

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FISICA



**EVENTOS PLASTICOS
EN UN SISTEMA GRANULAR BIDIMENSIONAL**

NELSON ESTEBAN SEPULVEDA NAVARRO

Profesor Tutor: Francisco Vivanco Avaria

Profesor Co-Tutor: Francisco Melo Hurtado

Trabajo de tesis presentado en conformidad a
los requisitos para obtener el grado de Doctor
en Ciencias con mención en Física

SANTIAGO - CHILE

2015

© Nelson Esteban Sepúlveda Navarro, 2015.

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma,

medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Resumen

El documento tesis, presenta una investigación sobre eventos plásticos producidos en deformación de un sistema granular en dos dimensiones. El documento se divide en dos partes: en primer lugar se encuentra el estudio de la influencia que posee la forma de las partículas, en el comportamiento reológico de una celda confinada compuesta por granos, sometidos a cizalle simple. Y en segundo lugar se estudió los eventos plásticos en una celda bidimensional extendida sometida a compresión, a partir de un cambio de volumen localizado.

En el primer caso, el sistema se compuso de granos duros monodispersos (discos, pentágonos o hexágonos) el cual se deformó a cizalle simple a velocidad constante. Simultáneamente se obtuvo el esfuerzo de cizalle y la dilatación por medio de un sensor de posición y un sensor inductivo respectivamente. Con ello se caracterizó el comportamiento reológico de cada una de las formas de los granos, encontrando en los hexágonos características que favorecen el crecimiento de una cadena particular de granos a partir de la posibilidad de nuclear, en magnitud de dilatación y de coeficiente de fricción por sobre los cilindros y pentágonos, en este último debido a las facetas que frustran intrínsecamente la formación de cadenas estables.

En la segunda parte de este trabajo, se estudió la deformación plástica en un cambio de volumen localizado en compresión y compresión con cizalle puro, de un sistema compuesto por discos fotoelásticos. Se caracterizó por medio de los campos de desplazamiento y coarse graining del esfuerzo, los efectos microscópicos y macroscópicos tras retirar una inclusión elíptica desde su interior. El campo de desplazamientos se determinó por medio del tracking de partículas, utilizando la transformada de Hough para la detección de centros de los discos y bordes, y el campo de tensiones por medio del problema de inversión fotoelástico, para ello se construyó una herramienta computacional para medir las fuerzas de cada grano y reconstruir el perfil de tensiones al interior de cada partícula.

La investigación realizada durante esta tesis, ha generado la siguiente publicación:

N. Sepúlveda, F. Melo and F. Vivanco, Effects of grain shape on the response of a two-dimensional granular material under constant shear rate, *PRE*. (2014), vol. 15, pp. 117.

Abstract

The thesis document presents an investigation, about the plastic events produced while a granular system in two dimensional is deformed. The document is divided in two parts: the first part corresponds of the rheological behavior of confined particles of diferent shapes under simple shear, and in the second part was studied the plastic events in a two dimensional granular box under compression, from a localized volume change.

In the first case, the system was composed by hard grains monodisperses (disks, pentagons or hexagons) which was deformed at constant shear rate. Simultaneously the shear stress and dilation was measured by a position sensor and an inductive sensor respectively. The rheological behavior of each forms of the grains was characterized, it was found in the hexagons a particular characteristic which promotes the growth of only one string of beads due to the possibility of nuclear, the value of the dilatancy and the friction coeficient above the cylinder and the pentagons, in this last due to the facets thwarted the formation of stable chains.

In the second part of this document was studied the plastic deformation, in a localized volume change under compression and pure shear of a photoelastic particles system (disks), was characterized by the displacement field and the coarse graining of the stress field. The microscopic and macroscopic behavior after removal of an elliptical inclusion from within. The displacement field was determined by the particle tracking using the Hough transform, for detecting centers and edges of the discs, and the stress field by photoelastic inverse problem, for it was built a computational tool for measuring into each grain forces and rebuild the voltage profile within each particle.

The research conducted for this thesis has generated the follow publication:

N. Sepúlveda, F. Melo and F. Vivanco, Effects of grain shape on the response of a two-dimensional granular material under constant shear rate, *PRE*. (2014), vol. 15, pp. 117.

La educación como la libertad
es un derecho

Agradecimientos

Ha sido un largo camino, en el cual debo agradecer la posibilidad de haber sido parte del Laboratorio de Física No Lineal, de donde recibí todo el apoyo de un grupo de trabajo y de excelentes personas. En primer lugar agradecer al director del laboratorio Dr. Francisco Melo por su paciencia, discusiones, y formación entregada durante toda la investigación, de igual manera debo agradecer a mi tutor del presente trabajo Dr. Francisco Vivanco, por todo el trabajo y entrega durante estos años y el apoyo durante períodos complejos que en este trabajo han llegado a buen puerto, también a la coordinadora ejecutiva del laboratorio Erika Inostroza su ayuda y disposición permanente. Agradecer también a quienes integran el laboratorio y fueron parte de aportes, discusiones y camaradería, profesores, investigadores y estudiantes: María Oyarzún, Claudia Sánchez, Romina Muñoz, Dr. Roberto Bernal, Dr. Belfor Galaz, profesor Leonardo Cabello, Dr. Javier Contreras, Sebastián Morgado, José Miguel Mercado, Ignacio Calderon, Manuel Sepúlveda, Alejandro Ibarra y Claudia Arenas. Al personal técnico del taller de maquinas quienes han puesto su habilidad técnica y su conocimiento, en la fabricación de piezas y partes de los montajes experimentales: Nelson Flores y Gonzalo Martin. A mi amigo Felipe Aguilar por las jornadas de discusiones técnicas, culturales y deportivas. A todos con quienes compartí y que se encuentran en otros lugares de Chile, o en el exterior y que a lo largo de este trabajo han sido parte de él compartiendo el café preciso o inquietudes académicas.

Al Dr. Robert Behringer hago extensible mi agradecimiento por haberme permitido trabajar en su laboratorio durante mi estadía en Duke, lo cual es una parte también de mi formación como investigador.

Agradezco el apoyo a mis padres, de Myriam Sepúlveda y Enrique Alvarez, de Andrés Pedraza y Odette Aburto. Y en general a toda mi familia durante todos estos años. A mis compañeros, por su irrestricto apoyo en los momentos complejos y compartido tantas alegrías; Fernando Valero, Gianinna Repetti, Fabiola Aranguiz, Daniela Thompson y Pamela Thompson, gracias.

Agradezco a Isabel quien se ha convertido en pieza clave de este rompecabezas en el que se arman tantas historias, por su paciencia, comprensión, ayuda y amor. A la nueva familia, gracias.

Finalmente, agradezco el aporte financiero de los programas MECESUP beca de Doctorado (2008), y a la comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) mediante la Beca para Estudios de Doctorado en Chile, Año académico 2009 (**Proyecto GRANT N° D-21090840**), proyectos FONDECYT N°1130922 y ANR-011. Además agradezco a la beca Mecesup FSM0605 por su programa de Becas de estadías cortas en el extranjero y a la Dirección de Graduados de la Universidad de Santiago de Chile.

Tabla de Contenido

Resumen	III
Abstract	IV
Dedicatoria	V
Agradecimientos	VI
Tabla de Contenidos	VIII
Indice de Tablas	X
Indice de Ilustraciones	XI
1. Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Fricción	2
1.2.1. Fricción entre Partículas	2
1.2.2. Modelo de Fricción de Nemat-Nasser: θ^+ y θ^-	3
1.3. Mecanismos de Deformación	8
1.3.1. Zona de Transformación de Cizalle (<i>STZ</i>)	9
1.4. Medibles Tensoriales	10
1.4.1. Tensor de Deformaciones	10
1.4.2. Tensor de Tensiones	12
1.4.3. Tensor de Fabric	17
1.5. Relaciones micro-macro	20
2. Respuesta de un medio granular bidimensional bajo tasa de deformación constante 23	
2.1. Introducción	24
2.2. Montaje Experimental	25
2.3. Desarrollo Experimental	28
2.4. Resultados	29

2.4.1. Pentágonos	29
2.4.2. Discos	32
2.4.3. Hexágonos	34
2.4.4. Fricción	37
2.4.5. Sistemas Bidispersos	43
2.4.5.1. Discos - Hexágonos	44
2.4.5.2. Pentágonos - Hexágonos	46
3. Matriz Granular con Inclusión por Fotoelasticidad	47
3.1. Introducción	48
3.2. Montaje Experimental	54
3.3. Desarrollo Experimental	56
3.4. Resultados	63
3.4.1. Campos de desplazamientos	63
3.4.1.1. Micro-Macro Desplazamientos	63
3.4.1.2. Desplazamiento $f(R, \theta)$	67
3.4.2. Esfuerzos Locales en Celda Granular	72
3.4.3. Rattler en la Vecindad de la Inclusión	76
4. Conclusiones	88
Bibliografía	92
A. Transformada de Hough	96
B. Método de inversión fotoelástico	100
B.0.0.1. Fotoelasticidad.	101
B.0.0.2. Polariscopio circular de transmisión y de campo oscuro.	103
B.0.0.3. Fuerzas de contacto	106
C. Publicaciones	108

Indice de Tablas

1.1. Escalas de observación en sistemas granulares.	22
2.1. Deformación y tiempos característicos entre dos eventos locales	29
3.1. Granos base para el ajuste del patrón fotoelástico con 2 contactos activos: N_1 y N_2	61

Indice de Ilustraciones

1.1. Dinámica de fricción entre partículas con fuerza normal f_n y tangencial f_t	3
1.2. Angulo de dilatancia en planos de deslizamiento en un sistema granular	4
1.3. Bloque granular en movimiento sobre un plano imaginario $S'S'$	5
1.4. Compactación y dilatancia en muestras de arena de Ottawa bajo cizalle	6
1.5. Modelo para la variación de la dilatación en términos de la deformación	7
1.6. Mecanismos precursores de flujo en materiales granulares	8
1.7. Esquema de zonas de transformación de shear (ZTS)	9
1.8. Esquema de deformaciones de un cuerpo en 2D	10
1.9. Diagrama de variable utilizadas para determinar el tensor de tensiones σ_{ij}	13
1.10. Esquema de tensiones aplicadas sobre las caras de un cubo	15
1.11. Redes de contacto en ensamble granular	17
1.12. Diagramas de proporción para redes de contacto	18
1.13. Escalas de observación en un sistema granular.	21
2.1. Esquema de bloque bajo cizalle simple	24
2.2. Esquema de la celda bidimensional para cizalle simple	26
2.3. Diagrama Esquemático Sincronización Cizalle Simple	27
2.4. Gráfica de fuerzas τ y dilatación D en discos, pentágonos y hexágonos.	28
2.5. Reacomodos locales en partículas pentagonales	30
2.6. Cambio de magnitud en dilatancia para partículas pentagonales	30
2.7. Número de eventos normalizado con γ Vs L_0/d y v	31
2.8. Perfil vertical del desplazamiento relativo de pentágonos	32
2.10. Altura relativa en red cuadrada y hexagonal para discos.	32
2.9. Mecanismo de desplazamiento de planos	33
2.11. Mecanismo de pivote rígido de partículas hexagonales.	34

2.12. Modelo de pivote rígido.	35
2.13. Modelo de pivote rígido con fuerzas actuantes.	36
2.14. Ajuste por el modelo de pivote en partículas hexagonales	38
2.15. Coeficiente de fricción μ Vs L_0/d	39
2.16. Longitud crítica cadenas de fuerza	40
2.17. Fricción instantánea en configuración monodispersa	41
2.18. Fluctuaciones de Fuerza y Dilatación vs L_0/d y v	43
2.19. Sistema bidisperso de partículas en términos de concentración de hexágonos	44
2.20. Sistema bidisperso de partículas discos-hexágonos	45
2.21. μ para mezclas bidispersas; discos - hexágonos y pentágonos - hexágonos	45
2.22. Sistema bidisperso de partículas pentágonos-hexágonos	46
3.1. Esquema de matriz con inclusión en la solución de Eshelby	49
3.2. Campo radial no affine en un medio amorfo, obtenido por Maloney y Lemaître	50
3.3. Celda 2D con cadenas de esfuerzo, en partículas fotoelásticas	51
3.4. Regiones de celda granular en polariscopio circular y con tensiones calculadas	52
3.5. Esquema de bloque bajo cizalle puro, rotación de ejes principales del bloque	54
3.6. Fotografía montaje experimental con partículas fotoelásticas	55
3.7. Fotografía de partículas en montaje experimental	56
3.8. Esquema del polariscopio circular para la obtención de patrones fotoelásticos	57
3.9. Protocolo de medición al retirar la inclusión	58
3.10. Perímetro y centro de discos, detectados por medio de la Transformada de Hough	59
3.11. Esquema de dos partículas en contacto en c_i con fuerza \vec{f}_c y ángulo β	61
3.12. Grano fotoelástico sometido a esfuerzo con tensiones medidas y patrón reconstruido	62
3.13. Gráfico de suma de las diferencias entre imagen real y patrón reconstruido	62
3.14. Fotografía y esquema del espacio muestral en función del radio y ángulo.	63
3.15. Campo de desplazamiento promedio con coarse graining para $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$	65
3.16. Campo de desplazamiento promedio con coarse graining para $\sigma_{xy} = 4 \cdot \sigma_{yx}$	66
3.17. Desplazamiento en función del radio.	68
3.18. Desplazamientos promedios en función del radio respecto a la inclusión.	69
3.19. Región de análisis en vecindad de la inclusión.	70
3.20. Desplazamientos a $\Delta R = 1$ en función del ángulo	71
3.21. Celda experimental con vista de cadenas de esfuerzo al retirar la inclusión elíptica.	72
3.22. Coarse graining para σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} al retirar inclusión, para $w = 2d$	73

3.23. Región con cadenas de fuerzas recortadas y medidas.	74
3.24. Diferencia de los promedios de CG de σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} , para elipse en $\theta = 0$	75
3.25. Diferencia de los promedios de CG de σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} , para elipse en $\theta = \pi/2$	76
3.26. Modelo de cadena de rattler circular compuesto por discos	78
3.27. Modelo poligonal de cadena de rattler compuesto por discos	79
3.28. Protocolo extracción cadena de rattler	80
3.29. Histograma de excentricidad en geometría rattler.	81
3.30. Histograma de cadenas que forman un rattler para $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_1 > \sigma_2$	82
3.31. Relación entre granos en el interior y el perímetro de rattler $\sigma_1 = \sigma_2$	82
3.32. Relación entre granos en el interior y el perímetro de rattler $\sigma_1 = 4\sigma_2$	83
3.33. Longitud máxima del rattler	84
3.34. Fotografía de la cadena de rattlers, reconstrucción y esquema de fuerzas.	85
3.35. Coarse graining para σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} del promediado de rattler para $\theta = 0$	86
3.36. Coarse graining para σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} del promediado de rattler para $\theta = \pi/2$	87
A.1. Tipos de geometrías detectadas con Hough	97
A.2. Parametrización de la Línea Recta	97
A.3. Imagen con acumulador en Transformada de Hough	99
B.1. Discos fotoelásticos sometidos a tensión	101
B.2. Esquema de polarizador plano	104
B.3. Esquema de polarizador circular	105
B.4. Fotografía e Imagen con Patrón calculado	107

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Los medios granulares se encuentran en las más diversas áreas y aplicaciones industriales; como farmacéutica, minería y agricultura, esto ha generado un gran interés por entender el comportamiento reológico de estos medios [1, 2]. Por otro lado, desde el punto de vista científico, los medios granulares son de gran interés debido a su peculiar comportamiento dependiendo de la energía inyectada en el sistema, pudiendo fluir como gas o líquido, o comportarse como un sólido [3, 4]. Este comportamiento se ve expresado en fenómenos naturales como las tormentas de arena, los aludes y los terremotos, para los cuales es de suma importancia comprender su dinámica y eventualmente poder predecirlos. En todos estos fenómenos es relevante la fricción, la que se ve afectada por la forma y distribución de tamaño de los granos, así como por la presencia de eventos localizados que puede aumentar la fluidez del sistema granular. En este capítulo serán introducidos algunos conceptos relacionados con la fricción y conceptos matemáticos empleados en la descripción de la distribución de esfuerzos al interior de un medio granular y su caracterización.

1.2. Fricción

1.2.1. Fricción entre Partículas

Los sistemas granulares poseen una respuesta ligada fuertemente con el tipo de distribución que posean las partículas al interior del medio. Al aplicar esfuerzos a sistemas granulares poco densos, los granos tienen la tendencia a llenar las vacancias preexistentes o las recién formadas por los movimientos de las partículas, a nivel macroscópico esto se traduce en la compactación del medio granular ante la presencia de esfuerzos externos. Por el contrario, cuando el medio granular tiene una compactación alta, éste tiende a dilatarse frente a la presencia de fuerzas de cizalle, fenómeno observado por primera vez por Reynolds en 1885 [5]. Reynolds propuso que la aplicación de esfuerzos tangenciales a un medio granular compacto, produciría desplazamientos relativos de los granos que resultaría en la dilatación del medio granular. A nivel microscópico, el hecho que las partículas, o específicamente una partícula pueda deslizar o trepar sobre otra, depende de las fuerzas de fricción presentes entre los granos en contacto.

Si se considera el plano de dos partículas en contacto, y una de ellas sometida a fuerzas tangenciales f_t y normales f_n , respecto del sistema de coordenadas principal, como se muestra

en la figura (1.1), aparecen las fuerzas normal N , y de fricción T en oposición al movimiento de la partícula superior.

Al realizar la equivalencia de fuerzas en las direcciones de \hat{T} y \hat{N} , se obtiene respectivamente:

$$\begin{aligned} f_t \cos \beta - f_n \sin \beta - T &= 0 \\ -f_t \sin \beta - f_n \cos \beta + N &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Pero, si se tiene en cuenta el parámetro de fricción entre las partículas, se debe considerar que $T/N = \sin \phi / \cos \phi = \tan \phi$, y al reemplazar en la ecuación 1.1 se obtiene:

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{f_t \cos \beta - f_n \sin \beta}{f_t \sin \beta + f_n \cos \beta} \quad (1.2)$$

Expresando en términos de las fuerzas normal f_n y tangencial f_t macroscópica respecto a la partícula superior (ver figura 1.1),

$$\frac{f_t}{f_n} = \frac{\sin(\phi + \beta)}{\cos(\phi + \beta)} = \tan(\phi + \beta) \quad (1.3)$$

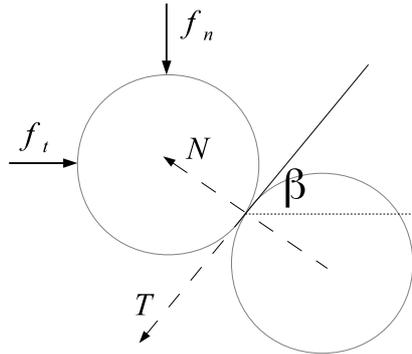


Figura 1.1: Balance de fuerzas entre dos partículas, bajo esfuerzos macroscópicos; normal f_n y tangencial f_t , y fuerzas de reacción normal N y de fricción T .

1.2.2. Modelo de Fricción de Nemat-Nasser: θ^+ y θ^-

Nemat-Nasser presenta un modelo en dos dimensiones compuesto por un sistema de partículas y deformable bajo cizalle, el cual se sustenta en que los cambios de volumen global,

son el resultado de movimientos de algunos granos individuales o un conjunto de ellos al interior del medio granular [6].

El modelo toma los principios de la ley de fricción de Coulomb, considerando un cizalle macroscópico τ_{yx} sobre una línea base SS bajo presión constante y normal al plano σ_{yy} , el parámetro de fricción a un cierto ángulo ϕ , entonces:

$$\tau_{yx} = \sigma_{yy} \tan(\phi) \quad (1.4)$$

El ángulo ϕ posee valores desde cero hasta un valor máximo, mientras se realiza el esfuerzo tangencial. En el sistema se producen múltiples reajustes locales, siguiendo el desplazamiento a través de una línea imaginaria $S'S'$ que cruza ondulante por entre los granos, el movimiento da origen a densificación y dilatación dependiendo de la relocalización de las partículas. Si se considera cada grano o conjunto de ellos deslizando sobre la curva $S'S'$ con esfuerzos tangencial y normal respectivamente, y en términos locales reemplazando el esfuerzo tangencial y normal 1.4, junto al parámetro microscópico ϕ_μ , se satisface $\tau_{yx}^* = \sigma_{yy}^* \tan(\phi_\mu)$.

La línea $S'S'$ forma un ángulo θ con la recta base del sistema SS , a este ángulo θ se hará referencia como *ángulo de dilatación*, ver figura 1.4.

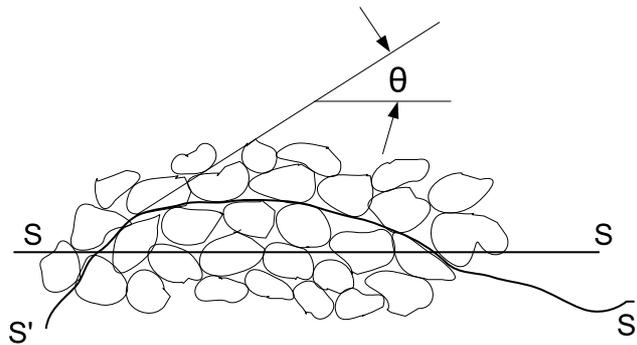


Figura 1.2: Superficie de referencia SS sobre la horizontal, superficie sobre la cual se produce el desplazamiento de partículas $S'S'$, y ángulo de dilatación θ (ver referencia [6]).

Al seguir la curva SS en sentido del flujo (sentido positivo), el ángulo de dilatación es positivo (θ^+), el movimiento de partículas individuales o un conjunto de ellas a lo largo de la dirección del ángulo θ^+ , causando un esfuerzo opuesto a la tensión normal σ_{yy} , dando origen a un aumento de volumen del sistema (dilatación), por otra parte, si las partículas tienden a des-

plazarse hacia abajo el ángulo de dilatación es negativo (θ^-), es decir, causa la disminución de volumen del sistema (densificación).

Si se considera un conjunto ideal de granos comportándose como un bloque sólido, de área superior A desplazándose a través de la curva $S'S'$, y las fuerzas normal N y tangencial F aplicada al sistema macroscópico respecto a la línea SS , como muestra la figura 1.3, y en la ecuación 1.4 se multiplica ambos esfuerzos macroscópicos; normal (σ_{yy}) y tangencial (τ_{yx}), por el área superficial del bloque, entonces es posible reescribir las fuerzas como:

$$F = N \tan(\phi) \quad (1.5)$$

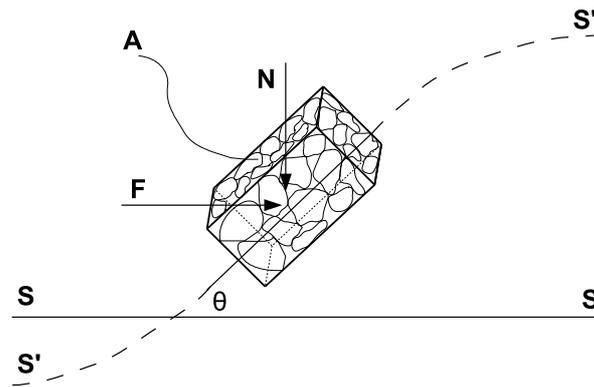


Figura 1.3: Movimiento de granos como bloque sólido, desplazándose en el plano $S'S'$.

