

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**Departamento de Física**



**Fase de dimerización dinámica en una red de Jaynes-Cummings**

**Rubén Caupolicán Peña Guzmán**

**Profesor Guía: Guillermo Romero Huenchuñir**

**Tesis presentada en el cumplimiento de los  
requisitos para la obtención del grado de:**

**Magíster en Ciencias con mención en Física**

**Santiago – Chile**

**2020**

---

© (Rubén Caupolicán Peña Guzmán)(2020) Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial sin autorización previa y por escrito.

---

Dedicada a *Daniela Andrea Silva Alegría*.

---

# Resumen

En esta tesis, informamos sobre la aparición de una fase dinámica de un sistema fuertemente correlacionado de luz y materia, la cual se rige por procesos de dimerización debido a interacciones de corto y largo alcance entre dos sitios de una red unidimensional. La fase dinámica aparece en un régimen intermedio de la interacción entre la luz y la materia, entre los casos resonante y dispersivo. Describimos la dinámica quench desde un estado inicial con factor de llenado entero de una red finita de resonadores acoplados, cada uno interaccionando con un sistema de dos niveles, en un escenario de sistema cerrado y abierto. La dinámica del sistema cerrado tiene un espacio de Hilbert efectivo que nos permite demostrar y caracterizar la aparición de la fase dinámica a través de cantidades promediadas en el tiempo, tales como la varianza en el número de polaritones por sitio y la entropía lineal. Demostramos que la fase de dimerización dinámica se rige por interacciones intrínsecas de dos cuerpos y la estructura topológica de la red. En la dinámica del sistema abierto, mostramos evidencia sobre la robustez de los procesos de dimerización dinámica bajo mecanismos de pérdida. Nuestros hallazgos pueden ser utilizados para determinar el rango de desintonización entre las frecuencias de la luz y la materia, para predecir la aparición de la fase dinámica.

---

# Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer al Dr. Guillermo Romero y al Dr. Felipe Torres por el trabajo y dedicación que han brindado a este trabajo de investigación. Además, quisiera agradecer el apoyo del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) a través del proyecto N° 1190727 y de Vicerrectoría de Postgrado USACH.

---

# Publicación

El trabajo presentado en esta tesis se publicó en la revista New Journal of Physics.

R. Peña, F. Torres, and G. Romero, “Dynamical dimerization phase in Jaynes–Cummings lattices,”  
New Journal of Physics, vol. 22, p. 033034, mar 2020.

---

# Índice general

	I
	II
<b>Resumen</b>	III
<b>Agradecimientos</b>	IV
<b>Publicación</b>	V
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Transición de fase cuántica en una red de Jaynes-Cummings</b>	<b>5</b>
2.1. El Modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	5
2.2. Propiedades del Modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	8
2.3. El modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard . . . . .	11
2.4. Representación en la base polaritónica . . . . .	12
<b>3. Dinámica quench en una red de Jaynes-Cummings</b>	<b>15</b>
3.1. Introducción . . . . .	15
3.2. Protocolo quench . . . . .	16
3.3. Dinámica quench en un dímero de Jaynes-Cummings-Hubbard . . . . .	16
<b>4. Fase de dimerización dinámica en una red de Jaynes-Cummings</b>	<b>22</b>
4.1. Introducción . . . . .	22
4.2. Sistema cerrado . . . . .	22
4.3. Sistema abierto . . . . .	24
4.3.1. Dinámica disipativa en una red de Jaynes-Cummings . . . . .	25
<b>5. Conclusiones</b>	<b>28</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>30</b>

---

# Índice de figuras

2.1. Representación esquemática del modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	6
2.2. Representación esquemática de la estructura energética del sistema de dos niveles . . . . .	7
2.3. Las autoenergías del modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	9
2.4. Espectro de energía del modelo de Jaynes-Cummings en el régimen resonante. . . . .	11
2.5. Espectro de energía del modelo de Jaynes-Cummings en el régimen dispersivo. . . . .	12
2.6. Representación esquemática del modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard . . . . .	13
3.1. Población de los estados $ \psi_0\rangle,  \psi_2\rangle_i^\pm,  \psi_2\rangle_j^\pm,  \psi_1\rangle_i^+,  \psi_1\rangle_j^+,  \psi_1\rangle_{ij}^+$ en función del tiempo	17
3.2. Varianza promediada en el tiempo en función de $\log_{10}(\Delta/g)$ . . . . .	20
3.3. Promedio en el tiempo de la entropía lineal ( $E$ ) en función de $\log_{10}(\Delta/g)$ . . . . .	21
4.1. Razón entre la función de correlación a primeros vecinos promediada en el tiempo $C_{ij}$ (función de correlación a vecinos mas lejanos $C_{ik}$ ) del trímero y la varianza del dímero . . . . .	24
4.2. Razón entre las funciones de correlación $C_{ij}, C_{ik}, C_{il}$ del tetrámero y la varianza del dímero . . . . .	25
4.3. Razón entre la función de correlación a primeros vecinos promediada en el tiempo $C_{ij}$ (función de correlación a vecinos mas lejanos $C_{ik}$ ) del trímero y la varianza del dímero, en presencia de disipación. . . . .	26

---

# Capítulo 1

## Introducción

Resolver numéricamente la ecuación de Schrödinger de sistemas fuertemente correlacionados es un problema intratable, en toda su complejidad, utilizando recursos computacionales clásicos. Los recursos de memoria para almacenar los estados cuánticos de un sistema físico crecen exponencialmente con el número de entidades del sistema. Por lo tanto, enfocarse en la resolución exacta de un sistema físico de muchos cuerpos a través de un computador clásico es una tarea ineficaz debido a que alcanzan rápidamente sus limitaciones [1, 2]. Sin embargo, estas limitaciones pueden desaparecer utilizando sistemas cuánticos, manipulables y controlables, que se rigen por las leyes de la mecánica cuántica. Richard Feynmann, en el año 1982, fue el primero en sugerir que la complejidad de un sistema de muchos cuerpos puede ser resuelta mediante simulaciones realizadas a través de un computador cuántico [3].

En el día de hoy, un computador cuántico universal sigue siendo un objetivo a largo plazo debido a que requiere el control y la manipulación total de los estados cuánticos de un sistema de muchos cuerpos, y la implementación de códigos de corrección de errores provocados por la interacción con el medio ambiente [4]. Sin embargo, es posible diseñar arquitecturas controlables para simular sistemas cuánticos, estas arquitecturas se denominan simuladores cuánticos. Los simuladores cuánticos son plataformas controlables que permiten reproducir la dinámica de un sistema cuántico con el objetivo de capturar propiedades relevantes del sistema [5]. En este contexto, los simuladores cuánticos ofrecen una alternativa favorable al momento de simular sistemas físicos de muchos cuerpos, siendo capaces de abordar problemas que involucran muchos grados de libertad y un alto grado de entrelazamiento. Algunas implementaciones físicas corresponden a átomos ultra fríos en redes ópticas [6–8], iones atrapados [9–11] y circuitos superconductores [12–14]. Estos últimos proporcionan un nuevo enfoque para la simulación cuántica basada en sistemas híbridos de materia y luz [15–17]. En los circuitos superconductores es posible generar estados entrelazados entre la luz y la materia denominados polaritones. Los simuladores cuánticos basados en la interacción de la

luz con la materia son capaces de implementar el modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard [18], el cual describe la dinámica de una red de  $L$  cavidades acopladas, cada una de ellas interactuando con un sistema de dos niveles de energía. Cada sitio de la red de cavidades se describe mediante el modelo de Jaynes-Cummings (JC)[19]. En este contexto, es posible estudiar fenómenos que aparecen en sistemas fuertemente correlacionados de muchos cuerpos tales como transiciones de fase cuánticas fuera del equilibrio. La desintonización entre la frecuencia de la luz y la materia juega un rol importante en la descripción de la transición de fase cuántica fuera del equilibrio. A medida que aumentamos la desintonización desde el caso resonante al dispersivo, el sistema transita desde el estado de aislante de Mott al estado superfluido de fotones [15, 20].

El objetivo de esta tesis es demostrar que, mediante el uso de cálculos numéricos y un modelo analítico, durante la transición de fase desde el estado de aislante de Mott al estado superfluido, en un sistema fuertemente correlacionado de luz-materia, surge una fase de dimerización dinámica (DDP). Esta fase está caracterizada por procesos de dimerización a causa de interacciones de corto y largo alcance entre dos sitios de la red de Jaynes-Cummings. Entendemos por dimerización dinámica que, durante la evolución temporal de una red finita de Jaynes-Cummings, aparecen resonancias relacionadas con la red de JC de dos sitios. Para identificar el régimen de DDP, se analiza la dinámica quench en una red de Jaynes-Cummings de pocos sitios. Primero, se resuelve analíticamente la dinámica quench con un factor de llenado  $\nu = 1$  en un dímero de Jaynes-Cummings. Para ello, se encuentra un Hamiltoniano efectivo descartando los estados polaritónicos de más alta energía que no son poblados durante la evolución del sistema. Se presenta la solución exacta de cantidades promediadas en el tiempo, tales como la varianza en el número de polaritones por sitio y la entropía lineal. Finalmente, y al extender la red de Jaynes-Cummings a más sitios, se demuestra la aparición de una fase de dimerización dinámica caracterizada por interacciones entre dos sitios de la red de JC.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera:

En el **capítulo 2**, se describe el modelo de Jaynes-Cummings, sus propiedades y el espectro de energía. Posteriormente, se describe el modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard, su representación en la base polaritónica y sus propiedades.

En el **capítulo 3**, se establece un protocolo para la dinámica quench en un dímero. Posteriormente, se resuelve analíticamente la dinámica cuántica del dímero usando un Hamiltoniano efectivo. Se obtienen expresiones analíticas de parámetros de orden promediados en el tiempo, tales como la varianza del número de excitaciones y la entropía lineal, que nos permiten caracterizar las transiciones de fase cuánticas (fuera del equilibrio) desde un estado aislante de Mott al estado superfluido.

En el **capítulo 4**, se extiende la red de Jaynes-Cummings a tres y cuatro sitios y se demuestra la aparición de procesos de dimerización que ocurren dentro de un régimen intermedio de interacción

entre radiación-materia definido por el rango  $1 < \Delta/g < 10$ , donde  $\Delta$  es la desintonización entre la frecuencia de la luz y la materia, y  $g$  es la fuerza de interacción entre la luz y la materia. Primero, se describe los procesos de dimerización sin considerar disipación en el sistema. Posteriormente, se considera la interacción del sistema con el medio ambiente, lo que conduce a mecanismos de disipación tanto en la preparación inicial como durante la evolución del sistema. El análisis de la dinámica disipativa del sistema se lleva a cabo estudiando las soluciones de la ecuación maestra de Lindblad vía Runge-Kutta.

En el **capítulo 5**, se presentan las conclusiones.

---

## Capítulo 2

# Transición de fase cuántica en una red de Jaynes-Cummings

### 2.1 El Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings (JC) describe la interacción entre un sistema de dos niveles (TLS) y un modo del campo electromagnético cuantizado [19], tal como se muestra esquemáticamente en la figura 2.1. El modelo de JC se describe a través del siguiente Hamiltoniano:  $\hat{H}_{JC} = \hat{H}_{\text{TLS}} + \hat{H}_{\text{CAV}} + \hat{H}_{\text{TLS-CAV}}$ , donde  $\hat{H}_{\text{TLS}}$  describe el sistema de dos niveles,  $\hat{H}_{\text{CAV}}$  describe el campo electromagnético dentro de la cavidad y  $\hat{H}_{\text{TLS-CAV}}$  describe la interacción entre ambos sistemas. En todo el trabajo de Tesis se utiliza  $\hbar = 1$ .

