justo en el lugar donde se preparó el corte inicial, al descender (el marco), el cono empuja el material que está fuera del plano de rasgado generando que las grietas preexistentes comiencen a crecer. El marco desciende a una velocidad constante de 12.5 mm/s, lo suficientemente rápido para no generar un relajamiento del material y lo suficientemente lento para descartar efectos dinámicos. Del mismo modo, la lámina es lo suficientemente grande para evitar los efectos de borde en el rasgado, al menos en las etapas iniciales.

Al finalizar el recorrido, o sea al llegar a la base del cono, se despega cuidadosamente el material y se pinta con lápiz negro uno de los bordes de la trayectoria de la grieta para luego a través de análisis de imágenes digitalizar estos datos.

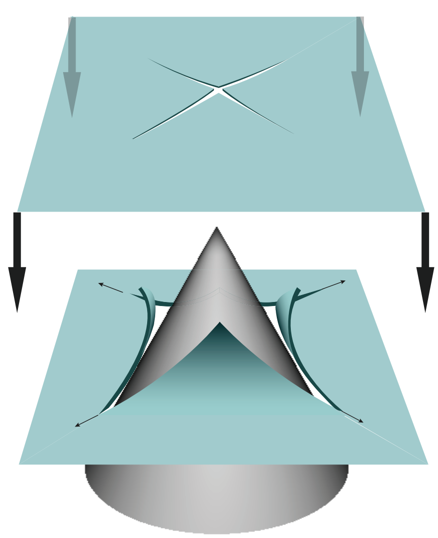


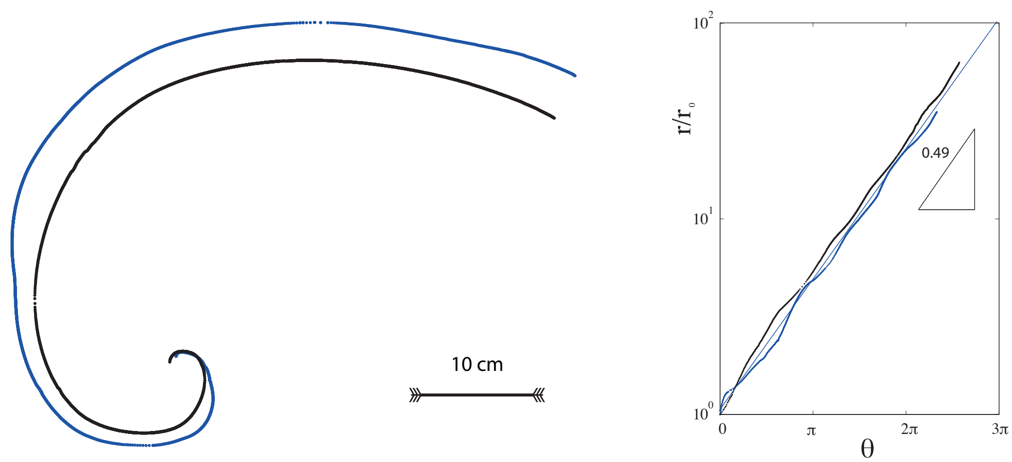
Figura 3.3: Diseño experimental de rasgado por empuje

En el experimento se pueden observar patrones radiales de fractura (figura 3.8 patrones

IV y V) cuando la lámina es preparada con $n > 3$ grietas iniciales, pero ocurre que para $n < 4$ se obtienen trayectorias en forma de espirales como se muestran en la figura 3.7

3.2.1.1. Dependencia con la geometría

El resultado de los experimentos llevó a pensar la posibilidad de que exista una dependencia con la geometría del objeto que empuja la lámina, por lo mismo en vez de fijar un cono se hizo con una pirámide maciza de 4 lados iguales, con la misma altura del cono. El procedimiento experimental usado fue el mismo que en el caso interior, la pirámide indenta la lámina y comienza a empujar con el borde los pliegues que se generan en la perforación. La figura 3.4(a) muestra la comparación entre una espiral generada a través del empuje de un cono y otra por una pirámide de 4 lados.



(a) (b)

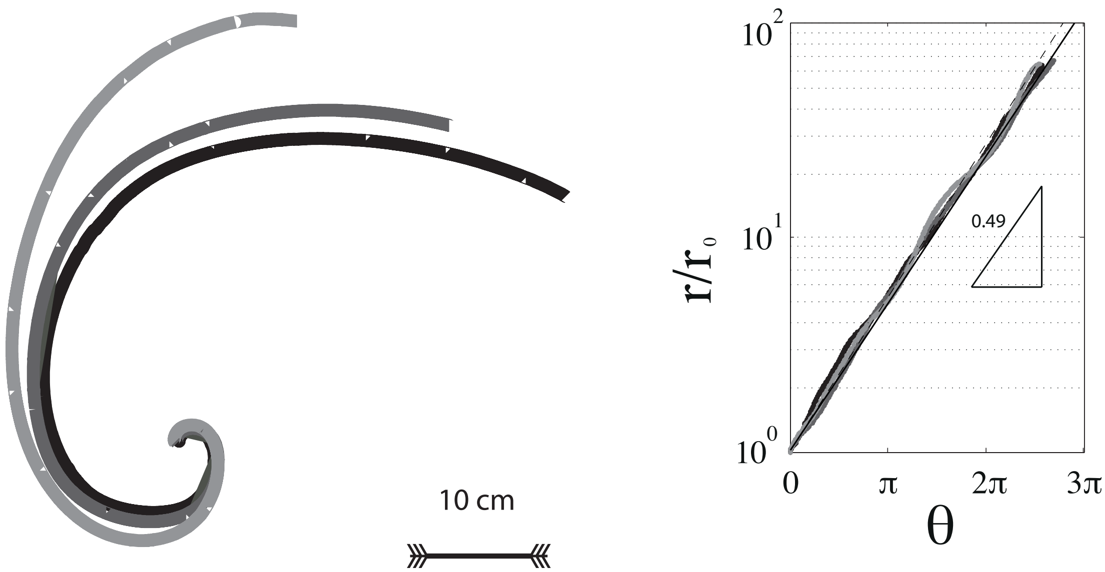
Figura 3.4: a) Comparación entre una espiral provocada por el empuje de un cono regular (curva negra) con una hecha con una pirámide (curva azul). b) Representación semi-log de trayectorias de espirales.

De la figura 3.4(a) se observa que la espiral asociada al rasgado debido al empuje de la pirámide es levemente mas grande, esto puede ocurrir fundamentalmente por dos razones, la primera es que el experimento es muy sensible al corte inicial, por lo que una pequeña diferencia en el tamaño de la perforación inicial podría generar una diferencia importante en el tamaño de la espiral. La segunda está relacionada con el efecto de la geometría del objeto que va empujando el pliegue, la trayectoria de la espiral negra (círculo) es mas suave que la azul (pirámide) lo que es completamente esperable debido a que los vértices de la pirámide generan una discontinuidad en el avance de la fractura, estos saltos cambian abrupta y localmente la dirección de la punta de la fractura generando que en esos puntos específicos la trayectoria de la fractura diverga en un porcentaje mayor.

