

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIA**  
**Departamento de Física**



**Análisis asintótico para la propagación de campos en métricas de  
espacio-tiempo con simetría cilíndrica**

**Autor**  
**Marco Rosales Vera**

**Profesor Guía: Dr. Fernando Méndez**

**Tesis para optar al grado académico de**  
**Magister en Ciencia con mención en Física**

**Santiago – Chile**

**2021**

## RESUMEN

Soluciones de las Ecuaciones de Einstein para distribuciones de energía-impulso con simetría axial, han sido ampliamente estudiadas en el pasado en diversos contextos. Por ejemplo, en el estudio de cuerdas cósmicas, la solución encontrada por Vilenkin [5,6], o bien la familia de soluciones encontradas por Safko y Witten [10], para la métrica en presencia de un campo magnético confinado en un cilindro infinitamente largo de paredes masivas. En ambos casos, se verifica un déficit angular que tiene efecto en, por ejemplo, la propagación de partículas de pruebas en estos espacios.

El estudio de las geodésicas de estos espacios, así como la propagación de campos bosónicos y fermiónicos y, en algunos casos, la cuantización de campos en estos fondos curvos, ha sido motivo de un amplio estudio cuyos resultados se encuentran profusamente en la literatura especializada. Usualmente, estos trabajos presentan las soluciones exactas para la dinámica de campos en algunas configuraciones particulares de materia-energía. Dichas soluciones son, usualmente, series que convergen lentamente para valores pequeños del déficit angular y, con el fin de estudiar posibles señales fenomenológicas (fenómenos de interferencia o efectos de lentes gravitacionales, por mencionar algunos) las expresiones asintóticas de las soluciones exactas son utilizadas por la mayoría de los autores. Sin embargo, para configuraciones menos simétricas (y tal vez más realistas) conviene resolver estos problemas directamente con métodos asintóticos sin necesidad de conocer la solución exacta.

Ante esto, en la presente tesis se estudia la propagación de campos en estas métricas, ocupando el método de “Matching asintótico” en el cual, justamente, el detalle de la solución exacta no es necesario. Como *prueba de concepto* se estudia en primer lugar la aplicación del método para el caso conocido de cuerdas cósmicas resuelto por Suyama *et al.* [14], donde las soluciones exactas son conocidas. En una etapa posterior, se extiende este método al problema de estructuras de diámetro finito como las consideradas en Safko-Witten [11].

## **Agradecimientos:**

En primer lugar, quiero agradecer a mi director el Dr. Fernando Méndez, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él en esta hermosa línea de investigación que es la Relatividad General, además de todas sus enseñanzas, motivación y ayuda a la hora de preparar este documento. Por supuesto, también agradecer a la comisión por la revisión y comentarios para mejorar esta Tesis.

También quiero agradecer a mi familia, que todos estos años me ha apoyado en mi trabajo de investigador.

## Indice

1. Introducción.....	5
2. Formulación del problema.....	8
3. Descripción asintótica de la propagación de campos escalares en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica.....	16
4. Descripción asintótica de la propagación de campos escalares en el espacio tiempo de una cuerda cósmica de diámetro finito e impenetrable.....	28
5. Scattering de un escalar masivo por un cilindro en la Métrica de Safko-Witten.....	49
6. Conclusiones.....	67
7. Referencias.....	68

## Lista de Figuras

2.1. Comparación entre la solución asintótica y solución exacta.....	8
2.2 Comparación entre la solución asintótica (10) y la solución exacta dada por la ecuación (6) para la función $ \Phi(\rho,\theta) $ . ....	9
2.3 Interpretación geométrica de la propagación de un campo.....	9
3.1 Esquema de propagación de ondas paralela a una cuña.....	18
4.1 Esquema de difracción de ondas por un cilindro impenetrable.....	31
4.2 Esquema de difracción de ondas por un cilindro impenetrable en un espacio cónico.....	36
4.3 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 20$ , $\epsilon = 0.03$ y $\rho = 100$ . ....	38
4.4 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 30$ , $\epsilon = 0.03$ y $\rho = 100$ . ....	39
4.5 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 40$ , $\epsilon = 0.03$ y $\rho = 100$ . ....	39
4.6 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 20$ , $\epsilon = 0.01$ y $\rho = 100$ . ....	40
4.7 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 30$ , $\epsilon = 0.01$ y $\rho = 100$ . ....	40
4.8 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 40$ , $\epsilon = 0.01$ y $\rho = 100$ . ....	41
4.9 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 40$ , $\epsilon = 0.05$ y $\rho = 100$ . ....	41
4.10 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros $ka = 40$ , $\epsilon = 0.001$ y $\rho = 100$ . ....	42
5.1 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros: $\epsilon = \kappa a = 0.2$ , $k_i = 10$ y $\rho = 100$ .....	63
5.2 Distribución angular de $ \Phi(\rho,\theta) $ con parámetros: $\epsilon = \kappa a = 20$ , $k_i = 10$ y $\rho = 100$ .....	64

# Capítulo 1

## 1. Introducción

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de Einstein con simetría cilíndrica ha atraído considerable interés más allá de una cuestión puramente académica. Ya en 1919 Levi Civita reportó una clase de soluciones (en el vacío) con dicha simetría [1] y, en 1937 Einstein y Rosen [2], en su trabajo sobre ondas gravitacionales, incluyeron una discusión sobre éstas, para el caso de simetría cilíndrica [3].

El interés por este tipo de soluciones recobró fuerzas con la introducción de la idea de *cuerdas cósmicas* [4][5][6][7], las que pudieron haberse formado en las transiciones de fase de ruptura de simetría en el universo temprano – aunque los últimos datos provenientes del estudio del CMB [8] no favorece este escenario para la formación de tales estructuras. Aún así, las predicciones de teoría de cuerdas [9] sobre la existencia de *súper cuerdas cósmicas* [10] y su potencial impacto en el espectro de ondas gravitacionales, han mantenido vigente el interés por este tipo de soluciones.

Otro tipo de problemas con simetría cilíndrica que son de interés en esta tesis dice relación con las soluciones de particulares distribuciones de masa-energía. Por ejemplo, la familia de soluciones encontradas por Safko y Witten [11] para la métrica en presencia de un campo magnético confinado en un cilindro infinitamente largo de paredes masivas. Este caso es interesante para el estudio, por ejemplo, del efecto Aharonov-Bohm en el caso gravitacional [12].

Desde el punto de vista fenomenológico, un problema que despierta interés es el de la propagación de partículas y campos en este tipo de métricas. El cálculo de la sección eficaz para problemas de dispersión (scattering) así como el estudio de los patrones de interferencia y difracción, son ejemplos de procesos que permiten extraer información de las fuentes que producen esos efectos y, por tanto, su estudio es de particular importancia.

El problema de la propagación de una onda plana incidente en el espacio-tiempo deformado por una cuerda cósmica fue estudiado por Linet [13], en tanto Suyama *et al.* [14] encuentran las soluciones exactas de la ecuación de Klein-Gordon para partículas sin masa en un espacio-tiempo en el que reside una cuerda cósmica recta infinita. En general, la propagación de ondas en un espacio tiempo cónico (debido a la presencia de una cuerda cósmica o defectos topológicos similares) pueden tratarse de manera efectiva en el marco del problema de difracción en el semiplano de Sommerfeld [15][16][17] como ha sido mostrado en [18] donde, además, se muestra que una cuerda cósmica puede identificarse a través del patrón de difracción característico en el espectro de energía de la señal observada. En esta misma línea de investigación, Umul [19] estudia la propagación de la onda en el espacio-tiempo cónico en el marco del fenómeno de difracción por una cuña con un ángulo interno, que equivale al doble del ángulo de déficit.

Como se mencionó ya, otro tipo de soluciones que serán de interés en esta investigación, corresponde a aquellas que describen distribuciones de masa con simetría cilíndrica y que admiten campos electromagnéticos. Esto es, soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con simetría cilíndrica, en el caso de campos gravitatorios estáticos [20]. Las métricas consideradas en estos trabajos describen tubos de materia con diferentes configuraciones de campos magnéticos internos y externos (incluyendo distribuciones con campos internos solamente, o sólo externos).

Al igual que en el caso de cuerdas cósmicas, el problema de scattering en estas métricas ha sido investigado por diversos autores. Partículas escalares y de spin  $\frac{1}{2}$  propagándose en un espacio-tiempo que describe un tubo de flujo magnético confinado ha sido estudiado en [21] en el contexto del problema Aharonv-Bohm gravitacional, en tanto que el caso cuántico ha sido estudiado en [22], siempre para el flujo confinado de campo magnético.

Con todo, y hasta nuestro conocimiento, el estudio de campos electromagnéticos propagándose en tales métricas no ha sido abordado con el mismo detalle que los campos antes mencionados. Es interesante, en este contexto, el estudio de, por ejemplo, la dependencia de los patrones de interferencia y difracción y las secciones eficaces, en la polarización de la señal de entrada. El estudio de estos sistemas será uno de los objetivos generales de la presente tesis.

También, como ya lo mencionamos, los estudios que hemos revisado se centran en la obtención de soluciones exactas cuyo significado físico es estudiado en algún límite perturbativo. Esto sugiere estudiar directamente las ecuaciones de movimiento de forma perturbativa evitando, por tanto, el encontrar las soluciones exactas del problema, sino sólo la solución perturbativa que, a fin de cuentas, será la que se utilizará para extraer información en, por ejemplo, un problema de scattering. Este enfoque tiene, además, otra ventaja que es la de modificar (siempre en el enfoque perturbativo) la métrica de fondo del problema de suerte que el centro de interacción (un cilindro infinito de radio nulo, por ejemplo) sea más real (un cilindro de radio finito, por ejemplo).

En este contexto, nuestra tesis sostiene que el enfoque descrito en el párrafo anterior es posible y para ello conviene utilizar el método llamado *matching asintótico*. Para validar nuestra afirmación utilizaremos este método en el estudio de la propagación de ondas escalares en una métrica con simetría cilíndrica y mostraremos que los resultados obtenidos usando matching asintótico son equivalentes a los resultados exactos, apropiadamente perturbados.

Aplicaremos, entonces, este enfoque, a la propagación de campos escalares en un fondo con simetría cilíndrica y estudiaremos también posibles modificaciones de las métricas background de manera que representen sistemas más reales para los cuales no se conocen soluciones exactas.

## **1.1 Objetivos.**

La presente Tesis tiene dos objetivos generales, los que se detallan a continuación, junto con los objetivos específicos asociados a cada uno de ellos.

### **A. Objetivo General 1:**

Estudiar la aplicación del método de matching asintótico para campos en un fondo curvo con simetría cilíndrica.

A1: Examinar el caso del campo escalar en un fondo tipo cuerda y contrastar los resultados con los resultados ya conocidos.

A2: Estudiar la propagación de campos escalares en un fondo tipo cuerda cósmica utilizando el método de matching para incluir el diámetro finito de la cuerda.

### **B. Objetivo General 2:**

Estudiar la propagación de campos en un fondo curvo tipo Safko-Witten (Einstein-Maxwell) utilizando el método de Matching Asintótico.

B1: Estudiar la propagación de campos escalares y contrastar los resultados con los reportados en la literatura para este tipo de campos.



## Capítulo 2

### 2. Formulación del problema.

La forma general de una métrica con simetría cilíndrica puede ser expresada de la forma [3]:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} d\rho^2 + e^{2\psi} d\theta^2 + e^{2\lambda} dz^2, \quad (2.1)$$

donde  $\nu, \psi$  y  $\lambda$  son funciones que dependen sólo de  $\rho$ . El rango de coordenadas para estos espacios es  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Para fijar ideas, consideremos una cuerda infinitamente larga y delgada (de radio interno despreciable comparado con cualquier otra escala de longitud). En este caso, la métrica del espacio tiempo está dada por [5]

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + (1 - \Delta)^2 \rho^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (2.2)$$

donde  $2\pi\Delta = 8\pi G\mu$  es el déficit angular alrededor de la cuerda cósmica siendo  $G$  la constante de Newton y  $\mu$ , la densidad de masa de la cuerda.

Consideremos ahora un campo escalar sin masa  $\varphi$ , por simplicidad, propagándose en esta métrica de fondo. La ecuación de movimiento resulta ser a la ecuación de Klein Gordon sin masa en un fondo curvo, a saber

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}) = 0, \quad (2.3)$$

donde  $g_{ij}$  es la métrica del espacio tiempo con  $\{i, j\} \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $g^{ik}$  es la métrica inversa y  $g$ , el determinante de la métrica. Esta ecuación, en el background (2.1) resulta<sup>1</sup>

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(1 - \Delta)^2 \rho^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup> Usamos siempre el sistema natural de unidades con  $c=1$ .

Esta ecuación, dada la simetría, se puede resolver mediante la acostumbrada factorización por separación de variables, a saber  $\varphi(\rho, \theta, t) = \Phi(\rho, \theta)e^{-i\omega t}$ , con  $\omega$  una frecuencia. Reemplazando esta expresión en (2.4), se obtiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(1-\Delta)\rho^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + k^2 \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Nuevamente esta ecuación admite una solución por separación de variables de manera que, finalmente, la solución exacta del problema queda dada por [13]:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \cos n\theta, \quad (2.6)$$

donde  $J_p(k\rho)$  es la función de Bessel de orden  $p$  y  $\varepsilon_n$  está definido como  $\varepsilon_0 = 1$  y  $\varepsilon_n = 2$  ( $n \geq 1$ ).

Si bien esta es una expresión exacta para la propagación de un campo escalar en el espacio tiempo de una cuerda cósmica infinitamente delgada, debido a la forma en series de la solución, la interpretación física de esta solución no es fácil. También hay que destacar que para valores pequeños de  $\Delta$ , la serie converge muy lentamente.

Entonces, realizando un análisis asintótico de la solución exacta (2.6), Suyama *et al.* [14] encuentran las siguientes aproximaciones para grandes distancias

$$\begin{aligned} \Phi_{k\rho \gg 1}(\rho, \theta = 0) \\ \approx 2 \left[ e^{ik\rho \cos(\epsilon)} - e^{ik\rho} \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2}(-1+i)\Delta \sqrt{k\rho} \right) \right] \exp \left( -\frac{1}{2}i \Delta^2 k\rho \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

lo que conduce a

$$|\Phi| = 2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\pi \Delta \sqrt{k\rho}} \cos \left( \frac{(\pi \Delta)^2 k\rho}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.8)$$

en este límite, para  $\theta = 0$ .

La Figura 2.1 muestra la comparación entre la solución asintótica (2.8) y la solución exacta dada por la ecuación (2.6) para la función  $|\Phi(\rho, \theta = 0)|$ , se puede ver que la aproximación funciona bastante bien para valores grandes del parámetro adimensional  $\xi = k\rho$  ( $\xi > 500$  en el presente caso).

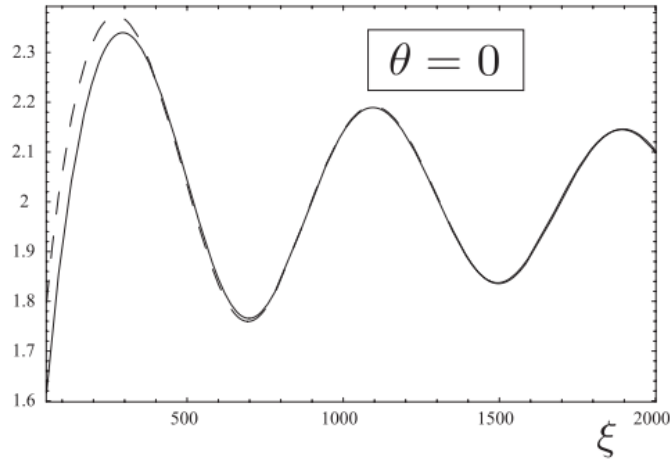


Figura 2.1. Comparación entre la solución asintótica (2.8) (línea segmentada) y la solución exacta dada por la ecuación (2.6) (línea continua) para la función  $|\Phi(\rho, \vartheta=0)|$  (Figura de referencia [13]).

Los mismos autores también muestran que para distancias muy grandes, el campo puede aproximarse por la siguiente expresión:

$$\Phi \approx e^{ik\rho \cos(\theta-\pi\Delta)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\pi\Delta)} \quad (2.9)$$

Lo que conduce a:

$$|\Phi| \approx 2 \cos(\pi\Delta k\rho\theta) \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) representa el clásico diagrama de difracción e interferencia producido por dos rendijas puntuales. La Figura 2.2 (de la referencia [17]) muestra la comparación entre la solución asintótica (2.10) y la solución exacta dada por la ecuación (2.6) para la función  $|\Phi(\rho, \theta)|$ , se puede ver que la aproximación funciona bastante bien y muestra claramente la aparición del fenómeno de interferencia y difracción.