En tanto, la fuerzas normal N^* y tangencial F^* respecto a la curva $S'S'$ son:

$$\begin{aligned} F^* &= F \cos(\theta) - N \sin(\theta) \\ N^* &= N \cos(\theta) + F \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

En el momento que el bloque de granos se mueve por el plano inclinado, se enfrenta a una fuerza de roce igual a $F^* = \mu^* N^*$, entonces reemplazando en la ecuación el coeficiente de fricción microscópico por ϕ_μ , queda:

$$F^* = \tan(\phi_\mu) N^* \quad (1.7)$$

Sustituyendo la ecuación 1.7 en 1.6, y reemplazando en la ecuación 1.5 para las fuerzas de roce en el bloque, se obtiene para la microestructura del sistema:

$$\frac{F}{N} = \tan(\phi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\phi_\mu)}{1 - \tan(\phi_\mu) \tan(\theta)} \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow \mu = \tan(\theta + \phi_\mu)$$

siendo ϕ_μ el ángulo asociado al coeficiente de fricción local, y θ el ángulo de dilatación del conjunto de granos dispuestos como bloque y moviéndose por la curva $S'S'$.

Con respecto a la densidad de granos al interior de una caja capaz de deformar bajo cizalle, su comportamiento macroscópico muestra curvas características dependiendo de su configuración inicial. En el caso de una configuración densa de granos, el esfuerzo tangencial induce reacomodos locales en los granos provocando un aumento global de volumen. Si los granos se encuentran sueltos, los reacomodos locales tienden a utilizar los espacios disponibles, esto implica que el efecto inicial será la disminución de volumen hasta que los espacios disponibles sean llenados. Luego, el sistema se comporta como un conjunto usual de granos densos bajo cizalle [7], ver figura 1.4

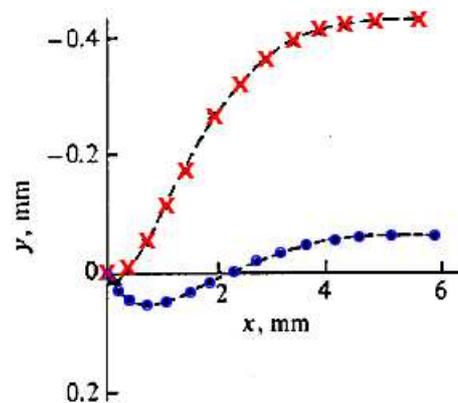


Figura 1.4: Dilatación y en función de la deformación x para muestras de arena de Ottawa sometidas a cizalle (\times arenas densas, \bullet arenas sueltas). Taylor (1948), ver [8]

Una descripción del cambio de volumen de un sistema granular a partir de cambios locales en la microestructura, es dada por Taylor [8], en la relación esfuerzo-dilatación se considera que el desplazamiento al interior del sistema, toma lugar en planos inclinados en un ángulo ψ de dilatación, geoméricamente similar a un perfil diente de sierra, como se observa en la figura 1.5.

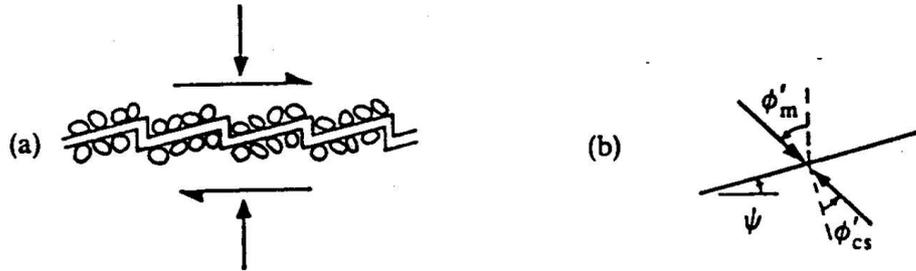


Figura 1.5: **a)** Modelo para la variación de la dilatación en términos de la deformación utilizado por Taylor. La hipótesis se fundamenta en que la dilatación se comporta de acuerdo a una curva diente de sierra, caracterizada por el ángulo ϕ . **b)** ángulo de resistencia al deslizamiento en el plano ϕ'_{cs} y ángulo de fricción aparente por deslizamiento ϕ'_m [7].

Macroscópicamente, si se considera una caja de partículas en un plano horizontal bajo una fuerza normal P , y una fuerza tangencial paralela a la superficie Q , considerando que debido a las cargas en cada eje puede producirse una deformación δy y δx respectivamente. El trabajo realizado por la fuerza que efectúa el cizalle será $Q\delta x$, y el trabajo debido al cambio de volumen del sistema $P\delta y$, entonces el trabajo debido a ambas fuerzas es:

$$\delta W_T = P\delta y + Q\delta x \quad (1.9)$$

Considerando que el coeficiente de fricción es μ , y siguiendo el desarrollo de Taylor [8] es posible escribir el trabajo neto debido a la fricción como:

$$\delta W_T = \mu P\delta x \quad (1.10)$$

entonces, sustituyendo la ecuación anterior en 1.9, queda:

$$\begin{aligned} \mu P\delta x &= P\delta y + Q\delta x \\ \mu &= \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{Q}{P} \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $\frac{\delta y}{\delta x}$ corresponde a la dilatación de la muestra, y $\frac{Q}{P}$ corresponde a la fricción de la movilización externa de las partículas en los planos horizontales.

1.3. Mecanismos de Deformación

En un sistema sometido a esfuerzos en la condición de estado estacionario [9], los parámetros estructurales son determinados únicamente por parámetros externos de tensión y temperatura, dando origen a dos modos de deformación y flujo. A tensión baja y alta temperatura ocurre un régimen de flujo homogéneo, donde cada elemento del volumen del sistema contribuye con la deformación. Para bajas temperaturas y altos valores de tensión, se produce un modo de deformación inhomogéneo donde la deformación es localizada en unas pocas bandas de cizalle. Siguiendo el análisis de Spaepen (1976) [9], los mecanismos de activación del flujo macroscópico para modos homogéneos e inhomogéneos, ocurren por el salto de granos individuales ocupando los espacios de vacancias vecinas, ver figura 1.6.

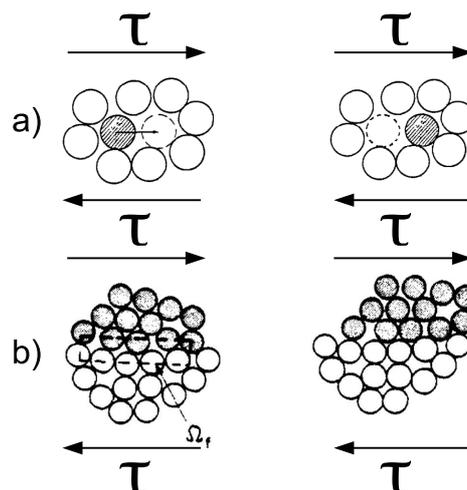


Figura 1.6: Mecanismos precursores de flujo; a) a partir del salto de partículas individuales, Spaepen (1976) [9] y b) a partir del deslizamiento local de granos en una trayectoria definida, Argon (1978) [10]

Las deformaciones que ocurren en sistemas sometidos a tensión como los vidrios metalizados, muestran algunas intensas bandas de cizalle, lo cual ha permitido hacer la analogía al concepto propuesto de *dislocaciones generalizadas* [10] al hacer el vínculo que éstas tienen con la deformación, son la evidencia del movimiento de estas dislocaciones en los mecanismos que dan origen a la plasticidad. Considerando altas tensiones, las zonas de cizalladura se vuelven más intensas, pero se reducen a pequeñas regiones de dos filas donde se producen las deformaciones siguiendo una trayectoria definida, para desplazamientos menores a 10 granos

Argon (1978), ver figura 1.6.

1.3.1. Zona de Transformación de Cizalle (STZ)

Falk and Langer a nivel local han identificado regiones compuestas de 5 a 10 granos, cuyos desplazamientos son no reversibles (no affine) y su configuración es particularmente susceptible a comportarse de manera inelástica en respuesta a esfuerzos de cizalle [11], a estas regiones las identificaron como *shear transformation zones*, ver figura 1.7:

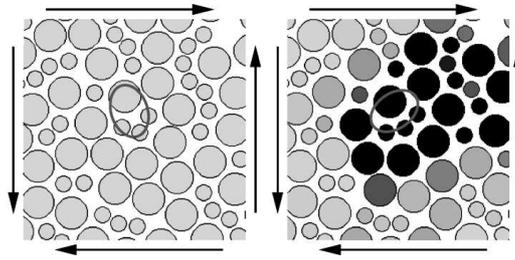


Figura 1.7: Esquema de una zona de transformación de shear. (Izq.) Los granos localizados en zona demarcada por la elipse sufren una deformación por cizalle local, evento plástico local. (Der.) Propagación del efecto producido por el evento plástico local.

La caracterización de esta zona donde se realiza la deformación plástica, es por medio de una aproximación local al tensor de deformación en la vecindad de una partícula, la deformación local se determina al minimizar la diferencia del cuadrado medio D_{min}^2 entre el desplazamiento real de los vecinos en torno a una molécula central, y el desplazamiento relativo en una región de deformación uniforme ϵ_{ij} :

$$D^2(t, \Delta t) = \sum_n \sum_i \left(r_n^i(t) - r_0^i(t) - \sum_j (\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) \times [r_n^j(t - \Delta t) - r_0^j(t - \Delta t)] \right)^2 \quad (1.12)$$

donde los índices i y j corresponden a las coordenadas espaciales, y n es el índice de cada partícula en el rango de interacción con la molécula de referencia. Para calcular ϵ_{ij} y los valores correspondientes que minimizan D^2 se debe determinar:

$$\begin{aligned}
 X_{ij} &= \sum_n [r_n^i(t) - r_0^i(t)] \times [r_n^j(t - \Delta t) - r_0^j(t - \Delta t)] \\
 Y_{ij} &= \sum_n [r_n^i(t - \Delta t) - r_0^i(t - \Delta t)] \times [r_n^j(t - \Delta t) - r_0^j(t - \Delta t)]
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

entonces ϵ_{ij} se puede determinar como:

$$\epsilon_{ij} = \sum_k X_{ik} Y_{jk}^{-1} - \delta_{ij}
 \tag{1.14}$$

Se obtiene el valor que minimiza $D^2(t, \Delta t)$ en la ecuación 1.12, corresponde a la desviación local de la deformación Affine durante el intervalo de tiempo t y $t + \Delta t$. En el trabajo de Falk y Langer se explicita que D_{min}^2 corresponde a un buen parámetro para identificar transformaciones locales irreversibles.

1.4. Medibles Tensoriales

1.4.1. Tensor de Deformaciones

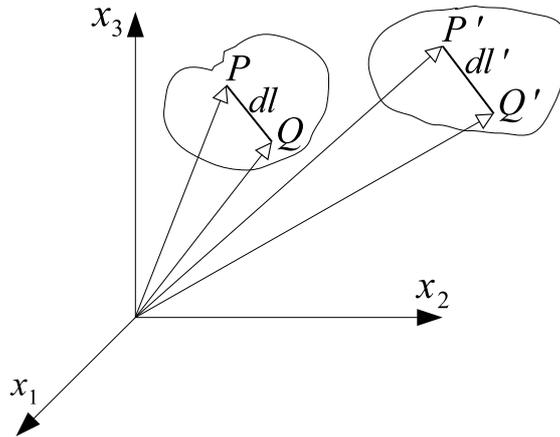


Figura 1.8: Esquema de deformación de un cuerpo, en donde se muestran el desplazamiento de sus puntos P y Q y el correspondiente cambio de longitud en $dl' - dl$.

Cuando se aplican fuerzas sobre un sólido, ocurre un proceso de deformación debido al cambio de volumen o de forma que experimenta. En la aproximación del continuo es posible

caracterizar la posición de cada punto del sólido por un vector \vec{r} . Cuando un sólido experimenta deformación, cambian las distancias entre los puntos. Para la caracterización reológica de materiales amorfos, como son los medios granulares, es necesario definir un parámetro que caracterice la deformación debido al cambio microscópico que experimenta un sistema, por ello es útil definir un parámetro con el cual caracterizar la deformación de cada punto de un sólido sometido a sollicitaciones (ver figura 1.8).

Para determinar el tensor de tensiones es posible definir la posición de un segmento \overline{PQ} definido en cada punto P y Q , por:

$$\begin{aligned} P : \vec{x} &= x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 = x_i\hat{e}_i \\ Q : \vec{x} + d\vec{x} &\mapsto (x_i + dx_i)\hat{e}_i \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si se considera una función $\phi(x) = x'$ que lleva cada punto del segmento \overline{PQ} , hasta la nueva posición luego de la deformación, podemos escribir las nuevas componentes como:

$$\begin{aligned} P' : \vec{x}' &= \phi_i(x)\hat{e}_i \\ Q' : \vec{x}' + d\vec{x}' &= (\phi_i(x) + d\phi_i)\hat{e}_i \end{aligned} \quad (1.16)$$

Es posible expresar el diferencial $d\phi_i$ en términos de derivadas parciales, y reemplazar en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \vec{x}' + d\vec{x}' &= \left(\phi_i(x) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \right) \hat{e}_i \\ d\vec{x}' &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \hat{e}_i \end{aligned} \quad (1.17)$$

La longitud del segmento cambia desde $dl = |d\vec{x}|$ a $dl' = |d\vec{x}'|$. La deformación del segmento puede ser definida en términos de $(dl')^2 - (dl)^2$, entonces para determinar cada cuadrado de la longitud inicial y final, se tiene:

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= |d\vec{x}|^2 = d\vec{x}d\vec{x} = \delta_{ij}dx_idx_j \\ (dl')^2 &= |d\vec{x}'|^2 = d\vec{x}'d\vec{x}' = \delta_{mn}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}dx_i\frac{\partial \phi_n}{\partial x_j}dx_j \end{aligned} \quad (1.18)$$

de esta manera es posible escribir el cambio de longitud como:

$$(dl')^2 - (dl)^2 = \underbrace{\left(\delta_{mn} \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right)}_{2\epsilon_{ij}} dx_i dx_j \quad (1.19)$$

siendo $2\epsilon_{ij}$ el tensor de deformación de Green en formulación Lagrangiana.

Para escribir el tensor en términos de los desplazamientos es posible considerar que $\phi(x) = u + x$, siendo u campo de desplazamiento, con ello es posible reescribir el tensor en la ecuación 1.20:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{ij} &= \delta_{mn} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \delta_{mi} \right) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \delta_{nj} \right) - \delta_{ij} \\ &= \delta_{mn} \left(\delta_{mi} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \delta_{nj} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \delta_{mi} \delta_{nj} \right) - \delta_{ij} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \cancel{\delta_{ij}} - \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.20)$$

entonces el tensor queda expresado:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (1.21)$$

Si $|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}| < 1$, el tercer término que corresponde a la parte no lineal de la ecuación 1.21 tiende a cero. Entonces, queda definido el tensor de *Green - Lagrange* de deformaciones ϵ_{ij} , simétrico $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, y de segundo rango por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.22)$$

1.4.2. Tensor de Tensiones

En un ensamble granular macroscópico y sobre el cual actúa una tensión promedio global $\langle \sigma_{ij} \rangle$, es posible encontrar partículas con y sin contactos con sus vecinos. El número efectivo de contactos en cada grano, dependerá de la geometría y polidispersión de las partículas, por ejemplo, en un sistema monodisperso compuesto de partículas circulares, el número de contactos será entre 2 y 6; será 2 debido a que cada contacto que tenga una partícula deberá estar ligado al menos con otra partícula que mantenga el grano en equilibrio al interior del sistema, y 6 el número máximo de vecinos para una partícula central en una zona hexagonal compactada. Siguiendo el desarrollo de Cristoffersen *et al.* [12] es posible considerar que cada fuerza \vec{f}_i en un contacto de una partícula sobre otra, deberá cumplir el principio de acción y reacción, entonces,

si se tienen dos partículas A y B en un ensamble granular, la fuerza ejercida en A por el grano B , deberá estar a su vez en equilibrio con la fuerza en B ejercida por el grano A .

$$\vec{f}_i^{AB} + \vec{f}_i^{BA} = 0 \quad (1.23)$$

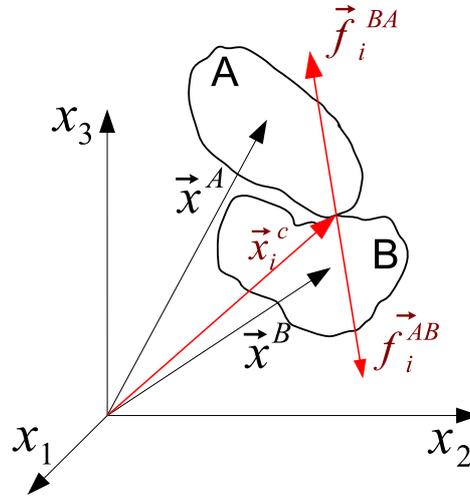


Figura 1.9: Diagrama que muestra las variables utilizadas en la determinación del tensor de tensiones σ_{ij} entre dos partículas en contacto. \vec{x}^A y \vec{x}^B vectores asociados a los centroides, \vec{f}_i^{AB} y \vec{f}_i^{BA} fuerzas en el punto de contacto.

En la partícula A se debe cumplir el balance de fuerzas para N_c contactos, es decir,

$$\sum_{m=1}^{N_c} \vec{f}_i^{Am} = 0 \quad (1.24)$$

Desde un aspecto global, resulta explicitar que la suma de todas las fuerzas de contacto en el sistema debe ser igual a cero, debido a la paridad que presenta cada vector fuerza por el principio de acción y reacción. Escribiendo los vectores a los centroides de las partículas A y B como \vec{x}_A y \vec{x}_B respectivamente, y el vector \vec{x}^{BA} al contacto entre las partículas, el balance de momentos para la partícula A, queda expresado como:

$$\sum_{m=1}^{N_c} \vec{f}_i^{Am} (\vec{x}_j^{Am} - \vec{x}_j^A) = \sum_{m=1}^{N_c} \vec{f}_j^{Am} (\vec{x}_i^{Am} - \vec{x}_i^A) \quad (1.25)$$

Al extender la suma a cada partícula al interior del sistema, para los N contactos en el volumen, es posible reescribir la ecuación anterior como:

$$\sum_{k=1}^N \vec{f}_i^k \Delta \vec{x}_j^k = \sum_{k=1}^N \vec{f}_j^k \Delta \vec{x}_i^k \quad (1.26)$$

siendo $\Delta \vec{x}_i^{mn} = \vec{x}_i^n - \vec{x}_i^m$ el vector que une los centroides de las partículas A a B . Los parámetros de la ecuación 1.26 en términos de la figura 1.9 son $\vec{f}_i^k = \vec{f}_i^{AB}$ y $\Delta \vec{x}_j^k = \vec{x}_j^{AB}$.

Es posible extender la formulación anterior (ecuación 1.26) a un sistema mesoscópico, considerando que \vec{x}^A y \vec{x}^B son las posiciones a los centroides de dos grupos de granos A y B respectivamente [12], la deformación global ocurrirá por deslizamientos de A y B contra otros grupos de granos, antes que se produzca el reordenamiento y la conformación de nuevos grupos A' y B' .

Para relacionar las fuerzas de contacto entre las partículas con las tensiones globales, Christoffersen *et al.* [12] emplea el principio de trabajo virtual. Considerando el sistema bajo una fuerza de tracción T_i por unidad de superficie S .

$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.27)$$

siendo σ_{ij} un tensor de segundo orden y n_j el vector unidad normal en el exterior de la superficie. Es común encontrar las tensiones normales a S reescritas como $\mathbf{T}_{ii} = \sigma_i$, y las tangenciales como $\mathbf{T}_{ij} = \tau_{ij}$ con $i \neq j$ ver figura 1.10, en su sentido matricial se escribe como:

$$[\mathbf{T}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

En el caso de la descripción macroscópica de la tensión para regiones homogéneas de un material, es posible considerar un tensor de tensiones promedio, descrito anteriormente por Drescher and De Josselin de Jong [13] para una tensión σ_{ij} no uniforme en equilibrio, en un volumen V .

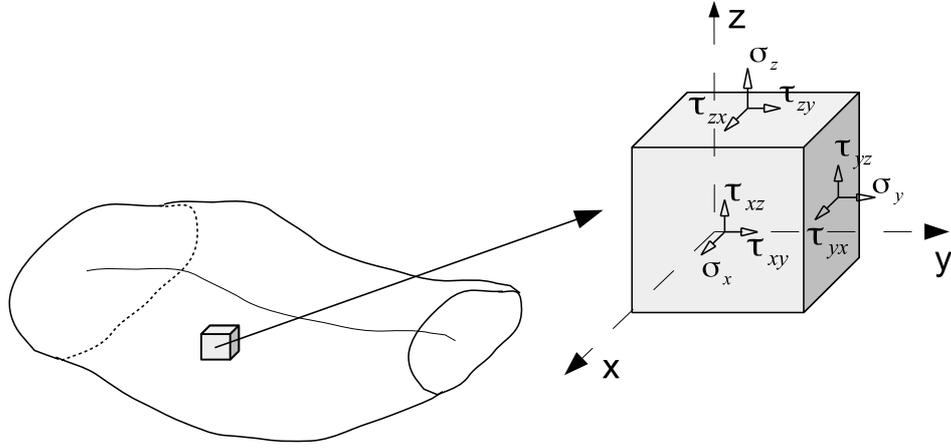


Figura 1.10: Esquema de tensiones aplicadas sobre las caras de un cubo.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (1.29)$$

Para el caso de sistemas granulares, es necesario determinar algunos parámetros microscópicos del sistema, como las posiciones de las partículas, las posiciones de los contactos, las fuerzas de contactos (ver ecuación 1.26). Entre las caracterizaciones del tensor de tensiones para conjuntos microscópicos Lätzel *et al.* aborda desde pre-promedios de esfuerzos sobre partículas [14], en tanto Christoffersen para relacionar la tensión global con las fuerzas de contacto [12], lo hace en base al principio de trabajo virtual. Desde este punto de vista se considera una tracción T_i macroscópica actuando sobre un sistema granular de volumen V y superficie S . Se satisface que en el interior del volumen no hay contribución por parte del campo de tensiones $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0$. Si se considera que la tracción da origen a un campo de desplazamientos virtual u_i , este dará origen a un campo local de desplazamientos microscópicos virtuales Δ_i^m de la m -ésima fuerza de contacto f_i^m . Considerando que la fuerza por unidad de superficie T_i se encuentra en equilibrio con las fuerzas de contacto f_i^m , y que los desplazamientos virtuales son infinitamente pequeños, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores debe ser igual al trabajo virtual interno de los desplazamientos, entonces:

$$\sum_{m=1}^N f_i^m \Delta_i^m = \frac{1}{V} \int_S T_i u_i dS \quad (1.30)$$

utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, es posible sustituir el trabajo efectuado en la superficie S debido a la tracción T_i , por el trabajo realizado por los esfuerzos en el volumen V , es posible escribir:

$$\begin{aligned} \int_S T_i u_i dS &= \int_V \nabla (T_i u_i) dV \\ &= \int_V \{(\nabla T_i) u_i + T_i (\nabla u_i)\} dV \\ &= \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV \end{aligned} \quad (1.31)$$

Donde se utilizó la notación $\partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$. Considerando el desplazamiento macroscópico con una forma lineal [12, 15] $u_i = \Phi_{ij} x_j + c_i$, siendo Φ_{ij} un tensor constante arbitrario y c_i vector constante en S . En tanto, el desplazamiento local debido a cada fuerza de contacto, se puede escribir como una relación directa con el vector ℓ_j^m , como $\Delta_i^m = \Phi_{ij} \ell_j^m$. Al sustituir en la ecuación 1.30 se deduce :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N f_i^m (\Phi_{ij} \ell_j^m) &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \Phi_{ij} dV \\ \Phi_{ij} \left[\sum_{m=1}^N f_i^m \ell_j^m - \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Utilizando el balance de momentos descritos previamente 1.26, considerando que Φ_{ij} es un tensor constante arbitrario, N el número de contactos en V , y comparando la parte derecha con la ecuación 1.29, se obtiene la expresión para el tensor de tensiones promedio:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N (f_i^m \ell_j^m + f_j^m \ell_i^m) \quad (1.33)$$

Por otra parte, considerando un subconjunto de granos en un volumen V y un contorno superficial S , luego reemplazando las coordenadas x_i por los vectores de branch ℓ_j , y utilizando el teorema de divergencia de Gauss, el tensor de tensiones promedio 1.29 se puede reescribir como:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{\mu} x_i^{(m)} f_j^{(m)} = M \langle \ell_i f_j \rangle \quad (1.34)$$

donde μ es el número de fuerzas intersectadas por el contorno del volumen V , $f_j^{(m)}$ es la j -ésima componente de la m -ésima fuerza de contacto y M es el número de contactos por unidad de volumen .