El gráfico de la figura 3.4(b) muestra que ambas espirales tienen el mismo paso, además ambas curvas muestran oscilaciones desfasadas en $\pi/2$, esta periodicidad se debe a la anisotropía que presenta el material estudiada detalladamente en [54]. El resultado de este experimento indica que la geometría del objeto con que se empuja el pliegue no afecta mayormente la dirección de propagación de las fisuras.

3.2.1.2. Dependencia con el espesor de la lámina

Para tener una idea de cómo afecta la geometría en la propagación de las fisura, se estudia cómo cambian las trayectorias con las mismas condiciones iniciales, pero usando láminas de diferentes espesores. La figura 3.5(a) muestra espirales típicas de dos ramas para diferentes espesores. Se puede observar que la espiral de 90 μm (la menos oscura) se desvía de las otras dos. Este cambio podría ser efecto de la anisotropía del material o de algún efecto elástico.



(a) (b)

Figura 3.5: a) Espirales de dos ramos obtenidas en láminas de 30 μm, 50 μm y 90 μm. Las curvas mas oscuras corresponden a los espesores mas delgados. b) Representación semi-log de trayectorias por empuje para láminas de diferente espesor.

La figura 3.5(b) muestra el paso de cada espiral, las espirales obtenidas en los plásticos más delgados convergen al mismo valor $\tan\phi = 0.49$, mientras que la de 90 μm, además de tener oscilaciones más pronunciadas, tiene un paso levemente mayor a las otras de 0.51. De todas formas, las pequeñas diferencias del paso acusan una débil dependencia de t en la propagación de la fisura.

3.2.2. Experimento B (fracturas por rasgado)

En este caso se fijan las láminas a una superficie horizontal afirmando los bordes con scoth doble faz para evitar desplazamientos. A diferencia del caso anterior esta vez se modifican las rectas iniciales por trazos más curvos que permitan generar una pequeña área donde tirar del material. En este experimento dependiendo de la cantidad de cortes iniciales se fija la misma cantidad de hilos inextensibles en los extremos separados por cortes. Estos hilos de aproximadamente 30 cm de largo se conectan en un nodo el cual se fija a un motor paso a paso que permite el desplazamiento vertical del nodo. Mientras el nodo se desplaza verticalmente hacia arriba, los hilos, conectados a la lámina a través de pequeños nudos próximos a las cortes preparados, comienzan a tirar de ésta en dirección vertical al plano donde está fija (figura 3.6).

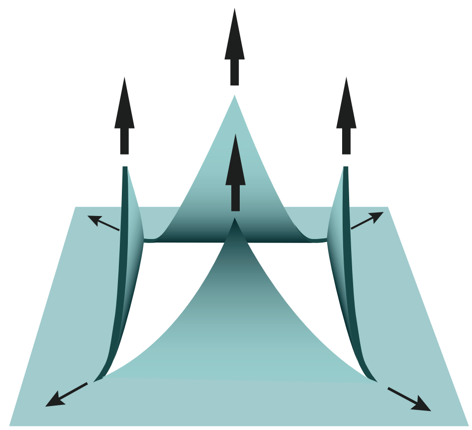


Figura 3.6: Diseño de experimento de rasgado de múltiples fracturas por la acción de una fuerza de tiro perpendicular al plano

A pesar de que en este experimento el rasgado es producido por una fuerza perpendicular al plano donde se fija la lámina, los resultados son similares a los obtenidos en el experimento anterior donde la fuerza es aplicada en el mismo plano donde se propaga la fisura. En ambas situaciones se generan trayectorias divergentes a lo largo de espirales para $n \leq 3$ (figura 3.7). Existe una excepción en $n = 4$ para el experimento B en el que es posible observar espirales y no sólo trayectorias radiales (figura 3.8). Estas espirales de 4 brazos corresponden a un caso crítico debido a que el desarrollo de éstas depende de la condición inicial usada ya que si se usan 4 rectas como en el experimento anterior, sólo se obtienen propagaciones radiales. Es importante señalar que la condición inicial usada en este experimento (forma “S"), también fue ensayada en el experimento A obteniendo siempre fracturas divergentes radiales.

3.3. Análisis de datos

Resumiendo los resultados experimentales, éstos indican que para $n > 4$ en ambos experimentos se observan patrones radiales de fractura que preservan la simetría de rotación de orden n, sino que también las reflexiones planas con respecto a cada una de las trayectorias de las fracturas (simetría dihedrial grupo D_n). Sin embargo para $n < 4$ (y en algunos casos para n =4 en el experimento B), se desarrollan trayectorias en forma de espiral que rompen la simetría D_n y solamente se tiene simetría rotacional C_n de orden n. En ambos experimentos las trayectorias convergen próntamente en espirales logarítmicas $r(\theta) = r_0 \exp(\theta \tan \phi)$ donde r es el radio polar expresado como función del ángulo polar θ, ϕ el ángulo de paso de la espiral y r_0 una constante.