La figura 2.2 representa esquemáticamente la estructura energética del sistema de dos niveles, el cual consiste en un estado fundamental  $|\downarrow\rangle$  con energía  $E_0 = 0$  y un estado excitado  $|\uparrow\rangle$  con energía  $E_1 = \omega_a$ . Los autoestados del TLS son definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Esta representación de los autoestados y sus respectivas autoenergías permiten escribir de forma matricial el Hamiltoniano del TLS de la siguiente manera:

$$\hat{H}_{\text{TLS}} = E_1|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + E_0|\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

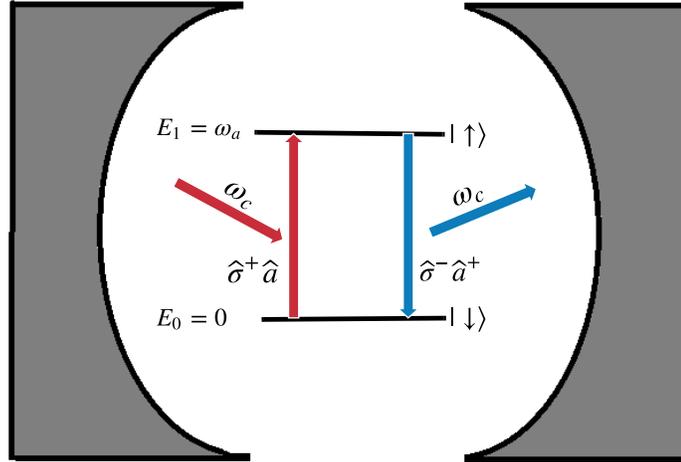


Figura 2.1: Representación esquemática del modelo de Jaynes-Cummings. La cavidad admite solo un modo del campo electromagnético  $\omega_c$ , el cual interactúa con un sistema de dos niveles de frecuencia  $\omega_a$ .

La transición entre los estados del sistema de dos niveles se representa a través de los operadores  $\hat{\sigma}^-$  y  $\hat{\sigma}^+$ . El operador  $\hat{\sigma}^-$  describe la transición desde el estado excitado al estado fundamental aniquilando una excitación y el operador  $\hat{\sigma}^+$  describe la transición desde el estado fundamental al estado excitado creando una excitación. Por lo tanto, los operadores  $\hat{\sigma}^-$  y  $\hat{\sigma}^+$  se describen a través de los proyectores

$$\begin{aligned} |\downarrow\rangle\langle\uparrow| &= \hat{\sigma}^-, \\ |\uparrow\rangle\langle\downarrow| &= \hat{\sigma}^+. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano en 2.2 puede reescribirse utilizando la definición de los operadores de creación y aniquilación del sistema de dos niveles de la siguiente manera:

$$\hat{H}_{\text{TLS}} = \omega_a \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-. \quad (2.4)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano  $\hat{H}_{\text{CAV}}$  describe el campo electromagnético dentro de la cavidad. El campo electromagnético puede ser descompuesto en un conjunto de osciladores armónicos cuánticos [21]  $\hat{H}_{\text{free}} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  donde  $\omega_k$  y  $\hat{a}_k^\dagger$  ( $\hat{a}_k$ ) corresponde a la frecuencia y el operador de creación (aniquilación) de fotones del  $k$ -ésimo modo armónico, respectivamente. La cavidad permite confinar múltiples modos del campo electromagnético, sin embargo, solo consideraremos el modo fundamental del conjunto de osciladores. Por lo tanto, el Hamiltoniano que describe la luz confinada en una cavidad tiene la siguiente forma:

$$\hat{H}_{\text{CAV}} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.5)$$

donde  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) es el operador de aniquilación (creación) que actúa en la base de estados de Fock  $|n\rangle$ .

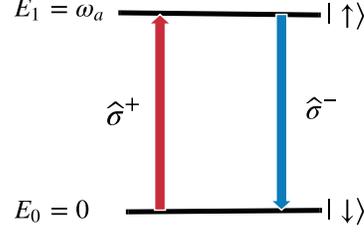


Figura 2.2: Representación esquemática de la estructura energética del sistema de dos niveles. El sistema de dos niveles consiste en un estado fundamental  $|\downarrow\rangle$  con energía  $E_0 = 0$  y un estado excitado  $|\uparrow\rangle$  con energía  $E_1 = \omega_a$ . La transición entre el estado fundamental y el estado excitado se representa a través de los operadores  $\hat{\sigma}^-$  y  $\hat{\sigma}^+$ .

Por último, el Hamiltoniano  $\hat{H}_{\text{TLS-CAV}}$  describe la interacción entre el sistema de dos niveles y el modo del campo electromagnético dentro de la cavidad. Al considerar que la longitud de onda del campo electromagnético es mucho más grande que la escala atómica, lo que se domina aproximación dipolar [22], el Hamiltoniano de interacción puede escribirse de la siguiente manera:

$$\hat{H}_{\text{TLS-CAV}} = -\hat{D} \cdot \hat{E}, \quad (2.6)$$

donde  $\hat{D}$  es el momento dipolar atómico y  $\hat{E}$  es el campo eléctrico. El momento dipolar atómico puede ser reescrito en la base del sistema de dos niveles

$$\hat{D} = \sum_{i,j=\uparrow,\downarrow} |i\rangle\langle i|\hat{D}|j\rangle\langle j|. \quad (2.7)$$

Los términos correspondientes a transiciones del tipo  $\langle\uparrow|\hat{D}|\uparrow\rangle$  y  $\langle\downarrow|\hat{D}|\downarrow\rangle$  no son permitidas debido a que son transiciones que no cambian de paridad [22]. El momento dipolar atómico  $\hat{D}$  solo conecta estados de diferente paridad. Las únicas transiciones permitidas son las siguientes:

$$D_{\uparrow\downarrow} = \langle\uparrow|\hat{D}|\downarrow\rangle, \quad (2.8)$$

$$D_{\downarrow\uparrow} = \langle\downarrow|\hat{D}|\uparrow\rangle. \quad (2.9)$$

Usando la definición de los operadores del sistema de dos niveles de energía, el momento dipolar puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\hat{D} = D_{\uparrow\downarrow}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + D_{\downarrow\uparrow}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| = D_{\downarrow\uparrow}\hat{\sigma}^+ + D_{\uparrow\downarrow}\hat{\sigma}^-. \quad (2.10)$$

El campo eléctrico se puede escribir como  $\hat{E} = E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  [21], donde  $E_0$  es la amplitud del campo eléctrico. Usando la expresión del momento dipolar (2.10) y definiendo la fuerza de acoplamiento entre TLS-cavidad como  $g = -D_{\downarrow\uparrow}E_0$ , el Hamiltoniano de interacción se puede reescribir de la

siguiente manera:

$$\hat{H}_{\text{TLS-CAV}} = g(\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.11)$$

En el Hamiltoniano (2.11) existen dos términos que describen procesos que no conservan el número de excitaciones del sistema. El término  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^+$  describe la creación de una excitación tanto en el TLS como en la cavidad, mientras que el término  $\hat{a}\hat{\sigma}^-$  describe la aniquilación de una excitación tanto en el TLS como en la cavidad. Para analizar la evolución temporal de los términos del Hamiltoniano (2.11) se reescribe en la imagen de interacción

$$\hat{H}_{\text{TLS-CAV}}(t) = g(\hat{a}\hat{\sigma}^- e^{-i(\omega_c + \omega_a)t} + \hat{a}\hat{\sigma}^+ e^{-i(\omega_c - \omega_a)t} + \text{H.c.}). \quad (2.12)$$

El Hamiltoniano (2.12) describe términos que oscilan con frecuencia  $\omega_c \pm \omega_a$ . Dentro del límite de acoplamiento débil ( $g\sqrt{n} \ll \omega_c \approx \omega_0$ ), los términos que no conservan el número de excitaciones pueden ser despreciados en la dinámica del sistema debido a que oscilan muy rápido con respecto a  $g$ . Este enfoque se conoce como la aproximación de onda rotante (RWA) [22]. Finalmente, el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings es el siguiente:

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \omega_a \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+). \quad (2.13)$$

## 2.2 Propiedades del Modelo de Jaynes-Cummings

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings presenta propiedades importantes que se estudiarán en esta sección. Los términos de interacción en (2.13), describen procesos de intercambio de excitaciones entre el sistema de dos niveles y la cavidad. El término  $\hat{a}\hat{\sigma}^+$  describe la transición desde el estado fundamental al estado excitado del TLS aniquilando una excitación en la cavidad, mientras que el término  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^-$  describe la transición desde el estado excitado al estado fundamental del TLS creando una excitación en la cavidad.

Para estudiar las propiedades del modelo de JC es conveniente introducir el parámetro desintonización  $\Delta = \omega_a - \omega_c$ . Por lo tanto, el Hamiltoniano de JC se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \Delta \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- + \omega_c \hat{N}_p + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hat{a} \hat{\sigma}^+), \quad (2.14)$$

donde  $\hat{N}_p = \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- + \hat{a}^\dagger \hat{a}$  es el operador número de excitaciones. Este operador conmuta con el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$[\hat{N}_p, \hat{H}_{\text{JC}}] = 0, \quad (2.15)$$

esto quiere decir, que el modelo de Jaynes-Cummings tiene una simetría  $U(1)$ . Esta propiedad tiene dos implicancias. La primera es que el operador número de excitaciones y el Hamiltoniano

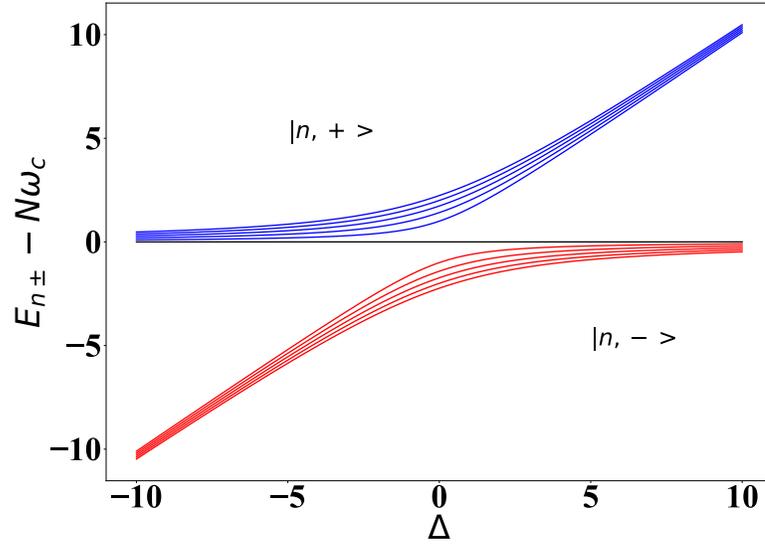


Figura 2.3: Las autoenergías (2.22) del modelo de Jaynes-Cummings en función del parámetro desintonización  $\Delta$ .