1.4.3. Tensor de Fabric

Al someter a tensiones un conjunto granular, las fuerzas se propagan a lo largo de redes de contacto entre las partículas, esta interacción producto de la fricción es quien gobierna el comportamiento plástico en los medios granulares [16]. La transmisión de fuerza en este tipo de sistemas ocurre sólo a través de las partículas que se encuentran en contacto. A escala microscópica las tensiones al interior de un grano cilíndrico, serán gobernadas por las orientaciones de los contactos en cada partícula. A la cantidad de contactos vecinos correspondientes a cada grano se define como *número de coordinación* Z , este valor dependerá de la forma de las partículas y del tipo de deformación en la evolución temporal, en un cristal perfecto 2D conformado por cilindros, el número de coordinación posee un valor máximo $Z = 6$, en un ensamble 3D puede alcanzar un valor máximo de $Z = 12$. En un ensamble de partículas el número de coordinación global, se determina como la razón entre el valor promedio de Z de los contactos vecinos por partícula.

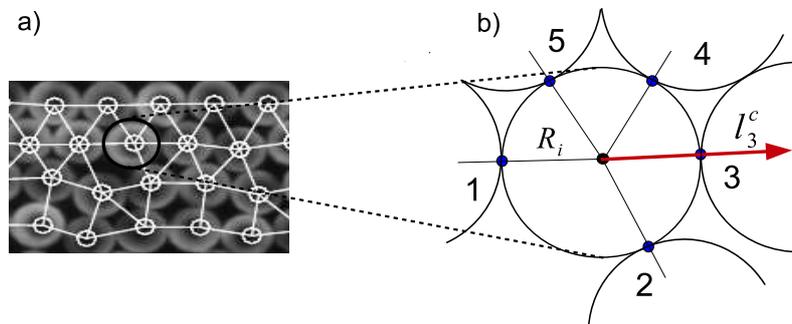


Figura 1.11: a) Sistema granular con redes de contacto entre granos vecinos. b) Partícula con número de coordinación $Z = 5$, se muestra las direcciones de los puntos de contacto y el vector de branch con la partícula 3, l_3^c .

se define función de proporción $P(c)$ de partículas a la fracción de partículas que tiene, exactamente, el mismo número de contactos c . Con esto, el número de coordinación se obtiene a partir de $Z = \sum_c cP(c)$.

En la figura 1.12 se observan las curvas de proporciones $P(c)$ para dos sistemas granulares de partículas con geometrías diferentes (circular y pentagonal). Ambas curvas son aproximadamente idénticas, con peak en $c = 4$ y fracciones de partículas con similar proporción

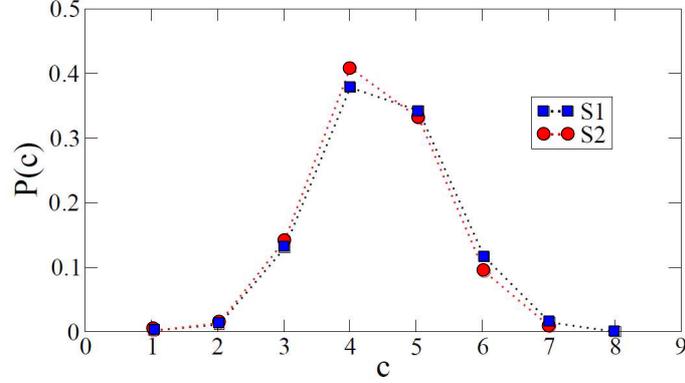


Figura 1.12: Diagramas de conectividad para partículas circulares $S1$ y pentagonales $S2$, que muestra la fracción $P(c)$ de partículas con exactamente c contactos [17].

para cada valor de contactos desde 1 a 8, este es un fuerte indicador de que Z por sí solo no entrega la suficiente información de las diferencias en la textura entre los dos sistemas, por ello se introduce el *Tensor de Fabric* para caracterizar la textura y anisotropía de un conjunto granular.

El tensor de fabric caracteriza las orientaciones de las partículas en un sistema granular sometido a deformación, el primer antecedente de cadenas preferenciales o subconjunto de partículas al interior del ensemble, lo entregan las cadenas de fuerzas observables por medio de un sistema de polarizadores en partículas fotoelásticas.

Para cuantificar la anisotropía de un sistema granular, el tensor de Fabric posee más de una descripción Satake (1978) [18], Oda (1982) [19]. Oda considera una función densidad de probabilidad $f(r)$ para un medio granular compuesto de esferas con radios entre r y $r + dr$, Satake define el *branch vector* $\vec{\ell}_i^c = \ell \hat{n}_i$, como un vector que une los centroides entre dos partículas vecinas en contacto (ver figura 1.11).

Si se considera que hay $n^{(V)}$ partículas de igual volumen V_p en un sub-volumen V_s , el número de esferas ocupando el sub-volumen se puede determinar por:

$$V_s = \int_{r_{min}}^{r_{max}} V_p n^V f(r) dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{4}{3} \pi r^3 n^V f(r) dr \quad (1.35)$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{4}{3} \pi n^V \langle r^3 \rangle$$

a partir de esta expresión, es posible determinar el número de partículas en el sub-volumen.

$$n^{(V)} = \frac{3V}{4\pi(1+e)\langle r^3 \rangle} \quad (1.36)$$

donde se ha utilizado que el volumen total del sistema es $V = (1+e)V_s$, y el volumen de espacios vacíos es proporcional a eV_s . El número de contactos promedios por partícula (número de coordinación) $\langle Z \rangle$ ponderado por el número de partículas en V_s entrega un valor para determinar el número total de contactos en el sub-volumen será $1/2\langle Z \rangle nV$. La densidad de contactos en el medio se puede determinar por:

$$\xi = \frac{\langle Z \rangle nV}{2V} = \frac{3\langle Z \rangle}{8\pi(1+e)\langle r^3 \rangle} \quad (1.37)$$

Se ha definido previamente por Oda *et al.* (1980) [20] una función de distribución de densidad de probabilidad, para $g(\ell)$:

$$g(\ell) = \frac{\int_{\ell-r_{max}}^{\ell-r_{min}} f(r)f(\ell-r)dr}{\int_{2r_{min}}^{2r_{max}} \int_{\ell-r_{max}}^{\ell-r_{min}} f(r)f(\ell-r)drd\ell} \quad (1.38)$$

Y una función densidad de probabilidad, para las orientaciones del vector de branch $\langle n \rangle$ y de sus longitudes ℓ , entonces la función mutuamente independiente para $\langle n \rangle$ y ℓ se expresa como:

$$E(\langle n \rangle, \ell) \approx E(\langle n \rangle)E(\ell) \quad (1.39)$$

Al definir la interacción de las partículas con sus contactos vecinos, es posible definir una curva imaginaria sub-conjunto en el medio granular, dividiendo en dos grupos las partículas. Se diferenciarán entre las que se encuentran al interior del perímetro y aquellas en el borde exterior de la superficie encerrada y que además se encuentran en contacto con una partícula al interior cruzando la línea imaginaria [20]. La densidad de los vectores de branch por unidad de área $M_{(i)}$, que cruzan la línea imaginaria se puede expresar:

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= 2\xi \int_{2r_{min}}^{2r_{max}} \int_{\Omega/2} \ell n_i g(\ell) E(\langle n \rangle) d\Omega d\ell \\ &= \xi \langle \ell \rangle \langle |n_i| \rangle \end{aligned} \quad (1.40)$$

Si los vectores $\vec{\ell}$ son considerados vectores unitarios, y sus orientaciones se suman por conexiones desde las partículas del exterior de la sub-superficie, hasta las partículas vecinas en contacto al interior. El tensor de proyección denominado *Tensor de Fabric* se puede determinar por:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= 2\xi \int_{2r_{min}}^{2r_{max}} \ell g(\ell) d(\ell) \int_{\Omega/2} n_i n_j E(\langle n \rangle) d\Omega \\ &= \xi \langle \ell \rangle \langle n_i n_j \rangle \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Similar a la ecuación anterior, Scheidegger (1965) [21] y Satake (1978) [18], definen un tensor de orientación basado en el análisis de planos y elementos lineales en geología, definen el tensor de Fabric de la forma:

$$F_{ij} = \langle n_i n_j \rangle \quad (1.42)$$

expresado en su forma tensorial,

$$F = \langle \vec{n} \otimes \vec{n} \rangle \equiv \int_{\Omega} \vec{n} \otimes \vec{n} P_n(\vec{n}) d\vec{n}, \quad (1.43)$$

donde \otimes corresponde al producto dyadic entre \vec{n} . Los vectores \vec{n} son considerados ortonormales en los contactos, de la definición de Kanatani (1984) [17] también pueden ser considerados como vectores de branch unitarios. La traza del tensor por definición es $tr(F) = 1$.

En 2D \vec{n} es parametrizado por las orientaciones θ con respecto a un marco de referencia fijo como $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Entonces $P_n(n)$, se expresa en términos de $P_n(\theta)$:

$$P_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \{1 + a \cos 2\theta + \dots\} \quad (1.44)$$

Siendo $a = 2\langle \cos 2\theta \rangle$ el principal parámetro de la anisotropía [16], $P_n(\theta)$ es no uniforme ya que hay direcciones preferenciales de contacto, es decir, la estructura granular tiende a ser principalmente anisotrópica [4].

1.5. Relaciones micro-macro

La descripción dinámica de sistemas amorfos (espumas, geles, vidrios, medios granulares) no es trivial, las interrogantes básicas sobre su comportamiento hacen referencia a los

mecanismos microscópicos que tienen incidencia en la respuesta mecánica macroscópica. El desplazamiento de una partícula por reacomodo local, o por extracción puede ser el motor de múltiples reorganizaciones, para definir el nivel de escalamiento sobre el que actúa el proceso, es útil hablar de *microescala* al hacer referencia a los elementos individuales, de *mesoescala* a un conjunto discreto y de *macroescala* al sistema, visto desde una aproximación al continuo, ver figura 1.13.

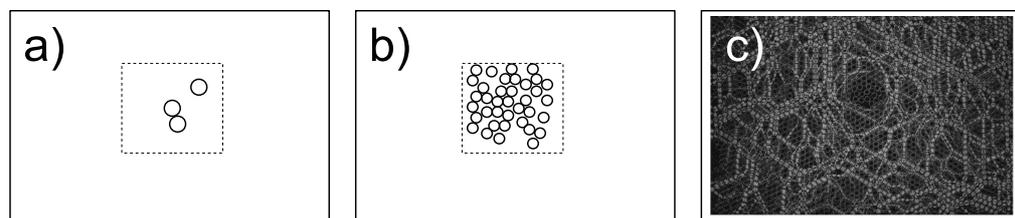
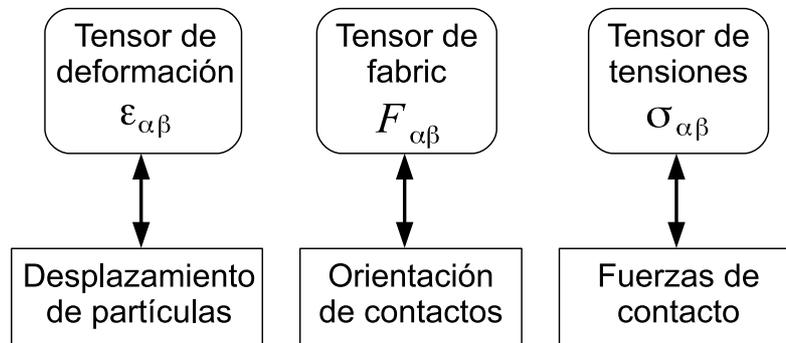


Figura 1.13: Diagrama que esquematiza las escalas de observación en medios granulares. a) Escala microscópica, sólo participan algunos granos, los que pueden estar aislados entre sí. b) Escala mesoscópica, conjuntos de granos actuando en forma coordinada. c) Escala macroscópica, conjunto con todos los granos en el sistema.

Una técnica experimental que permite observar directamente, los cambios a escala microscópica en un medio granular que es sometido a esfuerzos, es por medio de métodos fotoelásticos, este tipo de análisis se caracteriza por detallar gráficamente y con alta sensibilidad, la multiplicidad e intermitencia de contactos activos y redes de contacto entre las partículas. La evolución de la estructura interna es compleja, la cuantificación macroscópica de su estructura interna es dada estadísticamente junto a variables tensoriales [22], ello permite el vínculo entre medibles locales para el análisis cuantitativo macroscópico (Cuadro 1.1).



Cuadro 1.1: Relación entre los elementos de caracterización microscópica y las correspondientes cantidades macroscópicas.

En los capítulos siguientes, se han utilizado estas variables tensoriales con la finalidad de cuantificar macroscópicamente observables discretos entre distinto tipo de granos. Particularmente en el capítulo 3, se ha recurrido a un promediado espacial sobre la celda granular experimental, para cuantificar los cambios observados en el campo de deformaciones y en el campo de tensiones producto de las interacciones entre las partículas.

Capítulo 2

**Respuesta de un medio granular
bidimensional bajo tasa de
deformación constante: efecto de la
forma de los granos.**

2.1. Introducción

La amplia presencia de los medios granulares en la naturaleza y en los procesos de industrias tan amplias como la farmacéutica, alimentos y minería ha generado una intensa actividad de investigación acerca de sus propiedades en varios campos de la ciencia [3, 4] e ingeniería [1, 2]. Simulaciones numéricas y modelos teóricos han mostrado la importancia de la fricción (por deslizamiento o rodamiento) en la dinámica de los medios granulares. Una de las variables que afectaría el comportamiento de la fricción es la forma de los granos, pues se espera que ésta interfiera tanto en el deslizamiento como en el rodamiento entre granos vecinos. Sin embargo, no existe suficiente evidencia experimental al respecto. Con el objetivo de determinar el efecto de la forma de los granos en el comportamiento macroscópico de un material granular bidimensional monodisperso, hemos diseñado y construido una celda de cizalle simple, la cual permite la medición simultánea de la dilatación (cambio de volumen) y la fuerza de cizalle ejercida por el medio granular en contra de la deformación impuesta. Los granos han sido escogidos según su capacidad de formar dominios cristalinos. En este caso, utilizamos discos, pentágonos y hexágonos. También, se ha considerado el caso de medios granulares bidispersos, en los cuales se han mezclado granos compatibles e incompatibles desde el punto de vista de la capacidad de creación de dominios cristalinos, discos-hexágonos (compatibles) y pentágonos-hexágonos (incompatibles).

El cizalle simple corresponde a un tipo de deformación en la cual el sistema es desplazado en sentidos opuestos. Si se considera una caja cuadrada con un círculo concéntrico, al deformar tangencialmente dos paredes opuestas de la caja, el círculo se convierte en una elipse donde sus ejes mayor y menor rotan en sentido del reloj a medida que el cizalle avanza, como muestra la figura 2.1.

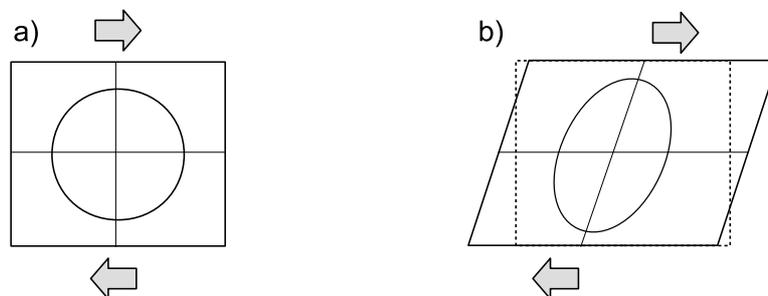


Figura 2.1: Esquema de bloque bajo cizalle simple. Rotación de ejes principales en elipse formada a partir del cizalle.

2.2. Montaje Experimental

El sistema experimental consiste de dos placas metálicas en la vertical pivoteadas por dos paredes laterales, conformando una celda experimental horizontal, en la cual fue posible realizar deformación de cizalle simple a velocidad constante. Las dimensiones de la celda son, largo constante de $50[cm]$, y altura L_0 variable entre 4 y $6[cm]$ en función de la cantidad de partículas en su interior y la dilatación del sistema. Para estudiar la influencia de la geometría de las partículas bajo cizalle simple, se utilizaron tres tipos de granos duros de acrílico de $6[mm]$ de altura, en configuraciones monodispersos se estudió granos cilíndricos de $8[mm]$ de diámetro, pentágonos y hexágonos de $8[mm]$ de diámetro circunscrito.

A las paredes en la vertical, se adhirieron mitades de partículas circulares de distintos diámetros, con el objetivo de formar la rugosidad necesaria para evitar que el medio granular tendiera a formar un monocristal. Para minimizar los efectos de roce de las superficies móviles de la celda, se utilizaron rodamientos de aire a los costados de la pared desde donde se aplicó la carga normal $\mathbf{N} = 7[N]$ entre $0,13[N/cm]$ a $0,25[N/cm]$. Con la misma finalidad, también se utilizó un rodamiento de diámetro mayor bajo la placa, ver figura 2.2 sector **B**.

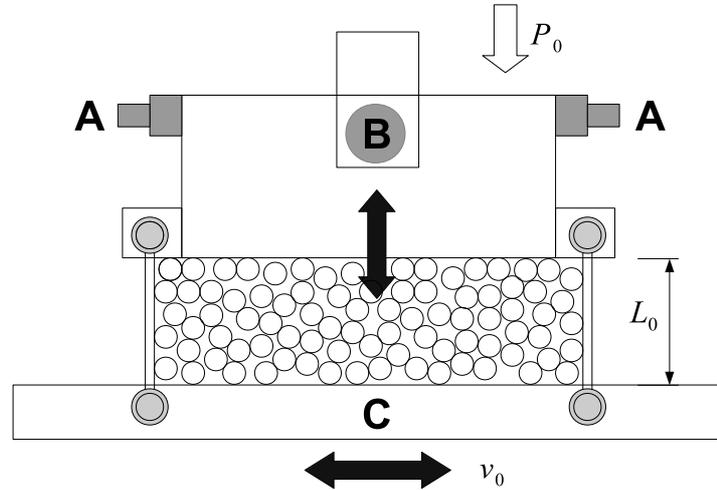


Figura 2.2: Esquema de la celda bidimensional para cizalle simple. La placa superior ejerce una fuerza constante sobre el medio granular, mientras que la placa inferior es utilizada para deformar el sistema. **A** y **B** indican la posición de los rodamientos de aire, en la placa superior, utilizados para minimizar la fricción. $C = 50[cm]$ y L_0 son la longitud y altura inicial de la celda, $P_0 = 7[N]$ es la fuerza aplicada sobre la placa superior. Las flechas indican la dirección de movimiento de las placas.

El movimiento horizontal de la placa inferior, se realizó a velocidad constante v_0 con un motor de paso entre $0,1[mm/s]$ y $4,8[mm/s]$, controlado con LabVIEW a través de la tarjeta NI PCI-7350 de National Instruments (MID - 7604/7602 4/2 AXIS STEPPER MOTOR DRIVE de National Instruments). Este sistema permite la medición simultáneamente de la *dilatación* y la *fuerza de cizalle*. La dilatación se registró mediante un sensor de posición inductivo LVDT (SHAEVITZ ENG S/N 8038) fijo a la pared móvil superior, la fuerza de cizalle se determinó por medio de la deflexión de dos placas delgadas de acero a través de un sensor de proximidad capacitivo, ambas curvas se registraron con una resolución de 10,000 puntos por segundo mediante una tarjeta de adquisición NI AT-MIO-16XE-10 de National Instruments, la cual también era utilizada en la sincronización de los distintos dispositivos empleados en el experimento. La imágenes fueron registradas mediante una cámara de alta resolución, modelo Prosilica GX6600 de ALLIED Vision Technologies con aproximadamente $29[Mpx]$ de resolución a razón de un cuadro por segundo, la cual estaba conectada al **PC2** (ver esquema de hardware y componentes 2.3). La sincronización de la cámara fue realizada mediante el envío de una señal de activación desde el **PC1**.