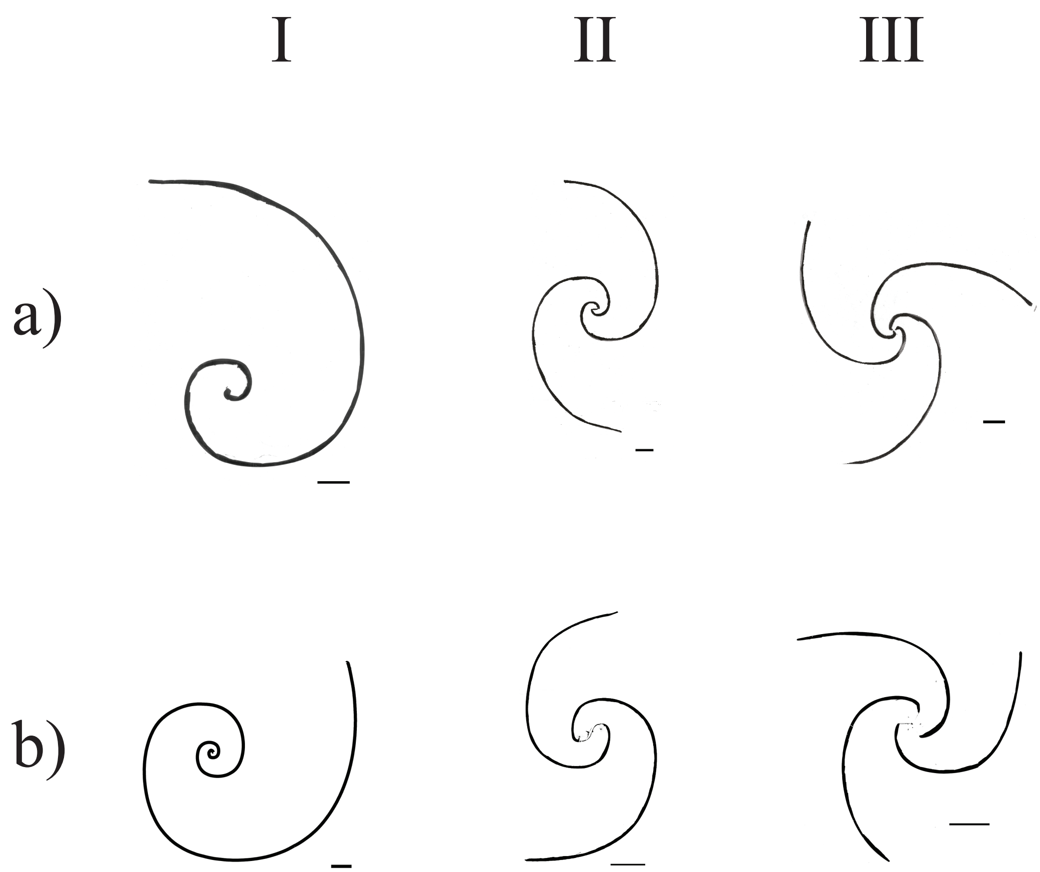


Figura 3.7: Patrones de trayectorias de fracturas obtenidos para tres diferentes condiciones iniciales. a) y b) corresponden a los experimentos de rasgado por empuje y tiro respectivamente. Desde izquierda a derecha el número de cortes iniciales va aumentando desde 1 hasta 3. Los cortes iniciales son radiales para el caso de la configuración de empuje y en forma de “S" para el caso de tiro. Las barras horizontales que acompañan a cada figura tiene un valor de 5 cm de largo.

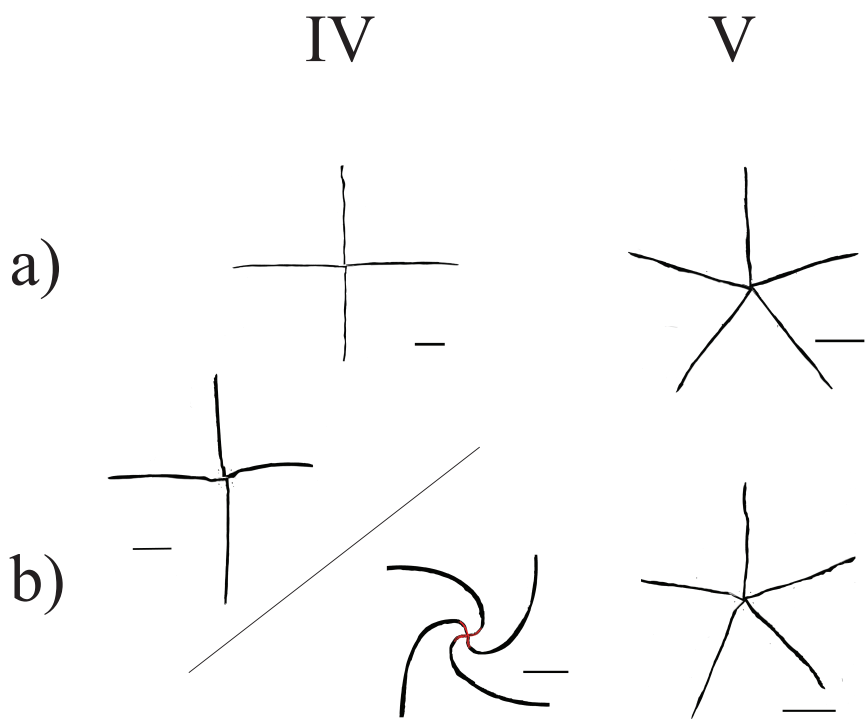
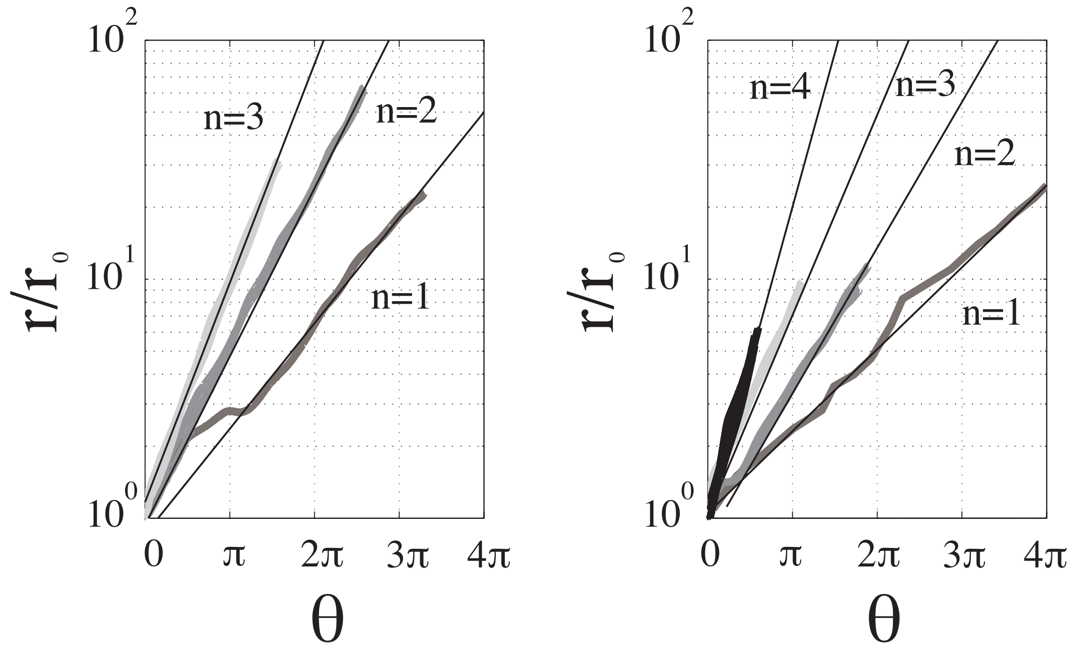


Figura 3.8: Patrones de trayectorias de fracturas obtenidos para dos diferentes condiciones iniciales. a) y b) corresponden a los experimentos de rasgado por empuje y tiro respectivamente. Desde izquierda a derecha el número de cortes iniciales va aumentando desde 4 hasta 5. Los cortes iniciales son radiales para el caso de la configuración de empuje y en forma de “S" para el caso de tiro. Para el caso $n = 4$ en configuración de tiro se usaron ambas condiciones iniciales, la propagación en espirales se presenta con una condición tipo “S". Las barras horizontales que acompañan a cada figura tiene un valor de 5 cm de largo.