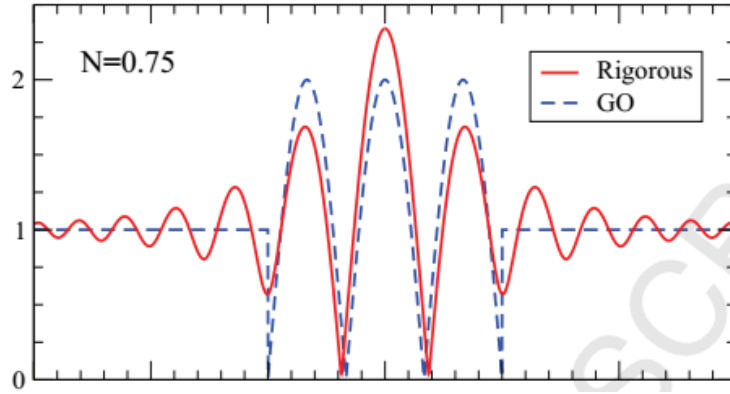


Figura 2.2. Comparación entre la solución asintótica (10) y la solución exacta dada por la ecuación (6) para la función  $|\Phi(\rho, \theta)|$ . (Figura de referencia [17])

Estos resultados muestran la presencia del fenómeno de difracción en la propagación del campo escalar en esta métrica. De hecho, se puede demostrar [17] que el problema antes examinado es equivalente a la difracción de luz por una cuña perfectamente conductora (Ver Fig. 2.3).

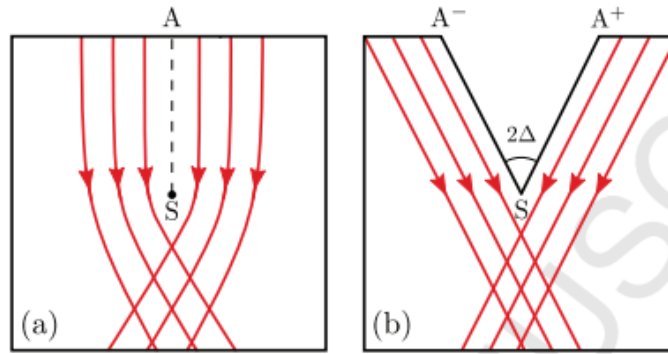


Figura 2.3. Interpretación geométrica de la propagación de un campo escalar en la métrica de una cuerda cómica (Figura de referencia [18])

La tesis que motiva nuestro trabajo, en este caso particular, afirma que el análisis asintótico antes descrito, puede ser encontrado sin necesidad de conocer la solución exacta del problema, utilizando métodos asintóticos. Por ejemplo, mediante el método llamado “Matched Asymptotic Expansions”. Actualmente, y a modo de *prueba de concepto*, hemos logrado mostrar que los límites anteriores pueden ser reproducidos usando dicho método.

Lo anterior hace pensar que un buen laboratorio para aplicar estos métodos, son los problemas donde el background es más complejo, como por ejemplo el caso de una cuerda cósmica con estructura interna [6] y métricas como la de Safko – Witten [11].

Para finalizar, permítasenos presentar cómo funciona este método de *matching* asintótico, con un ejemplo.

### **Método de Matching asintótico.**

El método de Matching asintótico es un método de perturbaciones que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales. Por lo general el dominio es dividido en dos regiones donde se resuelven las ecuaciones aproximadas en cada dominio. Puesto que cada solución es válida solamente en el dominio en que se resolvió, se asume que existe una región intermedia donde ambas soluciones son válidas y por ende deben solaparse, es decir debe haber un *matching*, de esta forma es posible relacionar las constantes asociadas a cada solución. Como ejemplo, se presenta el problema del scattering de Rutherford para altas energías ocupando este método.

Consideremos la ecuación de Schrodinger para una partícula de masa  $m$  en un campo Coulombiano con constante de acoplo  $\alpha$

$$\nabla^2 \psi + \left( k^2 - \frac{\beta}{r} \right) \psi = 0, \quad (2.11)$$

con  $\beta = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$  y  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , siendo  $E$  la energía de la partícula. Si se asume que la onda incidente proviene desde la dirección  $z$ , es bien conocido que la solución de (2.11) puede ser escrita en la forma:  $\psi = e^{ikz} F(r - z)$  donde la función  $F$  satisface

$$\eta F'' + (1 - ik\eta) F' - \frac{1}{2} \beta F = 0, \quad (2.12)$$

donde  $\eta = r - z$ . Haciendo el cambio de variable  $\xi = k\eta$ , la ecuación (2.12) es transformada en

$$\xi F'' + (1 - i\xi) F' - \epsilon F = 0, \quad (2.13)$$

con  $\epsilon = \frac{m\alpha}{\hbar k}$ , el parámetro adimensional que se usará en la expansión asintótica y que se asume pequeño.

Ahora bien, en las regiones en las que  $\xi \sim O(1)$  (*región interna*), se puede asumir que la solución de (2.13) está dada por una serie de potencias en  $\epsilon$ , es decir:  $F(\xi) = F_0(\xi) + \epsilon F_1(\xi) + \dots$ , se verifica que las ecuaciones siguientes son equivalentes a (2.13), a cada orden en  $\epsilon$

$$\xi F_0'' + (1 - i\xi)F_0' = 0, \quad (2.14)$$

$$\xi F_1'' + (1 - i\xi)F_1' = F_0, \quad (2.15)$$

La solución de (2.14) se puede encontrar por simple integración

$$F_0(\xi) = c_1 + c_2 Ei(i\xi) \quad (2.16)$$

Donde  $Ei(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!} + \ln(z) + \gamma$  es la integral exponencial.

Como la función de onda  $\psi$  debe ser finita en  $\xi = 0$ , debe ser  $c_2 = 0$  en (2.16) y por lo tanto la ecuación (2.15) es

$$\xi F_1'' + (1 - i\xi)F_1' = c_1 \quad (2.17)$$

cuya solución es

$$F_1(\xi) = c_1' + c_2' Ei(i\xi) + ic_1 \ln(\xi). \quad (2.18)$$

Nuevamente, la condición de regularidad en el origen imponen  $c_2' = -ic_1$ , con lo cual

$$F_1(\xi) = c_1' + ic_1 (\ln \xi - Ei(i\xi)). \quad (2.19)$$

Finalmente se tiene la siguiente expresión para  $F(\xi)$ :

$$F(\xi) = c_1 + \epsilon \left( c_1' + ic_1 (\ln \xi - Ei(i\xi)) \right) + \dots \quad (2.20)$$

Consideremos ahora las soluciones de (2.13) para grandes valor de  $\xi$ , esto es  $\xi \gg 1$  o *región externa*). Para esto podemos suponer una solución de la forma  $F = e^{S(\xi)}$  y resolver la ecuación diferencial para  $S(\xi)$  donde se asume que  $S'' \ll S^2$ , lo que se puede verificar a posteriori. Esto conduce a la siguiente ecuación diferencial para  $S(\xi)$

$$S'^2 + S' \left( \frac{1}{\xi} - i \right) - \frac{\epsilon}{\xi} = 0 \quad (2.21)$$

Resolviendo esta ecuación (con  $\xi \gg 1$ ) se tienen dos posibles soluciones linealmente independientes para  $S$ , esto es:

$$S(\xi) = \begin{cases} -(1 + i\epsilon) \ln \xi + i\xi, \\ i\epsilon \ln \xi, \end{cases} \quad (2.22)$$

de manera que la solución  $F(\xi)$  (en el campo lejano) se lee

$$F(\xi) = \bar{c}_1 \frac{e^{i\xi}}{\xi} \xi^{-i\epsilon} + \bar{c}_2 \xi^{i\epsilon} \quad (2.23)$$

con  $\bar{c}_1$  y  $\bar{c}_2$  constantes. Éstas se encuentran imponiendo el *matching* con la solución (2.10) en la región interna.

Para esto se asume que existe una región intermedia para la coordenada  $\xi$  donde ambas soluciones son válidas. Esta región está definida por  $1 \ll \xi \ll 1/\epsilon$ .

Entonces, la solución (2.10) para grandes valores de  $\xi$  toma la forma

$$F(\xi) \sim c_1 + \epsilon \left( c'_1 + ic_1 \left( \ln \xi - \frac{e^{i\xi}}{(i\xi)} - i\pi \right) \right) + \dots \quad (2.24)$$

Por otro lado, la solución (2.23) toma la siguiente forma para valores grandes de  $\xi$  pero mucho menores que  $1/\epsilon$

$$F(\xi) = \bar{c}_1 \frac{e^{i\xi}}{\xi} (1 - i\epsilon \ln \xi) + \bar{c}_2 (1 + i\epsilon \ln \xi) \quad (2.25)$$

La condición de matching impone  $c_1 = \bar{c}_2$  y  $\bar{c}_1 = -\epsilon c_1$ , con lo se obtiene la siguiente expresión para  $F$  en el campo lejano

$$F(\xi) = c_1 \left( \xi^{i\epsilon} - \epsilon \frac{e^{i\xi}}{\xi} \xi^{-i\epsilon} \right) \quad (2.26)$$

Finalmente, la función de onda (en coordenadas esféricas) es

$$\psi = e^{i(kz + \epsilon \ln k(r-z))} - \frac{\epsilon}{k(1 - \cos \theta)} \frac{1}{r} e^{i(kr - \epsilon \ln k(r-z))} \quad (2.27)$$

Donde se ha escogido  $c_1 = 1$  para recuperar la solución  $e^{ikz}$  de la onda incidente. Esta solución permite identificar la amplitud de scattering  $f(\theta)$  como sigue

$$f(\theta) = -\frac{\epsilon}{2k \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\epsilon \ln\left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \quad (2.28)$$

Si comparamos con la expresión exacta [22]  $f(\theta) = \frac{\Gamma(1+i\epsilon)}{i\Gamma(-i\epsilon)} \frac{1}{2k \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\epsilon \ln\left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$ , vemos que ambas coinciden en el límite  $\epsilon = \frac{m\alpha}{\hbar k} \ll 1$ . Cabe mencionar que ambas soluciones entregan la misma sección eficaz.



## Capítulo 3

### 3. Descripción asintótica de la propagación de campos escalares en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica

En este capítulo se estudiará la propagación de ondas en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica delgada mediante el método de Matching asintótico.

Como un primer paso para entender la fenomenología, se analizará las trayectorias geodésicas en la métrica producida por una cuerda cósmica de espesor despreciable. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, esta métrica está dada por [2]:

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + (1 - \Delta)^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (3.1)$$

donde  $(\rho, \phi, z)$  son las coordenadas cilíndricas ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) y  $2\pi\Delta \approx 8\pi G\mu$  es el déficit angular en torno de la cuerda cósmica.

#### 3.1 Geodésicas

Para el entendimiento del efecto sobre la trayectoria de un fotón que se mueve en el espacio tiempo de una cuerda cósmica, estudiaremos las curvas geodésicas de un fotón en esa métrica.

Las ecuaciones correspondientes a las geodésicas están dada por:

$$\begin{aligned} t'' &= 0 \\ \theta'' + \frac{2}{r} \theta' r' &= 0 \\ r'' - (1 - \Delta)^2 r \theta'^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las primas denotan la derivada respecto del parámetro afín  $\lambda$ . Las soluciones de estas ecuaciones están dadas por:

$$t = u\lambda + t_0$$

$$\tan((1 - \Delta)\theta - \theta_0) = \frac{\lambda}{D}$$

$$r^2 = \lambda^2 + D^2$$

(3.3)

Donde  $u, t_0, \theta_0$  y  $D$  son constantes de integración. Escogiendo un sistema coordenado tal que el fotón incidente proviene desde la dirección  $x$  y por la izquierda, se tiene que las condiciones iniciales están dadas por:

$$(1 - \Delta)(-\pi) - \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Con lo que se obtiene:  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2} + \Delta\pi$ . La ecuación de la trayectoria está dada por:

$$\tan((1 - \Delta)\theta - \theta_0) = \frac{\lambda}{D}$$

$$r^2 = \lambda^2 + D^2$$

Cuando el fotón ya ha pasado por la región cercana a la cuerda cósmica y se aleja de ésta, el ángulo de deflexión estará dado por:

$$(1 - \Delta)\theta_\infty - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

(3.4)

Con lo que se obtiene el siguiente valor para el ángulo de deflexión:  $\theta_\infty = \frac{\Delta\pi}{1-\Delta}$ . Este resultado muestra que el efecto de la cuerda cósmica sobre las trayectorias geodésicas es el de desviar los fotones en un ángulo  $\theta_\infty = \frac{\Delta\pi}{1-\Delta}$  respecto de la dirección incidente. Como veremos en la siguiente sección, este efecto también ocurre para la propagación de campos en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica.

### 3.2 Ecuación de ondas

La ecuación de ondas para un campo escalar en una métrica arbitraria es equivalente a la ecuación de Klein Gordon considerando la masa de la partícula igual a cero, esto es:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}) = 0. \quad (3.5)$$

Considerando la métrica (3.1) y reemplazando en la ecuación anterior conduce a la siguiente ecuación de ondas, donde se ha considerado la notación  $c = 1$ .

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(1-\Delta)\rho^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Esta ecuación es resuelta mediante la acostumbrada factorización por separación de variables:  $\varphi(r, \phi, t) = \Phi(\rho, \phi) e^{-i\omega t}$ , Introduciendo esta expresión (3.6), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\omega^2 \Phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(1-\Delta)\rho^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3.7)$$

### Solución exacta

A continuación se procederá a resolver de forma exacta la ecuación (3.7), esta solución está basada en el método clásico de separación de variable, además, para efectos de comparación con resultados posteriores, se asume en principio que el parámetro  $\Delta$  es arbitrario, posteriormente en el proceso de comparación se tomará como pequeño, es decir:  $\Delta \ll 1$ . Aplicando separación de variables a la ecuación (3.7), se obtiene:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) + b_n N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right) \cos n\theta, \quad (3.8)$$

La solución exacta de la ecuación se puede expandir en series de la forma:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \cos n\theta, \quad (3.9)$$

donde los coeficientes  $b_n$  son escogidos tal que  $b_n = 0$ , esto para que la solución (3.9) sea finita en el origen. La condición de radiación en el campo lejano de esta ecuación está dada por:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik\Phi_s \right) = 0 \quad (3.10)$$

Donde  $\Phi_s$  es la función de onda scattereada, es decir:

$$\Phi(\rho, \theta) = \Phi_0(\rho, \theta) + \Phi_s(\rho, \theta) \quad (3.11)$$

Con  $\Phi_0(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta}$  que representa una onda plana que incide desde la dirección x por la izquierda. Imponiendo la condición de radiación, se tiene que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial(\Phi - \Phi_0)}{\partial \rho} - ik(\Phi - \Phi_0) \right) = 0 \quad (3.12)$$

Expandiendo la onda incidente en función de ondas parciales, se tiene:

$$\Phi_0(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \varepsilon^n J_n(k\rho) \cos n\theta \quad (3.13)$$

Haciendo uso de la expansión asintótica para la función de Bessel:

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Se tiene que:

$$\Phi - \Phi_0 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) - i^n \varepsilon^n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos m\theta \quad (3.14)$$

Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik\Phi_s \right) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \exp -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - i^n \varepsilon^n \exp -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos m\theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reordenando (3.15), se obtiene la siguiente expresión

$$\exp -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[ a_n - i^n \varepsilon^n \exp i \left( -\frac{n\pi}{(1-\Delta)2} + \frac{n\pi}{2} \right) \right] = 0$$

Lo que conduce al siguiente valor para los coeficientes  $a_n$  de la solución (3.13):

$$a_n = i^n \varepsilon^n e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}} \quad (3.16)$$

Entonces la solución exacta del problema queda dada por:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon^n e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \cos m\theta \quad (3.17)$$

Que corresponde a la solución (2.6) encontrada por [14]. Si bien esta es una expresión exacta para la propagación de un campo escalar en el espacio tiempo de una cuerda cósmica infinitamente delgada, debido a la forma en series de la solución, la interpretación física de esta solución no es fácil. También hay que destacar que para valores pequeños de  $\varepsilon$ , la serie converge muy lentamente.

### 3.3 Solución asintótica

Como ya se mencionó en la presentación del problema, este problema puede ser interpretado como la propagación de un campo escalar en un espacio plano con un déficit angular, además, por la simetría del problema, este se puede reducir a estudiar la difracción de luz por una cuña que es solamente iluminada tangencialmente por una onda plana por un solo lado (ver Figura 3.1) y posteriormente superponer los campos de ambas caras de la cuña. En este capítulo se definirá  $\varepsilon = \pi\Delta \ll 1$  para el desarrollo asintótico.