La señal de activación enviada por el computador principal, **PC1**, daba inicio a los

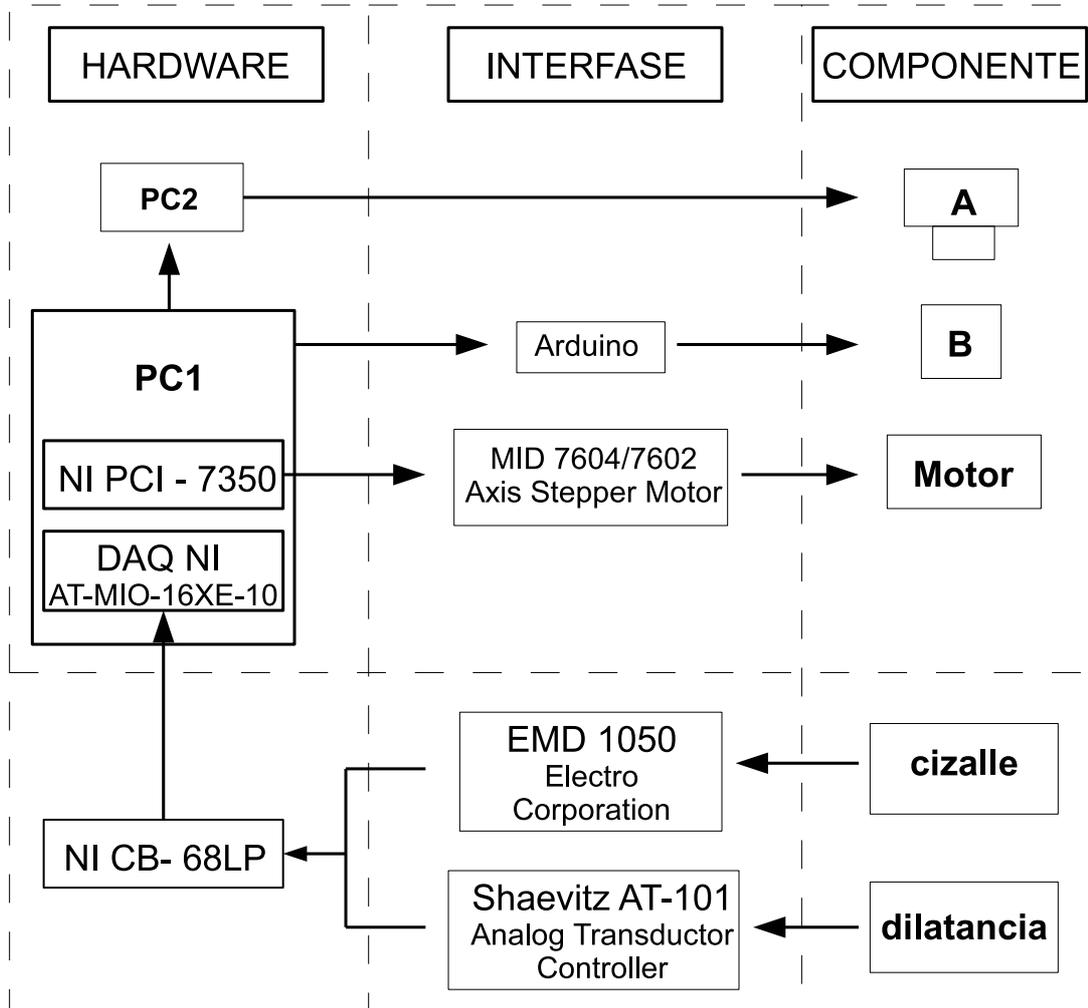


Figura 2.3: Diagrama de bloques del sistema de control utilizado en el experimento de cizalle simple. Se muestran los dispositivos y sensores empleados junto con las tarjetas adquisición de datos y de control. **A** representa la cámara, **B** compresor SHULZ dental con el cual se alimentaban los rodamientos de aire a una presión de $50[\text{psi}]$, **MOTOR** motor de paso responsable del desplazamiento de la placa inferior.

siguientes procesos:

- 1 activación de la cámara,
- 2 activación del compresor de aire,
- 3 activación del motor para iniciar la deformación por cizalle,

4 inicio simultáneo de la adquisición de la dilatación y fuerza de cizalle.

2.3. Desarrollo Experimental

Los ciclos de cada experimento se inició con los brazos laterales dispuestos perpendicularmente a las placas de la celda. Luego, la celda era deformada hacia la derecha hasta que los brazos formaran un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. A continuación, se invertía el sentido de la deformación de forma tal que los brazos se ubicaran en la posición inicial. Para cada experimento se realizó aproximadamente 30 ciclos. Se consideró un sistema granular monodisperso, una velocidad de deformación de $v_0 = 0,1[mm/s]$, una fuerza normal de $P_0 = 7,0[N]$ y una altura inicial de la celda de $L_0 = D/d \approx 6,5$ diámetros de partículas.

Los registros típicos de la fuerza de cizalle y dilatación en función de la deformación, para diferentes geometrías de partículas se pueden observar en la figura 2.4.

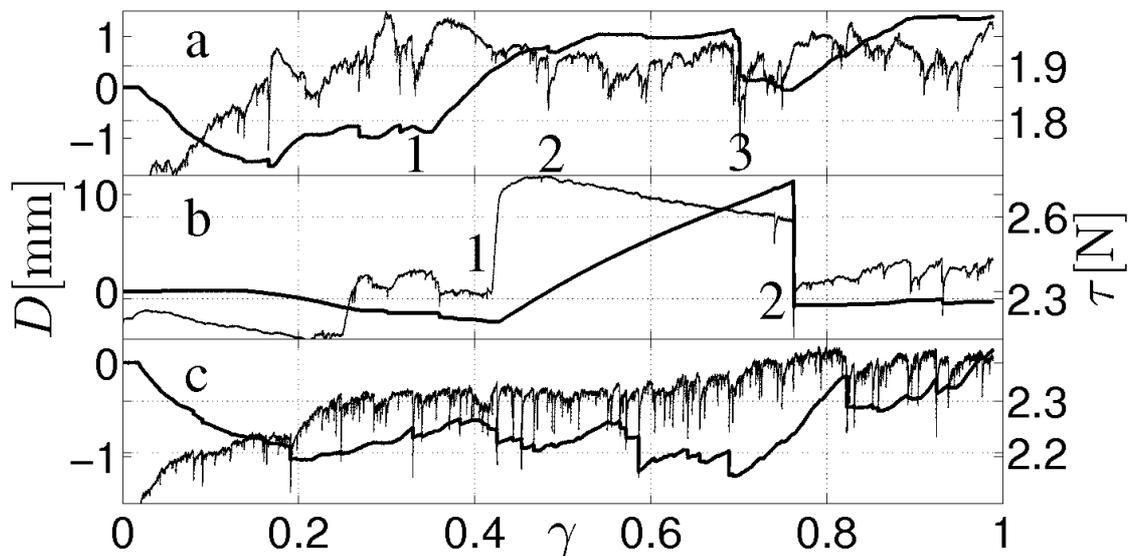


Figura 2.4: Gráfico que muestra el comportamiento típico de la fuerza de cizalle τ y la dilatación D en función de la deformación γ , para partículas cilíndricas **a**, hexagonales **b** y pentagonales **c**. Datos registrados con velocidad de deformación constante $v_0 = 0,1[mm/s]$.

La curva central corresponde a partículas con geometría hexagonal, la cual muestra grandes amplitudes de deformación cercanas a un diámetro de partícula ($8[mm]$), en tanto para granos con superficie circular y pentagonal, las amplitudes corresponden a sólo pequeñas fracciones del

	$\Delta\gamma$	$\Delta t[s]$
Pentagonos	$\sim 0,01$	$\sim 5,0$
Discos	$\sim 0,05$	$\sim 25,0$
Hexagonos	$\sim 0,30$	$\sim 150,0$

Cuadro 2.1: Deformación y tiempos característicos entre dos eventos locales, para un sistema confinado con $P_0 = 7[N]$ y deformado a una velocidad constante $v_0 = 0,1[mm/s]$.

tamaño de un grano. También es posible observar que las fluctuaciones en la fuerza, presentan una mayor frecuencia para los granos pentagonales, mientras que para los granos hexagonales estas fluctuaciones son menos frecuentes. En las tres curvas es posible observar una caída simultánea en la dilatación y en la fuerza de cizalle. Las deformaciones típicas y la duración asociada a los eventos locales con cizalle constante a $v_0 = 0,1[mm/s]$ para cada forma de grano, se muestra en la tabla del cuadro 2.1.

2.4. Resultados

2.4.1. Pentágonos

Las forma particular de los granos pentagonales evita la formación de estructuras de largo alcance. Esto se debe en gran medida al reordenamiento permanente de los pentágonos, producto de su imposibilidad de formar estructuras cristalinas. En la figura 2.5 se puede ver un reordenamiento típico de un conjunto de granos pentagonales. Aquí se puede observar el desalineamiento permanente de los pentágonos, producto de su geometría, lo que impide la formación de estructuras estables dentro del medio granular.

El proceso continuo de rotaciones y deslizamientos de las partículas pentagonales, genera perturbaciones locales que interactúan con las partículas vecinas. A partir de análisis de imágenes, se han observado saltos en la dilatación, cuya magnitud es incrementada con el número de granos que rotan simultáneamente en el sistema, N_R .

Al estudiar la gráfica de la dilatación ΔD versus N_R , se observa que la magnitud del salto en la dilatación aumenta con N_R , como se muestra en la figura 2.6. Esto se puede entender en términos de que cada cúmulo contribuye con una característica de compactación local que afecta el promedio de la compactación a nivel macroscópico.

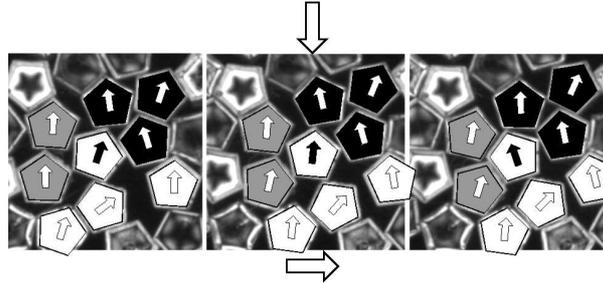


Figura 2.5: Mecanismo de rodadura de los pentágonos. El pentágono desalineado (flecha negra) comienza a rodar por efecto de la deformación (Izq.). Rotación gradual posterior (centro). Pérdida del soporte en los vecinos y deslizamiento repentino del pentágono, lo que relaja el esfuerzo momentáneamente (Der.). Se crea una deformación no affine alrededor del pentágono rodante (pentágonos blancos y grises).

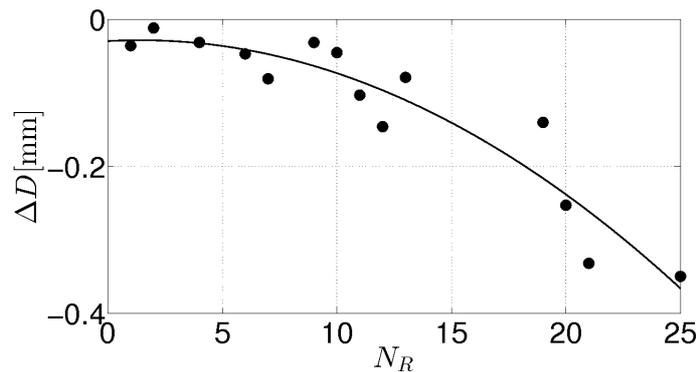


Figura 2.6: Magnitud de cambio en la dilatancia, para partículas pentagonales, en función del número de rotación de pentágonos activos N_R . Velocidad constante de deformación $v_0 = 0,1[mm/s]$ y fuerza normal $N = 7[N]$, con $L_0/d \approx 6,5$ granos.

Al estudiar el número de eventos por unidad de deformación N_e/γ para diferentes formas de granos, en función del rango de velocidad v disponible experimentalmente y de L_0/d , se observó que las magnitudes alcanzadas por el parámetro N_e/γ fueron mayores para las partículas pentagonales, luego para los discos y finalmente los hexágonos. El permanente reacomodo local de los granos pentagonales dan como resultado la mayor frecuencia de eventos observada en estos granos. De la figura 2.7 se observa la independencia de N_e/γ con L_0/d , y de la velocidad v en discos y hexágonos.

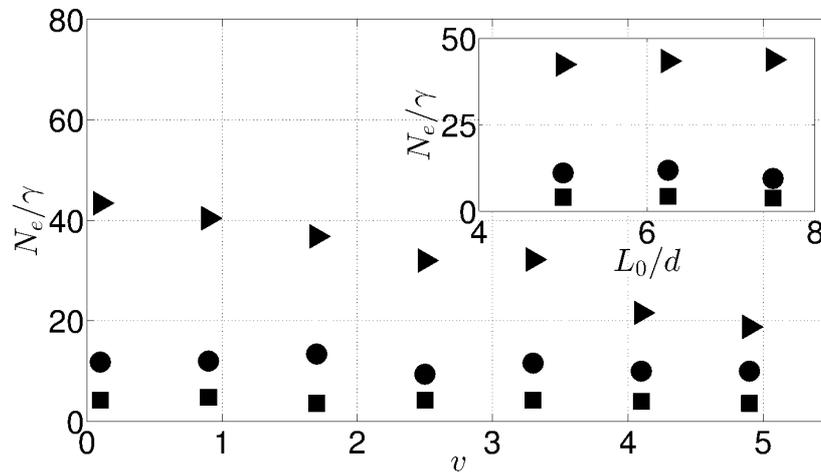


Figura 2.7: Número de eventos por unidad de γ en función de v , y número de eventos normalizados con γ en función de L_0/d , para pentágonos (▶), discos (●) y hexágonos (■).

Por otro lado, al aumentar la velocidad de deformación se observa que existe una disminución progresiva de la frecuencia de eventos (N_e/γ) para las partículas pentagonales. Esto puede ser explicado en virtud de una localización parcial del cizalle, con el aumento de la velocidad (ver figura 2.7).

También, se ha observado que el movimiento permanente de los pentágonos tiende a localizarse cerca de la pared móvil cuando la velocidad de deformación es incrementada a $v = 4,8[mm/s]$, como se muestra en la figura 2.8. La localización de estos movimientos reduce el número de partículas para relajar la acumulación de esfuerzo y explicaría la disminución de N_e/γ al aumentar v , ver figura 2.7.

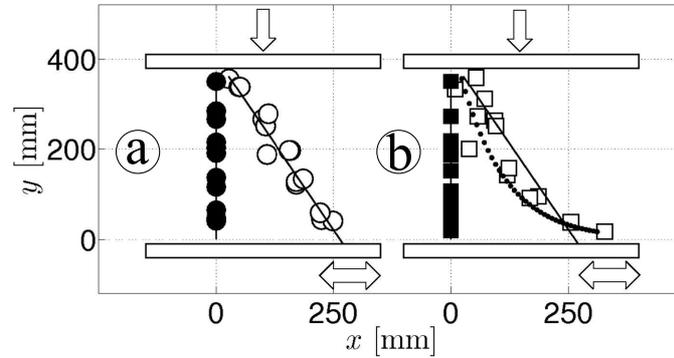


Figura 2.8: Perfil vertical del desplazamiento relativo de pentágonos. (● y ■) corresponde a $\gamma = 0$, y (○ y □) corresponde a $\gamma = 1$. **a)** $v = 0,1[mm/s]$ y **b)** $v = 4,8[mm/s]$. Las líneas son sólo guía visual.

2.4.2. Discos

Al someter a cizalle simple granos con geometría circular, se observa la relajación de tensiones internas (Argon [10]) por medio de movimientos locales, que favorecen el desplazamiento de planos en la dirección del cizalle, como es posible observar en la figura 2.9.

El permanente reacomodo local de los discos al interior del sistema, es principalmente provocado por su baja fricción, lo cual genera cristalización parcial del medio granular. La cristalización parcial del medio granular favorece la formación de planos de deslizamiento en la dirección de la deformación impuesta, ver figura 2.9. El deslizamiento entre planos produce una dilatación máxima, la cual corresponde básicamente a la transformación de una red hexagonal en una red cuadrada, como se observa en la figura 2.10 a.

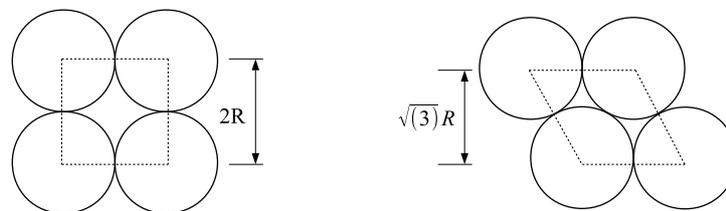


Figura 2.10: Alturas relativas para máxima dilatación (red hexagonal), y mínima compactación (red cuadrada) con granos de forma circular.

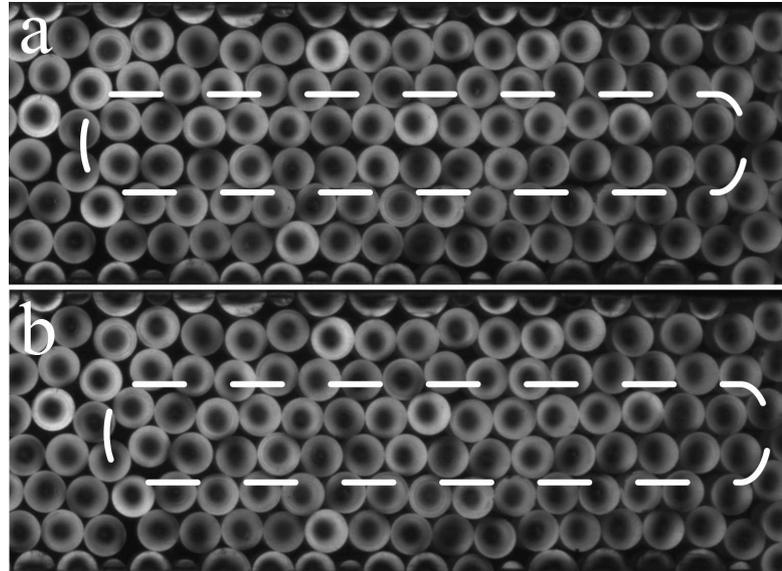


Figura 2.9: Mecanismo de deformación a través del deslizamiento de planos. (a) El plano inferior es forzado a moverse en la dirección de la deformación, empujando al plano superior hacia arriba, hasta alcanzar su posición más alta. (b) Las partículas en el plano superior deslizan repentinamente debido al desalineamiento con el plano inferior. Los planos que deslizan entre sí están identificados mediante la línea blanca segmentada.

Una vez que los planos vecinos alcanzan su máxima distancia de separación, éstos se compactan repentinamente producto de la desalineación entre ellos. Esto causa que el sistema granular rápidamente se compacte ver figura 2.10 **b**. El tamaño típico del salto en dilatación corresponde a la diferencia de altura entre dos granos vecinos en una red cuadrada y dos granos vecinos formando una red hexagonal. Si consideramos el radio de los discos $R = 4,0[mm]$

$$\Delta h = (2 - \sqrt{3})R \approx 1,072[mm] \quad (2.1)$$

valor que resulta coherente con los datos obtenidos para el cizalle simple, en partículas con forma de disco.

Por otro lado, las fluctuaciones rápidas de baja amplitud observadas en la fuerza de cizalle son respuestas a pequeños cambios en la red de fuerzas de contacto.

2.4.3. Hexágonos

En el caso de los granos hexagonales, se observó la creación de estructuras coherentes, facilitado por la gran capacidad de cristalización, en dominios hexagonales, que poseen los hexágonos. Esto permite la nucleación de cadenas capaces de sostener la carga aplicada sobre el medio granular.

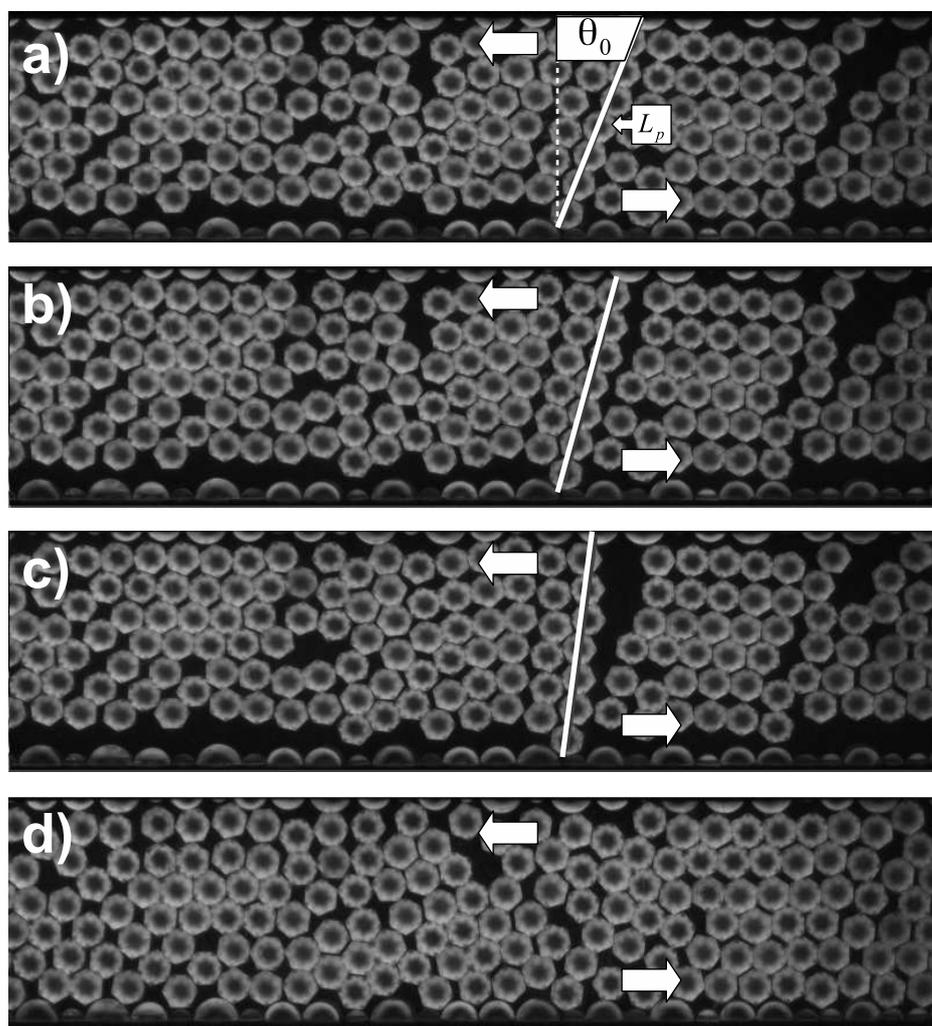


Figura 2.11: Mecanismo de pivote rígido; nucleación **a)**, rotación **b)** y **c)**, y colapso **d)** de un pivote de granos hexagonales.

En el punto de nucleación de la cadena se produce un aumento progresivo de la dilatación del sistema, por efecto de la rotación de esta cadena. Asociado al aumento de la dila-

tación aparece un aumento repentino de la fuerza de cizalle. Al incrementarse la deformación progresivamente, la dilatancia continua aumentando mientras la fuerza decae gradualmente. En el momento en que la cadena alcanza un ángulo de inclinación cercano a los 90° ésta colapsa por efecto del *buckling* al que está sometida. En este punto, el sistema colapsa abruptamente reduciendo la dilatancia y fuerza de cizalle en forma simultánea y muy rápidamente. Es importante destacar que, aún cuando el sistema se compacta en forma repentina, esto no se traduce en un bloqueo del medio granular. De hecho, la fuerza se incrementa en forma gradual mientras la dilatancia permanece constante, como se puede observar en la figura 2.4 b.