La figura 3.9 muestra que si van aumentando la cantidad de brazos espirales el paso de éstas va creciendo. Este resultado indica que para observar una rotación completa del ángulo polar para una configuración de 4 espirales brazos se necesita de una lámina de dimensiones mucho mayores de las que se usaron en este trabajo (figura 3.9(b)).

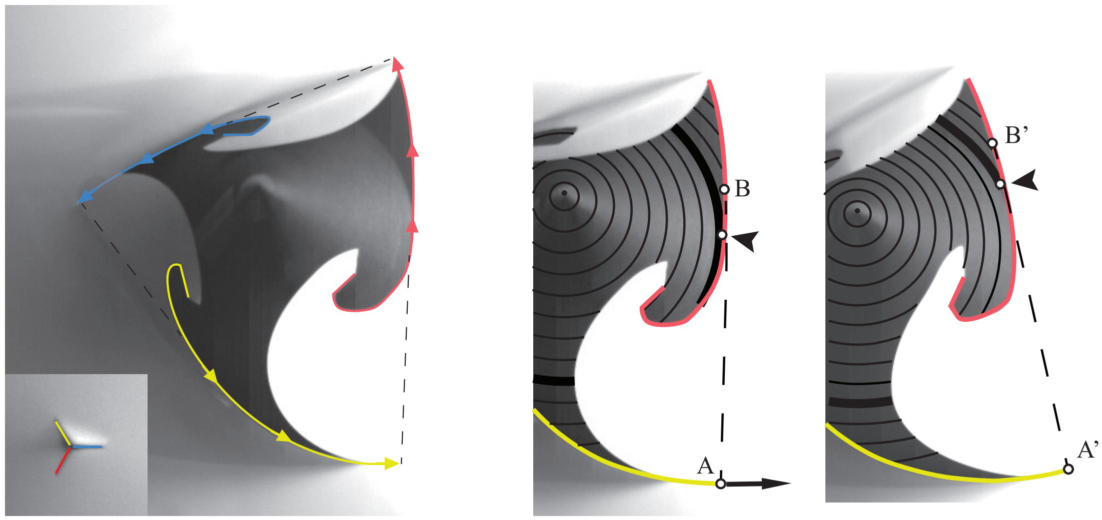


(a) Espirales por empuje

(b) Espirales de tiro

Figura 3.9: Representación semi- $\log$ de trayectorias de fracturas por (a) empuje partiendo de 1, 2, y 3 cortes inciales; y (b) tiro con 1, 2, 3, y 4 cortes iniciales.

Para entender el mecanismo responsable de la generación de las trayectorias de estas espirales, se comienza analizando el caso A suponiendo que la lámina es infinitamente flexible pero que la fractura se propaga ante cualquier perturbación del plano de deformación. Durante el experimento, la superficie del material es dividido en n pedazos que son doblados por el cono rígido (la figura 3.10(a) muestra el caso para $n = 3$). Esto ocurre porque la lámina es infinitamente flexible, la superficie de la lámina que queda colgando es simplemente la envolvente convexa asociada a la trayectorias de la fracturas. La perforación del cono actúa en el plano de la lámina como un disco expandible de radio r_0. No se consideran deformaciones en el plano de la lámina siempre que el disco permanezca dentro de la trayectoria de la envolvente convexa. En el presente modelo de láminas inextensibles, la fractura se propaga antes de que aparezca cualquier deformación. El disco siempre está en contacto tangencial con el borde de la envolvente convexa. Un aumento adicional del radio del círculo desencadena la propagación inmediata de la fractura de manera que ahora el disco está envuelto en una envolvente convexa de mayor tamaño.



(a) (b)

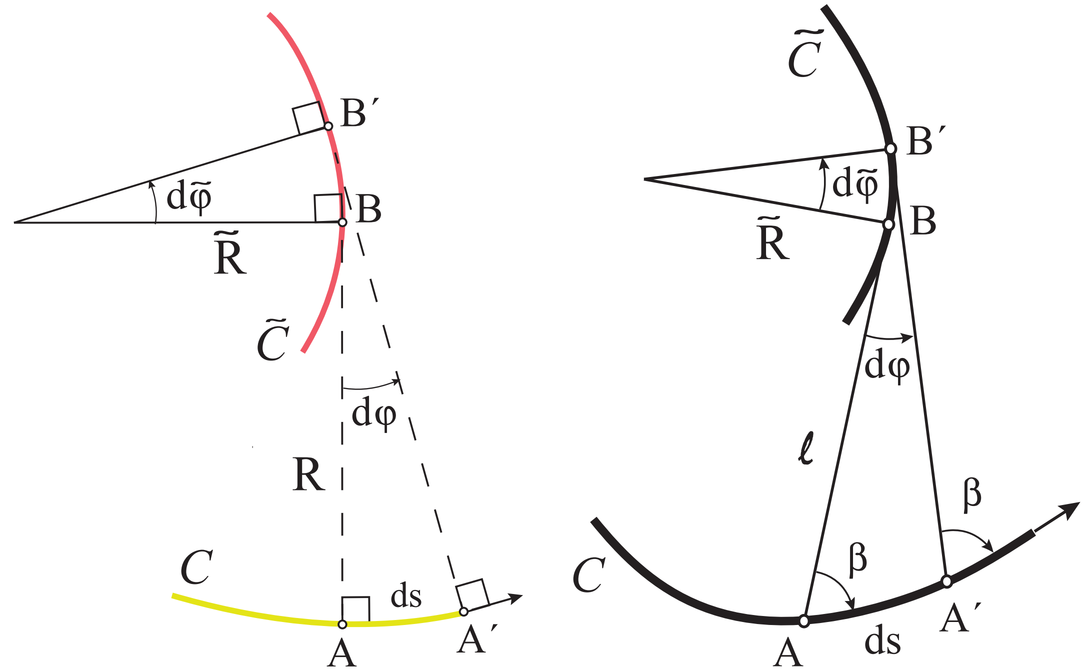
Figura 3.10: a) Fotografía de un cono rígido indentando una lámina delgada con una espiral de 3 brazos desarrollándose. En el extremo inferior izquierdo de la imagen se indica la condición inicial. Los colores y flechas indican diferentes trayectorias de fracturas correspondientes a su respectivo corte inicial. Todo el tiempo las líneas de plegado (líneas discontinuas) y la trayectoria de la fisura definen una curva convexa que encierra la envolvente convexa. b) Secuencia de la propagación de una grieta (linea amarilla): la fisura se mueve desde A hasta A' mientras la línea plegada (línea discontinua) permanece tangente a la trayectoria dejada por el fisura roja. El punto de tangencia se mueve desde B hasta B'. Las fechas indican los puntos sucesivos donde el cono, a través de su disco expansible (línea negra gruesa), empuja la línea de plegado.