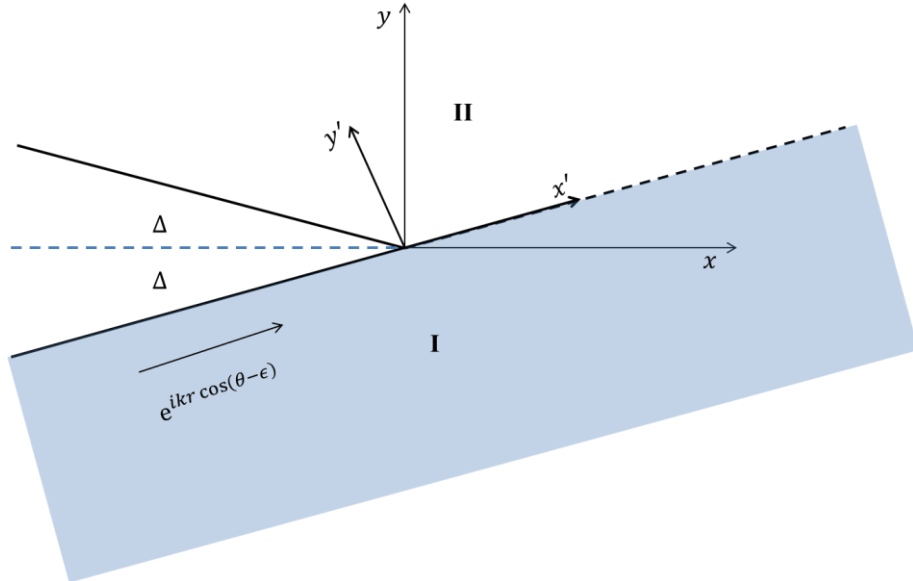


Figura 3.1. Esquema de propagación de ondas paralela a una cuña.

El problema es dividido en dos regiones, la región I representa la zona iluminada por la onda plana incidente y la región II representa la zona de sombra, se analizarán soluciones asintóticas en ambas regiones y serán empalmadas mediante matching.

### Región I

En esta región el campo puede ser expresado por la superposición del campo incidente y una corrección:

$$\Phi_I = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + \Phi, \quad (3.18)$$

donde el campo  $\Phi$  satisface la ecuación de Helmholtz

$$\omega^2 \Phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(1-\Delta)^2 \rho^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (3.19)$$

Las condiciones de borde para la función  $\Phi(\rho, \theta)$  están dadas por el matching con la solución en la región II, la derivada normal del campo sobre la cuña debe anularse y la condición de radiación en el campo lejano, esto es:  $\Phi(\rho, \theta) \sim 1/\sqrt{\rho}$  cuando  $\rho \rightarrow \infty$ . Buscamos soluciones de la forma:  $\Phi(\rho, \theta) = e^{ik\rho} G(\rho, \theta)$ , introduciendo esta última expresión en (3.19), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial G}{\partial \rho} + ikG \right) + 2ik \frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1}{(1-\Delta)^2 \rho^2} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (3.20)$$

Consideremos las nuevas escalas de campo lejano dadas por  $\rho' = \epsilon^2 \rho$  y  $\theta' = \epsilon^{-1} \theta$ , con esto la ecuación (3.20) es transformada en:

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \left( \epsilon^2 \frac{\partial G}{\partial \rho'} + ikG \right) + 2ik \frac{\partial G}{\partial \rho'} + \frac{1}{(1-\Delta)^2 \rho'^2} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta'^2} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Buscando una solución en la forma de series de potencia en  $\epsilon$ :

$$G(\rho', \theta') = G_0(\rho', \theta') + \epsilon^2 G_1(\rho', \theta') + \epsilon^4 G_2(\rho', \theta') + \dots$$

(3.22)

Introduciendo (3.22) en (3.21), se obtiene la siguiente ecuación a primer orden:

$$\frac{1}{\rho'} \left( 2ik\rho' \frac{\partial G_0}{\partial \rho'} + ikG_0 \right) + \frac{1}{\rho'^2} \left( \frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta'^2} \right) = 0 \quad (3.23)$$

Esta ecuación tiene una solución de auto semejanza en el campo lejano, considerando la variable de semejanza  $\xi = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{\rho'} (1 - \theta')$  y la función  $f_0(\xi) = G_0(\rho', \theta')$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $f_0$ :

$$\frac{d^2 f_0}{d\xi^2} + i\pi\xi \frac{df_0}{d\xi} + i\pi f_0 = 0 \quad (3.24)$$

La solución general de la ecuación (3.24) está dada por:

$$f_0(\xi) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\xi^2\right) \operatorname{erfi}\left(\frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\pi}\xi\right) + c_2 \exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\xi^2\right) \quad (3.25)$$

Las constantes de integración de esta ecuación deben ser determinadas mediante el matching con la solución de la región II.

## Región II

Consideremos el Sistema coordenado  $(x', y')$ , con el eje  $x'$  paralelo a lo largo de la superficie cuña, mientras que el eje  $y'$  es perpendicular a esta. En este nuevo Sistema, la ecuación de Helmholtz queda inalterada de su forma original, además las ecuaciones que ligán los dos sistemas de ecuaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \epsilon + y \sin \epsilon = \rho \cos(\theta - \epsilon) \\ y' &= y \cos \epsilon - x \sin \epsilon = \rho \sin(\theta - \epsilon) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación de Helmholtz en el Sistema de coordenadas  $(x', y')$  está dada por:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial y'^2} + k^2 \Phi_{II} = 0 \quad (3.27)$$

Para resolver (3.26) buscamos soluciones de la forma:  $\Phi_{II}(x', y') = e^{ikx'} F(x', y')$  , introduciendo esta expresión en (3.26), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \quad (3.28)$$

Consideremos las nuevas escalas de campo lejano dadas por  $\bar{x}' = \epsilon^2 x$  y  $\bar{y}' = \epsilon y$  , la ecuación (16) es transformada en:

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{y}'^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial \bar{x}'} = 0 \quad (3.29)$$

Buscando una solución en la forma de series de potencias en  $\epsilon$  :

$$F(x', y') = F_0(x', y') + \epsilon^2 F_1(x', y') + \epsilon^4 F_2(x', y') + \dots \quad (3.30)$$

Introduciendo (3.30) en (3.29), se obtiene la siguiente ecuación in the leader order:

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \bar{y}'^2} + 2ik \frac{\partial F_0}{\partial \bar{x}'} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \bar{y}'^2} + 2ik \frac{\partial F_i}{\partial \bar{x}'} = -\frac{\partial^2 F_{i-1}}{\partial \bar{x}'^2} \quad (3.32)$$

Esta ecuación tiene una solución de auto semejanza en el campo lejano, considerando la variable de semejanza  $\eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}}$  , se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $F_0$  :

$$\frac{d^2 F_0}{d\eta^2} - i\pi\eta \frac{dF_0}{d\eta} = 0 \quad (3.33)$$

La solución de esta ecuación está dada por:



$$F_0(\eta) = C \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) puede ser escrita en la forma:

$$F_0(\eta) = C \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} + C(\eta) + i \left( \frac{1}{2} + S(\eta) \right) \right] \quad (3.35)$$

Donde  $C(\eta) = \int_0^{\eta} \cos\left(\frac{1}{2}\pi u^2\right) du$  and  $S(\eta) = \int_0^{\eta} \sin\left(\frac{1}{2}\pi u^2\right) du$  son las integrales coseno y seno de Fresnel respectivamente. La constante de integración  $C$  de esta ecuación debe ser determinada mediante el matching con la solución de la región I.

## Matching

Las soluciones en las regiones I y II pueden ser escritas como:

$$\Phi_I = e^{ik\rho \cos(\theta - \pi\epsilon)} + e^{ik\rho} \left[ c_1 \exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\xi^2\right) \operatorname{erfi}\left(\frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\pi}\xi\right) + c_2 \exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\xi^2\right) \right] \quad (3.36)$$

$$\Phi_{II}(x', y') = e^{ikx'} C \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} + C(\eta) + i \left( \frac{1}{2} + S(\eta) \right) \right] \quad (3.37)$$

En la región  $\epsilon \ll \theta \ll 1$  and  $k\rho \gg 1$ , ambas soluciones deben ser válidas, entonces las soluciones (3.36) y (3.37) deben hacer matching en esta región.

Para la preparación del matching entre (3.36) y (3.37), se debe considerar que en la región  $\epsilon \ll \theta \ll 1$ , el ángulo  $\theta' \rightarrow \infty$ , además, considerando el rango de alta frecuencia  $k\rho \gg 1$ , conduce a que en la región de matching,  $\xi = \sqrt{k\rho'/\pi} (1 - \theta') \rightarrow -\infty$  y  $\eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}} \rightarrow \infty$ , considerando además las relaciones asintóticas:  $C(\eta) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\eta} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta^2\right) + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right)$ ,  $S(\eta) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\eta} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta^2\right) + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right)$  and  $\operatorname{erfi}(z) \sim -i + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{z^2}}{z}$ , se obtienen las siguientes expresiones asintóticas para los campos en esta región:

$$\Phi_I \sim e^{ik\rho(1-\frac{1}{2}(\theta-\pi\epsilon)^2)} + e^{ik\rho} \left[ \frac{c_1}{\frac{1}{2}(1+i)\pi\xi} + (ic_1 + c_2) \exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\xi^2\right) \right] \quad (3.38)$$

$$\Phi_{II} \sim e^{ik\rho(1-\frac{1}{2}(\theta-\pi\epsilon)^2)} C \left[ 1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi\eta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi\eta^2\right) + \dots \right] \quad (3.39)$$

El matching entre (3.38) y (3.39) conduce a  $C = 1$ ,  $\frac{c_1}{\frac{1}{2}(1+i)} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$  and  $ic_1 + c_2 = 0$ , resolviendo se obtiene  $c_1 = -\frac{1}{2}i$  and  $c_2 = -\frac{1}{2}$ . Con lo que se obtiene:

$$\Phi_I = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} - e^{ik\rho} \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}(-1+i)\sqrt{\pi}\xi\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}i\pi\xi^2\right) \right] \quad (3.40)$$

$$\Phi_{II} = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} + C(\eta) + i \left( \frac{1}{2} + S(\eta) \right) \right] \quad (3.41)$$

Por el principio de superposición, la solución para el campo total está dada por:

$$\Phi_{Inner} = \Phi_I(\rho, \theta) + \Phi_I(\rho, -\theta)$$

$$\Phi_{Outer} = \Phi_{II}(\rho, \theta) + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \quad (3.42)$$

El campo en la línea de observación está dado por  $\Phi_{Inner}(\rho, \theta = 0) = \Phi_0$ , es decir:

$$\Phi_0 = 2 \left[ e^{ik\rho \cos(\epsilon)} - e^{ik\rho} \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}(-1+i)\epsilon\sqrt{k\rho}\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}i\epsilon^2 k\rho\right) \right] \right] \quad (3.43)$$

Esta expresión puede ser escrita como:

$$\Phi_0 = 2 \left[ e^{ik\rho \cos(\epsilon)} - \frac{1}{2} e^{ik\rho} \operatorname{erfc}\left(\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \epsilon \sqrt{k\rho}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}i\epsilon^2 k\rho\right) \right] \quad (3.44)$$

Expandiendo en series de potencias de  $\epsilon$ , se obtiene:

$$\Phi_0 = 2e^{ik\rho(1-\frac{1}{2}(\theta-\epsilon)^2)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \epsilon \sqrt{k\rho} \right) \right] \quad (3.45)$$

Tomando el valor absoluto, se tiene

$$|\Phi_0| = 2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \epsilon \sqrt{k\rho} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \epsilon \sqrt{k\rho} \right) \right) \right] \quad (3.46)$$

Haciendo uso de la expansión asintótica  $\operatorname{erfc}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z}$ , válida para grandes valores de  $z$ , se tiene finalmente después de una manipulación algebraica, el siguiente valor para el módulo del campo en el eje:

$$|\Phi_0| = 2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\epsilon \sqrt{k\rho}} \cos \left( \frac{\epsilon^2 k\rho}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{1/2} \quad (3.47)$$

Esta es la misma expresión asintótica obtenida por [13] mediante la solución exacta (3.17).

Otro resultado interesante de recalcar es considerar la solución  $\Phi_{Inner}$  en el límite  $\rho \rightarrow \infty$ , esto conduce a la siguiente expresión:

$$\Phi_{Inner}(\rho \rightarrow \infty, \theta) = \Phi_I(\rho \rightarrow \infty, \theta) + \Phi_I(\rho \rightarrow \infty, -\theta)$$

$$\Phi_{Inner}(\rho \rightarrow \infty, \theta) \sim e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$$

Si ahora se calcula  $|\Phi|^2 = \Phi_{Inner} \Phi_{Inner}^*$ , se obtiene el siguiente resultado:

$$|\Phi|^2 \sim (e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)})(e^{-ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{-ik\rho \cos(\theta+\epsilon)})$$

$$|\Phi|^2 \sim 2 + e^{ik\rho(\cos(\theta-\epsilon)-\cos(\theta+\epsilon))} + e^{ik\rho(\cos(\theta+\epsilon)-\cos(\theta-\epsilon))}$$

De la identidad trigonométrica  $2 \sin \theta \sin \alpha = \cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)$ , se obtiene que  $|\Phi|^2$  puede ser expresado como:

$$|\Phi|^2 \sim 2 + e^{2ik\rho \sin \theta \sin \epsilon} + e^{-2ik\rho \sin \theta \sin \epsilon}$$

$$|\Phi|^2 \sim 2 + 2 \cos(2k\rho \sin \theta \sin \epsilon)$$

$$|\Phi|^2 \sim 4 \cos^2(k\rho \sin \theta \sin \epsilon)$$

Recordando que en esta aproximación tanto la variable angular como el parámetro  $\epsilon$  son muy pequeños, tal que  $\sin \theta \sim \theta$  y  $\sin \epsilon \sim \epsilon$ , finalmente se obtiene la siguiente expresión para  $|\Phi|^2$ :

$$|\Phi| \sim 2 \cos(k\rho\theta\epsilon) \quad (3.48)$$

Esta ecuación es la misma ya mencionada en la ecuación (2.10) del capítulo 2, que representa el límite  $\rho \rightarrow \infty$  de la solución  $|\Phi_{Inner}|$ , se puede ver que esta solución corresponde al diagrama de interferencia del campo en el límite de la óptica geométrica, que es encontrado de forma natural con el método de matching.

Para el cálculo de la amplitud de scattering se deben considerar los términos de orden  $O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$  para la función  $\Phi_{Inner}(\rho \rightarrow \infty, \theta)$ , esto es:

$$\Phi_{Inner}(\rho \rightarrow \infty, \theta) \sim e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\epsilon\sqrt{k}} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \left[ \frac{1}{(\epsilon-\theta)} + \frac{1}{(\epsilon+\theta)} \right] \quad (3.49)$$

El tercer término de la ecuación (3.49) representa la onda divergente, con lo que se obtiene que la amplitud de scattering queda dada por:

$$f(\theta) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2}{(\epsilon^2 - \theta^2)} \quad (3.50)$$

La ecuación (3.50) coincide con la amplitud de scattering reportado por Safko et al [11] para una cuerda cósmica delgada en el límite de pequeños ángulos ( $\theta \ll 1$ ) de scattering. Este resultado era de esperar, puesto que en el análisis desarrollado en este capítulo la solución interna es válida para pequeños ángulos.

Como conclusión de este capítulo se puede afirmar que todos los resultados asintóticos obtenidos aquí confirman la hipótesis de que el método de matching asintótico funciona muy bien para este tipo de problemas, reproduciendo los resultados asintóticos encontrados en la literatura de forma elegante y simple.

Es importante recalcar que los resultados asintóticos obtenidos en la referencia [13], fueron obtenidos a partir de la solución exacta dada por la serie (3.17), en cambio, las soluciones asintóticas encontradas en este capítulo fueron obtenidas sin conocer la solución exacta a priori, esto permite concluir que este método puede ser aplicado a problemas más complejos donde no se conoce o no tienen solución exacta.

## Capítulo 4

### 4. Descripción asintótica de la propagación de campos escalares en el espacio-tiempo de una cuerda cósmica de diámetro finito e impenetrable

En este capítulo se analizará la propagación de ondas en el espacio tiempo de una cuerda cósmica de diámetro finito e impenetrable, para llevar a cabo este análisis, primeramente se buscarán soluciones exactas al problema, posteriormente se analizarán soluciones asintóticas, para finalmente hacer una comparación entre ellas y analizar la estructura del campo encontrado.