Las cadenas de granos hexagonales se pueden modelar a través de un pivote rígido. Para tal efecto, se tomó en consideración una distancia inicial fija x' desde el punto de nucleación al eje vertical donde el pivote *crece*, así en función de un ángulo inicial que cambia de θ_0 a θ' variable a medida que se desplaza la base, la distancia al punto de apoyo superior será:

$$x' - vt = L \sin \theta' \quad (2.2)$$

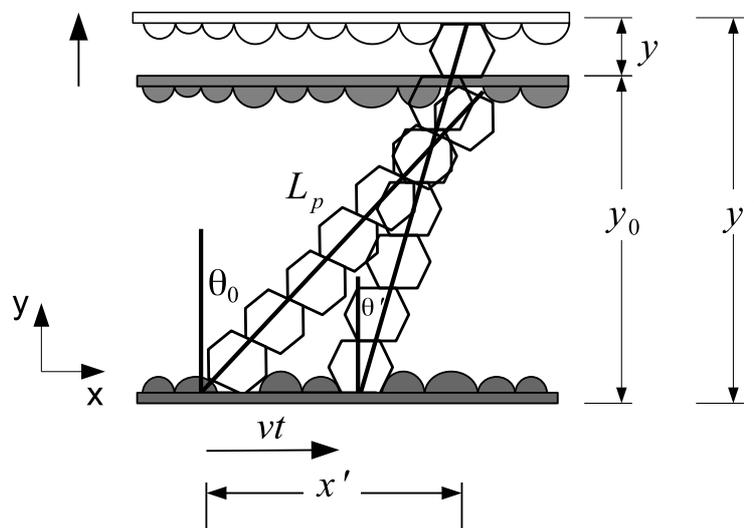


Figura 2.12: Esquema de modelo de pivote aplicado a granos hexagonales.

a la vez, para x' la distancia variable en el eje horizontal e y' la distancia variable en el eje vertical, $x' = L \sin \theta_0$ e $y' = L \cos \theta'$. La diferencia Δy entre la distancia vertical variable y' y la distancia vertical inicial y_0 , es posible escribir como:

$$\Delta y = L \cos \theta' - L \cos \theta_0 \quad (2.3)$$

entonces, a partir de la ecuación 2.2 y 2.3, se obtiene la expresión:

$$(L \sin \theta_0 - vt)^2 + (L \cos \theta_0 + \Delta y)^2 = L^2 \quad (2.4)$$

sustituyendo Δy por D , se obtiene la expresión para la dilatación a partir del pivote:

$$\Delta y = D = \sqrt{L^2 - (L \sin \theta_0 - vt)^2} - L \cos \theta_0 \quad (2.5)$$

Para el desarrollo del modelo en términos de la fuerza de cizalle, se considerarán los torques actuando sobre la cadena principal, como muestra la figura 2.13.

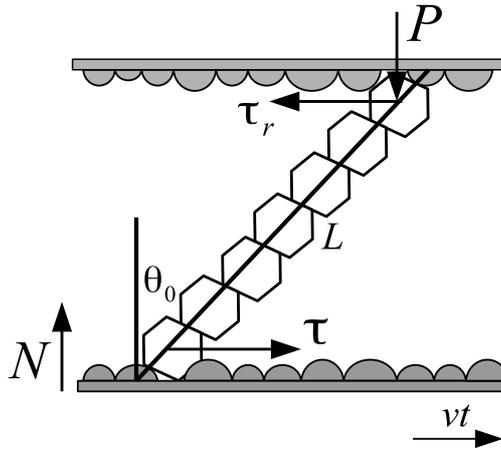


Figura 2.13: Esquema que muestra las fuerzas que actúan sobre el pivote rígido, P y N fuerza y reacción normal y τ y τ_r fuerzas de cizalle y de reacción al cizalle.

En la horizontal se tiene la fuerza $\tau = \tau_r$, mientras que en la vertical las fuerzas que actúan sobre la cadena son P y la reacción normal N . Entonces, el equilibrio de fuerzas $P = N$. Vectorialmente, las componentes sobre el eje de la cadena se escriben $vec{r} = L(\sin \theta_0, \cos \theta_0)$, $\vec{P} = (0, -P)$ y $\vec{\tau}_r = (-\tau, 0)$. Así, los torques respectivos se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{P} &= -PL \cos \theta_0 \\ \vec{r} \times \vec{\tau}_r &= +\tau L \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

En base al equilibrio estático, la suma de los torques debe ser nulo, así $\sum \tau(\text{torques}) = 0$, con lo cual $PL \sin \theta' = \tau L \cos \theta'$, entonces $\tan \theta' = \tau/P$. Además observando la figura 2.12, es posible escribir:

$$\tan \theta' = \frac{x'}{y'} = \frac{x_0 - vt}{y'} \quad (2.7)$$

pero como se obtuvo anteriormente $y' = y_0 + \Delta y = L \cos \theta_0 + \Delta y$, y reemplazando Δy de la ecuación de dilatación 2.5, entonces $\tan \theta'$ se puede reescribir como:

$$\tan \theta' = \frac{L \sin \theta_0 - vt}{\sqrt{L^2 - (L \sin \theta_0 - vt)^2}} \quad (2.8)$$

Finalmente, reemplazando $\tan \theta'$ y considerando el equilibrio de fuerzas en el plano vertical ($P = N$), es posible obtener una expresión adimensional en término de una razón de dos fuerzas conocidas, fuerza de cizalle τ y fuerza normal N :

$$\frac{\tau}{N} = \frac{L \sin \theta_0 - vt}{\sqrt{L^2 - (L \sin \theta_0 - vt)^2}} \quad (2.9)$$

La comparación del modelo de pivote con los resultados obtenidos experimentalmente, para la longitud L_p característica de la cadena, el ángulo θ_0 de inclinación del pivote en el punto de nucleación, se ajustan bastante bien para la dilatación como se observa en la figura 2.14. En tanto, la fuerza de cizalle presenta ciertas diferencias, esto indica que la totalidad de las fuerzas no se encuentran concentradas en un solo pivote, sino que también en los bordes de las partículas, debido a la interacción con los vecinos. Es importante mencionar que, el mecanismo de relajación de esfuerzos vía deslizamiento de planos adyacente no se observa en el caso de los granos hexagonales, debido a que las facetas características de los hexágonos impiden el deslizamiento de planos adyacentes.

2.4.4. Fricción

El coeficiente de fricción efectivo μ para una celda granular monodispersa, se puede considerar como independiente de la velocidad de deformación v , ver panel inferior de la figura 2.15. Por otra parte, el efecto de la forma geométrica de los granos, y particularmente el efecto que puedan tener las facetas de las partículas modifica la magnitud de la fricción. En una deformación del tipo cizalle simple para discos y pentágonos, μ resulta aproximadamente

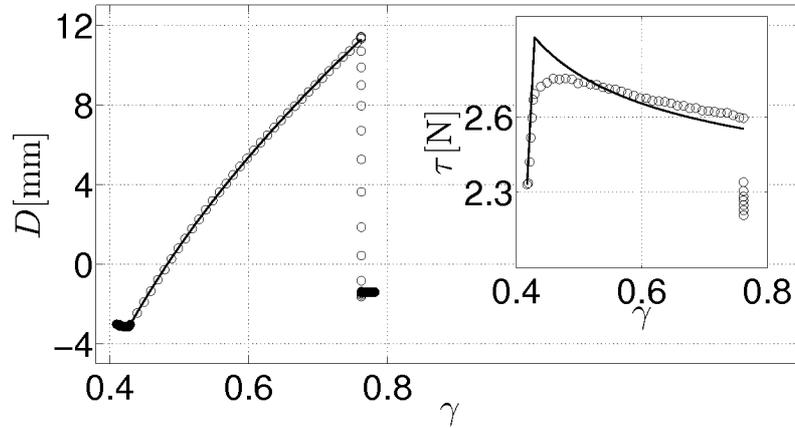


Figura 2.14: Ajuste del modelo de pivote para dilatancia D y fuerza de cizalle τ para partículas hexagonales, con velocidad de deformación $v_0 = 0,1[mm/s]$, fuerza normal $N = 7[N]$ y $L_0/d \approx 6,5$ granos.

independiente de la altura de la celda (L_0/d) (figura 2.15 superior). En el caso de partículas hexagonales μ varía entre el valor obtenido para pentágonos a una altura de $L_0/d \approx 5,5$ partículas ($\mu = 0,3$) y el valor obtenido para discos a una altura de $L_0/d \approx 7,5$ granos.

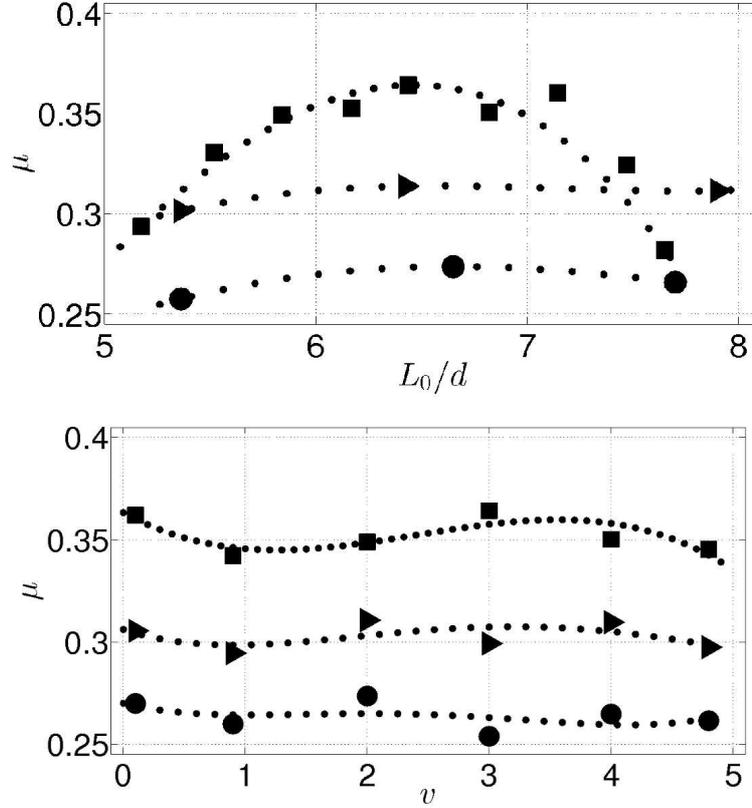


Figura 2.15: La imagen superior muestra la dependencia de μ con L_0/d , para $v = 0,1[mm/s]$ y $N = 7[N]$. La imagen inferior muestra la dependencia de μ con v , para $L_0/d \approx 6,5$ y $N = 7[N]$. Pentágonos (▶), discos (●) y hexágonos (■).

De la figura anterior es posible observar que μ en las partículas hexagonales, alcanza un valor máximo en $L_0/d \approx 6,5$. Este incremento es una consecuencia de la creación de pivotes rígidos que tienden a aumentar el valor de τ más allá de una fricción sólida dada. La nucleación de aquellos pivotes requiere conectar un cizalle límite con los dominios hexagonales. Para alturas de la celda granular menores a 6 partículas ($L_0/d < 6$) la creación de dominios hexagonales es significativamente reducida, los pivotes son menos frecuentes y el coeficiente de fricción tiene una menor fluctuación solo es dominado por la fricción sólida. De manera similar para valores mayores al máximo, una orientación diferente del dominio hexagonal interfiere con la nucleación de pivotes rígidos y el coeficiente de fricción, otra vez, es dominado solo por la fricción sólida.

Trabajos previos dan cuenta de la existencia de una *longitud crítica* para las cadenas de fuerza [23], encontrando una longitud crítica de entre 5 y 6 granos para discos (relación de

aspecto igual a 1 por su geometría circular), 7 a 8 granos para elipses con relación de aspecto 1,5, y 9 a 10 si las partículas poseen una relación de aspecto igual a 2 figura 2.16.

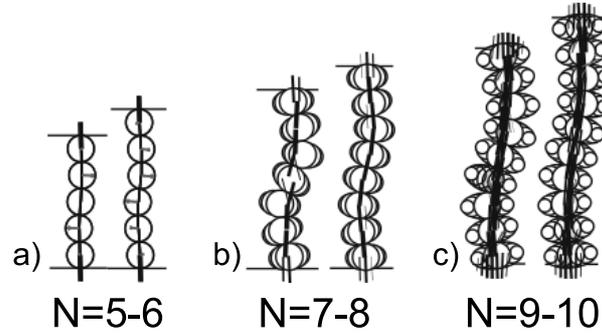


Figura 2.16: Longitud crítica para las cadenas de fuerza en: **a)** discos, **b)** elipses y **c)** con razón de aspecto 1,5 y 2 respectivamente [23].

En el caso de una cadena compuesta de hexágonos con caras de lado a , y radio R de la circunferencia en el cual se encuentra circunscrito siendo $R = a$, la relación de aspecto está determinada por:

$$\frac{2R}{2h} = \frac{2a}{2\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,16 \quad (2.10)$$

con el valor de la relación de aspecto es posible estimar una longitud crítica de cadenas de granos con geometría hexagonal entre 6 y 7 granos, lo cual resulta coherente con los resultados experimentales obtenidos para el máximo valor de μ en $L_0/d \approx 6,5$ granos de altura.

Como se ha visto previamente para discos y pentágonos ocurren múltiples reajustes locales que producen compactaciones instantáneas. Al estudiar el cambio instantáneo en la dilatación $\delta D/\delta x$ con respecto a la fricción efectiva τ/N , la representación paramétrica para las diferentes configuraciones de granos monodispersos se puede observar en la figura 2.17.

Cada punto de la curva anterior corresponde a diferentes valores de deformación o diferentes tiempos para el coeficiente de fricción instantáneo τ/N , en el caso de $\delta D/\delta x < 0$ indica compresión del sistema. En las curvas observadas **a)**, **b)** y **c)** es posible notar que la influencia de la geometría en el coeficiente de fricción presenta la mayor contribución por parte de los hexágonos, a diferencia de los discos y pentágonos. La ecuación de Taylor, vincula explícitamente

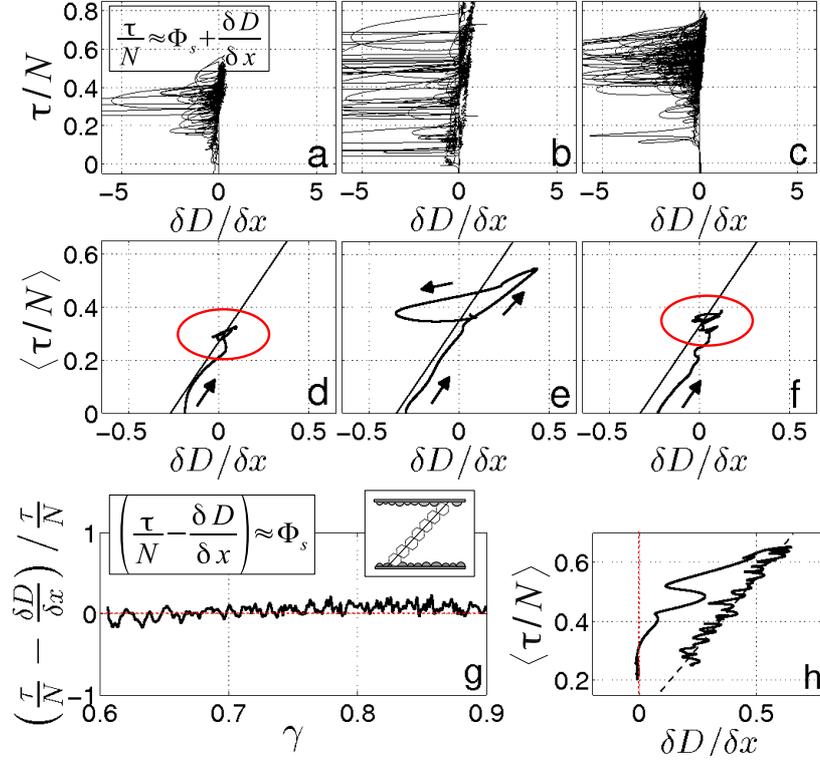


Figura 2.17: Fricción efectiva instantánea τ/N vs $\delta D/\delta x$ para **a)** discos, **b)** hexágonos y **c)** pentágonos. Y promedio de fricción instantánea **d)**, **e)** y **f)** corresponden a las variaciones lentas de $\delta D/\delta x$. Los vectores indican la trayectoria seguida por las curvas a partir de un estado de compresión. En g) se observa la diferencia normalizada entre τ/N y $\delta D/\delta x$ durante la evolución de un pivote. h) representa un pivote aislado. $v = 4,8[mm/s]$ y $N = 7[N]$.

en promedio los parámetros descritos anteriormente.

$$\langle \tau/N \rangle = \Phi_s + \langle \delta D/\delta x \rangle \quad (2.11)$$

Para la escala de los experimentos, el coeficiente de fricción es determinado por la dilatación promedio entre eventos:

$$\left\langle \frac{\tau}{N} \right\rangle = \Phi_s + \frac{1}{vT} \sum_{\text{eventos}} (D_+ - D_-) \quad (2.12)$$

donde T corresponde al tiempo total, D_- y D_+ son las dilatancias en los límites de un intervalo definido por dos colapsos sucesivos. En el caso de las partículas hexagonales, el coeficiente de fricción muestra una importante contribución debido a los ya previamente discutidos pivotes rígidos.

De la ecuación de variaciones instantáneas de la dilatancia es posible derivar la contribución al coeficiente de fricción.

$$\frac{\delta D}{\delta x} = \frac{L_p \sin \theta_0 - x}{\sqrt{L_p^2 - (L_p \sin \theta_0 - x)^2}} = \frac{\tau}{N} \quad (2.13)$$

En los hexágonos se observan una mayor magnitud de las fluctuaciones, estas se deben a la formación de cadenas rígidas actuando como pivotes los cuales cambian $\delta D/\delta x$ y τ/N de manera significativa. El comportamiento de un pivote típico se observa en la figura 2.17h. La fricción en los pivotes es principalmente consecuencia de la variación de dilatancia $\delta D/\delta x$ figura 2.17g.

De las gráficas en las figuras anteriores, se desprende que la magnitud de las fluctuaciones de dilatancia y fuerza de cizalle, depende fuertemente de la geometría de las partículas. Para la caracterización de las fluctuaciones se utilizó el cuadrado medio de la desviación $\chi(x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} / \langle x \rangle$ en donde x está definido en función de la dilatancia D o de la fuerza de cizalle τ . Los efectos en las fluctuaciones según el tamaño normalizado de la longitud inicial de la celda normalizada L_0/d y la velocidad de deformación v se observan en la figura 2.18 **a)** y **b)** respectivamente.

En la figura 2.18**a** se observa que $\chi(\tau)$ y $\chi(D)$ para pentágonos y discos son aproximadamente independientes de L_0/d , este comportamiento se puede deber a la alta capacidad de desplazamiento que poseen los discos, y las múltiples rotaciones de los pentágonos, factores que resultan ser independientes del tamaño de la celda. En el caso de partículas hexagonales, éstas muestran claramente un máximo en $L_0/d \approx 6,5$. Este máximo se puede explicar por la formación del pivote, ya que la creación de un pivote incrementa la magnitud tanto de D como de τ .

En la figura 2.18**b** se observa la independencia de las fluctuaciones de fuerza y dilatancia con la velocidad de deformación. Para los valores del número inercial considerado, la velocidad a la cual se realiza la deformación ($v = 0,1[mm/s]$) no juega ningún rol en las fluctuaciones de la

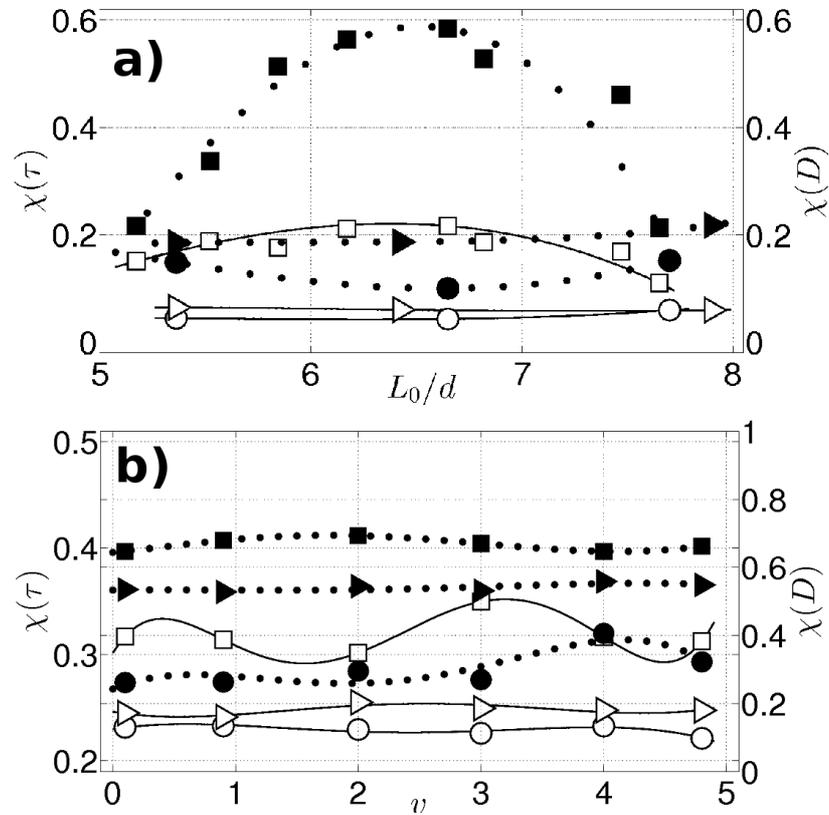


Figura 2.18: Magnitud de las fluctuaciones de: la fuerza de cizalle $\chi(\tau)$ (símbolos sólidos) y la dilatación $\chi(D)$ (símbolos abiertos). En **a)** se observan las fluctuaciones vs L_0/d con $v_0 = 0,1[mm/s]$ y fuerza normal $N = 7[N]$. En **b)** se observa $\chi(\tau)$ y $\chi(D)$ vs velocidad v . Pentágonos (▶), discos (•) y hexágonos (■).

dilatancia $\chi(D)$ y la fuerza de cizalle $\chi(\tau)$.

2.4.5. Sistemas Bidispersos

La importancia de la forma de los granos, en la dinámica de un medio granular monodisperso sometido a cizalle se ha mostrado en la sección anterior, sin embargo surge una interrogante, cuál es el efecto sobre el comportamiento macroscópico del medio granular, cuando incluye partículas que pueden formar nucleación como lo hacen los hexágonos. Para este efecto se realizaron experimentos mezclando granos compatibles e incompatibles desde el punto de vista de la capacidad para formar dominios cristalinos. Se consideraron mezclas de discos con

hexágonos (granos compatibles) y de pentágonos con hexágonos (granos incompatibles). Se investigó como se ve afectado el coeficiente de fricción macroscópico μ , las fluctuaciones de dilatación $\chi(D)$ y fuerza de cizalle $\chi(\tau)$. Se utilizó como parámetro principal la concentración relativa de hexágonos en la muestra f (relación entre la cantidad de hexágonos y el número total de partículas). Los experimentos se realizaron a velocidad de deformación constante $v = 0,1[mm/s]$, carga normal de $7[N]$ y tamaño inicial de la celda de $L_0/d \approx 6,5$ partículas de alto. En la figura 2.19 se observan curvas típicas para D y τ en función de deformación γ , para ambos tipos de mezclas.