Pero, en qué dirección se propaga la fractura?. El borde de la envolvente convexa (figura 3.10(a)) está compuesto de las porciones de cada trayectoria de las fracturas y las secciones rectas que corresponden a líneas de plegado asociadas a los diferentes pedazos de cintas que quedan colgando. Uno de estos segmentos está marcado en la figura 3.10(b) como la línea punteada $\overline{AB}$. A es la punta de la fractura (trayectoria de la fractura amarilla), B es el punto donde el segmento termina tangencialmente a la trayectoria de la fractura vecina (rojo). Se puede ver que la perforación del disco es tangente a este segmento. Si el radio se expande por $d\rho$, estas dos condiciones de tangencia determinan la nueva posición B' del punto B, y la línea recta en que la nueva posición de la punta de la grieta debe descansar para que la envolvente convexa pueda abarcar el disco de perforación. Si se llama F a la fuerza aplicada sobre la lámina en el punto de contacto con el disco, suponiendo que no hay fricción, y porque se considera además que la lámina es inextensible e infinitamente flexible, ésta no debe almacenar energía elástica, el trabajo del operador F es completamente disipado por la energía de fractura.

$$nFd\rho = nG_c t ds \tag{3.1}$$

Donde G_c es la energía de fractura por unidad de superficie, t es el espesor y ds es la distancia que se desplazan las fracturas. La cantidad de energía liberada es máxima (o el del operador de fuerza es mínimo) si la fractura avanza en la dirección donde $d\rho/ds$ es mínimo. De acuerdo al criterio de la máxima tasa de energía liberada la propagación se lleva a cabo en la dirección perpendicular a la sección $\overline{AB}$.

El cálculo de las trayectorias de las fisuras llega a ser un problema puramente geométrico. De esta forma, de acuerdo a la figura 3.11(a), cada grieta se propaga a lo largo de la involuta de la trayectoria recorrida por la fisura que está inmediatamente a su izquierda en el caso de una propagación anti-horario. Una involuta es una curva obtenida desde otra dada (curva de referencia), ésta puede trazarse mediante el extremo de una cuerda no extensible que se enrolla a lo largo de la curva de referencia de tal manera que en cada instante apunte en la dirección tangente de la curva de referencia.



(a) (b)

Figura 3.11: Geometría de la trayectoria de la fisura. a) La trayectoria de una fractura como involuta (curva amarilla) de la trayectoria de una fractura desarrollada (roja): Cuando la línea de plegado AB rota en un ángulo $d\varphi$, la fisura se mueve desde A hasta A', y el punto de tangencia desde B hasta B' subtendiendo un ángulo $d\tilde{\varphi} = d\varphi$. En todo instante la dirección de propagación de la fractura es perpendicular a la línea de plegado. R y $\tilde{R}$ son los radios de curvatura local en los puntos A y B. b) Tanvoluta: La generalización de la involuta, en que la línea tangente y la tangente a la tanvoluta hace un ángulo β. La involuta es un caso particular donde $d\tilde{\varphi} = d\varphi$ y $0 < \beta < \pi/2$ es constante en todo instante.

Cuáles son las curvas producidas en este proceso?. Se define la curva de referencia $\tilde{C}$ y su involuta C intrínsecamente por sus radios de curvaturas, $\tilde{R}$ y R que son función de la orientación de la tangente a la curva (los ángulos φ y $\tilde{\varphi}$ con respecto a un eje de referencia arbitrario). Una propiedad geométrica de una involuta es que el radio de curvatura de C en A es igual a la longitud del segmento $\overline{AB}$, e incrementa este largo por $dR = \tilde{R}d\tilde{\varphi}$ cuando la fractura se mueve desde A hasta A' y el punto de tangencia desde B hasta B'.

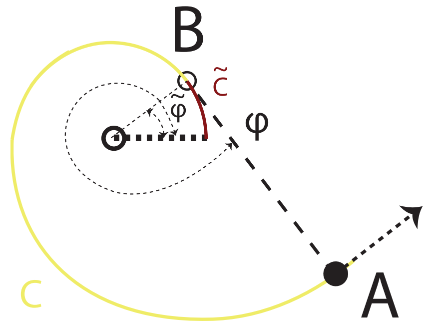


Figura 3.12: La construcción de una espiral corresponde a una curva que es involuta de si misma donde la tangente en B intersecta al punto A satisfaciendo $\tilde{\varphi} + \frac{3\pi}{2} = \varphi$.

Por simplicidad se analiza el caso $n = 1$, donde $C = \tilde{C}$ (figura 3.12). En otras palabras, cómo se puede definir una curva C qué es la involuta de si misma?. Las funciones $R = \tilde{R}$ coinciden y para este caso se encuentra la relación geométrica $\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{3\pi}{2}$. El retardo $3\pi/2$ corresponde al ángulo por el cual la tangente a C rota cuando se dirige desde punto de tangencia B a la fractura en A (figura 3.11(a)). Para el caso general de n espirales es equivalente a tener n involutas recursivas. Si se supone simetría rotacional de orden n las involutas son todas iguales y comparten el mismo radio $R(.)$. De esta forma se puede demostrar que $\tilde{\varphi} = \varphi - \alpha_n$, donde

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2n}(4 - n) \tag{3.2}$$

es el ángulo de retardo entre el punto de tangencia adelante, y la punta de la fractura en cada involuta. Es importante notar que en esta construcción el retardo debe ser siempre positivo $\alpha_n \geq 0$ para asegurar que el punto B descanse en una parte de la curva que ya ha sido cortada por la fractura de una espiral vecina (y no descanse en una futura trayectoria aún no trazada).

Si tenemos n curvas involutas iguales con $d\varphi = d\tilde{\varphi}$ de modo que $dR(\varphi) = R(\varphi - \alpha_n)d\varphi$, se obtiene una ecuación diferencial con retardo

$$\frac{dR}{d\varphi} = R(\varphi - \alpha_n). \tag{3.3}$$

Las soluciones reales de (3.3) existen en forma de exponenciales,

$$R(\varphi) = Se^{\sigma\varphi}, \qquad \text{donde } \sigma \text{ obedece} \qquad \sigma e^{\alpha_n \sigma} = 1 \tag{3.4}$$

siendo S es un factor de escala arbitrario. El crecimiento exponencial del radio de curvatura define una espiral exponencial con un paso $\sigma = \tan\psi$ y $S = \exp[\cot\psi(\psi - \pi/2)]/\cos\psi$.

La solución de esta ecuación trascendental para σ puede ser expresada en términos de la función de Lambert como $\sigma = W(\alpha_n)/\alpha_n$. La función $W(x)$ toma valores reales solo para $x > -e^{-1}$, por lo tanto, para la construcción de la espiral se requiere que $\alpha_n \geq -\frac{1}{e}$, que corresponde a que $n \leq 5$ .Para el caso $n = 5$ las espirales existen matemáticamente hablando, pero no son físicas dado que $\alpha_5 < 0$ tal que la línea de plegado podría ser tangente a una hipotética curva que todavía no ha sido trazada por la fractura. El caso $n = 4$ muestra que $\sigma = 1$, pero es marginal porque $\alpha_4 = 0$ que significa que en la figura 3.10 el punto B coincide exactamente con la punta de la fractura vecina.