de Jaynes-Cummings comparten una base de autoestados común, en el cual ambos operadores son diagonales. El operador número de excitaciones se define como la suma del operador número de excitaciones de la cavidad ( $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ) y el operador número de excitaciones del sistema de dos niveles ( $\hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-$ ), los cuales conmutan entre si. Por lo tanto, la base de estados ( $\beta$ ) puede construirse a través del producto tensorial entre la base de Fock  $|n\rangle$  y la base del sistema de dos niveles  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

$$\beta = \{|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |n\rangle, n \geq 0\}. \quad (2.16)$$

El conjunto de estados  $\beta$  forman un set de autoestados ortonormales y satisfacen la relación de completitud

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\downarrow, \uparrow} |n, s\rangle \langle n, s| = \mathbb{1}, \quad (2.17)$$

$$\langle n', s' | n, s \rangle = \delta_{n, n'} \delta_{s, s'}. \quad (2.18)$$

La segunda implicancia es que el operador  $\hat{N}_p$  es una cantidad conservada en el modelo de Jaynes-Cummings. Los procesos de intercambio de excitaciones entre la cavidad y el TLS siempre conservan el número de excitaciones. La creación de una excitación en la cavidad a través del operador  $a^\dagger$  va acompañada de la transición del TLS a través del operador  $\sigma^-$  y viceversa. Por lo tanto, la transición entre los estados permitidos del sistema es la siguiente:

$$|\downarrow, n\rangle \longleftrightarrow |\uparrow, n-1\rangle, \quad (2.19)$$

donde los estados (2.19) son estados separables conocidos como "Bare states". El estado fundamen-

tal del modelo de Jaynes-Cummings es el estado  $|0, \downarrow\rangle$  con cero excitaciones tanto en la cavidad como en el TLS. En consecuencia, la forma matricial del Hamiltoniano de JC para  $n \geq 1$  es la siguiente:

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \begin{pmatrix} \langle \uparrow, n-1 | \hat{H}_{\text{JC}} | \uparrow, n-1 \rangle & \langle \uparrow, n-1 | \hat{H}_{\text{JC}} | \downarrow, n \rangle \\ \langle \downarrow, n | \hat{H}_{\text{JC}} | \uparrow, n-1 \rangle & \langle \downarrow, n | \hat{H}_{\text{JC}} | \downarrow, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega_c + \Delta & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & n\omega_c \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Diagonizando la matriz (2.20) se obtienen los autoestados y las autoenergías que están dadas por:

$$|n, \pm\rangle = \gamma_{n\pm} |\downarrow, n\rangle + \rho_{n\pm} |\uparrow, n-1\rangle, \quad (2.21)$$

$$E_n^\pm = n\omega_c + \frac{\Delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}, \quad (2.22)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ,  $\gamma_{n+} = \sin(\frac{\theta_n}{2})$ ,  $\rho_{n+} = \cos(\frac{\theta_n}{2})$ ,  $\rho_{n-} = -\gamma_{n+}$ ,  $\gamma_{n-} = \rho_{n+}$  y  $\tan \theta_n = \frac{2g\sqrt{N}}{\Delta}$ . Los autoestados para  $n = 0$  son los siguientes:  $|0, -\rangle \equiv |\downarrow, 0\rangle$  y  $|0, +\rangle \equiv |\emptyset\rangle$ . Este último es un vector con entradas igual a cero, es decir, representa un estado que no es físico. Estas identificaciones implican que  $\gamma_{0-} = 1$  y  $\gamma_{0+} = \rho_{0\pm} = 0$ . Los autoestados de la ecuación (2.21) representan estados entrelazados entre los grados de libertad de la luz y la materia, denominados polaritones [15–17] y, al igual que el conjunto de estados  $\beta$ , forman un set de autoestados ortonormales y satisfacen la relación de completitud

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=+,-} |n, p\rangle \langle n, p| = \mathbb{1}, \quad (2.23)$$

$$\langle n', p' | n, p \rangle = \delta_{n,n'} \delta_{p,p'}. \quad (2.24)$$

Además, la ecuación (2.21) muestra que los estados polaritónicos se relacionan con los estados separables (2.19) a través de una matriz de transformación  $T_n$ .

$$\begin{pmatrix} |n, +\rangle \\ |n, -\rangle \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} |n, \downarrow\rangle \\ |n-1, \uparrow\rangle \end{pmatrix}, T_n = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \rho_{n+} \\ \gamma_- & \rho_{n-} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

El espectro de energía del sistema puede ser estudiado a través del parámetro desintonización, como muestra la ecuación (2.22). La figura 2.3 muestra las autoenergías del modelo de Jaynes-Cummings en función del parámetro desintonización ( $\Delta$ ). El  $n$ th nivel energético consiste en un doblete de Jaynes-Cummings con autoenergías  $E_n^+$  y  $E_n^-$  que caracterizan a los polaritones en dos ramas: polaritones de la rama positiva y polaritones de la rama negativa, respectivamente. Además, el parámetro desintonización permite caracterizar dos regímenes diferentes del sistema: régimen resonante ( $\Delta = 0$ ) y régimen dispersivo ( $\Delta \gg g$ ). En el régimen resonante, el espectro de energía es anarmónico debido a la dependencia no lineal de las autoenergías con respecto al número de polaritones, como muestra la figura 2.4. La anarmonicidad del espectro de energía inhibe la

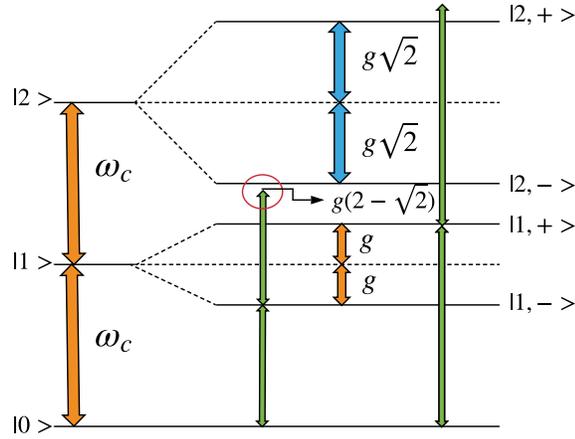


Figura 2.4: Espectro de energía del modelo de Jaynes-Cummings en el régimen resonante ( $\Delta = 0$ ).

posibilidad que exista más de una excitación (polariton) dentro de la cavidad debido al efecto bloqueo de fotones [23, 24]. En el régimen dispersivo, el espectro de energía se vuelve armónico dentro de cada rama, sin embargo, la rama positiva y negativa tienen una diferencia energética de  $\Delta$ , como muestra la figura 2.5. La armonicidad del espectro, dentro de cada rama, permite transiciones hacia estados de más alta energía.

En la siguiente sección se considera una red de  $L$  cavidades acopladas para estudiar fenómenos fuertemente correlacionados. Para esto es necesario extender el modelo de Jaynes-Cummings al modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard como se discutirá a continuación.

## 2.3 El modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard

El modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard (JCH) permite describir una red de  $L$  cavidades acopladas con interacciones a primeros vecinos [15, 16, 18], tal como se muestran en la figura 2.6. El modelo de JCH en una dimensión se describe a través del siguiente Hamiltoniano:

$$H_{\text{JCH}} = \sum_i H_i^{\text{JC}} - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i), \quad (2.26)$$

donde  $\hat{a}_i$  ( $\hat{a}_i^\dagger$ ) es el operador de aniquilación (creación) de fotones del sitio  $i$ th de la red,  $J_{ij}$  es la fuerza de acoplamiento entre cavidades. Si dos cavidades de la red se encuentran conectadas  $J_{ij} = J$  y en caso contrario  $J_{ij} = 0$ . Además,  $\hat{H}_{\text{JC}_i} = \Delta \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^- + \omega_c \hat{N}_{p_i} + g(\hat{a}_i^\dagger \hat{\sigma}_i^- + \hat{a}_i \hat{\sigma}_i^+)$  es el Hamiltoniano de JC de cada sitio de la red. Análogamente al modelo de JC, el número total de excitaciones en

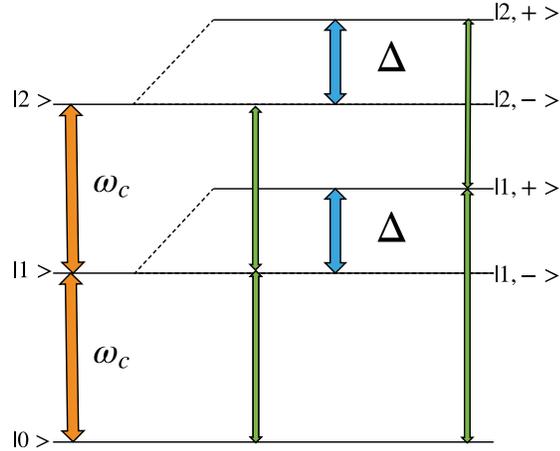


Figura 2.5: Espectro de energía del modelo de Jaynes-Cummings en el régimen dispersivo ( $\Delta \gg g$ ).

la red de JCH es una cantidad conservada

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^L (a_i^\dagger a_i + \sigma_i^+ \sigma_i^-). \quad (2.27)$$

Sin embargo, resolver analíticamente la dinámica de una red de JC es un trabajo intratable en toda su complejidad.

## 2.4 Representación en la base polaritónica

En las secciones anteriores se ha establecido que el Hamiltoniano de JC es diagonal en la base de polaritones. Para tener una mejor intuición de las predicciones del modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard es conveniente reescribir este modelo en la base de polaritones.

El Hamiltoniano (2.26) está descrito por un término local definido por el Hamiltoniano de JC de cada sitio de la red y un término de interacción que involucra operadores de creación y aniquilación de fotones de los sitios  $i$ th e  $(i + 1)$ th de la red. La representación del Hamiltoniano de JC en la base de autoestados de luz-materia es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=\pm} E_n^\alpha \hat{P}_i^{\dagger(n,\alpha)} \hat{P}_i^{n,\alpha}, \quad (2.28)$$

donde  $E_n^\alpha$  corresponde a las autoenergías (2.22) y  $P_i^{\dagger(n,\alpha)} = |n, \alpha\rangle_i \langle 0, -|_i$  es el operador que permite crear polaritones desde el estado fundamental.