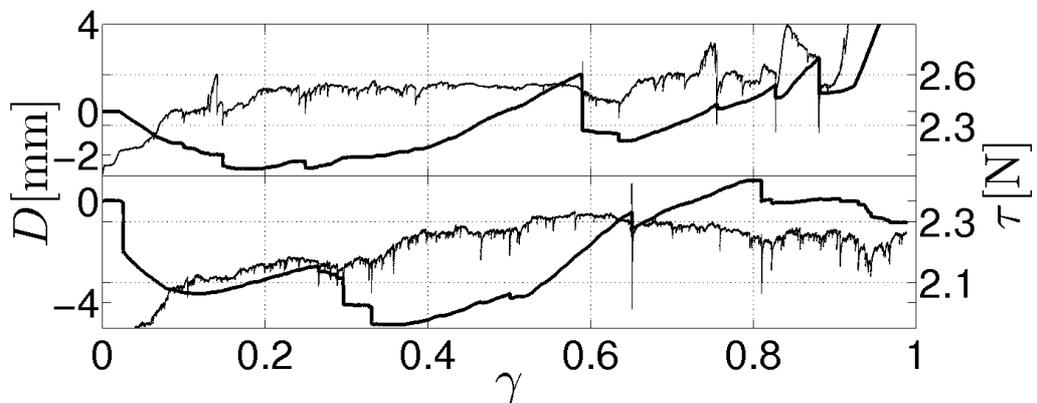


Figura 2.19: Comportamiento típico de la dilatación D y la fuerza de cizalle τ en mezclas binarias; **a)** discos - hexágonos y **b)** pentágonos - hexágonos. Concentración relativa de hexágonos $f = 80\%$, velocidad de deformación $v = 0,1[mm/s]$, $L_0/d \approx 6,5$ y carga constante $N = 7[N]$.

2.4.5.1. Discos - Hexágonos

Las características de los granos utilizados en la mezcla discos - hexágonos, fue de $8[mm]$ de diámetro en discos y de igual medida en el correspondiente hexágono circunscrito (ver figura 2.20). En el gráfico de la figura 2.21 se observa la evolución del coeficiente de fricción μ y de las fluctuaciones ($\chi(D)$ y $\chi(\tau)$), para concentración relativa de hexágonos f .

Se observa que el coeficiente de fricción permanece constante y es gobernado por las partículas circulares hasta $f = 0,2$ debido a que el valor de μ en torno a $0,26$ es coherente con el valor observado en la figura 2.15, luego da paso a un aumento de μ donde transita desde el coeficiente gobernado por discos a un coeficiente de fricción gobernado puramente por hexágonos desde $f = 0,8$. Con la información obtenida es posible argumentar que para la mezcla de

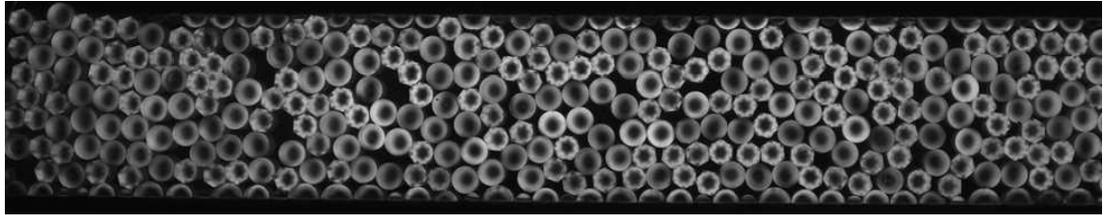


Figura 2.20: Mezcla de partículas pentagonales y hexagonales en proporción 50 % y 50 %.

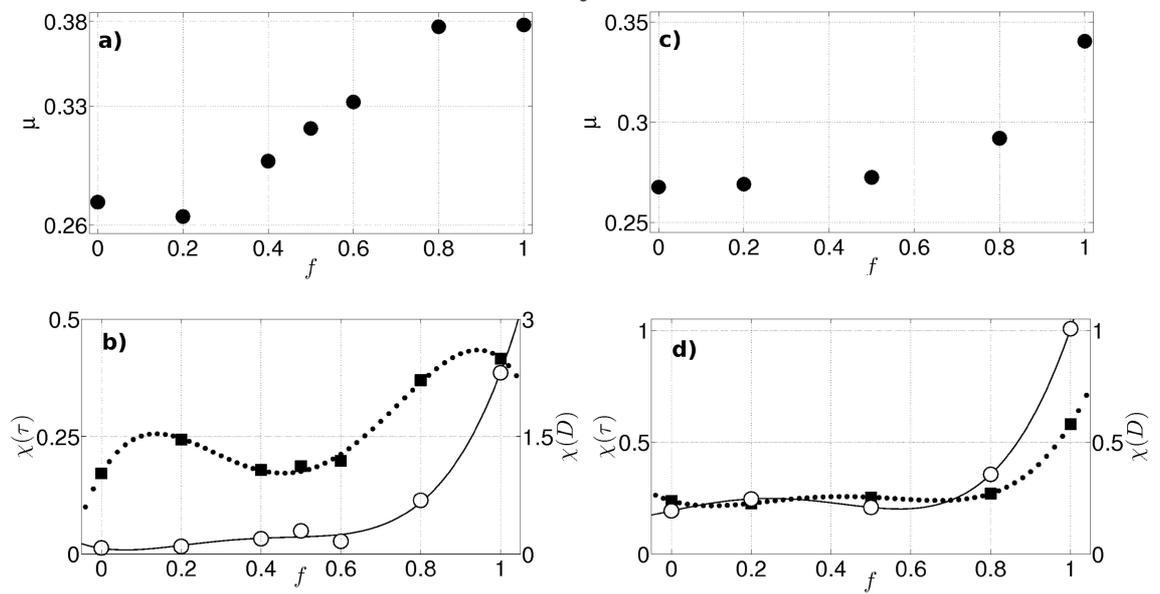


Figura 2.21: Coeficiente de fricción μ y fluctuaciones ($\chi(D)$, $\chi(\tau)$) para mezclas bidispersas en términos de la concentración de hexágonos f . Parámetros de control $v = 0,1[mm/s]$, $L_0/d \approx 6,5$ y $N = 7[N]$.

discos y hexágonos, hasta el 20 % de concentración relativa para cada tipo de partícula, gobierna la fricción macroscópica el respectivo tipo de partícula.

Las fluctuaciones en la dilatación se incrementan levemente en $f = 0,8$, luego al gobernar el sistema las partículas hexagonales, su influencia queda de manifiesto con el rápido incremento de $\chi(D)$ debido que se ve favorecida la creación de pivotes rígidos característicos de los hexágonos.

2.4.5.2. Pentágonos - Hexágonos

En el caso de la mezcla pentágonos - hexágonos, las dimensiones del diámetro circunscrito fue de $8[mm]$ tanto para los pentágonos como para los hexágonos (ver figura 2.22). En los gráficos **c)** y **d)** de la figura 2.21 se observa la evolución del coeficiente de fricción μ y de las fluctuaciones ($\chi(D)$ y $\chi(\tau)$).

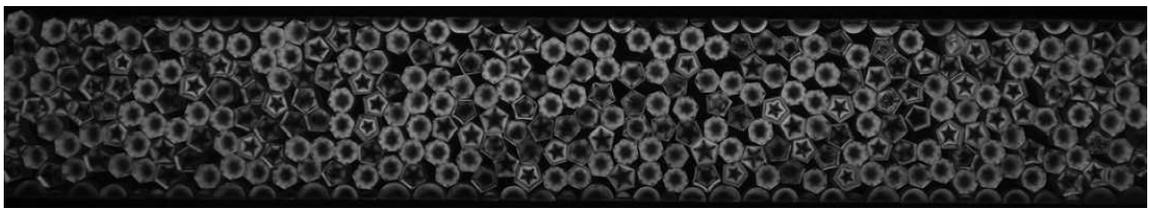


Figura 2.22: Mezcla de partículas en celda de cizalle simple, geometría del tipo pentágonos y hexágonos en proporción de 50 %.

Se observa que el coeficiente de fricción permanece constante hasta $f \leq 0,7$, la mayor presencia de pentágonos configura el sistema frustrado de cristalizar parcialmente, luego μ se incrementa progresivamente hasta el valor de fricción en donde el sistema es gobernado por las partículas hexagonales, $\mu = 0,35$ (ver figura 2.21 **c)**). Un comportamiento similar exhiben las fluctuaciones de dilatación $\chi(D)$ y de cizalle $\chi(\tau)$ al del coeficiente de fricción (ver figura 2.21 **d)**), el aumento que se produce a $f > 0,8$ es consecuencia del mayor número de hexágonos y de la formación de pivotes rígidos.

Capítulo 3

Matriz Granular con Inclusión por Fotoelásticidad

3.1. Introducción

Los materiales cristalinos en fase sólida presentan características diferentes en función del ordenamiento microscópico de sus componentes. Así, por ejemplo, las moléculas de SiO_2 se ordenan en una red cristalina para formar cuarzo. Por otro lado, la misma molécula da lugar al vidrio cuando se distribuye de manera amorfa, sin formar una red cristalina. Esto ha motivado un creciente interés en los materiales amorfos debido a sus aplicaciones en industrias principalmente tecnológicas. Por ejemplo, los vidrios metálicos, los cuales debido a sus propiedades de plasticidad [24], producto de la formación de bandas de cizalle, presentan características de transparencia y elasticidad que los hacen útiles para el recubrimiento de teléfonos celulares, tablets y televisores. Para los materiales cristalinos se conoce que tanto las deformaciones como el flujo de éstos está gobernado por defectos topológicos llamados dislocaciones [25], por lo que gran parte de la investigación relacionada con estas propiedades está centrada en el estudio de la dinámica de las dislocaciones y cómo ésta afecta la deformación de los materiales cristalinos. Por el contrario, en los materiales amorfos no existe un consenso respecto de cuáles son los elementos responsables del flujo plástico. La investigación realizada hasta ahora en medios amorfos ha abierto muchas interrogantes, siendo la principal, quizás, determinar la existencia o no de defectos topológicos que jueguen el rol de las dislocaciones en los materiales cristalinos [26, 27]. Basado en los resultados de simulaciones numéricas en vidrios metálicos, Argon [10] propuso un modelo teórico basado en un tratamiento de campo medio de las transiciones en regiones localizadas (**STZ**: Shear Transformation Zones), en donde cada transformación contribuye con una unidad de deformación plástica por cizalle. A partir del trabajo de Argon, Falk y Langer [11] presentaron una ecuación para la densidad de STZ mostrando que dicha ecuación daba cuenta en forma cualitativa de algunos de los fenómenos observado en vidrios metálicos bajo cizalle, tal como el endurecimiento por deformación. Es importante mencionar que el concepto de la STZ podría jugar un papel importante en la física de otros materiales amorfos sometidos a cizalle tales como: espumas y medios granulares [28]. Maloney and Lemaître [29] sugieren que el reordenamiento de una STZ podría inducir desplazamientos elásticos de largo alcance de tipo cuadrupolar, análogamente a una transformación de una inclusión de Eshelby [30, 31, 32]. En general, una inclusión de Eshelby corresponde a una inclusión elíptica dentro de una matriz elástica infinita. Este tipo de configuración puede aparecer en una transformación martensítica, en una expansión térmica o bien en el fenómeno precipitación, todos los cuales corresponden a defectos topológicos dentro de una matriz cristalina. Eshelby [30, 31] estudió el campo elástico dentro y fuera de la inclusión y proporcionó una solución elegante, y relativamente

simple, basada en el principio de superposición de la elasticidad lineal, a través de operaciones de *corte*, *deformación* y *soldadura*. Eshelby, construyó la solución utilizando un experimento virtual. En este experimento se considera una matriz elástica infinita en la que existe una inclusión, la que es modificada en forma espontánea. Esta modificación puede ser considerada como un evento plástico localizado. El experimento consiste de cuatro pasos, ver figura 3.1; (1) remoción de la inclusión, (2) restauración de la inclusión, en donde se aplica una fuerza para restaurar la forma inicial de la inclusión, (3) reinsertión de la inclusión en la posición original en la matriz elástica y (4) relajación de la fuerza aplicada sobre la inclusión, generando un campo de tensiones en la matriz.

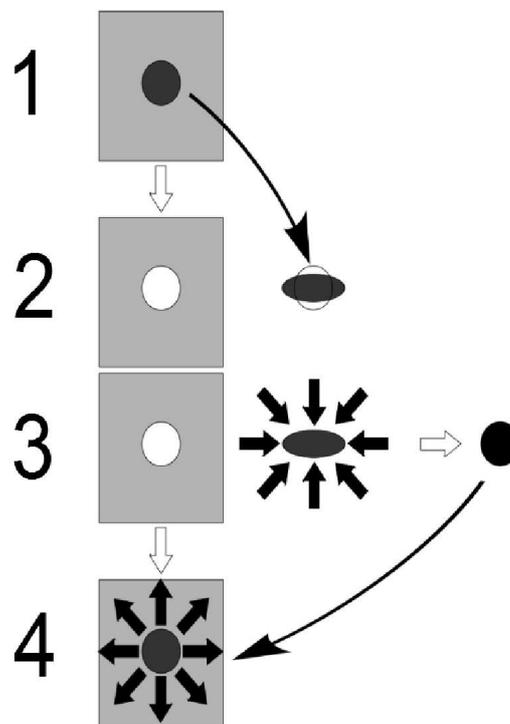


Figura 3.1: Esquema de una matriz elástica infinita con inclusión, en la solución de Eshelby.

Eshelby, demostró que para inclusiones elipsoidales en una matriz homogénea infinita, los campos de esfuerzo y deformación son uniformes al interior de la inclusión. Picard et al [29, 32], mostraron que los campos de desplazamiento y esfuerzos para el problema de la inclusión de Eshelby, en dos dimensiones, se pueden obtener mediante la aplicación de un modelo elastoplástico. En este caso, las expresiones para estos campos se escriben de la siguiente forma:

$$\vec{u} = \frac{2a^2\Delta\epsilon_0}{\pi} \frac{xy}{r^4} \vec{r} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2\mu a^2\Delta\epsilon_0}{\pi} \frac{\cos 4\theta}{r^2} \quad (3.2)$$

donde μ es el módulo de corte, a y $\Delta\epsilon_0$ representan un volumen microscópico y una amplitud característicos de un evento plástico localizado.

Es importante mencionar que, los medios granulares pueden ser considerados como materiales amorfos suaves, y que por consiguiente, podrían presentar comportamientos similares a los encontrados en otros medios amorfos. Más aún, los modelos aplicados a estos últimos podrían tener validez en los medios granulares también. Por otro lado, en los medios granulares se pueden identificar dos tipos de eventos plásticos localizados, aquellos producidos por cambios locales de volumen o bien aquellos producto de deformaciones por cizalle local. Es importante mencionar que en los medios granulares no se ha obtenido evidencia experimental de los campos que generan los eventos plásticos localizados ni tampoco que papel juegan en la deformación y flujo de estos materiales. Esto nos ha motivado a realizar un experimento en un medio granular bidimensional con el fin de determinar los efectos que produce un evento plástico producto de un cambio de volumen localizado. Para tal efecto, se consideró un sistema granular bidimensional en el cual se introduce una inclusión elíptica que permite, una vez removida del medio, generar una deformación local producto de un cambio de volumen, y estudiar así los campos de desplazamiento y esfuerzo previos y posteriores al evento plástico.

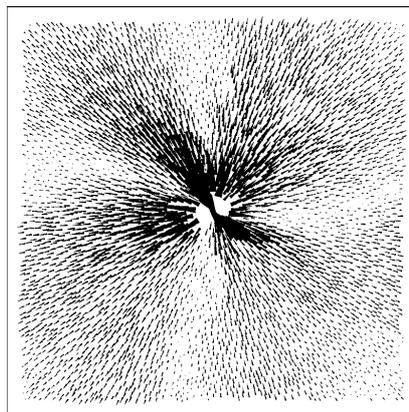


Figura 3.2: Campo no affine radial en un medio amorfo, obtenido por Maloney y Lemaître [29] mediante simulaciones numéricas. El campo muestra un comportamiento similar al campo cuadrupolar observado en el problema de Eshelby.

Para este fin se utilizaron partículas de material birrefringente, de manera de determinar la distribución de esfuerzos en el estado de equilibrio mecánico del medio granular ver [33], antes y después de generar el evento plástico localizado. Esto permitirá determinar como son modificados los campos de desplazamiento y esfuerzo del medio granular frente a un evento plástico localizado. Los materiales birrefringentes han sido utilizados, anteriormente, en el estudio de la reología de medios granulares [13, 33, 34]. En nuestro caso, se ha utilizado un material de alta sensibilidad a bajas deformaciones, PSM-4 fabricado por Vishay Measurement Co. A través del uso de este material se obtienen los patrones de fotoelasticidad, los que posteriormente son empleados en la determinación de las fuerzas de contacto al interior del medio granular. Además del material birrefringente, es necesario iluminar el sistema con un sistema especial llamado polariscopio circular de campo oscuro, ver apéndice B. Un ejemplo de los patrones de fotoelasticidad obtenidos se puede ver en la figura 3.3.

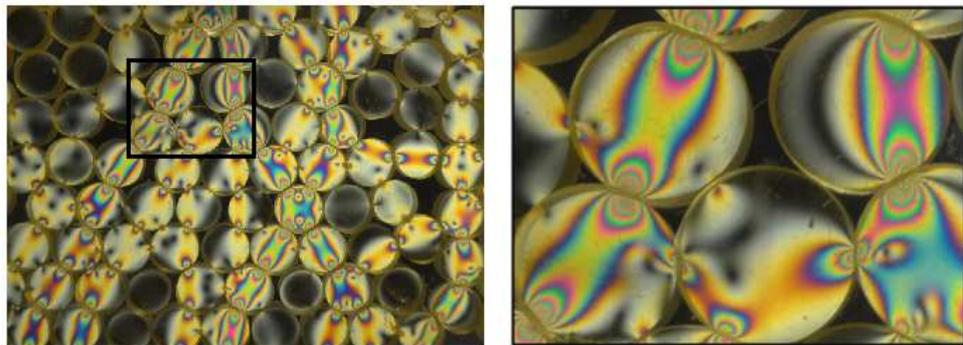


Figura 3.3: Fotografía de celda granular con partículas fotoelásticas sometidas a esfuerzos y observada a través de un polariscopio circular (ver Apéndice B). A la derecha se muestra una ampliación de una región de la celda, se observan contactos activos y granos *en contacto* sin transmisión de fuerzas.

La obtención de las fuerzas de contacto en el medio granular requiere del procesamiento posterior de los patrones de fotoelasticidad basado en el método de inversión fotoelástico, el cual se explica en mayor detalle en el apéndice B. Es importante destacar que, con esta técnica es posible determinar fuerzas de contacto muy pequeñas.

En este capítulo se presenta el problema de una inclusión elíptica al interior de un medio granular bidimensional, la cual es removida repentinamente para generar un evento plástico localizado. Se exploran los efectos causados por este evento plástico y como este modifica la distribución de fuerzas de contacto. Para este efecto, se determinaron los desplazamientos de las

partículas, y los respectivos contactos activos con sus fuerzas de contacto. En ambos procesos se requirió el desarrollo de algoritmos especializados para la obtención de la posición de los granos y su seguimiento (ver apéndice A), y para la reconstrucción del patrón de fotoelasticidad por medio del método de inversión fotoelástico (ver apéndice B). Un ejemplo de la reconstrucción del patrón de fotoelasticidad, se muestra en la figura 3.4.

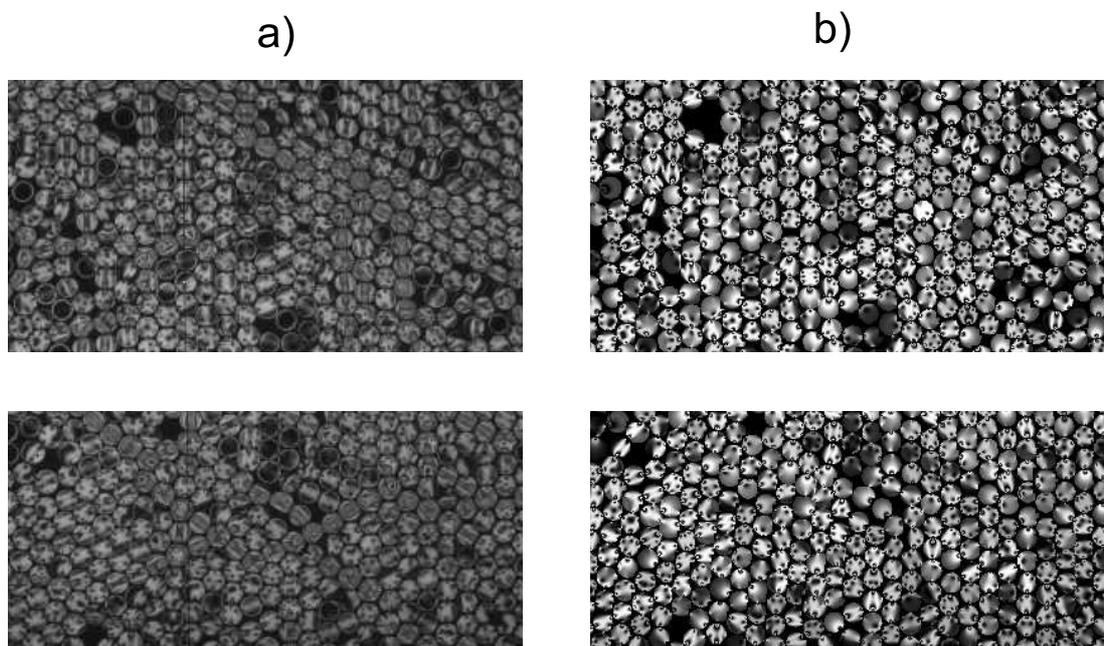


Figura 3.4: Fotografías de celda compuesta de granos fotoelásticos sometidos a esfuerzos. En columna a) fotografía de granos en polariscopio circular y b) tensiones calculadas y patrones de esfuerzo reconstruidos.

En la columna de la izquierda de la figura se observan dos fotografías obtenidas desde la celda experimental, se muestra el patrón fotoelástico de un conjunto de granos sometidos a esfuerzo. A la derecha se muestran las respectivas reconstrucciones de los patrones fotoelásticos. A través de la información entregada por la reconstrucción, ha sido posible estudiar el comportamiento global y local del medio granular una vez que la inclusión es retirada del sistema.

A partir de las fuerzas de contacto se puede obtener el esfuerzo al interior de cada partícula en cada punto de contacto activo. Sin embargo, la caracterización del medio granular en forma macroscópica requiere determinar el tensor de esfuerzos promedio. Este tensor está

relacionado con las fuerzas de contacto a través de la ecuación de Drescher [13]

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \sum_{\mu=1}^{\mu} x_i^m T_j^m \quad (3.3)$$

donde V es el volumen de la región considerada, μ el número de fuerzas de contacto, x_i^m las coordenadas de los puntos de intersección y T_j^m es la j -ésima componente de la m -ésima fuerza. Para un análisis de la distribución de esfuerzos se implementó el método de *Coarse Graining*, con el objetivo de observar la evolución espacial de las fuerzas y del desplazamiento en el sistema a nivel macroscópico.