3.3.1. Fracturas en forma de espiral por empuje y rasgado

En la práctica el forzamiento de una lámina elástica, ya sea por empuje o rasgado, introducirá una deformación en ésta. Como consecuencia de esto, en el caso de empuje la fractura se propagará en un ángulo $\beta \gtrsim \pi/2$ relativo al borde, mientras que en la fractura por rasgado la fractura se propaga en un ángulo $\beta \lesssim \pi/2$. Esto es consistente con el hecho de que para el caso de empuje el borde se estira y libera energía por un incremento de su largo, mientras que en el caso de rasgado la liberación de energía ocurre por un decrecimiento del largo del pliegue en el cual el doblamiento es claramente dominante. Se define entonces convenientemente $\epsilon = \beta - \pi/2$, tal que $\epsilon > 0$ corresponde a una condición de empuje y una condición $\epsilon < 0$ a una de rasgado. Si se asume que $\epsilon = cte.$ (que es una aproximación valida [30]), la trayectoria de la fractura corresponde a la tanvoluta de una curva [55]. Una tanvoluta es una curva que corta las tangentes referenciadas a una curva en un ángulo constante. La involuta corresponde al caso particular cuando ese ángulo es igual a $\pi/2$.

En la figura 3.11(b) se tienen los arcos $\widehat{AA'}$ y $\widehat{BB'}$ cuyos largos respectivos son ds y $\tilde{R}d\tilde{\varphi} = R(\varphi - \alpha_n)d\varphi$. En el límite donde ds y $d\varphi$ son extremadamente pequeños, se puede pensar en el triángulo $B'AA'$ cuyos lados tienen largos $\overline{B'A} = \ell(\varphi) + R(\varphi - \alpha_n)d\varphi$, $\overline{AA'} = ds$, y

$\overline{A'B'} = \ell(\varphi + d\varphi)$. Para este triángulo se escribe la siguiente relación:

$$\frac{ds}{\ell(\varphi) + R(\varphi - \alpha_n)d\varphi} = \frac{\sin d\varphi}{\sin(d\varphi + \beta)}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\ell(\varphi + d\varphi)}{\ell(\varphi) + R(\varphi - \alpha_n)d\varphi} = \frac{\sin\beta}{\sin(d\varphi + \beta)}. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.5) se simplifica como

$$\frac{1}{R(\varphi)} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin\beta}{\ell(\varphi)}, \tag{3.7}$$

Mientras la ecuación (3.6)

$$\frac{d\ell(\varphi)}{d\varphi} = R(\varphi - \alpha_n) - \ell(\varphi)\cot\beta. \tag{3.8}$$

Finalmente reemplazando (3.7) y $\epsilon = \beta - \pi/2$ en (3.8), tenemos la ecuación (3.9) que corresponde a la generalización de la ecuación con retardo obtenida en (3.3)

$$\frac{d\ell(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\ell(\varphi - \alpha_n + \epsilon)}{\cos\epsilon} + \ell(\varphi)\tan\epsilon, \tag{3.9}$$

donde $\ell(\varphi)$ es el largo del borde. La ecuación (3.9) tiene soluciones exponenciales de la forma $\ell(\varphi) \sim e^{\sigma_\epsilon \varphi}$, con

$$\sigma_\epsilon = \frac{1}{\alpha_n - \epsilon} W\left(\frac{(\alpha_n - \epsilon)e^{-(\alpha_n - \epsilon)\tan\epsilon}}{\cos\epsilon}\right) + \tan\epsilon. \tag{3.10}$$

Es interesante notar que esta ecuación contiene el caso particular de la aproximación para un material inextensible, esto ocurre cuando $\epsilon = 0$. En esta expresión la función W es univaluada para $\alpha_n > \epsilon$ (se supone que $|\epsilon| \ll 1$). De acuerdo a (3.2), esto pasa para $n < 4$ en empuje y para $n < 5$ bajo condiciones de rasgado. De esta forma la propagación de una rama de cuatro espirales es posible en el caso del experimento de rasgado. En la figura 3.13 se compara el paso medido en las espirales bajo las dos diferentes configuraciones, $n = 1, 2, 3$ en el caso de empuje, y $n = 1, 2, 3, 4$ en el caso de rasgado con los valores que predice (3.10) para un n continuo. De esta forma se puede ver, que las espirales generadas por un proceso de empuje tiene un paso mas grande que las generadas por rasgado y las esperadas con el criterio de tela inextensible.

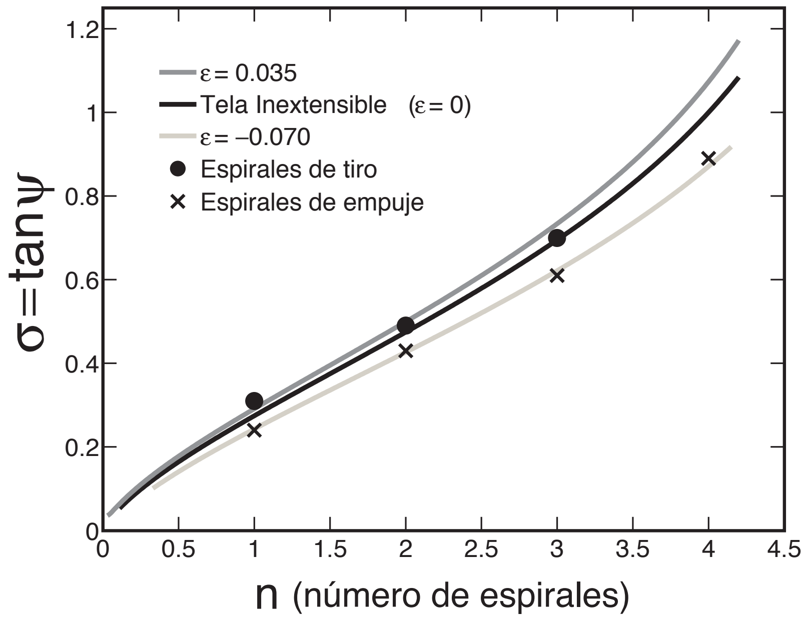


Figura 3.13: Valores experimentales del paso de las espirales obtenidas en rasgado y tiro y comparación con la predicción dada por la ecuación (3.10) para n continuo. Valores de ϵ corresponde a valores promedio de todos los experimentos realizados.