Para reescribir el término de interacción del Hamiltoniano de JCH es necesario conocer la acción

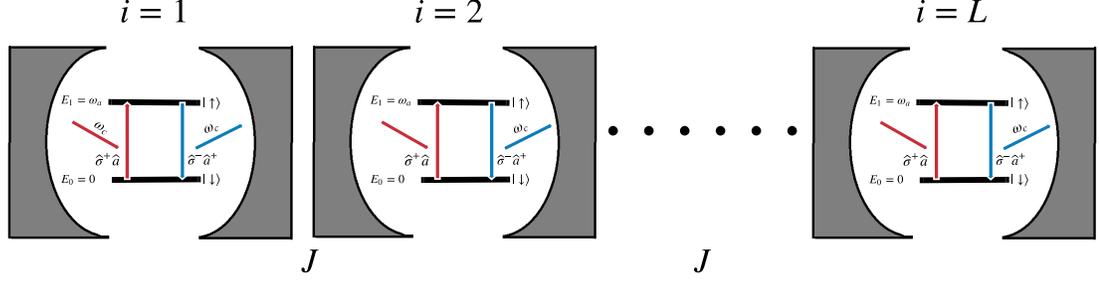


Figura 2.6: Representación esquemática del modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard. La interacción entre cavidades es caracterizada a través del parámetro  $J$ .

del operador de aniquilación (creación) de fotones sobre la base de autoestados polaritónicos

$$\hat{a} \begin{pmatrix} |n, +\rangle \\ |n, -\rangle \end{pmatrix} = \hat{a} T_n \begin{pmatrix} |\downarrow, n\rangle \\ |\uparrow, n-1\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

La acción del operador de aniquilación reduce el número de excitaciones. Por lo tanto, la ecuación (2.29) conduce a la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} t_n^{++} & t_n^{+-} \\ t_n^{-+} & t_n^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n-1, +\rangle \\ |n-1, -\rangle \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\downarrow, n-1\rangle \\ |\uparrow, n-2\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Usando la ecuación (2.25) en (2.30) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} t_n^{++} & t_n^{+-} \\ t_n^{-+} & t_n^{--} \end{pmatrix} T_{n-1} \begin{pmatrix} |\downarrow, n-1\rangle \\ |\uparrow, n-2\rangle \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\downarrow, n-1\rangle \\ |\uparrow, n-2\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Entonces, los términos  $t_n^{\pm-}$  y  $t_n^{\pm+}$  se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t_n^{\pm-} &= \sqrt{n} \gamma_n^{\pm} \rho_{n-1}^+ + \sqrt{n-1} \rho_n^{\pm} \gamma_{n-1}^-, \\ t_n^{\pm+} &= \sqrt{n} \gamma_n^{\pm} \gamma_{n-1}^+ + \sqrt{n-1} \rho_n^{\pm} \gamma_{n-1}^-. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Por lo tanto, la representación del operador de aniquilación de fotones del sitio  $i$ th de la red en la base de polaritones es definida de la siguiente manera:

$$\hat{a}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \alpha'=\pm} t_m^{\alpha, \alpha'} \hat{P}_i^{\dagger(n-1, \alpha')} \hat{P}_i^{(n, \alpha)}. \quad (2.33)$$

Finalmente, el Hamiltoniano de JCH puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JCH}} = & \sum_{i=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=\pm} E_n^{\alpha} \hat{P}_i^{\dagger(n,\alpha)} \hat{P}_i^{n,\alpha} \\ & - \sum_{i,j} J_{ij} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'=\pm} t_n^{\alpha\alpha'} t_m^{\beta\beta'} \hat{P}_i^{\dagger(n-1,\alpha)} \hat{P}_i^{(n,\alpha')} \hat{P}_j^{\dagger(m,\beta)} \hat{P}_j^{(m-1,\beta')} + H.c. \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

El primer término de la ecuación (2.34) describe la energía local a través de las autoenergías del modelo de Jaynes-Cummings. El segundo término describe la interacción entre las cavidades de la red que conduce a procesos tales como el intercambio de polaritones entre la misma rama, a través de  $t_n^{++}$  y  $t_n^{--}$ , o el intercambio de polaritones entre diferentes ramas, a través de  $t_n^{-+}$  y  $t_n^{+-}$ .

El modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard permite estudiar fenómenos fuertemente correlacionados que aparecen en la física de muchos cuerpos tales como transiciones de fase cuánticas de la luz [15–18]. Los estudios evidencian que el modelo de JCH exhibe una transición de fase cuántica en equilibrio [16, 18] y fuera del equilibrio [15, 20], desde el estado aislante de Mott al estado superfluido. La transición de fase se debe a la competencia entre el intercambio de polaritones y la anarmonicidad del espectro de cada sitio (bloqueo de fotones [23, 24]).

En la siguiente sección, se estudia en detalle la transición de fase cuántica fuera del equilibrio utilizando parámetros de orden promediados en el tiempo, tales como la varianza del número de excitaciones y la entropía lineal, que serán definidos posteriormente.

---

## Capítulo 3

# Dinámica quench en una red de Jaynes-Cummings

### 3.1 Introducción

La forma más directa de abordar numéricamente la dinámica cuántica de un sistema físico de muchos cuerpos es construir el Hamiltoniano completo y utilizar el método diagonalización exacta (ED) para obtener todos los autoestados y las autoenergías del sistema [25]. Sin embargo, y a pesar de los avances tecnológicos, los computadores clásicos tienen limitaciones en sus recursos computacionales [2]. Por lo tanto, la resolución numérica exacta de la ecuación de Schrödinger está limitada a sistemas físicos de pocos cuerpos.

Para resolver la dinámica fuera del equilibrio de una red de JC es necesario recurrir a métodos numéricos o técnicas de reducción del espacio de Hilbert que disminuyan los grados de libertad del sistema. Una alternativa es utilizar el algoritmo de “Time-evolving block decimation” cuyo uso de memoria computacional escala polinomialmente con el tamaño del sistema [26, 27]. Otra alternativa consiste en utilizar técnicas de reducción del espacio de Hilbert que permitan obtener un Hamiltoniano efectivo que describa de manera completa la evolución del sistema [28–31].

En esta sección, se estudia la dinámica cuántica fuera del equilibrio inducida por un cambio repentino de un parámetro del Hamiltoniano de JCH. En primer lugar, se describe el protocolo para la dinámica quench y se estudia los efectos en los parámetros de orden en una red de JC. Por último, se introduce un Hamiltoniano efectivo que permita describir de manera completa la dinámica de un dímero, el cual consiste en dos cavidades de JC acopladas. Se obtienen expresiones analíticas de parámetros de orden promediados en el tiempo, tales como la varianza en el número de excitaciones y la entropía lineal, que nos permiten describir la transición de fase cuántica fuera del equilibrio.

## 3.2 Protocolo quench

En la dinámica quench, el sistema es inicializado en el estado fundamental del Hamiltoniano  $H(\lambda)$  para un valor de  $\lambda = \lambda_0$ . Luego, para un instante de tiempo  $t = 0$ , el parámetro  $\lambda$  varía repentinamente a un valor de  $\lambda_f$  tal que el Hamiltoniano cambie a  $H_f = H(\lambda_f)$  [32]. En particular, una manera de describir una dinámica quench en una red de JC es a través del siguiente protocolo: para cada valor de la desintonización  $\Delta$ , se establece la condición inicial como el estado de más baja energía con un factor de llenado de una excitación por sitio. En este caso, el sistema se encuentra en el estado aislante de Mott con  $J = 0$  en donde todas las excitaciones permanecen en sus respectivos sitios de la red y el estado esta descrito por:

$$|\psi_0\rangle = \otimes_{i=1}^L |1, -\rangle_i. \quad (3.1)$$

En el tiempo  $t = 0$ , el parámetro  $J$  varía repentinamente a un valor  $J_f \neq 0$  tal que el Hamiltoniano cambie a  $H_f = H_{\text{JCH}}(J_f)$ . Por lo tanto, la dinámica de la red de JC es descrita por el estado  $|\psi_0(t)\rangle = e^{-iH_f t} |\psi_0\rangle$ , el cual conduce a fenómenos fuera del equilibrio. El protocolo descrito anteriormente permite simular una transición de fase de segundo orden capturada a través de la varianza del número de excitaciones [33]. Se hace hincapié que la dinamica fuera del equilibrio que será descrita en este trabajo esta dominada por el régimen de parámetros  $Jn \ll g\sqrt{n} \ll \omega_c n$ .

## 3.3 Dinámica quench en un dímerno de Jaynes-Cummings-Hubbard

En esta sección, se resuelve analíticamente la dinámica quench en un dímerno de JCH. Para esto, se encuentra un Hamiltoniano efectivo identificando todos los estados involucrados en la dinámica del dímerno y descartando los estados polaritónicos de más alta energía. El dímerno consiste en dos sitios de la figura 2.6, donde se identifica el sitio de la izquierda con el subíndice  $i$  y el sitio de la derecha con el subíndice  $j$ . De esta forma, el Hamiltoniano que describe un dímerno de JCH es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JCH}} = & \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=\pm} E_n^\alpha \hat{P}_i^{\dagger(n,\alpha)} \hat{P}_i^{n,\alpha} \\ & - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'=\pm} t_n^{\alpha\alpha'} t_m^{\beta\beta'} P_i^{\dagger(n-1,\alpha)} P_i^{(n,\alpha')} P_j^{\dagger(m,\beta)} P_j^{(m-1,\beta')} + \text{H.c.} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

El dímerno es preparado inicialmente en el estado  $|\psi_0\rangle = |1, -\rangle_i |1, -\rangle_j$ . El Hamiltoniano de JCH (3.2) conduce a procesos tales como el intercambio de polaritones entre la misma rama, o el intercambio de polaritones entre diferentes ramas de uno o ambos sitios involucrados. La acción del Hamiltoniano

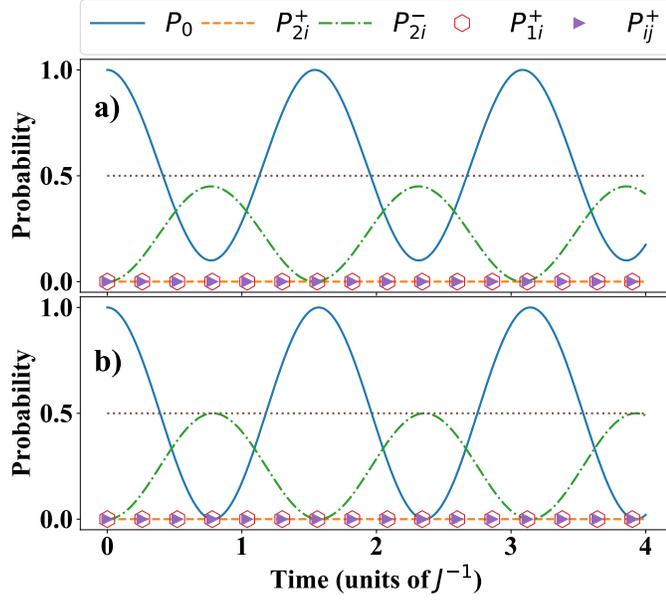


Figura 3.1: Población de los estados  $|\psi_0\rangle, |\psi_2\rangle_i^\pm, |\psi_2\rangle_j^\pm, |\psi_1\rangle_i^+, |\psi_1\rangle_j^+, |\psi_1\rangle_{ij}^+$  en función del tiempo. El dímero es inicializado en el estado  $|\psi_0\rangle$ , los parámetros usados fueron  $g = 10^{-2}\omega_c$ ,  $J = 10^{-4}\omega_c$  donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la cavidad. (a)  $\Delta = 5g$ , (b)  $\Delta = 50g$ . La línea horizontal punteada es utilizada como referencia.