#### Solución exacta

Partiendo con la ecuación de Klein-Gordon para campos escalares no masivos, se tiene que:

$$k^2 \Phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{(1-\Delta)^2 \rho^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (4.1)$$

La solución por separación de variables, conduce a la siguiente ecuación para la parte radial:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k^2 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (4.2)$$

cuya solución está dada por:

$$R(\rho) = a_n J_\gamma(k\rho) + b_n N_\gamma(k\rho), \quad (4.3)$$

con  $\gamma = n\nu = \frac{n}{1-\Delta}$ . Con esto se tiene que el campo puede ser expresado como:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) + b_n N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right] \cos n\theta. \quad (4.4)$$

En este caso a diferencia que en capítulo (3), para los coeficientes  $b_n$  no se puede imponer la condición  $b_n = 0$  para que la solución sea finita en origen, ya que ahora el campo no es evaluado en el origen. La condición de borde de impenetrabilidad está dada por:

$$\Phi(a, \theta) = 0. \quad (4.5)$$

Imponiendo (4.5) en (4.4), se obtiene la siguiente ecuación:

$$a_n J_\gamma(ka) + b_n N_\gamma(ka) = 0. \quad (4.6)$$

Esta condición impone la siguiente relación entre los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  :

$$b_n = -a_n \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)}. \quad (4.7)$$

La condición de radiación en el campo lejano está dada por:  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik \Phi_s \right) = 0$  , donde  $\Phi_s$  es la función de onda scattereada, es decir:

$$\Phi(\rho, \theta) = \Phi_0(\rho, \theta) + \Phi_s(\rho, \theta), \quad (4.8)$$

donde  $\Phi_0(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta}$  , esta ecuación representa una onda plana que incide desde la dirección x por la izquierda. Imponiendo la condición de radiación (4.7) y ocupando (4.4), se tiene que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial(\Phi - \Phi_0)}{\partial \rho} - ik(\Phi - \Phi_0) \right) = 0. \quad (4.9)$$

Expandiendo la onda incidente en función de ondas parciales, se tiene:

$$\Phi_0(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(k\rho) \cos n\theta. \quad (4.10)$$

Haciendo uso de la expansión asintótica de las funciones de Bessel, es decir:

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.11)$$

$$N_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.12)$$

Haciendo uso de estas expresiones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_s = \Phi - \Phi_0 \sim & \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) + b_n \sin \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ & \left. - i^n \varepsilon_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos n\theta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A partir de (4.13), se obtiene la siguiente expresión para la condición de radiación:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik \Phi_s \right) \\
&= k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \sin \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) - ia_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
&\quad + b_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) - ib_n \sin \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&\quad \left. + i^n \varepsilon_n \sin \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i i^n \varepsilon_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos n\theta.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Después de un poco de álgebra, la ecuación anterior se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik \Phi_s \right) \\
&= k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -ia_n \exp \left( -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right. \\
&\quad + b_n \exp \left( -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
&\quad \left. + i i^n \varepsilon_n \exp \left( -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \cos n\theta.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Igualando a cero esta expresión, se obtiene la siguiente ecuación para los coeficientes

$$\begin{aligned}
& \left[ -ia_n + b_n + i i^n \varepsilon_n \exp i \left( -\frac{n\pi}{(1-\Delta)2} + \frac{n\pi}{2} \right) \right] = 0, \\
& a_n + ib_n - i^n \varepsilon_n \exp \left( i \left( -\frac{n\pi}{(1-\Delta)2} + \frac{n\pi}{2} \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A partir de la ecuación (4.16) y la ecuación (4.7), se pueden obtener los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ .

$$a_n - ia_n \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} - i^n \varepsilon_n \exp \left( -i \frac{n\pi}{(1-\Delta)2} \right) = 0, \tag{4.17}$$

$$a_n \left( 1 - i \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} \right) - i^n \varepsilon_n \exp \left( -i \frac{n\Delta\pi}{(1-\Delta)2} \right) = 0.$$

Donde finalmente se obtiene el siguiente valor para los coeficientes  $a_n$  :

$$a_n = i^n \varepsilon_n \frac{e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}}}{\left( 1 - i \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} \right)}. \quad (4.18)$$

De esta forma, la expresión para el campo queda dada por:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) - \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right] \cos n\theta.$$

Reemplazando (4.18) en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión para el campo:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}}}{\left( 1 - i \frac{J_{\frac{n}{1-\Delta}}(ka)}{N_{\frac{n}{1-\Delta}}(ka)} \right)} \left[ J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) - \frac{J_{\frac{n}{1-\Delta}}(ka)}{N_{\frac{n}{1-\Delta}}(ka)} N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right] \cos n\theta. \quad (4.19)$$

Es fácil ver que cuando el radio " $a$ " de la cuerda tiende a cero, se tiene que:

$$\frac{J_0(ka)}{N_0(ka)} \sim \frac{1}{\frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{ka}{2} + \gamma \right)} \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Lo que conduce a la solución encontrada en el capítulo anterior para la cuerda cósmica delgada.

El valor del campo estará para  $\theta = 0$  queda dado por:

$$\Phi(\rho, \theta = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}}}{\left( 1 - i \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} \right)} \left[ J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) - \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right]. \quad (4.21)$$

Haciendo uso de las relaciones asintóticas

$$N_\gamma(x) \sim -\frac{\Gamma(\gamma)}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^\gamma$$



$$J_\gamma(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\gamma$$

Válidas para  $x \ll 1$ , la ecuación (4.21) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \theta = 0) = & \sum_{n=0}^{n=m} i^n \varepsilon_n \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{1-\Delta}}}{\left(1 - i \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)}\right)} \left[ J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) - \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right] \\ & + \sum_{n=m+1}^{\infty} i^n \varepsilon_n e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\epsilon}{1-\epsilon}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Haciendo un poco de álgebra, se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \theta = 0) = & \sum_{n=0}^{n=m} i^n \varepsilon_n \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{1-\Delta}}}{\left(1 - i \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)}\right)} \left[ J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) - \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right] \\ & - \sum_{n=0}^m i^n \varepsilon_n e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{1-\Delta}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{1-\Delta}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \end{aligned}$$

Esta expresión puede ser también escrita como:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \theta = 0) = & \sum_{n=0}^{n=m} i^{n+1} \varepsilon_n \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{1-\Delta}}}{\left(1 - i \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)}\right)} \frac{J_\gamma(ka)}{N_\gamma(ka)} \left[ J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) + i N_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \right] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n e^{-in\frac{\pi}{2}\frac{\Delta}{1-\Delta}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \end{aligned}$$

Ocupando las relaciones asintóticas:

$$\frac{J_0(ka)}{N_0(ka)} \sim \frac{1}{\frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{ka}{2} + \gamma \right)}$$

$$\frac{J_\alpha(ka)}{N_\alpha(ka)} \sim - \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{ka}{2}\right)^\alpha}{\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \left(\frac{2}{ka}\right)^\alpha}$$

$$\frac{J_\alpha(ka)}{N_\alpha(ka)} \sim - \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{ka}{2}\right)^{2\alpha}$$

Se obtiene la siguiente expresión para el campo para  $\theta = 0$ , en el caso  $ka \ll 1$ .

$$\Phi(\rho, \theta = 0) = \frac{i}{\frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{ka}{2} + \gamma \right)} [J_0(k\rho) + i N_0(k\rho)] + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n e^{-in\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{1-\Delta}} J_{\frac{n}{1-\Delta}}(k\rho) \quad (4.23)$$

Se puede ver que para valores de onda larga, la contribución del radio de la cuerda cósmica al campo de difracción es realmente pequeña.

### Solución asintótica

Para construir una solución asintótica para el problema anterior, primero se estudiará el comportamiento asintótico para la difracción de una onda plana por un cilindro impenetrable en un espacio tiempo Euclideo. La Figura (1) muestra un esquema para la difracción de una onda plana por un cilindro macizo impenetrable, en el caso cuando la frecuencia del campo incidente es grande, tal que  $ka \gg 1$ , el campo difractado puede dividirse en varias regiones bien definidas, estas regiones son:

**Región iluminada:** Esta región está definida como la región del espacio donde el campo incidente llega de forma directa a los puntos de esta región.

**Región de sombra:** Esta región está definida como la región del espacio donde el campo incidente no llega de forma directa a los puntos de esta región, produciéndose una sombra en esta región.

**Región de transición "Boundary layer":** Esta es la región que separa las dos regiones definidas anteriormente, por lo general es una capa delgada la que separa estas dos regiones y da origen al fenómeno de difracción e interferencia.

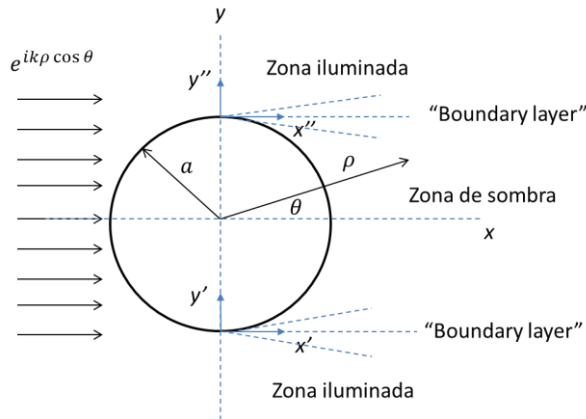


Figura 4.1. Esquema de difracción de ondas por un cilindro impenetrable.

La Figura 4.1 muestra la distribución espacial de las diferentes regiones que se forman en el patrón de difracción de una onda por un cilindro impenetrable. Se puede apreciar que es esperable que aparezcan dos zonas de transición, una superior y una inferior.

Para la “boundary layer” inferior consideremos el Sistema coordenado  $(x', y')$ , con el eje  $x'$  a lo largo de la horizontal y paralelo a la “boundary layer” mientras que el eje  $y'$  es perpendicular a esta. En este nuevo Sistema, la ecuación de Helmholtz queda inalterada de su forma original, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial y'^2} + k^2 \Phi_{II} = 0. \quad (4.24)$$

Para la ecuación (4.24) se buscan soluciones de la forma:  $\Phi_{II}(x', y') = e^{ikx'} F(x', y')$ , introduciendo esta expresión en (4.23), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial x'} = 0. \quad (4.25)$$

Consideremos las nuevas escalas de campo lejano dadas por  $\bar{x}' = \epsilon^2 x'$  y  $\bar{y}' = \epsilon y'$ , donde denota un parámetro pequeño en el régimen de alta frecuencia, la ecuación (4.25) es transformada en:

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{y}'^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial \bar{x}'} = 0. \quad (4.26)$$

Buscando una solución en la forma de series de potencias en  $\epsilon$ :

$$F(x', y') = F_0(x', y') + \epsilon^2 F_1(x', y') + \epsilon^4 F_2(x', y') + \dots \quad (4.27)$$

Introduciendo (4.27) en (4.26), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \bar{y}'^2} + 2ik \frac{\partial F_0}{\partial \bar{x}'} = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \bar{y}'^2} + 2ik \frac{\partial F_i}{\partial \bar{x}'} = -\frac{\partial^2 F_{i-1}}{\partial \bar{x}'^2}. \quad (4.29)$$

La ecuación (4.28) acepta una solución de auto semejanza en el campo lejano, considerando la variable de semejanza  $\eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}}$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $F_0$ :

$$\frac{d^2 F_0}{d\eta^2} - i\pi\eta \frac{dF_0}{d\eta} = 0. \quad (4.30)$$

La solución de la ecuación (4.30) está dada por:

$$F_0(\eta) = c_1 + c_2 \int_0^\eta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du. \quad (4.31)$$

Las condiciones de borde están dadas por el matching con la región de sombra y con la región iluminada, esto es:

$$y' \rightarrow -\infty, \quad \eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}} \rightarrow \infty, \quad F_0(\eta) \rightarrow 1 \quad (4.32)$$

$$y' \rightarrow \infty, \quad \eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}} \rightarrow -\infty, \quad F_0(\eta) \rightarrow 0. \quad (4.33)$$

Imponiendo las condiciones de borde (4.32) y (4.33) a la solución (4.31) conduce a las siguientes ecuaciones:

$$1 = c_1 + c_2 \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du \quad (4.34)$$

$$0 = c_1 - c_2 \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du \quad (4.35)$$

Al resolver el sistema (4.33) y (4.34) y recordando la identidad:  $\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}$ , se obtiene los siguientes valores para las constantes:

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}, \quad (4.36)$$

Con lo que se obtiene la siguiente solución para la función  $F_0(\eta)$  :

$$F_0(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^\eta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du. \quad (4.37)$$

Para expresar lo solución (4.37) en coordenadas polares centradas en el eje del cilindro, se tiene la siguiente relación:

$$\eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{y+a}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\rho \sin \theta + a}{\sqrt{\rho \cos \theta}} \sim -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( \sin \theta + \frac{a}{\rho} \right). \quad (4.38)$$

Para analizar la “boundary layer” superior, se tendrá una solución similar a la ecuación (4.31):

$$F_0(\eta) = c_1 + c_2 \int_0^\eta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du.$$

Pero las condiciones de borde en este caso están dadas por:

$$y' \rightarrow -\infty, \quad \eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}} \rightarrow \infty, \quad F_0(\eta) \rightarrow 0 \quad (4.39)$$

$$y' \rightarrow \infty, \quad \eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'}} \rightarrow -\infty, \quad F_0(\eta) \rightarrow 1. \quad (4.40)$$

Lo que conduce a las siguientes ecuaciones:

$$0 = c_1 + c_2 \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \quad (4.41)$$

$$1 = c_1 - c_2 \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \quad (4.42)$$

obteniéndose en este caso:

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \quad (4.43)$$

Lo que conduce a la siguiente solución para la “boundary layer” superior:

$$F_0(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_0^\eta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du. \quad (4.44)$$

Pasando a coordenadas polares centradas en el eje del cilindro, se tiene:

$$\eta = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{y-a}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\rho \sin \theta - a}{\sqrt{\rho \cos \theta}} \sim -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( \sin \theta - \frac{a}{\rho} \right). \quad (4.45)$$

Finalmente, el campo en la región de sombra queda dado por:

$$F_0(\eta) = 1 + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^{\eta_1} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_0^{\eta_2} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \quad (4.46)$$

donde  $\eta_1 = -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( \sin \theta + \frac{a}{\rho} \right)$  y  $\eta_2 = -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( \sin \theta - \frac{a}{\rho} \right)$ .

Para obtener una expresión más compacta de la solución (4.46), es conveniente reescribir (4.46) de la siguiente forma:

$$F_0(\eta) = 1 + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^{-\alpha-\beta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_0^{-\alpha+\beta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \quad (4.47)$$

donde  $\alpha = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \sin \theta$  y  $\beta = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \frac{a}{\rho}$ . Entonces, reordenando (46), se tiene que:

$$\begin{aligned} F_0(\eta) = 1 + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^{-\alpha} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{-\beta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du \\ - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_0^{-\alpha} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\beta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \end{aligned} \quad (4.48)$$

lo que puede ser escrito de la forma:

$$F_0(\eta) = 1 + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{-\beta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\beta} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du. \quad (4.49)$$

Es fácil ver que si se invierte la primera integral, se obtiene:

$$F_0(\eta) = 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_{-\beta}^{\alpha} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \quad (4.50)$$

lo que conduce a la siguiente expresión:

$$F_0(\eta) = 1 - 2\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_0^\beta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du. \quad (4.51)$$

La ecuación (4.51) muestra que para pequeños valores del ángulo  $\theta$ , el término  $\alpha = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \sin \theta$  es irrelevante frente al término  $\beta = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \frac{a}{\rho}$ .

Para obtener las correcciones a la propagación del campo debido a los efectos de métrica del espacio-tiempo producida por la cuerda cósmica, procederemos como en el capítulo anterior, es decir, consideraremos el espacio como cónico, que es equivalente a considerar el plano con un déficit angular y superpuesto a este plano, una circunferencia de radio  $a$  e impenetrable.

La Figura 4.2 muestra un esquema del espacio plano con el déficit angular, donde se pueden definir las “boundary layers” asociadas al paso de la onda incidente tangente a la superficie del cilindro impenetrable.

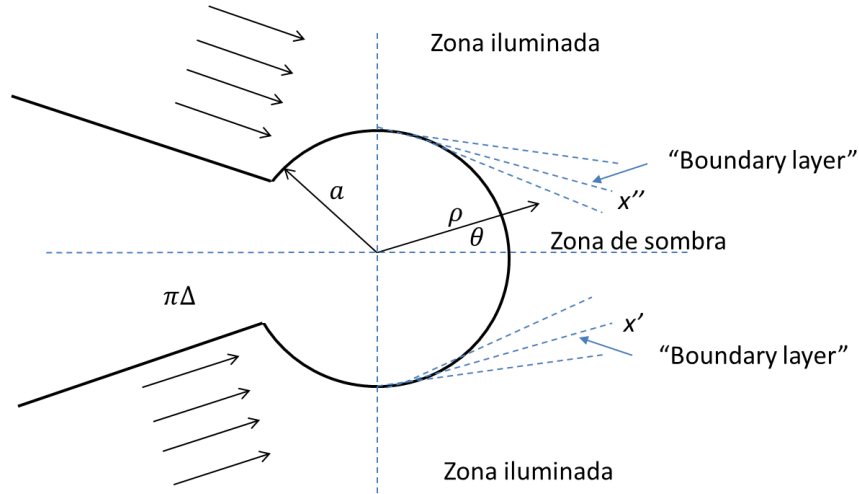


Figura 4.2. Esquema de difracción de ondas por un cilindro impenetrable en un espacio cónico.