Queda por responder una última pregunta, por qué las fracturas que inicialmente eran radiales cambian de dirección hacia un comportamiento en forma de espiral? Para $n > 4$ se sabe que no es posible obtener propagación de fracturas en forma de espiral. Se probó que en tales casos la propagación radial coincide con el criterio de máxima tasa de liberación de energía (TMEL). Se considera inicialmente n grietas localizadas en los vértices de un polígono regular de n lados. El polígono es en efecto el borde de la envolvente convexa cuyos bordes son n líneas plegadas conectando las n fracturas. Se asume como el resultado de fuerzas radiales que las fisuras experimentan un pequeño desplazamiento ds que preserva la simetría rotacional de orden n. Definimos la dirección de propagación ϕ de cada fisura, relativa al bisector pasando a través del correspondiente vértice del polígono que tiene un ángulo interno de $2\phi_n = \pi(1 - 2/n)$. La ecuación para el trabajo del operador y la energía de fractura es la misma (3.1), en que ds y $d\rho$ ahora satisfacen la condición geométrica $d\rho = [\sin(\phi_n + \phi) + \sin(\phi_n - \phi)]ds/2$ válida para $\phi < \phi_n$. La minimización de $d\phi/ds$ da $\phi = 0$ por lo que la propagación es radial. En contraste, el mecanismo para el cual $n < 4$ las fisuras espontáneamente rompen la simetría rotacional de orden n y propagan a lo largo de espirales. Un análisis evaluando sobre cuál es la dirección preferente de propagación utilizando el criterio de máxima tasa de liberación de energía predice el comportamiento observado para cualquier n pero sólo localmente en el sentido que las funciones de tasa de energía liberada para propagaciones radiales y en forma de espiral tienen un máximo local en los ángulos observados. Por esta misma razón, el mecanismo por el cual la fractura selecciona un máximo en detrimento del otro es todavía una pregunta abierta.

3.4. Conclusiones

Hemos mostrado experimental y teóricamente la existencia de fracturas múltiples en una lámina delgada pueden propagarse a lo largo de trayectorias con forma de espirales logarítmicas divergentes. Cada fractura se apoya de manera recursiva en la línea de fractura que va dejando la fractura vecina. Las condiciones para la existencia de tales estructuras pueden ser establecidas gracias a la descripción de auto - involuta (una fisura) o involutas recursivas (varias fisuras). La descripción analítica de las involutas en forma intrínseca permite además determinar fácilmente la forma de las trayectorias espirales como la solución de una ecuación diferencial lineal con retardo espacial. Las soluciones de esta ecuación son, en efecto, exponenciales. El número máximo permitido de brazos espirales es 3, pero sí se incluyen los efectos elásticos, en el presente trabajo se encontró que el número de espirales puede aumentar a 4 en configuraciones de tiro. Se hace la observación de que, en principio, el número de brazos espirales puede crecer sin límite si $\beta \to 0$. El mecanismo exacto por el cual estas soluciones de multifracturas se estabilizan a lo largo de trayectorias con simetría rotacional discreta sigue siendo una pregunta abierta.

Capítulo 4

Conclusiones Generales y Trabajos Futuros

En esta tesis se han presentado dos ejemplos donde la propagación de dos o más fracturas en una lámina elástica frágil se acoplan a la elasticidad por medio de la geometría en configuraciones de desplazamientos fuertes fuera del plano.

En el primer experimento, el rasgado en simetría de peeling sin adhesión, se encontró que cuando la geometría del sistema es dominada por el trabajo del operador F, la estructura del pliegue obtenido depende sólo de la geometría de la tira (del ancho W y del espesor t), independiente de los efectos elásticos y gravitacionales presentes en nuestro problema. El resultado de este experimento representa la primera corroboración experimental del escalamiento utilizado por Witten para calcular la energía de crestas de estiramiento que aparecen en papeles arrugados.

En el caso del peeling sin adhesión el siguiente paso es estudiar que pasa cuando se permite propagación de las dos fracturas para la misma configuración estudiada. Debido a que se tiene completamente caracterizado el comportamiento del pliegue para diferentes cargas en diferentes regímenes podemos entender cuál es la tasa energía liberada por la cinta al momento de fracturarse y observar el exponente asociado a la reducción del ancho de la cinta en función del avance de la fractura.

En el segundo experimento a través del concepto de involutas recursivas entre fracturas interactuantes y usando la aproximación de tela inextensible se logró generar un modelo que predice el paso de una espiral y que al mismo tiempo indica la cantidad máxima de brazos espirales que pueden propagarse. Este resultado es interesante, porque al parecer el único parámetro relevante que se puede modificar es la forma en que preparamos la muestra para saber cuántas espirales deseamos observar. Bajo estas condiciones, debido a las restricciones de la involuta, no es posible generar mas de 4 espirales brazos. Al mismo tiempo se sabe que la elasticidad puede modificar la trayectoria de una fractura que en este caso se traduce en un cambio en el paso de la espiral (y al mismo tiempo un cambio en el ángulo de propagación β) , si el β es lo suficientemente pequeño se puede generar, en teoría, un número infinito de espirales. Un experimento que puede ser estudiado es utilizar diferentes materiales y repetir el procedimiento con el objeto de encontrar una relación entre β y las propiedades mecánicas del material.

Una aplicación práctica de este tipo de problemas está asociado a la industria del embajale y empaquetamiento. Romero patentó su configuración de rasgado a lo largo de una trayectoria de espiral para aplicaciones en apertura de envases. Se podría entonces analizar la eficiencia del rasgado múltiple reportado en los resultados presentados ya que el sistema genera trayectorias divergentes que crecen exponencialmente, lo que significa una mayor área recorrida en menor tiempo, y una fuerza acotada a valores de $F \sim \gamma t$ que resulta pequeña debido al espesor de las láminas.

Bibliografía

[1] S. Timoshenko, *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, McGraw - Hill, 1953.

[2] M. Romero García, P. Museros, M. D. Martínez, A. Poy, *Resistencia de Materiales*, Universitat Jaume I, 2002.

[3] Paul G. Hewwit, *Física Conceptual*, Addison-Wesley Iberoamericana S. A., California, 1995.

[4] T. Bourbie, O. Coussy, B. Zinszner, *Acoustic of porous media*, Gulf publishing company, Bookbib division, Houston, Texas, 1987.

[5] L. Landau, E. Lifshitz,*Theory of Elasticity*, Mir, 1967.

[6] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 1927.

[7] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Second Edition, 1961.

[8] M. J. Buehler, S. Keten, *Colloquium: Failure of molecules, bones, and the Earth itself*, Rev. Mod. Phys. 82, 1459, 2010.

[9] J. Astrom, J. Timonen, *Fracture of a brittle membrane*, Phys Rev Lett 79:3684-3687, 1997.

[10] J. Weiss, *Scaling of fracture and faulting of ice on earth*, Surv. Geophys., 24:185-227, 2003.

[11] D. Vella, J. S. Wettlaufer, *Finger Rafting: A Generic Instability of Floating Elastic Sheets*, Phys. Rev. Lett, 98(8), 088303, 2007.

[12] E. Eberhardt, D. Stead, B. Stimpson, *Quantifying progressive pre-peak brittle fracture damage in rock during uniaxial compression*, Int. J. Rock Mech. and Min. Sci., 36:361-380, 1999.