(3.2) sobre el estado inicial es la siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JCH}}|\psi_0\rangle = & E_1^-|\psi_0\rangle - J(t_1^-t_2^-|0, -\rangle_i|2, -\rangle_j + t_1^-t_2^+|0, -\rangle_i|2, +\rangle_j \\ & + t_2^-t_1^-|2, -\rangle_i|0, -\rangle_j + t_2^+t_1^-|2, +\rangle_i|0, -\rangle_j). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los estados con dos excitaciones, en cualquiera de los sitios del dímero, conducen a nuevos estados que deben ser considerados en la evolución del sistema. Por lo tanto, es necesario analizar la acción del Hamiltoniano sobre el estado  $|0, -\rangle_i|2, -\rangle_j$  ( $|0, -\rangle_i|2, +\rangle_j$ ):

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JCH}}|0, -\rangle_i|2, -\rangle_j = & E_2^-|0, -\rangle_i|2, -\rangle_j - J(t_1^-t_2^-|1, -\rangle_i|1, -\rangle_j + t_1^+t_2^-|1, +\rangle_i|1, +\rangle_j \\ & + t_1^-t_2^+|1, -\rangle_i|1, +\rangle_j + t_1^+t_2^-|1, +\rangle_i|1, -\rangle_j), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JCH}}|0, -\rangle_i|2, +\rangle_j = & E_2^-|0, -\rangle_i|2, +\rangle_j - J(t_1^-t_2^+|1, -\rangle_i|1, -\rangle_j + t_1^+t_2^+|1, +\rangle_i|1, +\rangle_j \\ & + t_1^-t_2^+|1, -\rangle_i|1, +\rangle_j + t_1^+t_2^+|1, +\rangle_i|1, -\rangle_j). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Finalmente, la dinámica del dímero involucra todos los estados dentro del subespacio de dos excitaciones, los cuales son definidos de la siguiente manera:  $|\psi_0\rangle = |1, -\rangle_i|1, -\rangle_j$ ,  $|\psi_2\rangle_i^\pm = |2, \pm\rangle_i|0, -\rangle_j$ ,  $|\psi_2\rangle_j^\pm = |0, -\rangle_i|2, \pm\rangle_j$ ,  $|\psi_1\rangle_i^+ = |1, +\rangle_i|1, -\rangle_j$ ,  $|\psi_1\rangle_j^+ = |1, -\rangle_i|1, +\rangle_j$  y  $|\psi_1\rangle_{ij}^+ = |1, +\rangle_i|1, +\rangle_j$ . Dentro del régimen  $Jn \ll g\sqrt{n} \ll \omega_c n$ , el intercambio de polaritones entre diferentes ramas puede ser ignorado bajo las condiciones  $\{|E_1^+ + E_1^- - 2E_2^-, |E_2^+ - 2E_1^-, |2E_1^+ - 2E_2^-\}| \gg J$ . La figura 3.1 mues-

tra la población de los estados involucrados en la dinámica del dímero en función del tiempo. Las probabilidades de los estados accesibles son definidas como:  $P_0 = |\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle|^2$ ,  $P_{2i}^\pm = |{}_i\langle \psi_2^\pm | \psi(t) \rangle|^2$ ,  $P_{1i}^+ = |{}_i\langle \psi_1^+ | \psi(t) \rangle|^2$ , y  $P_{ij}^+ = |{}_{ij}\langle \psi_1^+ | \psi(t) \rangle|^2$ . Como consecuencia de la simetría del dímero, es evidente que:  $P_{2j}^\pm = |{}_j\langle \psi_2^\pm | \psi(t) \rangle|^2 = P_{2i}^\pm$  y  $P_{1j}^+ = |{}_j\langle \psi_1^+ | \psi(t) \rangle|^2 = P_{1i}^+$  (No se muestran en la figura 3.1). Como se puede observar, el intercambio de polaritones entre diferentes ramas puede ser descartado durante la evolución del sistema. Por lo tanto, es posible introducir un Hamiltoniano efectivo considerando solo los estados polaritónicos de la rama negativa  $|\psi_0\rangle, |\psi_2^-\rangle_i, |\psi_2^-\rangle_j$ . En este caso, el Hamiltoniano efectivo es el siguiente:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & c & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde  $a = 2E_1^-$ ,  $b = -Jt_1^- t_2^-$ ,  $c = E_2^-$ , y  $t_1^- t_2^- = \cos(\theta_1/2)(\sqrt{2} \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) + \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2))$ . Como consecuencia de la simetría del dímero, el Hamiltoniano efectivo (3.6) se reduce a una matriz de  $2 \times 2$  debido a que los estados  $|\psi_2^-\rangle_j$  y  $|\psi_2^-\rangle_i$  forman un estado entrelazado simétrico. Diagonalizando la matriz (3.6) se obtienen los autoestados y las autoenergías que están dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= c, \\ \lambda_\pm &= (a + c \pm \sqrt{8b^2 + (a - c)^2})/2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \nu_2 = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_+^2 + 2}}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} \alpha_- \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_-^2 + 2}}, \quad (3.8)$$

donde  $\alpha_\pm = (a - c \pm \sqrt{8b^2 + (a - c)^2})/2b$ . El vector de estado inicial  $|\psi_0\rangle$  evoluciona en el tiempo de acuerdo a la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\psi_0(t)\rangle = -iH_{\text{eff}} |\psi_0(t)\rangle, \quad (3.9)$$

donde  $H_{\text{eff}}$  es el Hamiltoniano efectivo del dímero. La solución de la ecuación de Schrödinger es descrita por el estado  $|\psi_0(t)\rangle = e^{-iH_{\text{eff}}t} |\psi_0\rangle$ . Por lo tanto, la función de onda en el instante  $t$  está dada por:

$$|\psi_0(t)\rangle = c_0(t) |\psi_0\rangle + c_{2i}^-(t) (|\psi_2^-\rangle_i + |\psi_2^-\rangle_j), \quad (3.10)$$

donde las amplitudes de probabilidad están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} (\alpha_+ e^{-it\lambda_+} - \alpha_- e^{-it\lambda_-}), \\ c_{2i}^-(t) &= c_{2j}^-(t) = \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} (e^{-it\lambda_+} - e^{-it\lambda_-}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dada la función de onda (3.10), es posible calcular analíticamente parámetros de orden promediados en el tiempo, tales como la varianza del número de polaritones por sitio o la entropía lineal, los cuales nos permiten describir la transición de fase cuántica fuera del equilibrio. La varianza del número de polaritones, promediada en el tiempo, del sitio  $i$  es definida de la siguiente manera:

$$\text{Var}(N_{p_i}) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt (\langle N_{p_i}^2 \rangle - \langle N_{p_i} \rangle^2), \quad (3.12)$$

donde  $N_{p_i} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^-$  y  $\tau = J^{-1}$ . Utilizando el estado analítico (3.10), se obtiene que la varianza (3.12) esta dado por:

$$\text{Var}(n_i) = \frac{4b^2}{\Omega_0^2} \left[ 1 - \frac{J}{\Omega_0} \sin\left(\frac{\Omega_0}{J}\right) \right], \quad (3.13)$$

donde  $\Omega_0 = \sqrt{8b^2 + (a-c)^2}$ . Como consecuencia de la simetría del dímero,  $\text{Var}(n_i) = \text{Var}(n_j)$ . La figura 3.2(a) muestra la varianza promediada en el tiempo en función de  $\log_{10}(\Delta/g)$  calculada a través de la resolución numérica exacta de la ecuación de Schrödinger y la solución analítica definida en la ecuación (3.13). Se observa una buena correspondencia entre ambas predicciones como muestra el error relativo en la figura 3.2(b). En el régimen resonante ( $\Delta = 0$ ), la varianza del número de polaritones es igual a cero a causa de que las excitaciones se encuentran localizadas en cada cavidad. En el régimen dispersivo ( $\Delta \gg g$ ), las excitaciones se deslocalizan a través del dímero causando que la varianza en el número de polaritones sea diferente de cero. Además, la ecuación (3.13) permite predecir el comportamiento asintótico de  $\text{Var}(n_i)$  a medida que aumenta la desintonización ( $\Delta/g \rightarrow \infty$ ). En el régimen dispersivo, ver figura 2.5, el espectro de energía del modelo de JC es armónico con autoenergías  $E_n^- \approx n\omega_c - g^2 n/\Delta$  ( $E_n^+ \approx n\omega_c + \Delta + g^2 n/\Delta$ ), lo cual permite que se cumpla la condición de resonancia  $E_2^- - 2E_1^- = 0$  ( $a = c$ ). Por lo tanto, el valor asintótico de la  $\text{Var}(n_i)$  es el siguiente:

$$\lim_{\Delta/g \rightarrow \infty} \text{Var}(n_i) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} \sin 4 \right) = 0.5946. \quad (3.14)$$

Otra forma de caracterizar la transición de fase cuántica fuera del equilibrio es a través de la entropía lineal de la matriz densidad reducida, la cual mide el grado de mezcla estadística de un

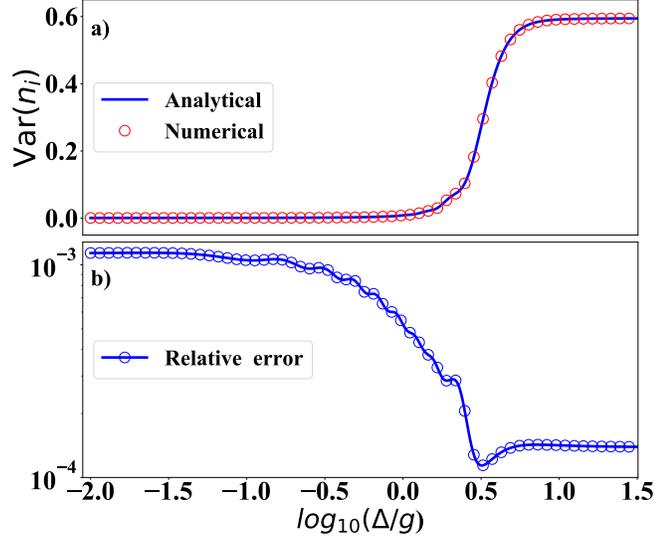


Figura 3.2: (a) Varianza promediada en el tiempo en función de  $\log_{10}(\Delta/g)$ . (b) Comparación entre el cálculo analítico y numérico de  $\text{Var}(n_i)$ . Los parámetros usados fueron  $g = 10^{-2}\omega_c$ ,  $J = 10^{-4}\omega_c$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la cavidad.

estado cuántico. La entropía lineal promediada en el tiempo es definida por:

$$E = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt S_{\rho_i}(t), \quad (3.15)$$

donde  $S_{\rho_i}(t) = 1 - \text{Tr}(\rho_i^2)$  y  $\rho_i$  es la matriz densidad reducida del sitio  $i$  de la red de JC. Note que el estado (3.10) está en su representación de Schmidt, lo cual conduce a una matriz de densidad reducida diagonal

$$\rho_i = \text{Tr}_j(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) = \begin{pmatrix} |c_{2j}^-(t)|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |c_0(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |c_{2i}^-(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

En este caso, la entropía lineal en función del tiempo es definida por  $S_{\rho_i}(t) = 1 - (|c_0(t)|^4 + 2|c_{2i}^-(t)|^4)$ , y su promedio temporal es

$$E = \frac{2b^2}{\Omega_0^3} \left[ 2\Omega_0\Omega_1^2 - 4J\Omega_2^2 \sin\left(\frac{\Omega_0}{J}\right) - 3b^2J \sin\left(\frac{2\Omega_0}{J}\right) \right], \quad (3.17)$$

donde  $\Omega_1 = \sqrt{7b^2 + 2(a-c)^2}$  y  $\Omega_2 = \sqrt{2b^2 + (a-c)^2}$ . La figura 3.3 muestra el promedio en el tiempo de la entropía lineal en función de  $\log_{10}(\Delta/g)$  calculada a través de la resolución numérica exacta de la ecuación de Schrödinger y la solución analítica definida en la ecuación (3.17). Se observa una buena correspondencia entre ambas predicciones como muestra el error relativo en la figura 3.3(b). En el régimen resonante, existe certeza de localizar las excitaciones dentro de cada cavidad de la