El procedimiento para la “Boundary layer” inferior es similar al realizado anteriormente, con la diferencia que ahora la capa de transición que separa la zona iluminada de la zona de sombra está inclinada respecto de la horizontal en un ángulo igual al déficit angular, esto implica que la relación entre las coordenadas  $(x, y)$  definidas anteriormente y el sistema  $(x', y')$  que está inclinado con la coordenada  $x'$  sobre la “Boundary layer” está dada por las ecuaciones:

$$x' = x \cos \epsilon + y \sin \epsilon = \rho \cos(\theta - \epsilon), \quad (4.52)$$

$$y' = y \cos \epsilon - x \sin \epsilon = \rho \sin(\theta - \epsilon). \quad (4.53)$$

Es claro que la ecuación de Helmholtz quedará inalterada de su forma original en este nuevo sistema de coordenadas, por lo tanto la solución para la región de transición estará dada por:

$$F_0(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^\eta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du, \quad (4.54)$$

con la diferencia que en este caso cuando se pase a coordenadas polares centradas en el eje del cilindro, la relación está dada por:

$$\eta_1 = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\rho \sin(\theta - \epsilon) + a}{\sqrt{\rho \cos(\theta - \epsilon)}}. \quad (4.55)$$

De la misma forma, para la “boundary layer” superior se tendrá una solución:

$$F_0(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^\eta \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du. \quad (4.56)$$

Pasando a coordenadas polares centradas en el eje del cilindro, se tiene:

$$\eta_2 = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{y - a}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{\rho \sin(\theta + \epsilon) - a}{\sqrt{\rho \cos(\theta + \epsilon)}}. \quad (4.57)$$

Finalmente, el campo en la región de sombra queda dado por:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta - \epsilon)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^{\eta_1} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du \right] + e^{ik\rho \cos(\theta + \epsilon)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^{\eta_2} \exp\left(\frac{1}{2}i\pi u^2\right) du \right]. \quad (4.58)$$

Esta expresión puede ser escrita como:



$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} (C(\eta_1) + iS(\eta_1)) \right] + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} (C(\eta_2) + iS(\eta_2)) \right], \quad (4.59)$$

donde  $C(\eta) = \int_0^\eta \cos(\frac{1}{2}\pi u^2) du$  and  $S(\eta) = \int_0^\eta \sin(\frac{1}{2}\pi u^2) du$  son las integrales coseno y seno de Fresnel respectivamente.

La Figura 4.3 muestra la distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y la comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 20$ ,  $\epsilon = 0.03$  y  $\rho = 100$ . Donde la curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

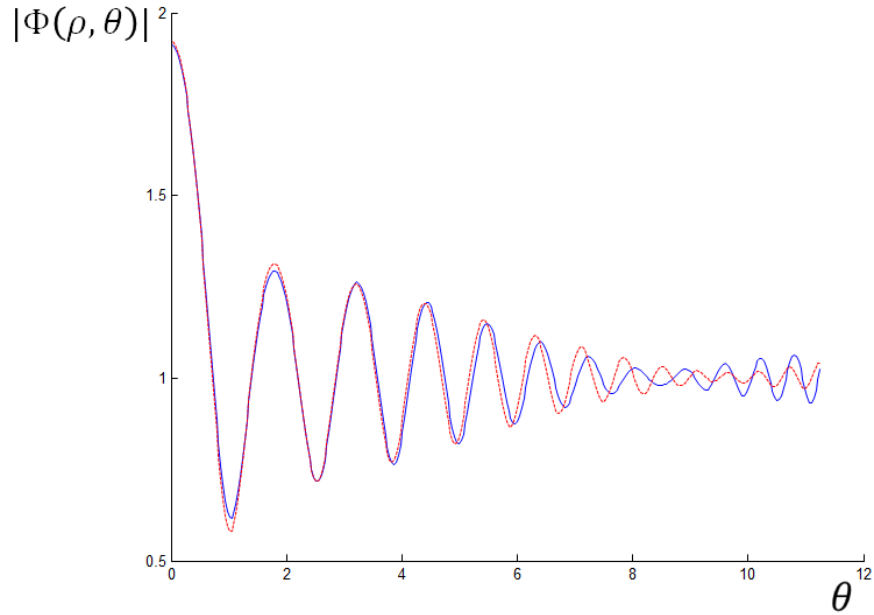


Figura 4.3. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 20$ ,  $\epsilon = 0.03$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

La Figura 4.4 muestra la distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y la comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 30$ ,  $\epsilon = 0.03$  y  $\rho = 100$ . Donde la curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

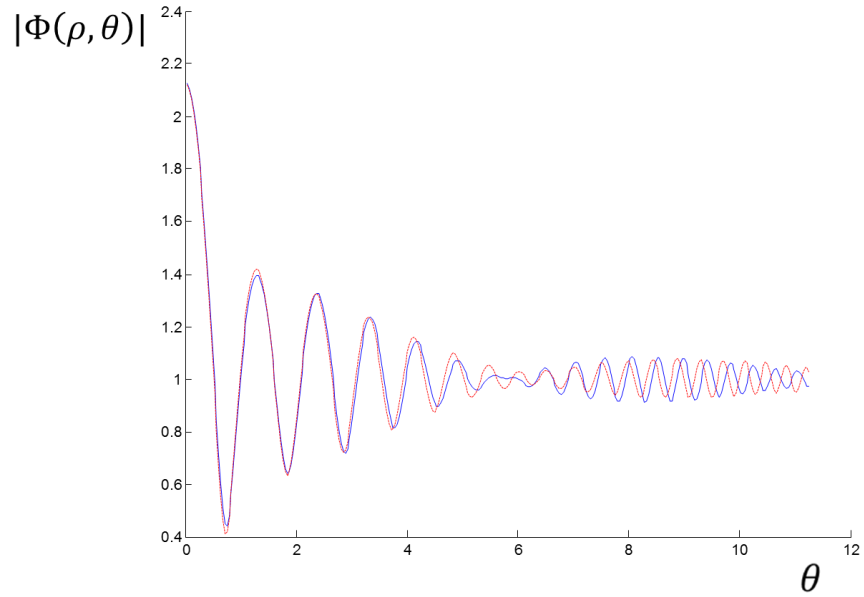


Figura 4.4. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 30$  ,  $\epsilon = 0.03$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

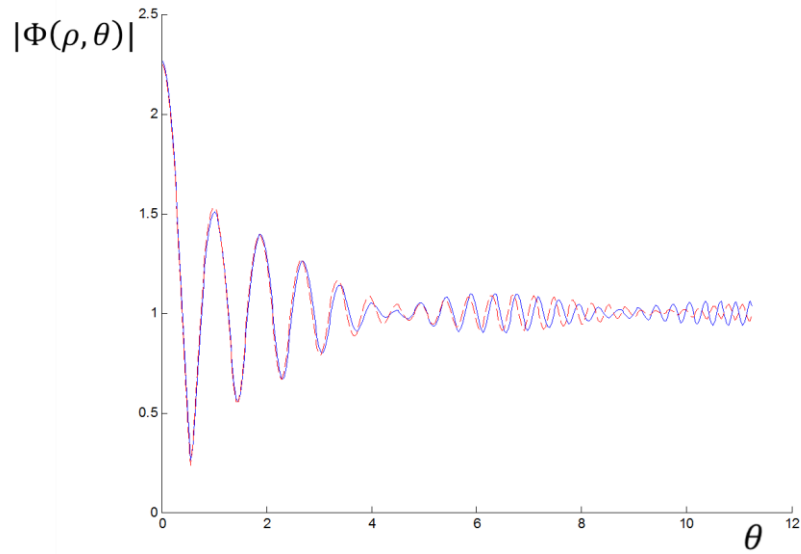


Figura 4.5. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 40$  ,  $\epsilon = 0.03$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

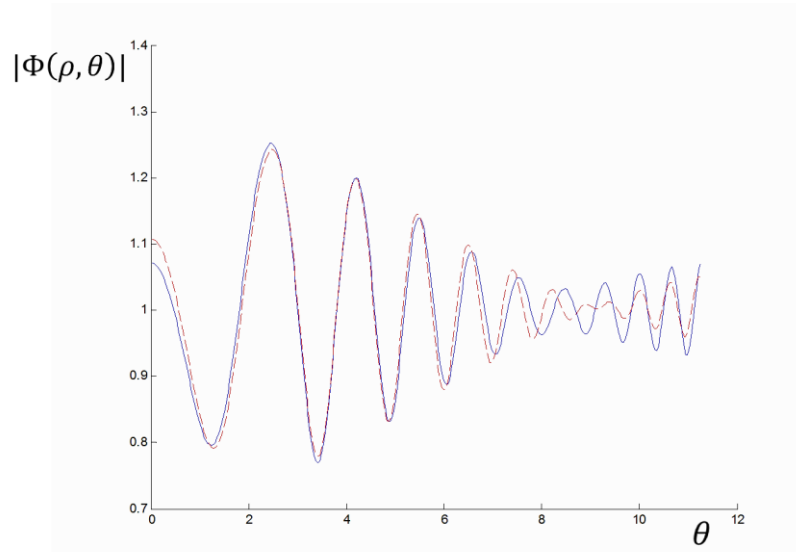


Figura 4.6. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 20$  ,  $\epsilon = 0.01$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

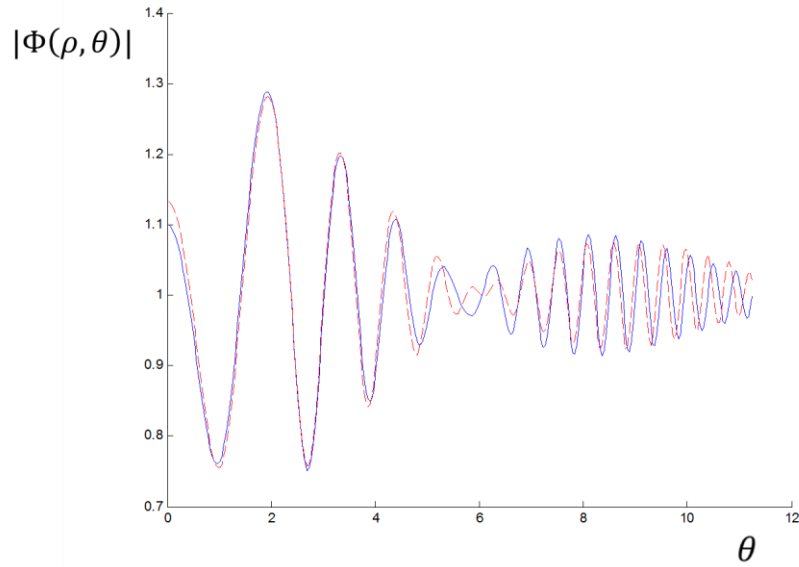


Figura 4.7. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 30$  ,  $\epsilon = 0.01$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

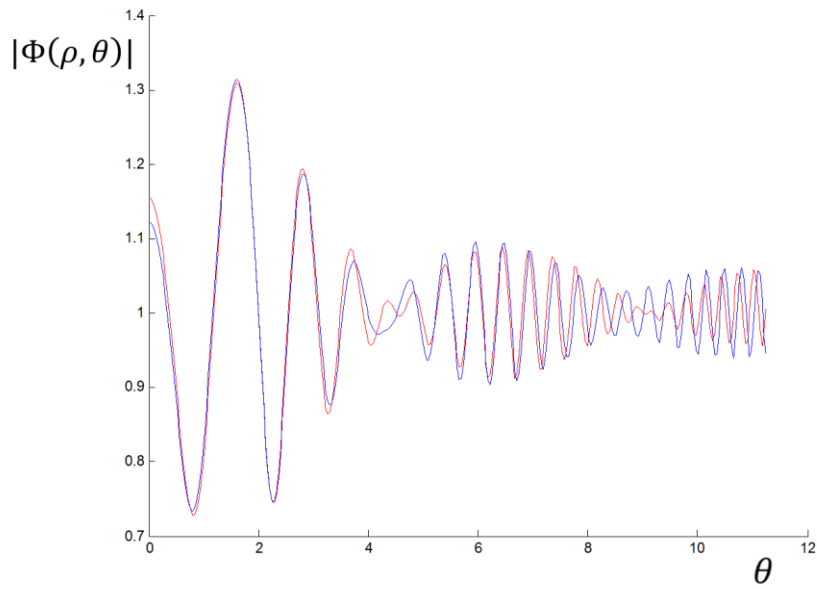


Figura 4.8. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 40$ ,  $\epsilon = 0.01$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

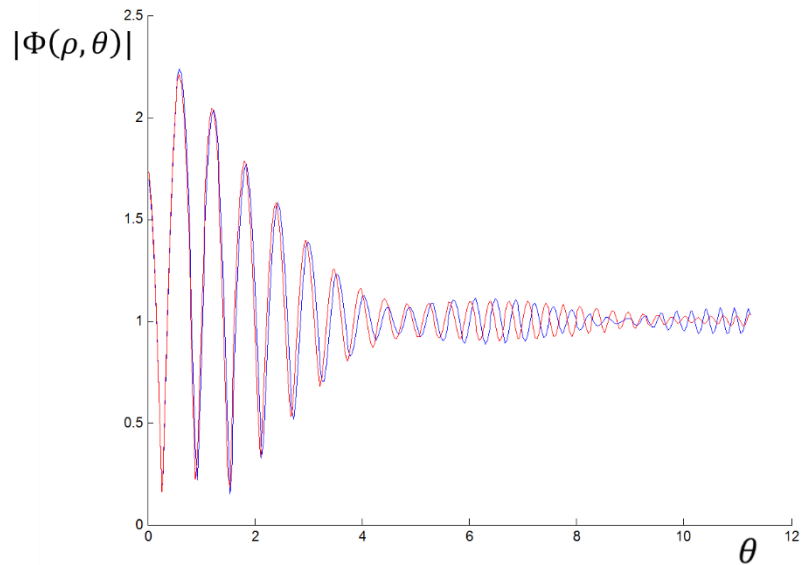


Figura 4.9. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka = 40$ ,  $\epsilon = 0.05$  y  $\rho = 100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

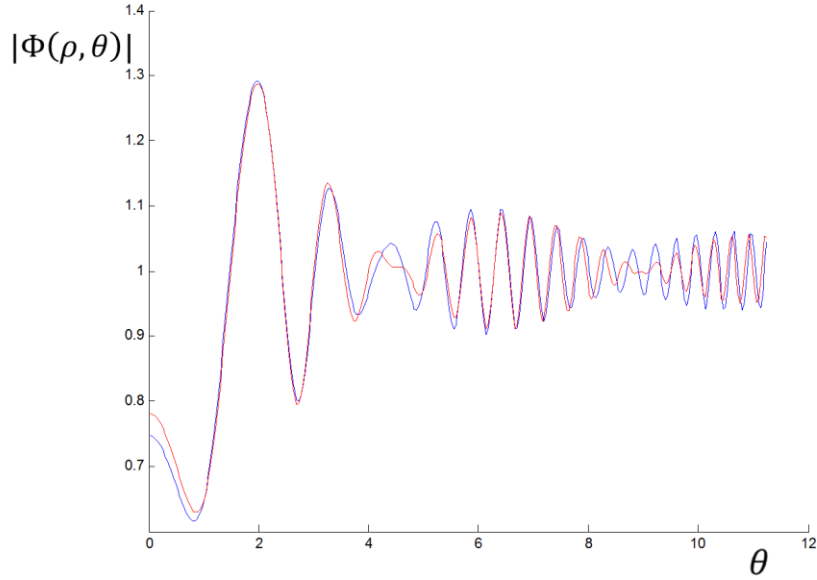


Figura 4.10. Distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y comparación entre la solución exacta (4.19) y la solución asintótica (4.59) con los valores de los parámetros:  $ka=40$ ,  $\epsilon=0.001$  y  $\rho=100$ . Curva continua representa la solución exacta y la curva segmentada color rojo representa la solución asintótica, se puede apreciar una muy buena concordancia entre las dos soluciones.

Se puede apreciar que la aproximación funciona mejor a medida que aumenta el parámetro  $ka$ , lo cual es esperable, pues la aproximación usada es válida para longitudes de onda cortas, es decir  $ka \gg 1$ .