[13] J.L. Arana, J.J. González, *Mecánica de Fractura*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 2002.

[14] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, Second Edition, CRC Press, 1994.

[15] F. Erdogan, G. Sih, *On Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear*, Journal of Basic Engineering 85, 519, 1963.

[16] T. A. Witten, H. Li, *Asymptotic shape of a fullerene ball*, Europhys. Lett 23:51-55, 1993.

[17] J. Huang, M. Juszkiewicz, W. H. de Jeu, E. Cerda, T. Emrick, N. Menon, T. P. Russell, *Capillary wrinkling of floating thin polymer films*, Science, 317:650-653, 2007.

[18] E. Cerda, L. Mahadevan, *Geometry and physics of wrinkling*, Physical Review Letters, 90, 074302, 2003.

[19] E. Cerda, *Mechanics of scars*, Journal of Biomechanics, 38(8):1598-1603, 2005.

[20] B. Roman, *Fracture path in the brittle thin sheets: a unifying review on tearing*, International Journal of Fracture Volume 182(2):209-237, 2013.

[21] E. Hamm, P.Reis, M. Leblanc, B.Roman, E.Cerda, *Tearing as a test for mechanical characterization of thin adhesive films*, Nat.Mat., 7:386-390, 2008.

[22] A. Monsalve, I. Gutierrez , *Application of a modified rigid plastic model to the out-plane fracture of easy open and cans*, International Journal of Fracture 102:323-339, 2000.

[23] E. Katzav, M. Abba-Bedia, R. Arias, *Theory of dynamic branching in brittle materials*, Int. J. Fract. 143, 245, 2007.

[24] B. Cotterell, J. Rice, *Sligthy curved of kinked cracks*, Int. J. Fract 16(2):155-169, 1980.

[25] B. Audoly, P.M. Reis, B. Roman, *Cracks in thin sheets: When geometry rules the fracture path*, Phys. Rev. Lett. 95, 025502, 2005.

[26] R. O'Keefe,*Modeling the tearing of paper*, Am. J. Phys. 62(4): 299-305, 1994.

[27] A. Atkins,*Opposite paths in the tearing of sheet materials*, Endeavour 19(1):2-10, 1995.

[28] O. Kruglova, F. Brau, D. Villers, P. Damman, *How Geometry Controls the Tearing of Adhesive thin films on curved surfaces*, Phys. Rev. Lett. 107, 164303, 2011.

[29] T. Wierzbicki, K. A. Trauth, A. G. Atkins, *On diverging concertina tearing*, J. Appl. Mech 28:78-82, 1998.

[30] V. Romero, B. Roman, E. Hamm, E. Cerda, *Spiral tearing of thin films*, Soft Matter, 9:8282-8288, 2013.

[31] A. Ghatak, L. Mahadevan, *Crack Street; The Cycloidal Wake of a Cylinder Tearing through a thin sheet*, Phys. Rev. Lett. 91, 215507, 2003.

[32] E. Bayart, A. Boudaoud, M. Adda-Beddia, *Finite-Distance Singularities in the Tearing of Thin Sheets*, Phys. Rev. Lett. 106, 194301, 2011.

[33] C. Xiaa, J. W. Hutchinson, *Crack patterns in thin films*, J. Mech. Phys. Solids 48, 1107, 2000.

[34] N. Sendova, K. Willis, *Spiral and curved periodic crack pat- terns in sol-gel films*. Appl. Phys. A Mater. Sci. Process 76, 957-959, 2003.

[35] V. Romero, *Spiraling cracks in thin sheets*, Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, University of Santiago and University Pierre et Marie Curie, 2010.

[36] Y. Cohen, I. Procaccia, *Dynamics of cracks in torn thin sheets*, Phys. Rev. E 81, 066103, 2010.

[37] A. G. Atkins. *The tear length test as an indicator of anisotropy in sheet materials*, Proc. 10^{th} Cong. on Material Testing (Scientific Society of Mech. Engineers, Budapest), 595, 1991.

[38] E. Bayart, A. Boudaoud, M. Adda-Beddia, *On the tearing of thin sheets*, Eng. Frac. Mech, 77:1849-1856, 2010.

[39] F. Brau, *Tearing of thin sheets: Cracks interacting through an elastic ridge*, Phys. Rev. E, 90, 062406, 2014.

[40] A. E. Lobkosvky, T. A. Witten, *Properties of ridges in elastic membrans*, Phys. Rev. E 55, 1577, 1997.

[41] T. A. Witten, *Spontaneous Free - Boundary Structure in Crumpled Membranes*, J. Phys. Chem. B 113, 3740, 2009.

[42] O. Albarrán, *Deformación de pliegues asociados al rasgado de láminas no adheridas*, Trabajo de Titulación para optar al título de Ingeniero Físico, Universidad de Santiago, 2009.

[43] T. A. Witten, *Stress focusing in elastic sheets*, Rev. Mod. Phys. 79, 643, 2007.

[44] A. E. Lobkovsky, S. Gentes, H. Li, D. Morse, T. A. Witten, Stretching ridges in crumpled sheets, Science 270, 1482, 1995.

[45] A. E. Lobkovsky, *Boundary layer Analysis of the Ridge Singularity in a thin plate*, Phys. Rev. E 53, 3750, 1996.

[46] T. Tallinen, J. A. Astrom, J. Timonen, *The effect of plasticity in crumpling of thin sheets*, 8, 25, 2009.

[47] A. P. Korte, E. L. Starostin, G. H. M. van der Heijden, *Triangular buckling patterns of twisted inextensible strips*, Proc. Roy. Soc. A 467, 285, 2011.

[48] J. Chopin, A. Kudroli, *Helicoids, wrinkles, and loops in twisted ribbons*, Phys. Rev. Lett. 111, 174301, 2013.

[49] E. Cerda, L. Mahadevan, *Confined developable elastic surfaces: cylinders, cones and the Elastica*, Proc. R. Soc. A 461, 671, 2004.

[50] B. Roman, J.Bico, *Elasto-capillarity: deforming an elastic structure with a liquid droplet*, J. Phys. Condens. Matter 22(49), 493101, 2010.

[51] J. Locke, J. A. Unikowski, *Transfer and persistence of glass fragments on garments*, Forensic Sci. Int. 51,251, 1991.

[52] R. Vermorel, N. Vandenberghe, E. Villermaux, *Radial Cracks in Perforated Thin Sheets*, Phys. Rev. Lett. 104, 175502, 2010.

[53] R. Vermorel, *Elasticité et fragmentation solide*, These pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Provence, Aix-Marseille I, 2009.

[54] A. Takei, B. Roman, J. Bico, E. Hamm, F. Melo, *Forbidden directions for the fracture of thin anisotropic sheets*, Phys. Rev. Lett. 110, 144301, 2013.

[55] T. M. Apostol, M. A. Mnatsakanian, J. Hone, Science (New York, NY) 321, 385, 2008.