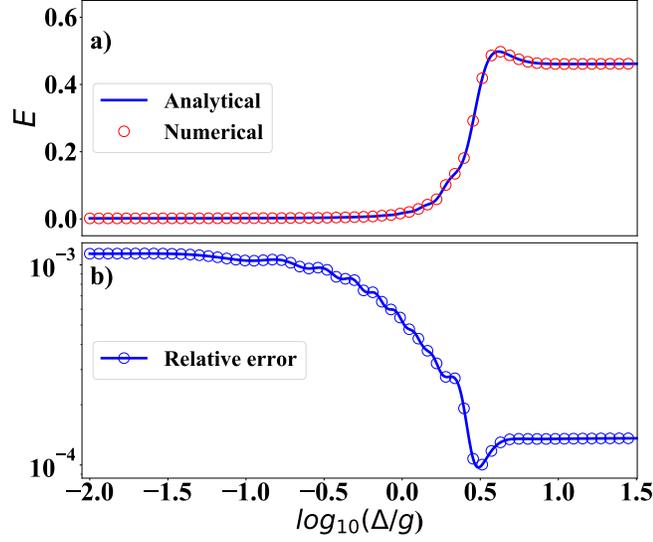


Figura 3.3: (a) Promedio en el tiempo de la entropía lineal ( $E$ ) en función de  $\log_{10}(\Delta/g)$ . (b) Comparación entre el cálculo analítico y numérico de  $E$ . Los parámetros usados fueron  $g = 10^{-2}\omega_c$ ,  $J = 10^{-4}\omega_c$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la cavidad

red de JCH de modo que el estado  $\rho_i$  está definido por un único estado ( $c_{2i}^-(t) = c_{2j}^-(t) = 0$ ), y la entropía es cero. En el régimen dispersivo, las excitaciones se encuentran deslocalizadas a través de la red de JCH de modo que el estado  $\rho_i$  está definido por una mezcla estadística, y la entropía es diferente de cero ( $c_{2i}^-(t) = c_{2j}^-(t) \neq 0$ ). En consecuencia, el estado (3.10) está entrelazado.

Además, es posible estimar el valor asintótico del valor de  $E$  a medida que aumenta la desintonización ( $\Delta$ )

$$\lim_{\Delta/g \rightarrow \infty} E = 0.4616. \quad (3.18)$$

En el capítulo siguiente, usaremos la varianza promediada en el tiempo (3.13) para demostrar la existencia de procesos de dimerización dinámica en el régimen intermedio de interacción de luz-materia definido por  $1 < \Delta/g < 10$ . Esta elección establece el marco físico de trabajo para la posterior discusión. Sin embargo, un análisis con la entropía lineal también nos permitiría demostrar la existencia de DDP.

---

## Capítulo 4

# Fase de dimerización dinámica en una red de Jaynes-Cummings

### 4.1 Introducción

En los últimos años, la dinámica fuera del equilibrio en sistemas fuertemente correlacionados de muchos cuerpos se ha convertido en un área activa de investigación [32, 34–42]. En gran parte, se debe al avance experimental que ha permitido reproducir la evolución temporal de sistemas cuánticos de muchos cuerpos y observar fenómenos cuánticos fuera del equilibrio [8, 12, 14, 43]. La comprensión de estos fenómenos físicos puede ser de gran relevancia para futuros dispositivos cuánticos.

En esta sección, se resuelve numéricamente la dinámica quench de una red de JC de tres y cuatro sitios, y se demuestra la aparición de procesos de dimerización que ocurren dentro de un régimen intermedio de interacción de luz-materia definido por el rango  $1 < \Delta/g < 10$ . Primero, se describirán los procesos de dimerización sin considerar interacción con el medio ambiente. Luego, se considera la interacción de la red de JC con el medio ambiente que conduce a mecanismos de disipación en la preparación inicial y durante la evolución del sistema.

### 4.2 Sistema cerrado

Un trímero consiste en tres sitios acoplados de la figura 2.6, donde se identifica el sitio de la izquierda con el subíndice  $i$ , el sitio del centro con el subíndice  $j$  y el sitio de la derecha con el subíndice  $k$ , respectivamente. De esta forma, el Hamiltoniano que describe un trímero de JCH es

el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JCH}} = & \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=\pm} E_n^\alpha \hat{P}_i^{\dagger(n,\alpha)} \hat{P}_i^{n,\alpha} \\ & - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \left[ \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'=\pm} t_n^{\alpha\alpha'} t_m^{\beta\beta'} P_i^{\dagger(n-1,\alpha)} P_i^{(n,\alpha')} P_j^{\dagger(m,\beta)} P_j^{(m-1,\beta')} + \text{H.c.} \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

El trímero es preparado inicialmente en el estado  $|\psi_0\rangle = |1, -\rangle_i |1, -\rangle_j |1, -\rangle_k$ . Al evolucionar el sistema de acuerdo al protocolo para la dinámica quench descrito en el capítulo 3, el intercambio de polaritones entre diferentes ramas puede ser ignorado bajo las condiciones  $\{|E_2^+ - 2E_1^-, |2E_1^+ - E_2^-, |E_1^+ + E_1^- - E_2^-, |E_1^+ - E_1^-, |E_3^+ - E_2^- - E_1^-, |E_2^+ - E_2^-, |E_2^+ + E_1^+ - E_2^- - E_1^-\}| \gg J$ . Al igual que el dímero, solo se consideran los estados polaritónicos de la rama negativa y la dimensión del espacio de Hilbert ( $\mathcal{H}$ ) es dada por  $(N + d - 1)!/N!(d - 1)!$ , donde  $N$  es el número de excitaciones que deben ser distribuidas en  $d$  sitios de la red. En el caso del trímero,  $N = 3$  y  $d = 3$  por lo que la dimensión del espacio de Hilbert es  $\dim(\mathcal{H}) = 10$ . La función de onda en el instante  $t$  puede escribirse como una combinación lineal de los estados que pertenecen al subespacio de 3 excitaciones

$$\begin{aligned} |\psi_0(t)\rangle = & c_0(t)|\psi_0\rangle + c_{3j}(t)|\psi_{3j}\rangle + c_{3i}(t)(|\psi_{3i}\rangle + |\psi_{3k}\rangle) + c_{2i1j}(t)(|\psi_{2i1j}\rangle + |\psi_{1j2k}\rangle) \\ & + c_{1i2j}(t)(|\psi_{1i2j}\rangle + |\psi_{2j1k}\rangle) + c_{2i1k}(t)(|\psi_{2i1k}\rangle + |\psi_{1i2k}\rangle), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde se definen los estados  $|\psi_0\rangle = |1, -\rangle_i |1, -\rangle_j |1, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{3i}\rangle = |3, -\rangle_i |0, -\rangle_j |0, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{3j}\rangle = |0, -\rangle_i |3, -\rangle_j |0, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{3k}\rangle = |0, -\rangle_i |0, -\rangle_j |3, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{2i1j}\rangle = |2, -\rangle_i |1, -\rangle_j |0, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{1j2k}\rangle = |0, -\rangle_i |1, -\rangle_j |2, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{1i2j}\rangle = |1, -\rangle_i |2, -\rangle_j |0, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{2j1k}\rangle = |0, -\rangle_i |2, -\rangle_j |1, -\rangle_k$ ,  $|\psi_{2i1k}\rangle = |2, -\rangle_i |0, -\rangle_j |1, -\rangle_k$  y  $|\psi_{1i2k}\rangle = |1, -\rangle_i |0, -\rangle_j |2, -\rangle_k$ . Es posible mostrar que algunas amplitudes de probabilidades son iguales debido a la simetría del trímero con respecto al centro de la red ( $j$ ), lo cual nos permite reducir el espacio de Hilbert  $\dim(\mathcal{H}) = 6$ . A pesar de truncar el espacio de Hilbert, no es posible calcular analíticamente la función de onda (4.2), por lo que será calculada a través de la resolución numérica exacta de la ecuación de Schrödinger. La figura 4.1 muestra la razón entre la función de correlación a primeros vecinos promediada en el tiempo  $C_{ij}$  (función de correlación a vecinos mas lejanos  $C_{ik}$ ) del trímero, y la varianza del dímero (3.13). La función de correlación entre dos sitios de la red se define como  $C_{ij(k)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt (\langle n_i n_{j(k)} \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_{j(k)} \rangle)$ , donde  $n_i = a_i^\dagger a_i + \sigma_i^+ \sigma_i^-$  y  $\tau = J^{-1}$ . Se indentifican dos valores críticos de desintonización, líneas verticales discontinuas,  $\Delta/g = (2.42, 2.66)$  dentro de un régimen intermedio de interacción entre luz-materia  $1 < \Delta/g < 10$ . En estos puntos críticos el trímero experimenta proceso de dimerización dinámica, donde correlaciones de corto alcance gobiernan la dinámica en  $\Delta/g = 2.42$ , mientras que para  $\Delta/g = 2.66$  una combinación de correlaciones de corto y largo alcance gobiernan la dinámica del trímero. Las resonancias mostradas en la figura 4.1 demuestran que las interacciones intrínsecas del dímero, caracterizadas por la varianza promediada en el tiempo (3.13), gobiernan la dinámica quench del

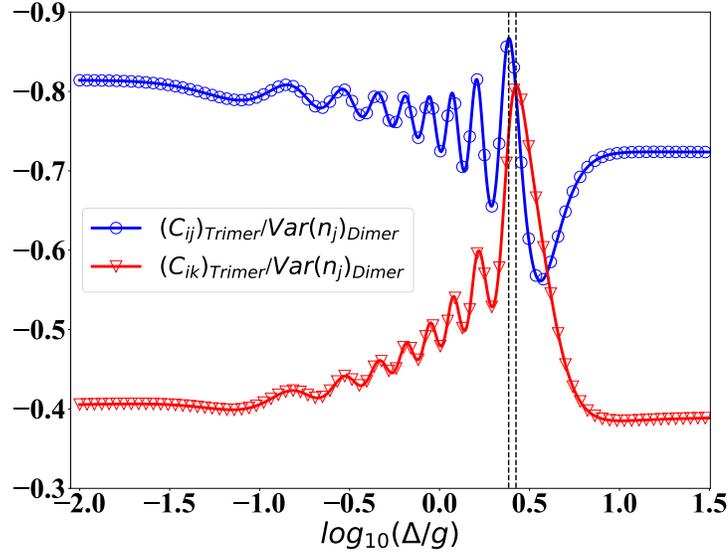


Figura 4.1: Razón entre la función de correlación a primeros vecinos promediada en el tiempo  $C_{ij}$  (función de correlación a vecinos mas lejanos  $C_{ik}$ ) del trímero, y la varianza del dímero (3.13). Las líneas verticales discontinuas, de izquierda a derecha, indican valores críticos de desintonización  $\Delta/g = (2.42, 2.66)$  donde ocurren procesos de dimerización dinámica. Los parámetros usados fueron  $g = 10^{-2}\omega_c$ ,  $J = 10^{-4}\omega_c$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la cavidad

trímero. Además, la varianza del dímero permite identificar interacciones entre dos cuerpos de corto y largo alcance. El primero es consecuencia del acoplamiento directo cavidad-cavidad de los sitios  $i, j$ . Mientras que el segundo es el resultado de una interacción indirecta entre los sitios  $i, k$  mediada por el sitio de la red central  $j$ . Se hace hincapie que estas oscilaciones ocurren en un régimen en donde el sistema aun no se encuentra en el estado superfluido.