El método de coarse graining considera la interacción entre partículas a partir del promedio de un número finito de ellas, se basa en reemplazar la función delta de Dirac $\delta(\mathbf{r})$ para la densidad de masa microscópica ρ^{mic} en un punto r en el tiempo t , $\rho^{mic}(\mathbf{r}, t) = \sum_i m_i \delta(r - r_i(t))$ por una función de CG ϕ con ancho w , así es posible obtener una densidad de masa suavizada como $\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i m_i \phi(r - r_i(t))$ [34]. Esta función debe ser positiva y normalizable, entonces, es posible considerar como función CG de ancho w , una función gaussiana de la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi w^2} e^{-(|\vec{r}|/w)^2} \quad (3.4)$$

A partir del desarrollo de Zhang et al. [34] el tensor de tensiones σ en las direcciones α y β se puede reescribir como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{ij\alpha} r_{ij\beta} \int_0^1 ds \phi(r - r_i + sr_{ij})}_{\text{contacto}} - \underbrace{\sum_i m_i v'_{i\alpha} v'_{i\beta} \phi(r - r_i)}_{\text{cinético}} \quad (3.5)$$

En la expresión para $\sigma_{\alpha\beta}$ aparecen los términos de la tensión debido a los contactos, y el término cinético de la tensión. Puesto que, estamos considerando un caso cuasi-estático de deformación, es posible despreciar el término cinético. En el caso del CG aplicado al desplazamiento de las partículas, se ha considerado la expresión aproximada de Goldhirsch [35]:

$$U(r, t) = \frac{\sum_k u_k(t) \phi[r - r_k(0)]}{\sum_l \phi[r - r_l(0)]} \quad (3.6)$$

siendo $u_k = r_k(t) - r_k(0)$ el desplazamiento total de la k -ésima partícula.

Con el fin de estudiar los efectos a nivel microscópico y macroscópico generados por un evento plástico localizado en un medio granular, se estudió una inclusión elíptica en un medio granular bidimensional sometido a esfuerzos externos, la que es removida repentinamente, creando así, una deformación del tipo evento plástico localizado. En este caso el esfuerzo externo corresponde a un cizalle puro, donde las direcciones de mayor compresión y extensión son constantes. Si se considera un cuadrado continuo compuesto de un círculo en su interior con esfuerzos de distintas magnitudes entre sus caras, la deformación de la superficie da origen a una elipse. Donde ambos ejes de la elipse se mantienen constantes durante la deformación, en tanto todas las demás líneas rotan.

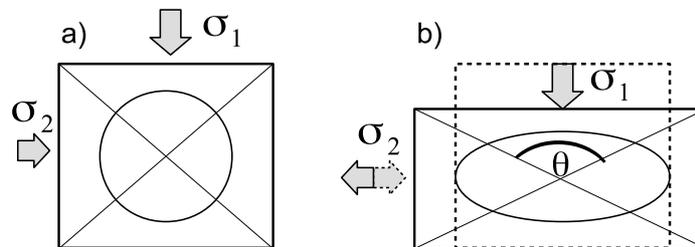


Figura 3.5: Esquema de deformación bajo cizalle puro para celda cuadrada con $\sigma_1 > \sigma_2$. Rotación de ejes principales del bloque.

3.2. Montaje Experimental

Para el estudio de una inclusión elíptica en un medio granular, se ha diseñado y construido una celda de dimensiones $50[cm] \times 50[cm]$ dispuesta horizontalmente sobre una superficie de vidrio. Esta celda consiste de cuatro paredes; dos móviles y dos fijas, donde cada pared móvil enfrenta una correspondiente pared fija. Cada pared móvil está soportada por un riel de aire y su movimiento lateral está restringido por un par de rodamientos de aire, de manera de minimizar la fricción. Con este fin se mantuvo una presión de aire constante de $50[psi]$ sobre los rieles y rodamientos de aire, mediante un compresor SHULZ dental MSV 6. En el interior de la celda se dispusieron 3000 partículas cilíndricas, 1500 de ellas de diámetro $8[mm]$ y el resto de diámetro $9[mm]$. Estas partículas se obtuvieron a partir de placas de material birrefringente PSM-4, fabricado por la empresa Vishay Measurements Corp. Por otra parte, sobre cada pared móvil se ha aplicado una carga normal σ_1 y σ_2 en las direcciones mutuamente perpendiculares. Los valores utilizados son: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,5[kg]$ para el caso de compresión y $\sigma_1 = 2,0[kg]$ y $\sigma_2 = 0,5[kg]$ para el

caso de cizalle puro.

La inclusión elíptica se dispuso en el centro de celda con tres orientaciones distintas de su semieje mayor; paralelo a la dirección x , paralelo a la dirección y y en diagonal a 45° . Esta inclusión es una pieza de acrílico de igual altura que los cilindros, y cuyos ejes principales de la elipse son: $b = 27[mm]$ y $a = 18[mm]$. En la fotografía de la figura 3.6.

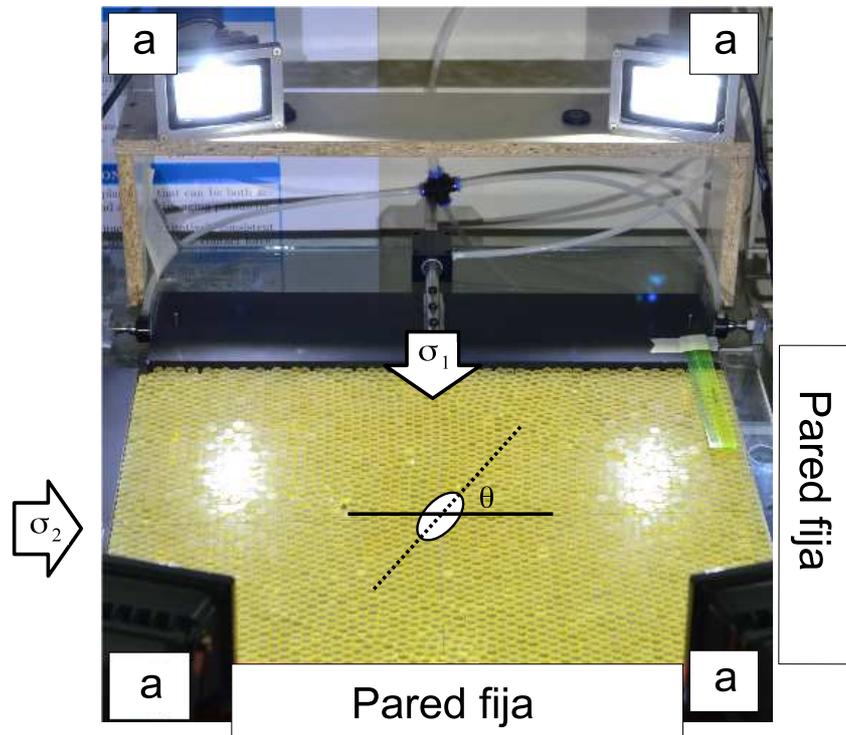


Figura 3.6: Fotografía montaje experimental, en las esquinas (a) se observa los 4 focos led equivalentes a $100[W]$ dispuestos en las esquinas de la celda a 25° desde la vertical al centro. En el centro un esquema de la inclusión elíptica, las configuraciones de cargas fueron $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_1 = 4\sigma_2$, θ varió entre 0 y $\pi/2$.

Para el análisis de las imágenes del medio granular fue necesario utilizar dos tipos de iluminación; una para la determinación de las posición y tamaño de los granos, y otra para la obtención de los patrones de fotoelasticidad. El primer tipo consiste en cuatro focos led Forceman SMD-LED FLOOD10WSC, equivalentes a $100[W]$, dispuestos en los vértices de la celda y con una inclinación de 25° respecto del plano horizontal, semejante a la iluminación que se encuentra en los estadios [36], ver figura 3.6 a). Por otro lado, para la obtención de los patrones de fotoelás-

ticidad se iluminó la celda desde abajo utilizando luz circularmente polarizada, la cual es filtrada por una combinación de una lámina retardadora de cuarto de onda y un polaroide, una vez que ha atravesado los granos. Esta disposición corresponde a un polariscopio circular de campo oscuro, ver figura 3.8.

Las imágenes se obtuvieron a través de una cámara Prosilica GX ALLIED Vision Technologies GX6600 de alta resolución ($\sim 29[Mpx] \sim 6576 \times 4384[px]$), y una lente SIGMA 24 – 70[mm] y $f/2,8$.

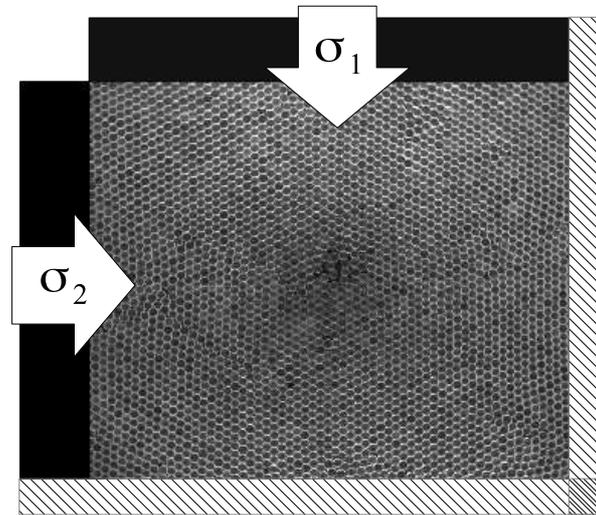


Figura 3.7: Fotografía central típica (6576×4384) para la detección de centros y bordes utilizando la transformada de Hough, tomada con cámara Prosilica GX. Las cargas aplicadas σ_1 y σ_2 proviene de dos paredes móviles vertical y horizontal respectivamente, las otras dos paredes se encuentran fijas.

3.3. Desarrollo Experimental

En la observación de los efectos provocados por la remoción repentina de la inclusión elíptica desde el medio granular, se ha analizado a través de fotografías de alta resolución los estados de equilibrio mecánico del medio granular, antes y después de remover la inclusión. El protocolo empleado se puede sintetizar en los siguientes pasos:

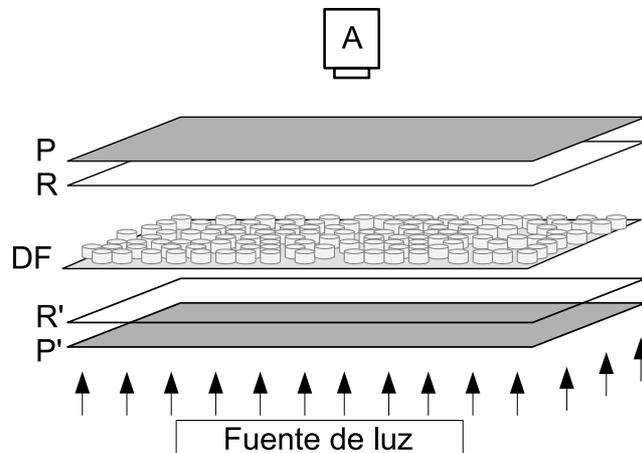


Figura 3.8: Esquema del montaje experimental para analizar las tensiones entre las partículas por medio de los patrones fotoelásticos. **A** cámara ALLIED Prosilica GX, **DF** muestra granular bidispersa de discos fotoelásticos, **P** y **P'** polarizador y analizador respectivamente, **R** y **R'** láminas retardadoras en $\lambda/4$ cruzadas en 90° .

- 1 Se posiciona la inclusión elíptica en el centro del sistema, orientando su semi-eje mayor en alguna de las tres direcciones utilizadas; $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ o 90° respecto del eje x . Luego se aplican las fuerzas externas, y se espera que el sistema alcance el equilibrio estático.
- 2 Se fotografía el sistema en la configuración inicial alcanzada en el punto 1, iluminando desde arriba para obtener la imagen que permitirá determinar las posiciones y radios de los granos, ver figura 3.9 **a**)
- 3 Se apaga la iluminación superior y se activa la iluminación por debajo a través del polariscopio circular de campo oscuro.
- 4 Se fotografía el sistema en la configuración inicial para obtener la imagen con el registro de los patrones de fotoelasticidad, ver figura 3.9 **b**)
- 5 Se extrae la inclusión elíptica hacia arriba mediante un imán.
- 6 Se fotografía el sistema para obtener los patrones de fotoelasticidad en la configuración final de equilibrio, ver figura 3.9 **c**).
- 7 Se desactiva el polariscopio circular y se ilumina desde arriba, nuevamente, para obtener el registro de la posición final de los granos, ver figura 3.9 **d**)

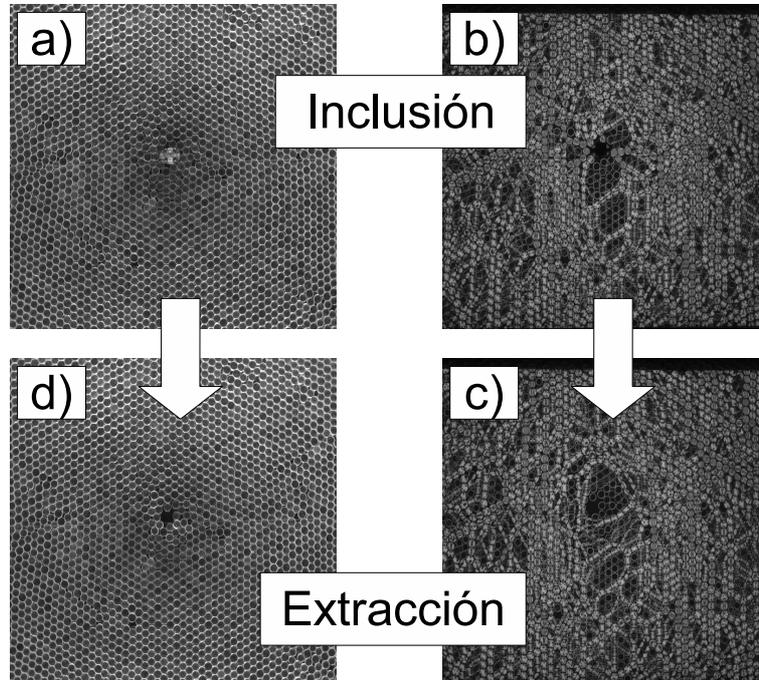


Figura 3.9: Protocolo de obtención de imágenes en deformación plástica, al retirar la inclusión elíptica. Las imágenes **a)** y **b)** corresponden a la celda granular con luz superior y con polariscopio respectivamente, las imágenes **c)** y **d)** corresponde a la celda luego de retirar la inclusión.

Las imágenes registradas durante los experimentos se han utilizado en la determinación de: la posición inicial y final de cada partícula, la localización de los puntos de contacto activo entre los granos. Con esta información el campo de desplazamiento en cada estado de equilibrio del medio granular. En la figura 3.7 una imagen típica del sistema granular. El contraste de esta imagen es aumentado mediante un filtro de erosión. Luego, la imagen resultante es transformada con el filtro:

```
>> imgfltrd = filter2(filter4, imagen);
```

$$filter4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

para suavizar las irregularidades más pequeñas. Posteriormente, fue aplicada la transformada de Hough para determinar el centro y radio de cada grano, ver apéndice A.

```
>> [accum, circen, cirrad] =
>> CircularHoughGrd(imagen, [radio_menor radio_mayor], grdthres, fltr4LMR, multirad);
```

donde el rango de radio menor y mayor en pixeles fue de 35 y 50[px] respectivamente, *grdthres* es un thresholding del gradiente de intensidad, el valor utilizado fue 2, *fltr4LMR* es el radio del filtro utilizado en la búsqueda del máximo en la acumulación el valor utilizado fue 12 y *multirad* es el parámetro de tolerancia para círculos concéntricos, varía entre 0,1 y 1 siendo 0,1 mayor tolerancia, el valor utilizado fue 1 que identifica solo el principal radio detectado. En base a estos parámetros se obtuvo los valores de los centros y radios de los círculos encontrados para 3000 partículas con error de detección (no detectadas y falsos positivos) menor al 0,7 %, ver figura 3.10.

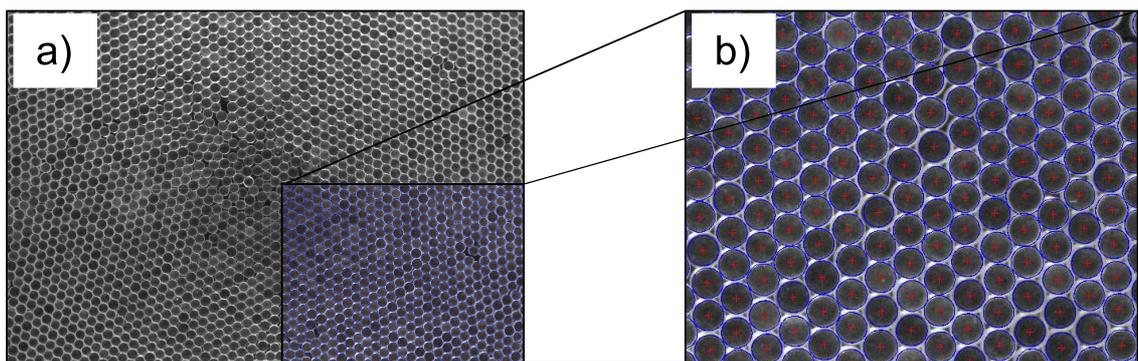


Figura 3.10: a) Fotografía característica de celda experimental con luz superior. b) Partículas detectadas y posiciones de los centros, sobrepuestas sobre la fotografía original.

En relación a la distribución de fuerzas de contacto, una vez retirada la inclusión desde el medio granular se observa una modificación inmediata de esta distribución, siendo este reordenamiento en grado tal que resultaba complejo reconocer la ubicación inicial de la inclusión. Este experimento se repitió al menos diez veces para distintas configuraciones de la inclusión y de las fuerzas externas aplicadas. Promediando las imágenes resultantes en cada experimento fue posible obtener una muestra representativa del comportamiento del sistema frente a un evento plástico localizado.

Una vez obtenidas las posiciones de las partículas antes y después de la aparición del evento plástico localizado, se identificaron las partículas en la imagen final correspondientes a cada partícula de la imagen inicial a través de un programa de seguimiento de partículas, desa-

rollado específicamente para este experimento. Con esto se determinó el campo de desplazamiento.

La magnitud y orientación de las fuerzas de contacto entre los granos fueron determinadas mediante el método de inversión fotoelástico (ver apéndice B), el cual consiste en la reconstrucción del patrón de fotoelasticidad a partir de valores iniciales de las fuerzas de contacto. El patrón calculado es comparado con el patrón experimental para obtener el valor de una función objetivo. El proceso iterativo consiste en modificar la orientación y magnitud de las fuerzas de contacto para minimizar esta función objetivo. Este método requiere conocer *a priori*, además del radio y la posición del centro de los granos de los puntos de contacto, los valores de la longitud de los granos cilíndricos y coeficiente de esfuerzo óptico del material, en este caso se utilizaron los siguientes valores: longitud $\delta \sim 6,0[mm]$ y coeficiente de esfuerzo-óptico $C \sim 0,002$.

En la determinación de los contactos activos se utilizó un criterio basado en la distancia de separación entre granos vecinos. Entonces, se considera que un contacto es activo si la distancia de separación entre dos granos vecinos es menor al 5% de un radio. Por razones de equilibrio estático los granos no pueden tener menos de dos contactos activos a la vez, y un máximo de seis, que corresponde a la configuración hexagonal compacta.

La sensibilidad del método de inversión fotoelástico a los valores iniciales del proceso de minimización, debido a la no linealidad del proceso iterativo, impedía la reproducibilidad de los resultados. Por consiguiente, éste método fue mejorado incluyendo cuatro configuraciones para los parámetros iniciales, ver figura 3.11, en las cuales se consideró la combinación de magnitud constante de la fuerza y ángulo de inclinación de la misma, magnitud de la fuerza aleatoria y ángulo constante, magnitud de la fuerza constante y ángulo aleatorio, y finalmente, magnitud y ángulo aleatorios, tal como se muestra en la tabla 3.1.

A partir de las cuatro configuraciones calculadas, fue determinado el valor óptimo de la magnitud y orientación de las fuerzas de contacto mediante la comparación de cuatro perfiles, tomados desde las imágenes original y calculada, sobre los ejes x e y y las diagonales principales. Los parámetros óptimos están determinados por el menor valor de la siguiente cantidad:

$$\min \left\{ \int \left(\sum_i^4 \Delta_i \right) dr \right\} \quad (3.8)$$

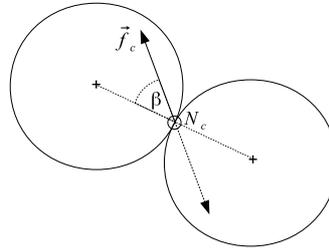


Figura 3.11: Esquema de dos partículas vecinas en contacto activo, se observa la fuerza y el ángulo β de la fuerza respecto al radio del grano.

	$(10)\beta[\text{rad}]$	$(-1)[cN]$
Grano 1	$-1 + 2 \cdot \text{rand} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \text{rand} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$
Grano 2	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Grano 3	$-1 + 2 \cdot \text{rand} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Grano 4	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \text{rand} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$

Cuadro 3.1: Granos base para el ajuste del patrón fotoelástico con 2 contactos activos: N_1 y N_2 .

donde Δ_i es la diferencia punto a punto entre el perfil calculado y el experimental para cada caso, y la integral se realiza sobre todo el perfil. En la figura 3.12 se muestra una partícula sometida a esfuerzos, y los cuatro granos reconstruidos según las cuatro configuraciones para la magnitud y orientación de las fuerzas de contacto, ver tabla 3.1, también se muestran los perfiles considerados en la comparación.

En este caso los cuatro perfiles reconstruidos parecen, a simple vista, similares al original. Sin embargo, de acuerdo al criterio utilizado, el mejor ajuste correspondería al grano 2.

El campo de desplazamiento fue obtenido a través del promedio radial y angular de los desplazamientos individuales, tomando como origen el centro de la inclusión elíptica. Se consideró una distancia radial desde $2d$ hasta $15d$, donde d es el diámetro característico de los

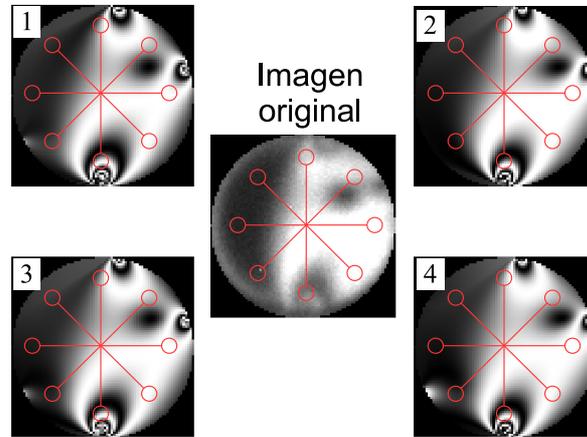


Figura 3.12: Imagen central muestra típica partícula fotoelástica sometida a esfuerzos, los granos del 1 al 4 son los patrones reconstruidos desde cuatro configuraciones base para la fuerza F y el ángulo β respecto al radio: Grano 1, β random y F random. Grano 2, $\beta = 0$ y $F = 1cN$. Grano 3, β random y $F = 1cN$. Grano 4, $F = 0$ y β random.