Considerando además las relaciones asintóticas:  $C(\eta) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\eta} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta^2\right) + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right)$ ,  $S(\eta) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\eta} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta^2\right) + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right)$ , se obtienen las siguientes expresiones asintóticas para los campos en esta región:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\eta_1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2\right) \right) + i \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\eta_1} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2\right) \right) \right) \right] \\ + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left( \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\eta_2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta_2^2\right) \right) + i \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\eta_2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_2^2\right) \right) \right) \right]. \quad (4.60)$$

Reordenando la última ecuación se obtiene:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \left[ 1 + \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\pi\eta_1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2\right) - i \frac{1}{\pi\eta_1} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2\right) \right) \right] \\ + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \left[ 1 - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\pi\eta_2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta_2^2\right) - i \frac{1}{\pi\eta_2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_2^2\right) \right) \right],$$

escrito en forma más compacta se tiene:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \left[ 1 + \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} \left( \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2\right) - i \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2\right) \right) \right] \\ + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \left[ 1 - \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_2\sqrt{2}} \left( \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta_2^2\right) - i \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_2^2\right) \right) \right].$$

Finalmente se tiene:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \left[ 1 - i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} \right] + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \left[ 1 + i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_2\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_2^2} \right]. \quad (4.61)$$

Evaluando esta expresión en el eje  $\theta = 0$  se tiene que:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\epsilon)} \left[ 1 - i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} \right] + e^{ik\rho \cos(\epsilon)} \left[ 1 + i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_2\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_2^2} \right]. \quad (4.62)$$

Las expresiones para  $\eta_1$  y  $\eta_2$  en  $\theta = 0$  están dadas por:

$$\eta_1 = -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( -\epsilon + \frac{a}{\rho} \right),$$

$$\eta_2 = -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( \epsilon - \frac{a}{\rho} \right) = -\eta_1,$$

con lo que se obtiene:

$$F_0(\eta) = 2e^{ik\rho \cos \epsilon} \left[ 1 - i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} \right], \\ F_0^*(\eta) = 2e^{-ik\rho \cos \epsilon} \left[ 1 + i \frac{e^{i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{-i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} \right], \quad (4.63)$$

esto conduce al siguiente valor de  $F_0^2$  :

$$F_0^2(\eta) = 4 \left[ 1 + i \frac{e^{i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{-i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} - i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} \right]. \quad (4.64)$$

Reordenando esta última expresión, se tiene:

$$F_0^2(\eta) = 4 \left[ 1 + i \frac{e^{i\pi/2}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{-i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2 - i\pi/4} - i \frac{e^{-i\pi/2}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2 + i\pi/4} \right].$$

Lo que finalmente conduce a:

$$F_0^2(\eta) = 4 \left[ 1 - \frac{2}{\pi\eta_1\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (4.65)$$

Se puede ver que la ecuación (4.65) tiene la misma forma que la ecuación (3.47), donde el efecto del radio de la cuerda está contenido en la variable

$$\eta_1 = -\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left( -\epsilon + \frac{a}{\rho} \right),$$

donde en el límite  $a \rightarrow 0$  se recupera el valor encontrado en el capítulo 3.

$$|\Phi_0| = 2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\epsilon \sqrt{k\rho}} \cos\left(\frac{\epsilon^2 k\rho}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]^{1/2}$$

Al igual que en el capítulo anterior, para el cálculo de la amplitud de scattering se deben considerar los términos de orden  $O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$  para la función  $F_0(\eta)$ , esto es:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \left[ 1 - i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2} \right] + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \left[ 1 + i \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_2\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_2^2} \right].$$

Reordenando esta expresión, se tiene que:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} i \left( e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} \frac{e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_1^2}}{\eta_1} - e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} \frac{e^{i\frac{1}{2}\pi\eta_2^2}}{\eta_2} \right). \quad (4.66)$$

Al desarrollar el último término de la ecuación (4.66) para grandes valores de la coordenada radial y después de un poco de álgebra, se obtiene:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\pi\eta_1\sqrt{2}} i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} i \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{e^{ika(\theta-\epsilon)}}{\left(\sin(\theta-\epsilon) + \frac{a}{\rho}\right)} - \frac{e^{-ika(\theta+\epsilon)}}{\left(\sin(\theta+\epsilon) - \frac{a}{\rho}\right)} \right). \quad (4.67)$$

Para poder definir una amplitud de scattering es necesario prescindir del término  $\frac{a}{\rho}$  en la ecuación (4.67), esto conduce a:

$$F_0(\eta) = e^{ik\rho \cos(\theta-\epsilon)} + e^{ik\rho \cos(\theta+\epsilon)} + i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{e^{ika(\theta-\epsilon)}}{\sin(\theta-\epsilon)} - \frac{e^{-ika(\theta+\epsilon)}}{\sin(\theta+\epsilon)} \right). \quad (4.68)$$

Finalmente, a partir de (4.68) se obtiene la siguiente expresión para la amplitud de scattering:

$$f(\theta) = i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} \left( \frac{e^{ika(\theta-\epsilon)}}{\sin(\theta-\epsilon)} - \frac{e^{-ika(\theta+\epsilon)}}{\sin(\theta+\epsilon)} \right),$$

que también puede ser expresada como:

$$f(\theta) = i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} e^{-ika\epsilon} \left( \frac{2i\theta \sin ka\theta + 2\epsilon \cos ka\theta}{(\theta^2 - \epsilon^2)} \right). \quad (4.69)$$

A partir de la ecuación (4.69) se obtiene que la sección eficaz de scattering está dada por:

$$|f(\theta)|^2 \sim \frac{4\theta^2 \sin^2(ka\theta) + 4\epsilon^2 \cos^2(ka\theta)}{(\theta^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (4.70)$$

La sección eficaz muestra que tiene dos componentes que aportan al diagrama de interferencia, por ejemplo en el caso  $\epsilon \rightarrow 0$ , la ecuación (4.70) toma la siguiente forma:

$$|f(\theta)|^2 \sim \frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2}. \quad (4.71)$$



La ecuación (4.71) muestra que el diagrama de interferencia tendrá valores mínimos para valores del ángulo  $\theta_n = \frac{n\pi}{ka}$ , estos mínimos para la intensidad pueden ser visualizados en el set de figuras (4.4-4.8). Por otro lado, si hacemos el límite  $a \rightarrow 0$  en la ecuación (4.70), esta se transforma en:

$$|f(\theta)|^2 \sim \frac{4\epsilon^2}{(\theta^2 - \epsilon^2)^2},$$

que coincide con los resultados del capítulo anterior.

Como conclusión de este capítulo, se puede declarar que el método asintótico usado en este problema a parte de reproducir los resultados exactos con bastante precisión, el método permite interpretar los resultados de mejor forma dando un mejor entendimiento al fenómeno estudiado.

## Capítulo 5

### 5. Scattering de un campo escalar por un cilindro en la Métrica de Safko-Witten

En este capítulo se abordará el problema de la propagación de campos escalares en un espacio con una métrica del tipo Safko-Witten [11], este tipo de métrica es bastante general y considera diferentes combinaciones de una distribución de masa tubular y campos magnéticos confinados en el interior del tubo y campos magnéticos exteriores, la propagación de campos en estas métricas, como se verá, tienen cierta similitud con la propagación de campos en el espacio tiempo de una cuerda cósmica.

Un tipo particular de métrica que se obtiene a partir de la general de Safko-Witten [11], consiste en una combinación de una distribución de masa tubular contenida entre los radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , y además en el interior del cilindro de radio  $\rho_1$  se encuentra contenido un campo magnético  $B_z$ , paralelo al eje del tubo. Entonces, si se considera la métrica producida por un campo magnético confinado en el interior de un cilindro, se tiene que la métrica en la región externa al cilindro está dada por la solución de Safko-Witten [11]:

$$ds^2 = -v^2(dt^2 - d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (5.1)$$

donde  $v = e^a$  es un parámetro constante dado por:

$$a = \ln(1 + k_i \rho_1^2)^2 + \frac{4k_i \rho_1}{1 + k_i \rho_1^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\gamma + 1}, \quad (5.2)$$

$\rho_1$  y  $\rho_2$  definen el radio interior y exterior del cilindro respectivamente,  $k_i$  es el parámetro que está relacionado con el campo magnético mediante la relación:

$$B_z = \frac{2(1 + \delta)k_i^{1/2}e^a}{(\rho + \rho_0)^{\delta^2} [1 + k_i(\rho + \rho_0)^{2+2\delta}]^2},$$

en el caso particular de este estudio, los parámetros  $\delta$  y  $\rho_0$  son escogidos con el valor 0. Con esto, el campo  $B_z$  en el interior del tubo queda dado por:

$$B_z = \frac{2k_i^{1/2}e^a}{(1 + k_i \rho^2)^2}.$$

Notar que el campo no es constante en el interior del tubo.

La corriente superficial  $I_\phi$  en  $\rho = \rho_1$  que genera el campo magnético interior está dada por:

$$I_\phi = 2k_i^{1/2},$$

El tensor métrico queda dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2a} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

La métrica en la región interna al cilindro está dada por [11]:

$$ds^2 = -(1 + k_i \rho^2)(dt^2 - d\rho^2) + \rho^2(1 + k_i \rho^2)^{-2} d\phi^2 + (1 + k_i \rho^2)^2 dz^2, \quad (5.4)$$

El tensor métrico queda dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1 + k_i \rho^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + k_i \rho^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2(1 + k_i \rho^2)^{-2} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$g = -(1 + k_i \rho^2)^2 \rho^2, \quad (5.6)$$

### Solución externa

Para la métrica externa esta ecuación queda:

$$g^{tt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left( \sqrt{-g} g^{\rho\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\phi} \left( g^{\phi\phi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\phi} \right) - m^2 \varphi = 0. \quad (5.7)$$

Asumiendo una solución de la forma:  $\varphi(\rho, \phi, t) = R(\rho) e^{-iEt} e^{in\phi}$ , la ecuación para la parte radial queda dada por:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( \kappa^2 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (5.8)$$

donde  $\gamma = vn$  y  $\kappa^2 = E^2 - v^2 m^2$ . Notar que esta métrica es similar a la producida por una cuerda cósmica delgada, por lo tanto es de esperarse que los efectos producidos por esta métrica sobre los campos incidentes sean similares a los producidos por una cuerda cósmica.

La solución de la ecuación (5.8) está dada por:

$$R(\rho) = a_n J_\gamma(\kappa\rho) + b_n N_\gamma(\kappa\rho). \quad (5.9)$$

La solución general será una superposición de las funciones radiales anteriores, esto conduce a:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n J_{n\gamma}(\kappa\rho) + b_n N_{n\gamma}(\kappa\rho)] \cos n\theta. \quad (5.10)$$

Las constantes  $a_n$  y  $b_n$  deben ser determinadas con el empalme con la solución interna.

### Solución interna

Para la métrica interna, la ecuación de Klein-Gordon queda dada por:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{(1+k_i\rho^2)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho}{(1+k_i\rho^2)} \right) \left( \frac{dR}{d\rho} \right) + \left( E^2 - \frac{(1+k_i\rho^2)^4}{\rho^2} n^2 R - (1+k_i\rho^2)^2 m^2 \right) R = 0. \quad (5.11)$$

Haciendo la aproximación  $k_i\rho^2 \ll 1$ , la ecuación anterior puede ser notablemente simplificada, quedando:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( \kappa^2 - 4k_i n^2 - 2k_i m^2 \rho^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (5.12)$$

La solución general de la ecuación (5.12) está dada por:

$$R_n(\rho) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2k_i m}\rho^2} \rho^n U\left(\frac{1}{4}\left(-\frac{\kappa^2 - 4k_i n^2}{\sqrt{2k_i m}} + 2n + 2\right), n + 1, \sqrt{2k_i m}\rho^2\right) \\ + c_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2k_i m}\rho^2} \rho^n L_{\frac{\kappa^2 - 4k_i n^2}{4\sqrt{2k_i m}} - \frac{n-1}{2}}^n(\sqrt{2k_i m}\rho^2),$$

donde  $U(a, b, c)$  es la función hipergeométrica confluyente y  $L_\alpha^n(z)$  son los polinomios de Laguerre, dado que  $R_n(\rho)$  debe ser finita en el origen, la función anterior puede ser expresada en términos de la función de Whittaker, es decir:

$$R_n(\rho) = \frac{1}{\rho} M_{\nu, \mu}(z) = \frac{c_n}{\rho} M\left(\frac{\kappa^2 - 4k_i n^2}{4\sqrt{2k_i m}}, \frac{n}{2}, \sqrt{2k_i m} \rho^2\right), \quad (5.13)$$

donde  $\mu = \frac{n}{2}$ ,  $z = \sqrt{2k_i m} \rho^2$ ,  $\nu = \frac{\kappa^2 - 4k_i n^2}{4\sqrt{2k_i m}}$  y  $M_{\nu, \mu}(z)$  es la función de Whittaker. Si se asume que el cilindro es de pared delgada, es decir  $\rho_2 \cong \rho_1 = \rho_0$ , entonces, las condiciones de borde para el empalme entre la solución interna y externa están dadas por:

$$\begin{aligned} R_{out}(\rho_0) &= R_{in}(\rho_0), \\ R'_{out}(\rho_0) &= R'_{in}(\rho_0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Estas condiciones de borde conducen a los siguientes valores para las constantes A y B:

$$A = \frac{N'_Y(\kappa \rho_0) R_{in}(\rho_0) - N_Y(\kappa \rho_0) R'_{in}(\rho_0)}{N'_Y(\kappa \rho_0) J_Y(\kappa \rho_0) - N_Y(\kappa \rho_0) J'_Y(\kappa \rho_0)}, \quad (5.15)$$

$$B = \frac{J_Y(\kappa \rho_0) R'_{in}(\rho_0) - J'_Y(\kappa \rho_0) R_{in}(\rho_0)}{N'_Y(\kappa \rho_0) J_Y(\kappa \rho_0) - N_Y(\kappa \rho_0) J'_Y(\kappa \rho_0)}. \quad (5.16)$$

En principio, este análisis contempla la solución general para el scattering de partículas con masa que son regidas por la ecuación de Klein-Gordon en la métrica de Safko-Witten (5.1) y (5.4).

### Análisis asintótico

En este capítulo se analizará el scattering en el caso asintótico para grandes longitudes de onda para el campo incidente, es decir,  $\kappa a \ll 1$ , en este caso, el problema se puede reducir notablemente, entregando interesantes conclusiones respecto a la estructura de la onda scattereada.

### Solución asintótica región interna al cilindro ( $\rho \leq a$ ).

En esta región es conveniente definir la variable interna  $\xi = \frac{\rho}{a}$ , de esta forma, la ecuación en la región interna (12) queda dada por:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + a^2 \left( \kappa^2 - 4k_i n^2 - 2k_i a^2 m^2 \xi^2 - \frac{n^2}{a^2 \xi^2} \right) R = 0. \quad (5.17)$$

Despreciando el término  $2k_i a^2 m^2 \xi^2$ , se obtiene:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left( a^2 \kappa^2 - 4k_i a^2 n^2 - \frac{n^2}{\xi^2} \right) R = 0. \quad (5.18)$$

Definiendo el parámetro pequeño  $\epsilon = \kappa a \ll 1$ , la ecuación (18) se escribe como:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left( \epsilon^2 \left( 1 - 4 \frac{k_i}{\kappa^2} n^2 \right) - \frac{n^2}{\xi^2} \right) R = 0. \quad (5.19)$$

La solución de la ecuación (5.19) que es regular en el origen está dada por:  $R(\xi) = a_n J_n(\bar{\kappa} \xi)$ , donde  $\bar{\kappa} = \epsilon \left( 1 - 4 \frac{k_i}{\kappa^2} n^2 \right)^{1/2}$ , Cabe destacar que el parámetro  $\bar{\kappa}$  depende del número entero  $n$ , por lo que es más apropiado expresar este parámetro como  $\bar{\kappa}_n = \epsilon \left( 1 - 4 \frac{k_i}{\kappa^2} n^2 \right)^{1/2}$ , de esta forma se tiene que la solución interna está dada por:

$$\psi_I(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\bar{\kappa}_n \xi) \cos n\theta = a_0 J_0(\bar{\kappa}_0 \xi) + a_1 J_1(\bar{\kappa}_1 \xi) \cos \theta + a_2 J_2(\bar{\kappa}_2 \xi) \cos 2\theta + \dots \quad (5.20)$$

### Solución asintótica región externa al cilindro

En la región externa al cilindro ( $\rho > a$ ), la ecuación que rige la propagación de ondas está dada por:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left( \epsilon^2 - \frac{n^2}{\xi^2} \right) R = 0. \quad (5.21)$$

En el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , para la solución de la ecuación anterior se pueden definir 2 regiones, una región interna ("inner region") caracterizada por distancias  $1 \leq \xi \ll \frac{1}{\epsilon}$  muy cercanas al borde

exterior del cilindro que contiene al campo magnético, en esta región se puede prescindir de  $\epsilon$  en la ecuación (5.21), lo que conduce a la siguiente solución:

$$R(\xi) = \begin{cases} b_0 + c_0 \ln \xi & n = 0 \\ b_n \xi^{vn} + \frac{c_n}{\xi^{vn}} & n \geq 1, \end{cases} \quad (5.22)$$

con esto, la función de onda en la región externa próxima a la superficie del cilindro queda dada por:

$$\psi_{inner} = b_0 + c_0(\epsilon) \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n(\epsilon) \xi^{vn} + \frac{c_n(\epsilon)}{\xi^{vn}} \right) \cos n\theta. \quad (5.23)$$

El empalme de las funciones  $\psi_I$  y  $\psi_{inner}$  se obtiene con las condiciones de borde (5.14), lo que en esta nueva escala se reduce a:

$$\psi_I(1, \theta) = \psi_{inner}(1, \theta), \quad (5.24 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial \xi}(1, \theta) = \frac{\partial \psi_{inner}}{\partial \xi}(1, \theta). \quad (5.24 \text{ b})$$

Al imponer las condiciones de borde (5.24) en las ecuaciones (5.20) y (5.22), conduce a las siguientes ecuaciones:

$$a_0 J_0(\epsilon) = b_0, \quad (5.25 \text{ a})$$

$$a_0 J'_0(\epsilon) = c_0(\epsilon), \quad (5.25 \text{ b})$$

$$a_n J_n(\bar{\kappa}_n) = b_n(\epsilon) + c_n(\epsilon), \quad (5.25 \text{ c})$$

$$a_n J'_n(\bar{\kappa}_n) = vnb_n(\epsilon) - vnc_n(\epsilon). \quad (5.25 \text{ d})$$

Considerando que de la definición de  $\bar{\kappa}_n = \epsilon \left( 1 - 4 \frac{k_i}{\kappa^2} n^2 \right)^{1/2}$ , se tiene que  $\bar{\kappa}_n \ll 1$ , esto permite ocupar la aproximación de las funciones de Bessel para pequeños valores de su argumento, es decir:  $J_n(\bar{\kappa}_n \xi) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)} (\bar{\kappa}_n \xi)^n$ , entonces, haciendo uso de esta aproximación en las ecuaciones (5.25 c) y (5.25 d), se obtiene:

$$a_n \frac{1}{\Gamma(n+1)} \bar{\kappa}_n^n = b_n(\epsilon) + c_n(\epsilon), \quad (5.26a)$$

$$a_n \frac{1}{\Gamma(n+1)} \bar{\kappa}_n^n = \nu b_n(\epsilon) - \nu c_n(\epsilon). \quad (5.26b)$$

Finalmente a partir de las ecuaciones (5.26) se tiene que los coeficientes  $b_n$  y  $c_n$  se pueden expresar en función de los coeficientes  $a_n$  de la siguiente forma:

$$b_n(\epsilon) = \frac{\bar{\kappa}_n^n}{2\nu} \frac{1+\nu}{\Gamma(n+1)} a_n, \quad (5.27)$$

$$c_n(\epsilon) = \frac{\bar{\kappa}_n^n}{2\nu} \frac{\nu-1}{\Gamma(n+1)} a_n. \quad (5.28)$$

Las ecuaciones (5.27) y (5.28) son de práctica utilidad, ya que permiten expresar los coeficientes de la solución externa cercana al cilindro ("inner region") como función de los coeficientes de la solución dentro del cilindro. En el caso de  $n=0$ , la relación entre los coeficientes de la solución dentro del cilindro y la solución exterior está dada directamente por las ecuaciones (5.25 a) y (5.25b).