Un tetrámero consiste en cuatro sitios acoplados de la figura 2.6, donde se identifica los sitios de la red de izquierda a derecha según los subíndices  $i, j, k, l$ . Se prepara inicialmente en el estado  $|\psi_0\rangle = |1, -\rangle_i |1, -\rangle_j |1, -\rangle_k |1, -\rangle_l$  y, al igual que en el caso del trímero, su evolución temporal sigue el protocolo descrito en el capítulo 3. La dinámica del tetrámero es calculada a través de la resolución numérica exacta de la ecuación de Schrödinger. La figura 4.2 muestra la razón entre las funciones de correlación  $C_{ij}$ ,  $C_{ik}$ ,  $C_{il}$  del tetrámero, y la varianza del dímero (3.13). Al extender la red de Jaynes cummings también exhibe resonancias en valores críticos de desintonización  $\Delta/g = (2.39, 2.48, 2.68)$  (líneas verticales).

### 4.3 Sistema abierto

Hasta ahora se ha estudiado la dinámica fuera del equilibrio de sistema cuánticos asumiendo que se encuentran completamente aislados del medio ambiente. Sin embargo, la implementación experimental de un sistema fuertemente correlacionado de luz-materia debe considerar la interacción con su entorno debido a que no es posible aislarlo perfectamente. Esta interacción conduce a procesos

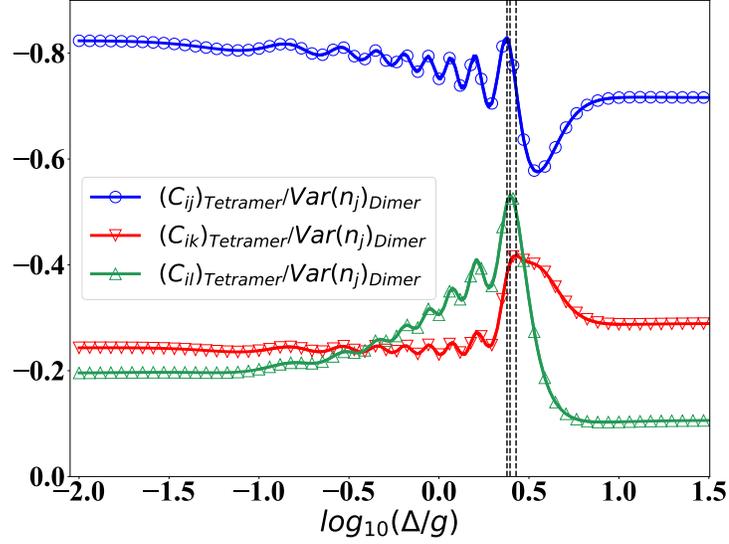


Figura 4.2: Razón entre las funciones de correlación  $C_{ij}$ ,  $C_{ik}$ ,  $C_{il}$  del tetrámero, y la varianza del dímero (3.13). Las líneas verticales discontinuas, de izquierda a derecha, indican valores críticos de desintonización  $\Delta/g = (2.39, 2.48, 2.68)$  donde ocurren los procesos de dimerización dinámica. Los parámetros usados fueron  $g = 10^{-2}\omega_c$ ,  $J = 10^{-4}\omega_c$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la cavidad

de ruido que inhiben fenómenos cuánticos como la coherencia y el entrelazamiento.

En esta sección, y con el propósito de considerar las condiciones en las cuales se realizan experimentalmente sistemas fuertemente correlacionados de luz-materia, se considera la interacción de una red de JC con el medio ambiente que conduce a mecanismo de disipación en el sistema de dos niveles y en la cavidad. Se considera la implementación experimental basada en circuitos superconductores de las referencias [12, 14]. En estos experimentos, la dinámica disipativa es descrita a través de la ecuación maestra de Lindblad. En primer lugar, se presenta un protocolo para preparar el estado inicial de la red de JC en presencia de disipación. Luego, se analiza la dinámica disipativa fuera del equilibrio de una red de JC de tres sitios.

### 4.3.1. Dinámica disipativa en una red de Jaynes-Cummings

El análisis de la dinámica disipativa de la red de Jaynes-Cummings se lleva a cabo estudiando las soluciones de la ecuación maestra de Lindblad

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -i\left[\hat{H}_{\text{JCH}}, \hat{\rho}_S\right] + \sum_{i=1}^L \left( \gamma \mathbb{L}[\hat{\sigma}_i^-] \hat{\rho}_S + \gamma_\phi \mathbb{L}[\hat{\sigma}_i^z] \hat{\rho}_S + \kappa \mathbb{L}[\hat{a}_i] \hat{\rho}_S \right), \quad (4.3)$$

donde  $L$  es el número de sitios de la red. Se consideran los mismos mecanismos de disipación para cada sitio de la red, incluyendo la relajación y el “dephasing” del sistema de dos niveles; y la pérdida de fotones en la cavidad a una tasa de  $\gamma$ ,  $\gamma_\phi$  y  $\kappa$ , respectivamente. Para preparar el estado inicial, se propone incluir un sistema auxiliar de dos niveles en cada sitio de la red, el cual interactúa con

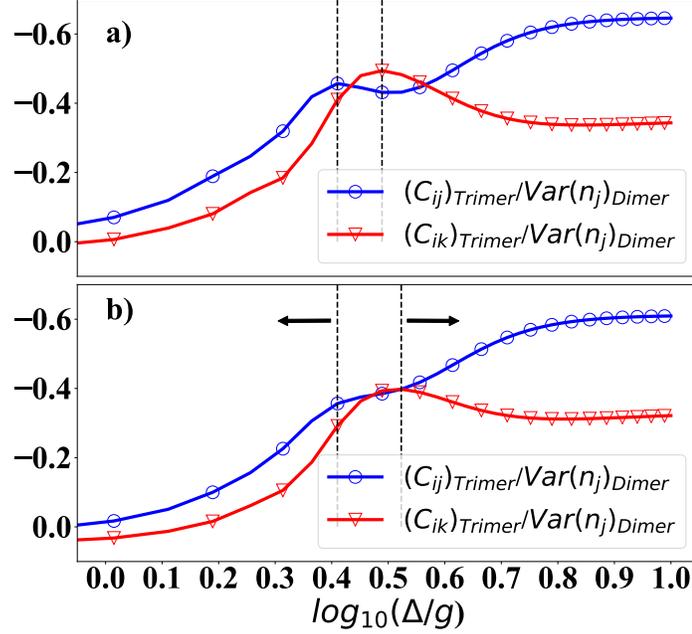


Figura 4.3: Razón entre la función de correlación a primeros vecinos promediada en el tiempo  $C_{ij}$  (función de correlación a vecinos mas lejanos  $C_{ik}$ ) del trímero, y la varianza del dímero. (A) Líneas verticales discontinuas, de izquierda a derecha, indican valores críticos de desintonización  $\Delta/g = (2.57, 3.08)$ , donde ocurren los procesos de dimerización. Los parámetros usados fueron  $\nu_c = 5$  GHz (frecuencia cavidad),  $g = 200$  MHz,  $J_f = 2$  MHz,  $\kappa = 225$  KHz,  $\gamma = 35$  KHz ( $T_1 = 28 \mu\text{s}$ ), y  $\gamma_\phi = 45$  KHz ( $T_2 = 22 \mu\text{s}$ ). (B) Líneas verticales discontinuas, de izquierda a derecha, indican valores críticos de desintonización  $\Delta/g = (2.57, 3.33)$ . Se utilizó  $\gamma = 530$  KHz ( $T_1 = 1.87 \mu\text{s}$ ), y  $\gamma_\phi = 450$  KHz ( $T_2 = 2.22 \mu\text{s}$ ). En los cálculos numéricos se consideraron hasta 4 estados de Fock por resonador.

la cavidad. En este caso, el Hamiltoniano que describe un sitio de la red es el siguiente:

$$\hat{H}_i = \hat{H}_{\text{JC}}^i + \omega_A \hat{\sigma}_{A_i}^+ \hat{\sigma}_{A_i}^- + g_A (\hat{\sigma}_{A_i}^+ \hat{a}_i + \hat{\sigma}_{A_i}^- \hat{a}_i^\dagger), \quad (4.4)$$

donde  $\omega_A$  es la frecuencia del sistema auxiliar,  $g_A$  es la fuerza de acoplamiento entre la cavidad y el sistema auxiliar, y  $\hat{H}_{\text{JC}}^i$  es el Hamiltoniano del sitio  $i$ . El protocolo de inicialización del sistema utiliza pulsos Gaussianos y Stark como se describe en la referencia [44]. En un comienzo, el sistema se encuentra en su estado fundamental  $|\psi_0\rangle = \bigotimes_{i=1}^L |0, -\rangle_i |\downarrow\rangle_{A_i}$ . Se aplican pulsos Gaussianos a cada sistema auxiliar, lo cual permite preparar el estado  $\bigotimes_{i=1}^L |0, -\rangle_i |\uparrow\rangle_{A_i}$ . Luego, se aplica un pulso Stark a cada sistema auxiliar que lo hace resonar con su respectivo sitio de la red,  $\omega_A = E_1^-$ , durante un intervalo de tiempo  $\delta\tau = \pi/(2g_A t_1^-)$ . Para evitar que el sistema ocupe el estado  $|1, +\rangle_i |\downarrow\rangle_{A_i}$  debe cumplirse la condición  $|E_1^+ - E_1^-| \gg g_A$ . Finalmente, la interacción del sistema auxiliar de dos niveles con cada sitio de la red es suprimida aplicando un pulso Stark tal que la frecuencia del sistema auxiliar es menor a  $E_1^-$ . Se hace hincapié en que los pulso Stark puede ser implementados por medio de campos magnéticos externos aplicados en dispositivos cuánticos superconductores

[45, 46].

Hemos calculado numéricamente la preparación del estado inicial y la evolución temporal del sistema utilizando la ecuación (4.3). Se usan los parámetros físicos de las referencias [12, 14, 45, 47]. La figura 4.3(a,b) muestra la razón  $(C_{ij})_{\text{Trimer}}/\text{Var}(n_j)_{\text{Dimer}}$  en función de  $\log_{10}(\Delta/g)$ , donde  $(C_{ij})_{\text{Trimer}}$  representa la función de correlación promediada en el tiempo, y  $\text{Var}(n_j)_{\text{Dimer}}$  corresponde a la varianza del dímero. En la figura 4.3(a) se identifican resonancias correspondientes a los valores críticos  $\Delta/g = (2.57, 3.08)$ , líneas verticales discontinuas, dentro del régimen intermedio de interacción de la luz con la materia,  $1 < \Delta/g < 10$ . Al igual que en el caso de un sistema cerrado, el trímero experimenta procesos de dimerización dinámica, donde las correlaciones de corto y largo alcance dominan sobre la disipación. A medida que se aumentan las tasas de relajación y dephasing de los sistemas de dos niveles, los valores críticos de resonancias se extienden a un rango de desintonización mas amplio, ver figura 4.3(b). Estos resultados muestran la estabilidad de los procesos de dimerización dinámica que ocurren en una red de Jaynes-Cummings finita, y permiten establecer un umbral de parámetros para la aparición de DDP en el caso disipativo.

Los parámetros realistas usados en el cálculo numérico son los siguientes:  $\nu_c = 5$  GHz (frecuencia de la cavidad),  $g = 200$  MHz,  $J_f = 2$  MHz,  $\kappa = 225$  KHz,  $\gamma = 35$  KHz ( $T_1 = 28 \mu\text{s}$ ), y  $\gamma_\phi = 45$  KHz ( $T_2 = 22 \mu\text{s}$ ) [47] para la figura 4.3(a), and  $\gamma = 530$  KHz ( $T_1 = 1.87 \mu\text{s}$ ), and  $\gamma_\phi = 450$  KHz ( $T_2 = 2.22 \mu\text{s}$ ) [45] para la figura 4.3(b).

---

## Capítulo 5

# Conclusiones

En resumen, se ha informado sobre la aparición de una fase de dimerización dinámica en una red de Jaynes-Cummings finita como resultado de una dinámica quench desde un estado inicial con factor de llenado  $\nu = 1$ . Se ha analizado la dinámica quench en una red de Jaynes-Cummings de dos sitios en ausencia de disipación, lo cual permite obtener resultados analíticos de parámetros de orden promediados en el tiempo, tales como la varianza en el número de polaritones y la entropía lineal. Además, estos parámetros de orden pueden usarse para analizar y predecir la dinámica quench para arquitecturas más complejas. Al comparar la varianza del dímero con las funciones de correlación entre dos sitios del trímero y el tetrámero, nos ha permitido determinar valores críticos de desintonización donde ocurren los procesos de dimerización dinámica. Reconocer estos valores de desintonización permite controlar que tipo de correlación domina sobre la dinámica, pudiendo ser de corto alcance o una combinación de corto y largo alcance, y además permite controlar la propagación de polaritones a lo largo de la red. Se hace hincapié en que la dinámica intrínseca del dímero, caracterizada por la varianza promediada en el tiempo (3.13), gobierna la dinámica quench de una red de Jaynes-Cummings finita en ausencia de disipación, y se espera resultados similares a medida que uno aumenta el número de sitios de la red.

En una situación realista es necesario incluir mecanismos disipativos en la preparación del estado inicial y durante la evolución del sistema. Considerando parámetros experimentales viables en tecnologías de circuitos superconductores, los resultados numéricos nos demuestran que a medida que uno disminuye las tasas de disipación de los sistemas de dos niveles y cavidades, las resonancias se hacen más evidentes. Estos resultados demuestran que los procesos de DDP se mantienen en el caso disipativo. Los hallazgos de esta tesis podrían ser probados con tecnologías cuánticas de vanguardia. Por ejemplo en tecnologías de iones atrapados, el modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard se ha propuesto teóricamente en la referencia [48] e implementado físicamente en la referencia [49]. En circuitos superconductores, el dímero JC se ha implementado en la referencia [14]. En este caso,

la detección de señal homodina puede permitir medir la varianza del número de fotones, la cual puede ser usada como parámetro de orden.

---

# Bibliografía

- [1] J. I. Cirac and P. Zoller, “Goals and opportunities in quantum simulation,” Nature Physics, vol. 8, pp. 264 EP –, 04 2012.
- [2] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, “Quantum simulation,” Rev. Mod. Phys., vol. 86, pp. 153–185, Mar 2014.
- [3] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” International Journal of Theoretical Physics, vol. 21, pp. 467–488, Jun 1982.
- [4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, 2010.
- [5] P. Hauke, F. M. Cucchietti, L. Tagliacozzo, I. Deutsch, and M. Lewenstein, “Can one trust quantum simulators?,” Reports on Progress in Physics, vol. 75, p. 082401, jul 2012.
- [6] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène, “Quantum simulations with ultracold quantum gases,” 2012.
- [7] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases,” Rev. Mod. Phys., vol. 80, pp. 885–964, Jul 2008.
- [8] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletić, and M. D. Lukin, “Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator,” Nature, vol. 551, pp. 579 EP –, 11 2017.
- [9] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z. X. Gong, and C. Monroe, “Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator,” Nature, vol. 551, p. 601, 11 2017.
- [10] J. Smith, A. Lee, P. Richerme, B. Neyenhuis, P. Hess, P. Hauke, M. Heyl, D. Huse, and C. Monroe, “Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder,” Nature Physics, vol. 12, 08 2015.

- [11] R. Blatt and C. F. Roos, “Quantum simulations with trapped ions,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 277 EP –, 04 2012.
- [12] M. Fitzpatrick, N. M. Sundaresan, A. C. Y. Li, J. Koch, and A. A. Houck, “Observation of a dissipative phase transition in a one-dimensional circuit qed lattice,” *Phys. Rev. X*, vol. 7, p. 011016, Feb 2017.
- [13] D. L. Underwood, W. E. Shanks, J. Koch, and A. A. Houck, “Low-disorder microwave cavity lattices for quantum simulation with photons,” *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 023837, Aug 2012.
- [14] J. Raftery, D. Sadri, S. Schmidt, H. E. Türeci, and A. A. Houck, “Observation of a dissipation-induced classical to quantum transition,” *Phys. Rev. X*, vol. 4, p. 031043, Sep 2014.
- [15] C. Noh and D. G. Angelakis, “Quantum simulations and many-body physics with light,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 80, p. 016401, Jan 2017.
- [16] M. J. Hartmann, “Quantum simulation with interacting photons,” *J. Opt.*, vol. 18, p. 104005, Nov 2016.
- [17] D. G. Angelakis, ed., *Quantum Simulations with Photons and Polaritons*. Quantum Science and Technology, Springer, 2017.
- [18] A. D. Greentree, C. Tahan, J. H. Cole, and L. C. L. Hollenberg, “Quantum phase transitions of light,” *Nat Phys*, vol. 2, pp. 856–861, 12 2006.
- [19] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, pp. 89–109, Jan 1963.
- [20] R. Peña, F. Torres, and G. Romero, “Dynamical dimerization phase in Jaynes–Cummings lattices,” *New Journal of Physics*, vol. 22, p. 033034, mar 2020.
- [21] K. Burnett, “Stephen m. barnett and paul m. radmore, methods in theoretical quantum optics, clarendon press, oxford, uk (1997). 284 pp.,” *Laser and Particle Beams*, vol. 16, no. 3, p. 538–538, 1998.
- [22] M. Inguscio and L. Fallani, “Atomic physics : precise measurements and ultracold matter,” 2013.
- [23] D. G. Angelakis, M. F. Santos, and S. Bose, “Photon-blockade-induced mott transitions and  $xy$  spin models in coupled cavity arrays,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 031805, Sep 2007.
- [24] K. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. Boozer, T. Northup, and H. Kimble, “Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom,” *Nature*, vol. 436, pp. 1–2, 05 2006.

- [25] A. Weiße and H. Fehske, Exact Diagonalization Techniques, vol. 739, pp. 529–544. 12 2007.
- [26] M. Zwolak and G. Vidal, “Mixed-state dynamics in one-dimensional quantum lattice systems: A time-dependent superoperator renormalization algorithm,” Phys. Rev. Lett., vol. 93, p. 207205, Nov 2004.
- [27] G. Vidal, “Efficient simulation of one-dimensional quantum many-body systems,” Phys. Rev. Lett., vol. 93, p. 040502, Jul 2004.
- [28] C. D. Ogden, E. K. Irish, and M. S. Kim, “Dynamics in a coupled-cavity array,” Phys. Rev. A, vol. 78, p. 063805, Dec 2008.
- [29] M. I. Makin, J. H. Cole, C. D. Hill, A. D. Greentree, and L. C. L. Hollenberg, “Time evolution of the one-dimensional Jaynes-Cummings-Hubbard Hamiltonian,” Phys. Rev. A, vol. 80, p. 043842, Oct 2009.
- [30] R. Chakrabarti and G. Sreeumari, “Propagation of single-excitation quantum states through Jaynes-Cummings-Hubbard arrays,” Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, vol. 44, p. 115505, may 2011.
- [31] R. Coto, M. Orszag, and V. Ereameev, “Self-trapping triggered by losses in cavity qed,” Phys. Rev. A, vol. 91, p. 043841, Apr 2015.
- [32] M. Heyl, “Dynamical quantum phase transitions: a review,” Reports on Progress in Physics, vol. 81, p. 054001, apr 2018.
- [33] J. Figueroa, J. Rogan, J. A. Valdivia, M. Kiwi, G. Romero, and F. Torres, “Nucleation of superfluid-light domains in a quenched dynamics,” Scientific Reports, vol. 8, no. 1, p. 12766, 2018.
- [34] M. Heyl, “Dynamical quantum phase transitions: A brief survey,” EPL (Europhysics Letters), vol. 125, p. 26001, feb 2019.
- [35] M. Moeckel and S. Kehrein, “Interaction quench in the Hubbard model,” Phys. Rev. Lett., vol. 100, p. 175702, May 2008.
- [36] B. Sciolla and G. Biroli, “Quantum quenches and off-equilibrium dynamical transition in the infinite-dimensional Bose-Hubbard model,” Phys. Rev. Lett., vol. 105, p. 220401, Nov 2010.
- [37] M. Heyl, A. Polkovnikov, and S. Kehrein, “Dynamical quantum phase transitions in the transverse-field ising model,” Phys. Rev. Lett., vol. 110, p. 135704, Mar 2013.
- [38] B. Žunkovič, M. Heyl, M. Knap, and A. Silva, “Dynamical quantum phase transitions in spin chains with long-range interactions: Merging different concepts of nonequilibrium criticality,” Phys. Rev. Lett., vol. 120, p. 130601, Mar 2018.

- [39] J. C. Halimeh and V. Zauner-Stauber, “Dynamical phase diagram of quantum spin chains with long-range interactions,” *Phys. Rev. B*, vol. 96, p. 134427, Oct 2017.
- [40] J. Lang, B. Frank, and J. C. Halimeh, “Concurrence of dynamical phase transitions at finite temperature in the fully connected transverse-field ising model,” *Phys. Rev. B*, vol. 97, p. 174401, May 2018.
- [41] J. Dziarmaga, “Dynamics of a quantum phase transition and relaxation to a steady state,” *Advances in Physics*, vol. 59, no. 6, pp. 1063–1189, 2010.
- [42] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva, and M. Vengalattore, “Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, pp. 863–883, Aug 2011.
- [43] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z. X. Gong, and C. Monroe, “Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator,” *Nature*, vol. 551, p. 601 EP –, 11 2017.
- [44] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Coupling superconducting qubits via a cavity bus,” *Nature*, vol. 449, no. 7161, pp. 443–447, 2007.
- [45] J. A. Schreier, A. A. Houck, J. Koch, D. I. Schuster, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits,” *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 180502, May 2008.
- [46] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 042319, Oct 2007.
- [47] J. M. Chow, S. J. Srinivasan, E. Magesan, A. D. Córcoles, D. W. Abraham, J. M. Gambetta, and M. Steffen, “Characterizing a four-qubit planar lattice for arbitrary error detection,” in *Quantum Information and Computation XIII* (E. Donkor, A. R. Pirich, and M. Hayduk, eds.), vol. 9500, pp. 315 – 323, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2015.
- [48] P. A. Ivanov, S. S. Ivanov, N. V. Vitanov, A. Mering, M. Fleischhauer, and K. Singer, “Simulation of a quantum phase transition of polaritons with trapped ions,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 060301, Dec 2009.

- [49] K. Toyoda, Y. Matsuno, A. Noguchi, S. Haze, and S. Urabe, “Experimental realization of a quantum phase transition of polaritonic excitations,” Phys. Rev. Lett., vol. 111, p. 160501, Oct 2013.