### Outer solution

En la región lejos de la superficie del cilindro, es conveniente definir la escala dada por la variable  $\eta = \kappa \rho$ , entonces, la ecuación (5.21) en esta nueva escala, queda dada por:

$$\frac{d^2 R}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dR}{d\eta} + \left(1 - \frac{\nu^2 n^2}{\eta^2}\right) R = 0, \quad (5.29)$$

cuya solución está dada por:

$$R(\eta) = \bar{a}_n J_{\nu n}(\eta) + \bar{b}_n N_{\nu n}(\eta) \quad (5.30)$$

Esto conduce a la siguiente función de onda:

$$\psi_{outer}(\eta, \theta) = \bar{a}_0 J_0(\eta) + \bar{b}_0 N_0(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \bar{a}_n J_{\nu n}(\eta) + \bar{b}_n N_{\nu n}(\eta) \right) \cos n\theta \quad (5.31)$$

Los coeficientes  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$  deben ser determinados a partir de la condición de matching con la zona cercana al cilindro.



### Matching entre la interna y externa:

Para realizar el matching entre la solución interna y la externa, se plantea que existe una región intermedia en la que ambas soluciones, la “inner” y la “outer” son válidas y ambas deben hacer matching, esta región está dada por  $a \ll \rho \ll a/\epsilon$ , lo que expresado en la variable interna se traduce en:

$$1 \ll \xi \ll \frac{1}{\epsilon}, \quad (5.32)$$

Escribiendo la “outer solution” (ec. 5.31) en función de la variable interna, se tiene:

$$\psi_{outer} = \bar{a}_0 J_0(\epsilon \xi) + \bar{b}_0 N_0(\epsilon \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \bar{a}_n J_{vn}(\epsilon \xi) + \bar{b}_n N_{vn}(\epsilon \xi) \right) \cos n\theta. \quad (5.33)$$

En la región  $\xi \ll 1/\epsilon$ , la “outer solution” (5.33) se escribe aproximadamente como:

$$\psi_{outer} \sim \bar{a}_0 + \bar{b}_0 \frac{2}{\pi} \left( \ln \left( \frac{\epsilon \xi}{2} \right) + \gamma \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \bar{a}_n \frac{1}{\Gamma(vn+1)} \left( \frac{\epsilon \xi}{2} \right)^{vn} - \bar{b}_n \frac{\Gamma(vn)}{\pi} \left( \frac{2}{\epsilon \xi} \right)^{vn} \right) \cos n\theta. \quad (5.34)$$

Al comparar la ecuación (5.34) con la “inner solution” (ec. 5.23):

$$\psi_{inner} \sim b_0 + c_0(\epsilon) \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n(\epsilon) \xi^{vn} + \frac{c_n(\epsilon)}{\xi^{vn}} \right) \cos n\theta,$$

se obtienen las siguientes ecuaciones para los coeficientes:

$$\bar{b}_0 \frac{2}{\pi} = c_0(\epsilon), \quad (5.35 \text{ a})$$

$$\bar{a}_0 + \bar{b}_0 \frac{2}{\pi} \left( \ln \left( \frac{\epsilon}{2} \right) + \gamma \right) = b_0, \quad (5.35 \text{ b})$$

$$\bar{a}_n \frac{1}{\Gamma(vn+1)} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{vn} = b_n(\epsilon), \quad (5.35 \text{ c})$$

$$-\bar{b}_n \frac{\Gamma(vn)}{\pi} \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^{vn} = c_n(\epsilon). \quad (5.35 \text{ d})$$

Además, a la solución externa (5.33) se le debe imponer la condición de radiación en el campo lejano, esta condición está dada por:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik \Phi_s \right) = 0, \quad (5.36)$$

Donde  $\Phi_s$  es la función de onda scattereada, es decir:

$$\Phi(\rho, \theta) = \Phi_0(\rho, \theta) + \Phi_s(\rho, \theta) \quad (5.37)$$

Con  $\Phi_0(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta}$  que representa una onda plana que incide desde la dirección x por la izquierda. Imponiendo la condición de radiación, se tiene que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial(\Phi - \Phi_0)}{\partial \rho} - ik(\Phi - \Phi_0) \right) = 0 \quad (5.38)$$

Expandiendo la onda incidente en función de ondas parciales, se tiene:

$$\Phi_0(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(k\rho) \cos n\theta \quad (5.39)$$

Haciendo uso de la expansión asintótica para la función de Bessel:

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.40)$$

$$N_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.41)$$

Se tiene que la onda scattereada se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi_s = \Phi - \Phi_0 \sim & \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + b_n \sin \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ & \left. - i^n \varepsilon_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos n\theta \end{aligned} \quad (5.42)$$

Con lo que se obtiene la siguiente ecuación para  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} - ik \Phi_s \right)$ :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik \Phi_s \right) \\
&= k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -a_n \sin \left( k\rho - \frac{n\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - ia_n \cos \left( k\rho - \frac{n\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
&\quad + b_n \cos \left( k\rho - \frac{n\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - ib_n \sin \left( k\rho - \frac{n\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&\quad \left. + i^n \varepsilon_n \sin \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + ii^n \varepsilon_n \cos \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos n\theta
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Después de un poco de álgebra, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \rho} - ik \Phi_s \right) \\
&= k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -ia_n \exp \left( -i \left( k\rho - \frac{n\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) + b_n \exp \left( -i \left( k\rho - \frac{n\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + ii^n \varepsilon_n \exp \left( -i \left( k\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \cos n\theta.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Al imponer la condición de radiación (5.44), se obtiene la siguiente expresión que deben satisfacer los coeficientes  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$ :

$$\bar{a}_n + i\bar{b}_n - i^n \varepsilon_n \exp \left( i \frac{(1-\nu)n\pi}{2} \right) = 0. \tag{5.45}$$

La manera más eficiente de encontrar los coeficientes que conforman la solución en las diferentes regiones definidas anteriormente, consiste en a partir de las ecuaciones (5.25 a), (5.25 b), (5.35 a), (5.35 b) dejar todos los coeficientes de la región externa en función de los coeficientes de la solución interna al cilindro, esto es:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_0 &= \left( 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \left( -\ln \left( \frac{\epsilon}{2} \right) - \gamma + \frac{1}{2} \right) \right) a_0, \\
\bar{b}_0 &= -\frac{\pi}{4} \epsilon^2 a_0.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

A partir de las ecuaciones (5.46) y reemplazando en la ecuación (5.45) para  $n=0$ , se obtienen las siguientes soluciones para los coeficientes para  $n=0$ :

Solución interna al cilindro

$$a_0 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} - 1 \right). \quad (5.47)$$

“Inner solution”, solución externa al cilindro pero cercana a su superficie:

$$b_0 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} - 1 \right), \quad (5.48)$$

$$c_0(\epsilon) = -\frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} - 1 \right)}{\left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} \right)}. \quad (5.49)$$

“Outer solution”, solución lejos del cilindro:

$$\bar{a}_0 = 1 + i \frac{\pi \epsilon^2 \left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} - 1 \right)}{4 \left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} \right)}, \quad (5.50)$$

$$\bar{b}_0 = -\frac{\pi \epsilon^2 \left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} - 1 \right)}{4 \left( \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2} \right)}. \quad (5.51)$$

Para encontrar los coeficientes para  $n > 0$  se procede en forma similar al caso  $n=0$ , pero considerando ahora las ecuaciones (5.27) y (5.28), (5.35c) y (5.35d), esto conduce a:

$$\bar{a}_n = \Gamma(vn + 1) \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^{vn} \frac{\bar{\kappa}_n^n}{2v \Gamma(n + 1)} \frac{1 + v}{a_n}, \quad (5.52)$$

$$\bar{b}_n = -\frac{\pi}{\Gamma(vn)} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{vn} \frac{\bar{\kappa}_n^n}{2v \Gamma(n + 1)} \frac{v - 1}{a_n}. \quad (5.53)$$

Las ecuaciones (5.52) y (5.53) pueden ser introducidas en la ecuación (5.45), esto entrega una ecuación para los coeficientes  $a_n$ , esto es:

$$\begin{aligned} & \Gamma(vn + 1) \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^{vn} \left( \frac{\bar{\kappa}^n}{2v \Gamma(n + 1)} a_n - i \frac{\pi}{\Gamma(vn) \Gamma(vn + 1)} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{2vn} \frac{\bar{\kappa}^n}{2v \Gamma(n + 1)} a_n \right) \\ & = i^n \epsilon_n \exp\left( i \frac{(1 - v)n\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

despejando  $a_n$ , se obtiene:

$$a_n = \frac{\frac{2\nu}{\bar{k}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\nu n}}{\left(1 - i \frac{\pi}{\Gamma(\nu n)\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu n} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)\right)} i^n \epsilon_n \exp\left(i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}\right). \quad (5.54)$$

Introduciendo (5.54) en (5.27) y (5.28) se obtienen los coeficientes en la región externa cercana al cilindro, esto es:

$$b_n(\epsilon) = \frac{\frac{2\nu}{\bar{k}} \frac{1+\nu}{\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\nu n}}{\left(1 - i \frac{\pi}{\Gamma(\nu n)\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu n} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)\right)} i^n \epsilon_n \exp\left(i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}\right), \quad (5.55)$$

$$c_n(\epsilon) = \frac{\frac{\nu-1}{\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\nu n}}{\left(1 - i \frac{\pi}{\Gamma(\nu n)\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu n} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)\right)} i^n \epsilon_n \exp\left(i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}\right). \quad (5.56)$$

Finalmente los coeficientes de la solución en el campo lejano  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$  quedan dados por:

$$\bar{a}_n = \frac{i^n \epsilon_n}{\left(1 - i \frac{\pi}{\Gamma(\nu n)\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu n} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)\right)} \exp\left(i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}\right), \quad (5.57)$$

$$\bar{b}_n = -\frac{\frac{\pi}{\Gamma(\nu n)\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu n} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)}{\left(1 - i \frac{\pi}{\Gamma(\nu n)\Gamma(\nu n+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu n} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)\right)} i^n \epsilon_n \exp\left(i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}\right). \quad (5.58)$$

El set de soluciones (5.54-5.58) entrega los valores de los coeficientes para las soluciones del campo en las diferentes regiones del espacio.

Es interesante analizar algunos casos límites para los resultados encontrados, el primer caso obvio para analizar es el caso en que el campo magnético es cero, a partir de la ecuación

$B_z = \frac{2k_i^{\frac{1}{2}} e^a}{(1+k_i \rho^2)^2}$ , se hace evidente que el campo magnético encerrado en el cilindro se hace nulo cuando el parámetro  $k_i = 0$ . En este caso se obtiene que el parámetro  $\nu = 1$ . Introduciendo este valor de  $\nu$  en las ecuaciones (5.57) y (5.58) se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$  para  $n > 0$ :

$$\bar{a}_n = i^n \epsilon_n,$$

$$\bar{b}_n = 0.$$

(5.59)

Para  $n=0$ , se debe notar que los coeficientes  $\bar{a}_0$  y  $\bar{b}_0$  no dependen de  $\nu$  y por lo tanto su valor está dado por las ecuaciones (5.50) y (5.51). A partir de estos resultados, se puede concluir que el campo lejano en estas condiciones está dado por:

$$\psi_{outer}(\eta, \theta) \sim \left(1 + i \frac{\pi \epsilon^2}{4}\right) J_0(\eta) - \frac{\pi \epsilon^2}{4} N_0(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \epsilon_n J_n(\eta) \cos n\theta.$$

(5.60)

Esta ecuación puede ser re-escrita como:

$$\psi_{outer}(\eta, \theta) \sim i \frac{\pi \epsilon^2}{4} J_0(\eta) - \frac{\pi \epsilon^2}{4} N_0(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n J_n(\eta) \cos n\theta.$$

(5.61)

Notar que el término  $\sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n J_n(\eta) \cos n\theta = e^{i\eta \cos \theta}$  corresponde a la onda plana incidente, por lo tanto  $\psi_{outer}(\eta, \theta)$  representa aproximadamente la onda dispersada por un cilindro en un espacio plano. Esto es evidente, pues el caso  $\nu = 1$  representa un espacio plano al exterior del cilindro y con déficit angular nulo, por lo que es un espacio euclidiano normal.

Otro caso límite interesante de analizar es considerar  $\nu > 1$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ , es decir que el radio del tubo que contiene al campo magnético tiene a cero o que la longitud de onda del campo es extremadamente larga, tomando este límite en las ecuaciones (5.57) y (5.58) se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$ :

$$\bar{a}_n = i^n \epsilon_n e^{i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}},$$

$$\bar{b}_n = 0.$$

(5.62)

Las ecuaciones anteriores también consideran el caso  $n=0$ , Comparando con la ecuación (2.6) del capítulo 2, se puede ver que son similares, es decir, la ecuación (5.62) tiene la misma forma que un campo dispersado por una cuerda cósmica infinitamente delgada, con la diferencia que en este caso la cuerda no tiene masa, sino que es una línea de campo magnético. En ese sentido se puede concluir que los efectos gravitacionales producidos por ambos son idénticos, en el caso de una cuerda cósmica, como ya se mencionó, el déficit angular está dado por  $2\pi\Delta = 8\pi G\mu$ , en el caso del campo magnético confinado, el déficit angular está dado por  $2\pi\Delta = 4\pi k_i a^2$ , recordando que  $B_z \sim k_i^{1/2}$ , se deduce que  $\Delta \sim B_z^2$ , esto se puede interpretar en términos de energía, es decir el campo magnético confinado tiene una energía asociada proporcional a  $B_z^2$  y

esta energía es la encargada de deformar la métrica tal que genera un espacio cónico con un déficit angular mencionado anteriormente.

En el caso general, las ecuaciones (5.57) y (5.58) muestran que para valores de  $\epsilon \ll 1$ , los coeficientes  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$  quedan dados a segundo orden en  $\epsilon$  por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= 1 + i \frac{\pi \epsilon^2}{4}, \\ \bar{b}_0 &= -\frac{\pi \epsilon^2}{4}, \\ \bar{a}_n &= \left( 1 + i \frac{\pi}{\Gamma(vn)\Gamma(vn+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2vn} \left(\frac{v-1}{1+v}\right) \right) i^n \epsilon_n \exp\left(i \frac{(1-v)n\pi}{2}\right), \\ \bar{b}_n &= -\frac{\pi}{\Gamma(vn)\Gamma(vn+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2vn} \left(\frac{v-1}{1+v}\right) i^n \epsilon_n \exp\left(i \frac{(1-v)n\pi}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.63}$$

De esta forma, la función de onda se puede expresar como:

$$\psi_{outer}(\eta, \theta) \sim F(\eta, \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n e^{i \frac{(1-v)n\pi}{2}} J_{nv}(\eta) \cos n\theta.\tag{5.64}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (5.64) representa el campo dispersado por una línea de campo magnético de diámetro infinitamente delgado y la función  $F(\eta, \theta)$  es la corrección al campo producida por el diámetro finito del filamento de campo magnético, donde:

$$\begin{aligned}F(\eta, \theta) &= \frac{\pi \epsilon^2}{4} i (J_0(\eta) + i N_0(\eta)) \\ &\quad - 2 \frac{\pi}{\Gamma(v)\Gamma(v+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2v} \left(\frac{v-1}{1+v}\right) e^{i \frac{(1-v)\pi}{2}} (J_v(\eta) + i N_v(\eta)) \cos \theta,\end{aligned}\tag{5.65}$$

considerando la relación  $h_{\alpha}^{(1)}(\eta) = J_{\alpha}(\eta) + i N_{\alpha}(\eta)$ , en el campo lejano  $\eta \gg 1$ ,  $F(\eta, \theta)$  queda dado por:

$$F(\eta, \theta) \sim \frac{\pi \epsilon^2}{4} i \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} e^{i(\eta - \pi/4)} - 2 \frac{\pi}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right) e^{i\frac{(1-\nu)\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} e^{i\left(\eta - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cos \theta. \quad (5.66)$$

Es conveniente representar la ecuación (5.66) en forma factorizada, esto es:

$$F(\eta, \theta) \sim \frac{\pi \epsilon^2}{4} i \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} e^{i(\eta - \pi/4)} \left( 1 + 2i \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2(\nu-1)} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right) e^{i\frac{(1-2\nu)\pi}{2}} \cos \theta \right).$$

Se puede ver que el segundo término de la ecuación (5.66) es de orden menor que el primero debido al factor  $(\nu - 1)$ , ya que el parámetro  $\nu$  puede ser considerado muy cercano a 1, esto lleva a concluir que el factor dominante es solamente el término  $\frac{\pi \epsilon^2}{4} i \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} e^{i(\eta - \pi/4)}$ . Se puede concluir que para longitudes de onda larga  $k\alpha \ll 1$ , el efecto del diámetro del tubo magnético es muy poco apreciable y el campo es prácticamente indistinguible de la estructura del campo dispersado por un tubo de campo magnético delgado.

A partir de (5.65) se puede calcular el campo para  $\theta = 0$ , es decir el campo en la línea coincidente con la dirección del campo y en una línea con el filamento de campo magnético, considerando el campo lejano, es decir,  $\eta = k\rho \gg 1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \psi_{outer}(\eta, \theta = 0) \sim & \frac{\pi \epsilon^2}{4} i \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} e^{i(\eta - \pi/4)} \left( 1 + 2i \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2(\nu-1)} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right) e^{i\frac{(1-2\nu)\pi}{2}} \right) \\ & + 2e^{ik\rho(1-\frac{1}{2}\Delta^2)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i\pi/4} e^{\frac{i}{2}\Delta^2 k\rho}}{\Delta \sqrt{k\rho}} \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Como ya se mencionó anteriormente, despreciaremos el término proporcional a  $\left(\frac{\nu-1}{1+\nu}\right)$  por ser de segundo orden, esto conduce a:

$$\psi_{outer}(\eta, \theta = 0) \sim \frac{\pi \epsilon^2}{4} i \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} e^{i(\eta - \pi/4)} + 2e^{i\eta(1-\frac{1}{2}\Delta^2)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i\pi/4} e^{\frac{i}{2}\Delta^2 \eta}}{\Delta \sqrt{k\eta}} \right]. \quad (5.68)$$

Tomando el valor complejo conjugado de la expresión anterior y posteriormente calculando  $\Phi_0^2 = |\psi_{outer}(\eta, \theta = 0)|^2$ , se obtiene:



$$\Phi_0^2 = \frac{\pi\epsilon^2}{2} i \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} \left[ e^{i\eta\frac{1}{2}\Delta^2 - i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\eta\frac{1}{2}\Delta^2 + i\frac{\pi}{4}} \right] + 4 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i\pi/4} e^{\frac{i}{2}\Delta^2\eta}}{\Delta\sqrt{\eta}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-i\pi/4} e^{-\frac{i}{2}\Delta^2\eta}}{\Delta\sqrt{\eta}} \right], \quad (5.69)$$

En la expresión (5.69) se han despreciados los términos del orden  $\sim \left(\frac{1}{\eta}\right)$  y superiores. Posteriormente reordenando esta ecuación se obtiene la siguiente expresión:

$$\Phi_0^2 = -\pi\epsilon^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}} \sin\left(\frac{\Delta^2\eta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\sqrt{\eta}} \cos\left(\frac{\Delta^2\eta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (5.70)$$

Reordenando se obtiene:

$$\Phi_0^2 = 4 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\pi\sqrt{\eta}} \left( \cos\left(\frac{(\pi\Delta)^2\eta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\Delta\pi^2\epsilon^2}{4} \sin\left(\frac{(\pi\Delta)^2\eta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right) \right]. \quad (5.71)$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión:

$$\Phi_0 = 2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\left(1 - \frac{\Delta\pi^2\epsilon^2}{4}\right)}{\pi\Delta\sqrt{\eta}} \cos\left(\frac{(\pi\Delta)^2\eta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]^{1/2}. \quad (5.72)$$

Se puede ver que esta expresión es muy similar a la ecuación (3.47) para una cuerda cósmica delgada, con la diferencia del factor  $\left(1 - \frac{\Delta\pi^2\epsilon^2}{4}\right)$ , este factor es prácticamente la unidad, ya que el factor  $\Delta\pi^2\epsilon^2$  es de orden más pequeño  $\epsilon^2$ , ya que  $\Delta \ll 1$ .

Es conveniente mencionar, que en el caso de un campo escalar sin masa, se puede obtener una solución exacta al problema mucho más cómoda de utilizar que las ecuaciones (5.13-5.16). En efecto, a partir de las soluciones exactas de las ecuaciones (5.17) y (5.21), y posteriormente imponiendo las condiciones de borde en la interface  $\rho = a$ , después de bastante álgebra, se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$ :

$$\bar{a}_n = \frac{1}{1 + iG_n} i^n \epsilon_n e^{i\frac{(1-\nu)n\pi}{2}},$$

$$\bar{b}_n = \frac{G_n}{1 + iG_n} i^n \varepsilon_n e^{i \frac{(1-\nu)n\pi}{2}}, \quad (5.73)$$

donde

$$G_n = \frac{F_2(\bar{\kappa}, \kappa, a)}{F_1(\bar{\kappa}, \kappa, a)},$$

$$F_1(\bar{\kappa}, \kappa, a) = \left( \bar{\kappa} (J_{n-1}(\bar{\kappa}a) - J_{n+1}(\bar{\kappa}a)) N_{\nu n}(\kappa a) - J_n(\bar{\kappa}a) \kappa (N_{\nu n-1}(\kappa a) - N_{\nu n+1}(\kappa a)) \right),$$

$$F_2(\bar{\kappa}, \kappa, a) = \left( \bar{\kappa} (J_{n-1}(\bar{\kappa}a) - J_{n+1}(\bar{\kappa}a)) J_{\nu n}(\kappa a) - J_n(\bar{\kappa}a) \kappa (J_{\nu n-1}(\kappa a) - J_{\nu n+1}(\kappa a)) \right). \quad (5.74)$$

La Figura 5.1 muestra la distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  y la comparación entre la solución exacta (5.72) y la solución asintótica (5.64) con los valores de los parámetros:  $\epsilon = \kappa a = 0.2$ ,  $k_i = 10$  y  $\rho = 100$ . Se puede apreciar que las dos soluciones son indistinguibles, corroborando lo anticipado analizando la solución asintótica (5.64).

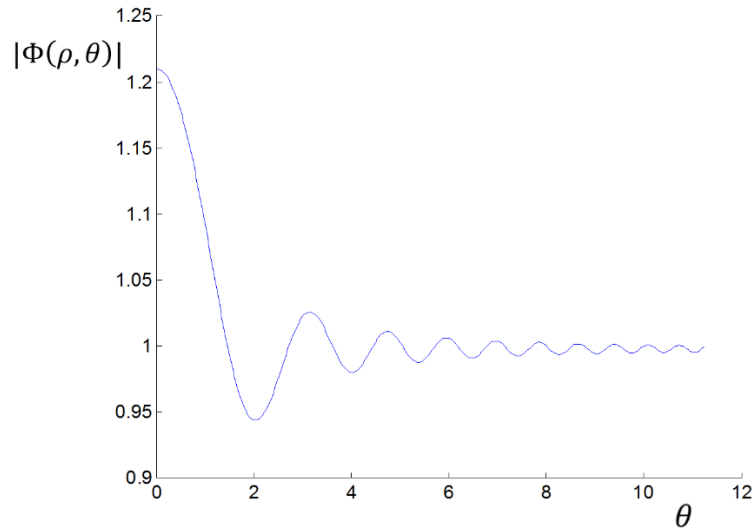


Figura 5.1. Comparación para distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  entre la solución exacta (5.72) y la solución asintótica (5.64) con los valores de los parámetros:  $\epsilon = \kappa a = 0.2$ ,  $k_i = 10$  y  $\rho = 100$ .

En la medida que se incrementa el valor de  $\kappa a$ , comienzan a hacerse presente los efectos del diámetro finito del tubo magnético, esto se puede apreciar en la Figura 5.2, donde se muestra la

comparación para la distribución angular  $|\Phi(\rho, \theta)|$  entre la solución exacta (5.72) y la solución asintótica (5.64). Los valores de los parámetros están dados por:  $\epsilon = ka = 20$ ,  $k_i = 0.01$  y  $\rho = 100$ . La línea azul muestra la solución exacta y la línea roja la solución para una cuerda infinitamente delgada. Se puede apreciar que en la región central, las dos soluciones son prácticamente indistinguibles, sin embargo para ángulos de apertura mayores a  $10^\circ$ , la solución exacta (línea azul) muestra diferencias bastante notorias con respecto a la solución de un tubo delgado (Ec. 5.64).

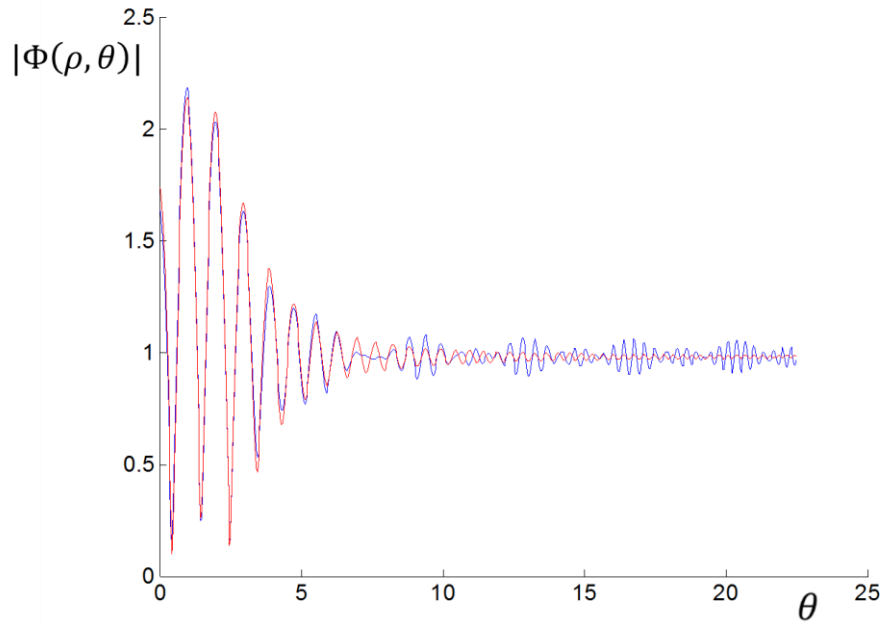


Figura 5.2. Comparación para distribución angular de  $|\Phi(\rho, \theta)|$  entre la solución exacta (5.72) denotada con línea color azul y la solución asintótica (5.64), denotada con color rojo con los valores de los parámetros:  $\epsilon = \kappa a = 20$ ,  $k_i = 0.01$  y  $\rho = 100$ .

Como conclusión de este capítulo se puede destacar que tanto los resultados numéricos de las ecuaciones exactas, como también los resultados asintóticos muestran que la propagación de campos escalares en el espacio tiempo de un tubo de campo magnético de diámetro finito, difiere poco de la propagación de campos en la métrica de un tubo de campo magnético de diámetro muy pequeño, tal que  $\kappa a \ll 1$ , según los resultados numéricos, esto es válido incluso para valores de  $\kappa a \sim 1$ . Además, se aprecia que en el caso que el radio del campo magnético tiende a cero, la línea de campo magnético se comporta como una cuerda cósmica para efectos de la propagación de campos escalares en la métrica producida por el campo magnético.

## Conclusiones

La principal conclusión de este estudio es que se muestra que el método de matching asintótico es una efectiva herramienta para analizar la propagación de campos escalares en métricas con simetría cilíndrica. En particular en el capítulo III se re-obtienen de una forma eficiente y elegante todos los resultados para la propagación de campos escalares en torno del espacio-tiempo de una cuerda cósmica, mostrando la estructura del campo y entregando una visión clara de los efectos de la métrica en la propagación de los campos.

En el capítulo IV se generaliza el estudio al caso de la métrica producida por una cuerda cósmica de diámetro finito e impenetrable, además se comparan los resultados analíticos exactos con las soluciones asintóticas, mostrando un muy buen acuerdo entre los resultados. Se puede apreciar que el efecto sobre la propagación de los campos consta de dos partes, primero un efecto netamente producido por el diámetro finito de la cuerda y un segundo efecto producido netamente por la métrica.

En el capítulo V se estudia la propagación de campos escalares en la métrica de Safko-Witten en el caso de longitudes de onda larga, esto es  $ka \ll 1$ , se aprecia que en el caso que el radio del campo magnético tiende a cero, la línea de campo magnético se comporta como una cuerda cósmica para efectos de la propagación de campos escalares en la métrica producida por el campo magnético.

Las extensiones posibles de este trabajo son variadas, como por ejemplo aplicar esta metodología a la propagación de campos fermiónicos en este tipo de métricas como también a la propagación de ondas electromagnéticas. Otras aplicaciones posibles son la aplicación del método de matching directamente a la resolución de las ecuaciones de campo de Einstein, por ejemplo, la métrica producida por la presencia de más de una cuerda cósmica es un problema complejo de resolver, sin embargo es posible resolverlo bajo la aproximación de matching asintótico, y posteriormente, estudiar la propagación de campos sobre la métrica encontrada.

## Referencias bibliográficas

- [1] Levi-Civita, Rend. Accad. Lincei, v. 28, 101 (1919).
- [2] A. Einstein, R. Rosen *On gravitational waves*. J. Franklin Inst. v. **223**, 43 (1937).
- [3] Para una revisión detallada del problema de las soluciones de las Ecuaciones de Einstein con simetría cilíndrica vea K. Bronnikov, N. O. Santos and A. Wang 3, arXiv:1901.06561 [gr-qc].
- [4] T. W. B. Kibble, J. Phys. A 9, 1387 (1976).
- [5] A. Vilenkin, Phys. Rept. 121, 263 (1985).
- [6] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [7] Letelier, P. S. (1987). Multiple cosmic strings. Classical and Quantum Gravity, 4(4), L75.
- [8] Jeong, E., & Smoot, G. F. (2005). Search for cosmic strings in cosmic microwave background anisotropies. The Astrophysical Journal, 624(1), 21.
- [9] Polchinski, J. (1998). String theory: Volume 2, superstring theory and beyond. Cambridge university press.
- [10] Witten, E. (1985). Cosmic superstrings. Physics Letters B, 153(4-5), 243-246.
- [11] J. Safko and L. Witten, J. Math. Phys. **12**, 257 (1971); J. Safko and L. Witten, Phys. Rev. D **5**, 293 (1972).
- [12] J. S. Dowker, Il Nuovo Cimento **52B**, 129 (1970); L. H. Ford and A. Vilenkin, J. Phys. A **14**, 2353 (1981); J. Stachel, Phys. Rev. D **26**, 1281 (1982); C. J. C. Burges, Phys. Rev. D **32**, 504 (1985); M. Nouri-Zonoz and A. Parvizi, Phys. Rev. D **88**, 023004 (2013)
- [13] B. Linet, Ann.Inst.H.Poincare Phys.Theor. **45**, 249 (1986) .
- [14] T. Suyama, T. Tanaka and R. Takahashi, Physical Review D **73**, 024026 (2006).
- [15] A. Sommerfeld, Mathem. Ann. **47**, 317 (1896).
- [16] A. Sommerfeld, Lectures on Theoretical Physics, Vol. IV, Optics (Academic Press, New York, 1954).
- [17] A. Sommerfeld, Mathematical Theory of Diffraction (Birkhauser, Boston, 2004).
- [18] I. Fernández-Núñez and O. Bulashenko, Phys. Lett. A **380**, 2897 (2016); *ibid.* **381**, 1764 (2017).
- [19] Y. Z. Umul, Optik-International Journal for Light and Electron Optics **157**, 1227 (2018).
- [20] A. Y. Miguelote, M. F. A. da Silva, A. Wang and N.O. Santos, Class. Quantum Grav. **18**, 4569 (2001).
- [21] V. B. Bezerra, Class. Quant. Grav. **8**, 1939 (1991).
- [22] H.F. Mota, H. F and V. B. Bezerra, J. Math. Phys. **50**, 112503.
- [23] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Ed. (1968).