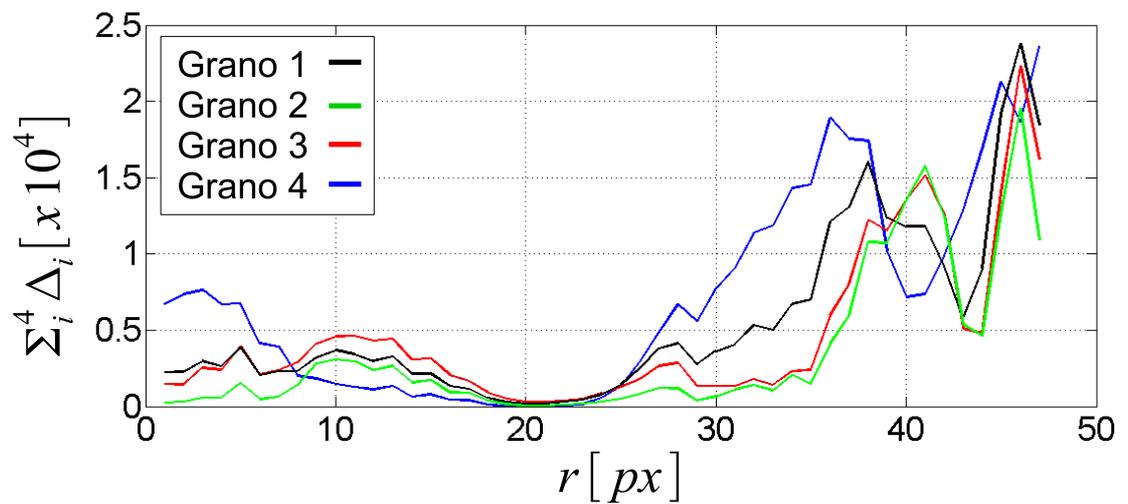


Figura 3.13: Gráfico de suma de las diferencias al cuadrado entre imagen real y patrón reconstruido. El menor valor de la integral de cada curva, es el criterio de selección para el patrón reconstruido, en este caso el Grano 2 (figura 3.12 imagen 2) es el tomado por el programa siguiendo el criterio.

granos. Siendo el tamaño radial de la ventana de $\Delta r \sim 2d$ y el tamaño del paso de avance de $0,5d$. Angularmente, se consideró un tamaño de ventana igual a $\Delta \theta \sim \pi/10$ y el tamaño del paso

de avance de $\pi/90$, ver figura 3.14.

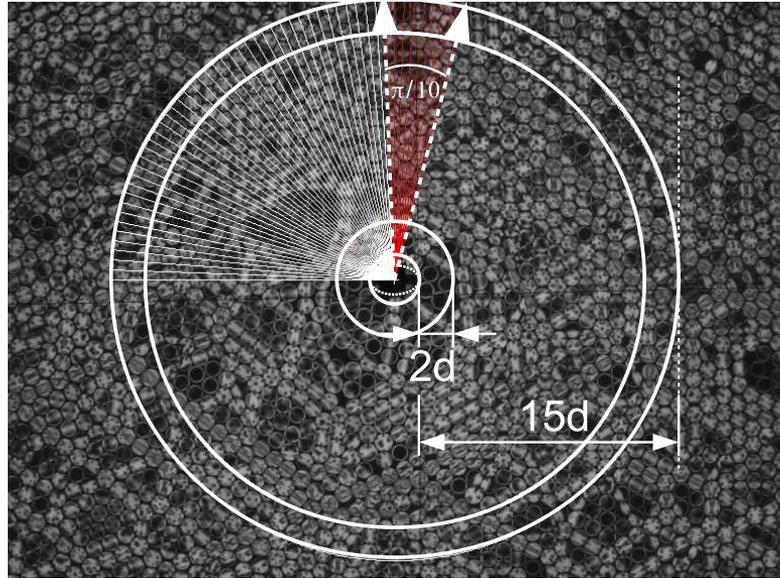


Figura 3.14: Espacio muestral de la celda granular, para radio desde $1,5d$ hasta $15d$ ($1,5d$ radio de círculo que circunscribe la elipse), con tasa de avance de $R + \Delta R$, con $\Delta R = 2d$ y paso de $0,5d$, y barrido angular para cada i -ésimo radio entre $\theta + \Delta\theta$, con $\Delta\theta = \pi/10$ y paso de $\pi/90$.

3.4. Resultados

3.4.1. Campos de desplazamientos

3.4.1.1. Micro-Macro Desplazamientos

En analogía al problema planteado por Eshelby, por medio de un sistema magnético en la cara superior de la inclusión, se retiró la elipse de la *matriz granular*, en primera instancia se presentan los campos de desplazamiento debido al reordenamiento al retirar la inclusión.

En primer lugar la celda granular bidimensional se mantuvo bajo presión hidrostática, es decir, el caso particular de deformación bajo cizalle puro con esfuerzos perpendiculares y de igual valor ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 1,5[kg]$). La orientación de la elipse según el semieje mayor, fue paralela al eje x (igual dirección que esfuerzo σ_2), 45° y perpendicular al eje x. Se obtuvo la imagen inicial con el sistema en equilibrio, luego, con la implementación de un sistema magnético se extrajo

la inclusión sin levantar los granos vecinos. Entonces para cada extracción se obtuvieron dos imágenes iniciales (con inclusión) y dos finales (sin inclusión), imágenes con luz superior y en un polariscopio circular respectivamente.

En la figura 3.15 es posible observar el campos de desplazamiento para 10 imágenes, sobre un barrido de ventana de 3 diámetros de grano, para tres orientaciones de la inclusión. Se observa que el campo de desplazamiento en los tres casos independiente de la orientación de la elipse, la mayor densidad de movimiento se produce a la izquierda de la inclusión (pared móvil), y aparentemente es muy bajo el movimiento a la derecha (pared fija). Otro aspecto importante es el que se observa en la vecindad de la inclusión, se produce un efecto de vorticidad en el perímetro de la elipse, siendo ligeramente mayor en las caras de menor ángulo.

En el caso correspondiente a cargas de diferente magnitud sobre las paredes del sistema (cizalle puro), con razón entre las tensiones de 4 : 1 siendo $\sigma_{xy} = \sigma_1 = 2,0[kg]$ y $\sigma_{yx} = \sigma_2 = 0,5[kg]$, de igual manera el protocolo de medición fue ubicar la elipse en una posición fija, con orientación $\theta = 0, \pi/4$ y $\pi/2$, este procedimiento se realizó 10 veces para cada posición de la elipse. En la figura 3.16 se puede observar el campos de desplazamiento promedio para una ventana cuadrada de 3 diámetros, en el barrido de los 10 eventos para las distintas orientaciones de la inclusión.

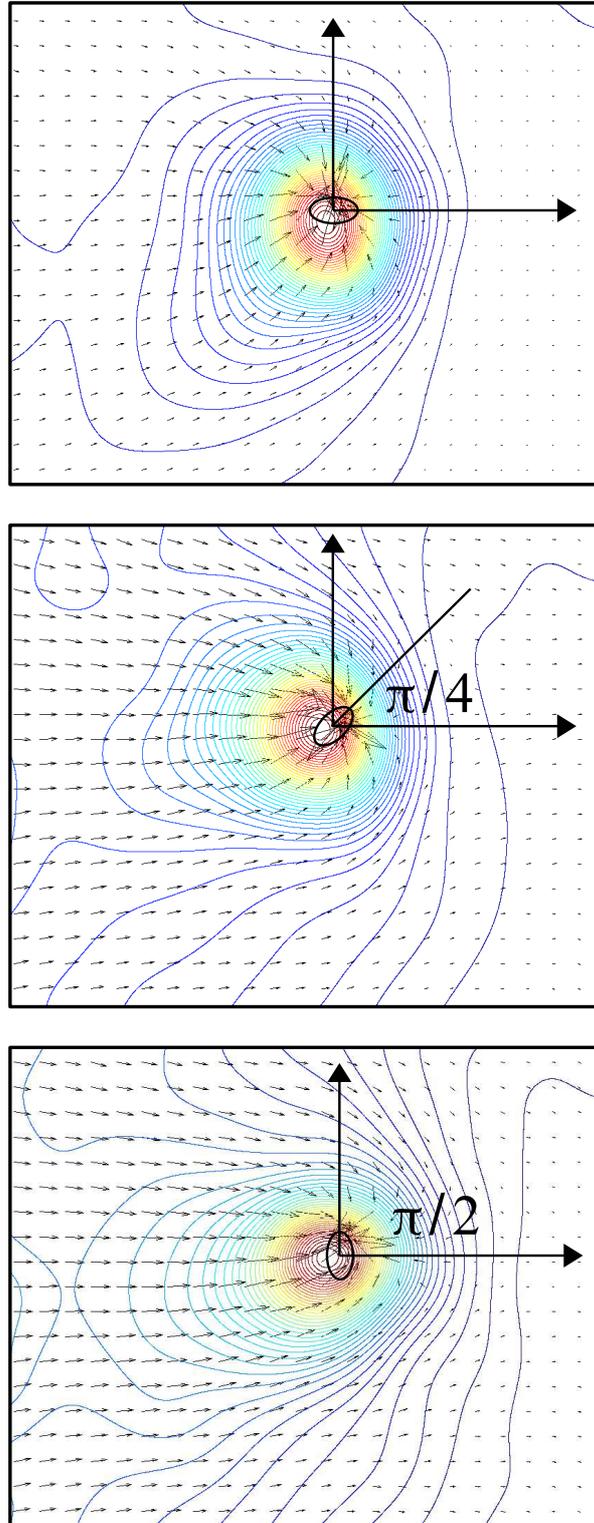


Figura 3.15: Coarse Graining del campo de desplazamiento promedio en 10 imágenes para $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $w = 3d$ y orientación de la inclusión elíptica $\theta = 0, \pi/4$ y $\pi/2$. Globalmente se observa tendencia a desplazar una de las paredes tras retirar la inclusión

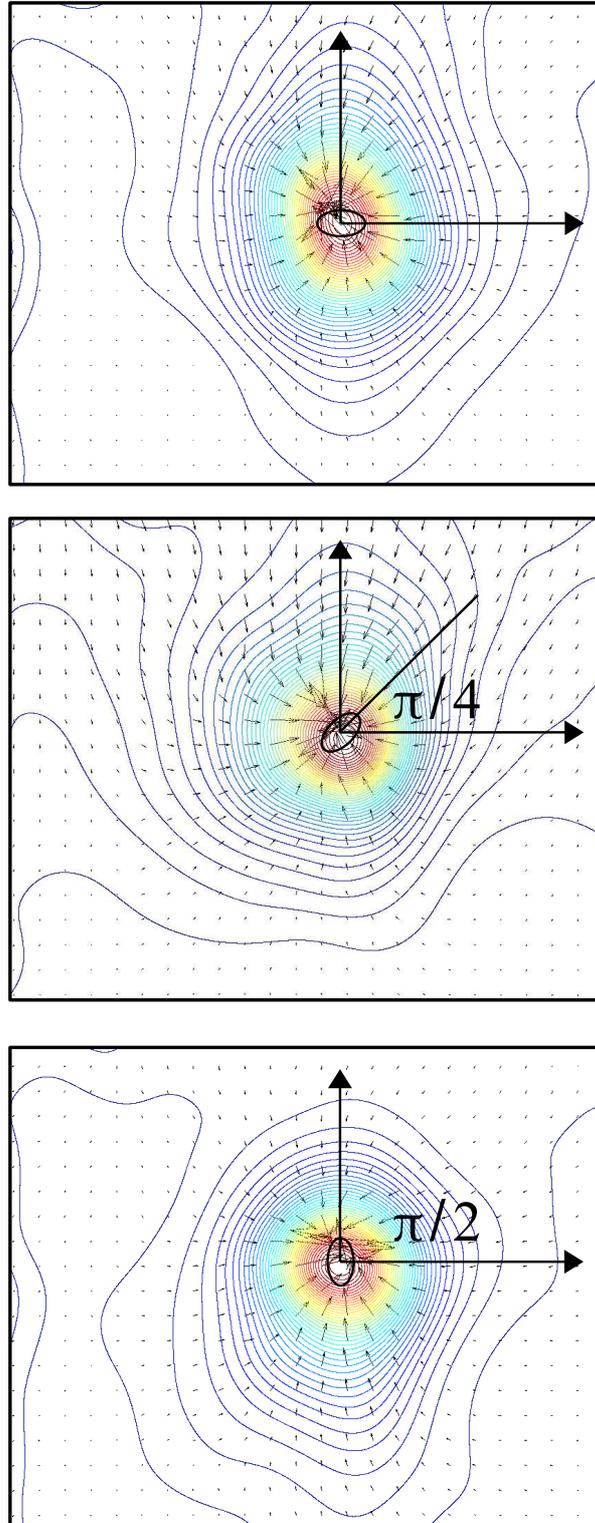


Figura 3.16: Coarse Graining del campo de desplazamiento promedio en 10 imágenes para $\sigma_{xy} = 4 \cdot \sigma_{yx}$, $w = 3d$ y orientación de la inclusión elíptica $\theta = 0, \pi/4$ y $\pi/2$. Se observa como gobierna la carga mayor sobre la pared, desplazando la pared superior.

El campo de desplazamientos se ve influenciado por la carga mayor sobre la pared móvil superior, independiente de la orientación de la elipse, el desplazamiento grueso está sesgado en la vertical en una franja que *encierra* la inclusión. Al menos para el coarse graining del desplazamiento como se observa en la figura 3.16 la pared móvil del costado izquierdo se comporta como pared fija en el campo del desplazamiento. Del coarse graining, se observa con facilidad las zonas correspondientes al movimiento global de los granos, diferenciándose entre compresión isostática ($\sigma_1 = \sigma_2$) con desplazamientos que abarcan la mitad del sistema hasta la vertical donde se encuentra la inclusión, y el caso de cizalle puro ($\sigma_1 = 4\sigma_2$) con desplazamientos acotados a un región donde permanecía la elipse.

3.4.1.2. Desplazamiento $f(R, \theta)$

Se observó en las gráficas de la sección anterior, que el campo de desplazamiento posee regiones de mayor intensidad gobernadas principalmente por la pared que contiene la carga mayor. Aquello no especifica diferencias con respecto a la orientación de la inclusión. Por ello en esta sección, se estudia en primer caso la magnitud del desplazamiento en función del radio R y el comportamiento del desplazamiento en función del ángulo θ .

Un caso usual es el de la figura 3.17 donde a) muestra la magnitud del desplazamiento promedio $\langle u \rangle$, para todo el recorrido angular en función del radio R , tomando como referencia el centro de la inclusión. Se observa que el desplazamiento cae aproximadamente con una dependencia de $1/r$, al menos a un tercio de su máximo valor a partir de $R = 5d$. Por otra parte, en la misma figura las curvas b) y c) muestran las componentes cartesianas del desplazamiento u_x y u_y respectivamente, en ambas gráficas se observa respuesta sobre y bajo el eje de referencia. Esta característica en el caso positivo de b) indica los desplazamiento desde la izquierda hacia el lugar donde se retiró la inclusión, y en el caso negativo indica los desplazamientos desde la derecha hacia la izquierda. De manera similar, la curva c) correspondiente a la componente vertical del desplazamiento u_y , muestra los desplazamientos positivos de manera descendente, y la respuesta negativa, es debido al desplazamiento de granos desde abajo hacia el sector de la inclusión de manera ascendente.

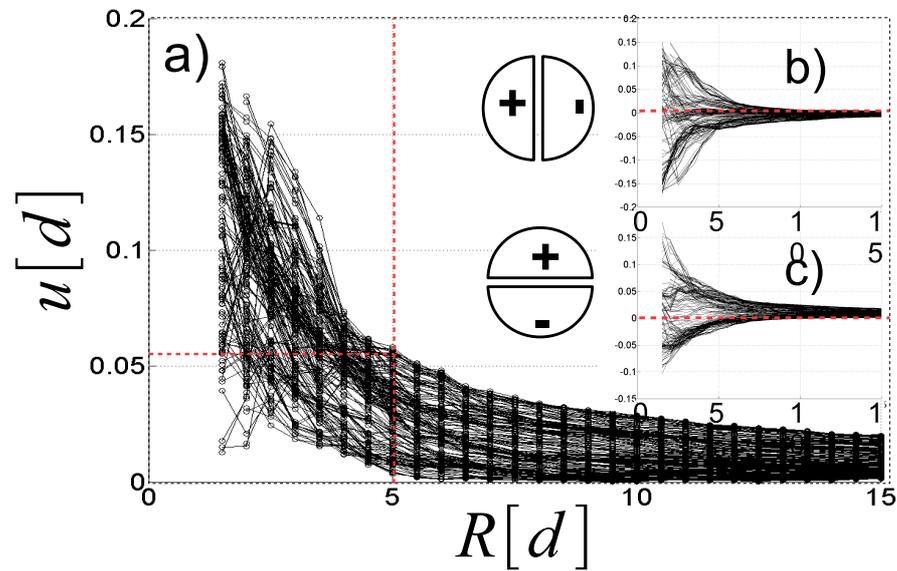


Figura 3.17: La curva a) muestra el desplazamiento en función del radio para inclusión con semieje mayor en la horizontal, y $\sigma_1 = \sigma_2$. b) Es la componente horizontal del desplazamiento u_x y c) la componente vertical u_y , ambas muestran desplazamiento en ambos sentidos.

En la figura 3.18 se puede observar los desplazamientos promedios en función del radio. En la gráfica es posible observar el desplazamiento en función del radio para la deformación del tipo cizalle puro, en el caso de cargas iguales (compresión), para tres posiciones angulares de la inclusión. Además se consideró una ventana angular en cada radio, las curvas responden a ventanas de $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$ [rad].

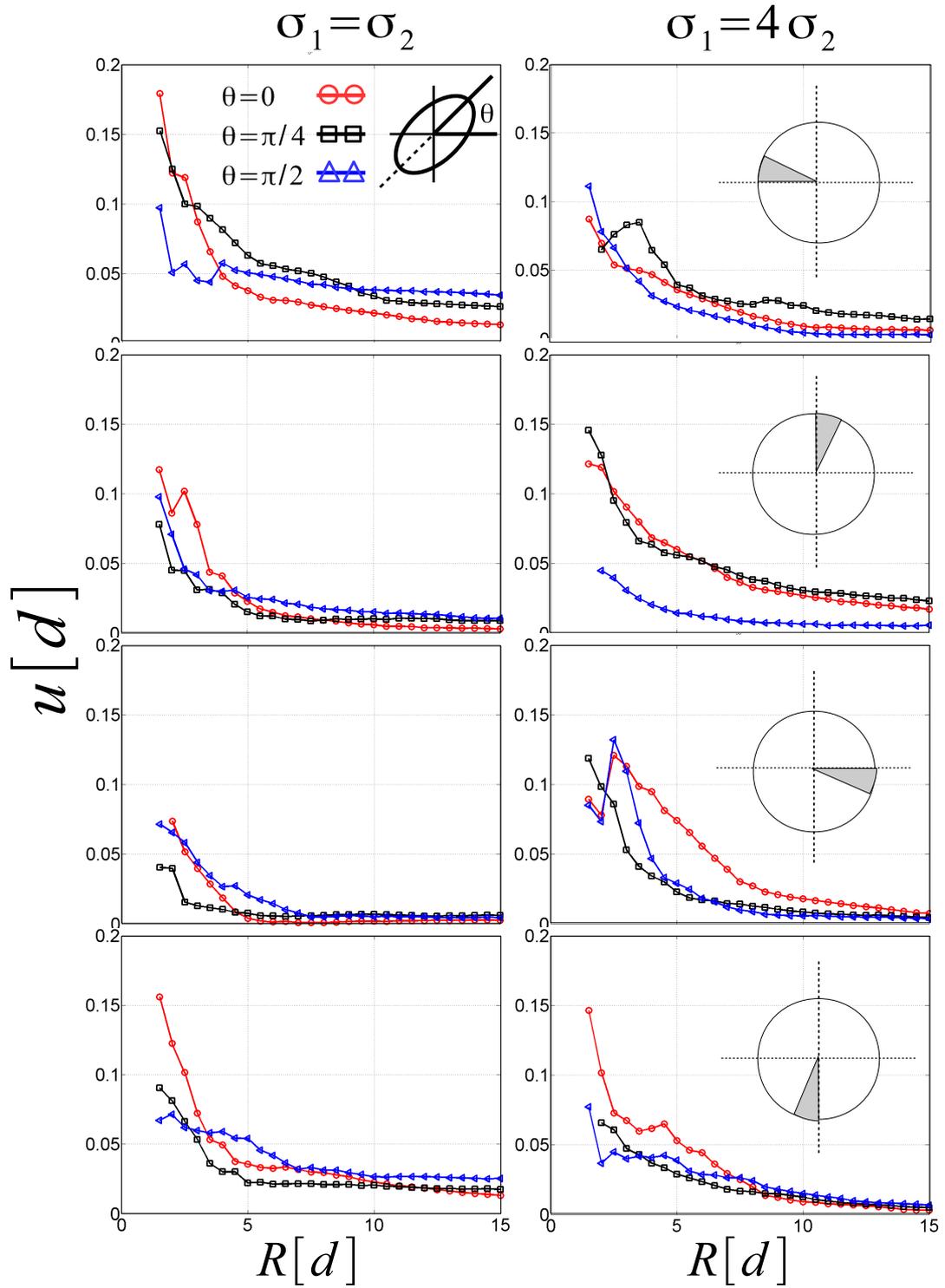


Figura 3.18: Desplazamientos promedio en función del radio para diferentes cargas, orientación de la inclusión y ventana angular de exploración, $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$ [rad]

Las curvas de la figura 3.18 reafirman que el grueso de la movilidad granular, se produce en primera instancia en la región inmediata a la inclusión $R = 2d$ (semieje mayor de la elipse $1,5d$) y se expande hasta $R = 5d$, de este radio en adelante no se producen cambios relevantes en los desplazamientos. Se observa levemente que las caras de menor ángulo de la elipse pueden favorecer la movilidad local, esta noción surge de observar las curvas anteriores en relación a la posición angular de la inclusión. Para continuar esta idea se exploró la distribución de desplazamientos en función del ángulo, como se muestra en las gráficas de la figura 3.20, para el ΔR correspondiente a la región que rodea la elipse desde $R_{min} = 2,0d$ a $R_{max} = 5,0d$, como se ha visto anteriormente, es el ancho donde se producen sobre el 75% de los eventos ver figura 3.19.

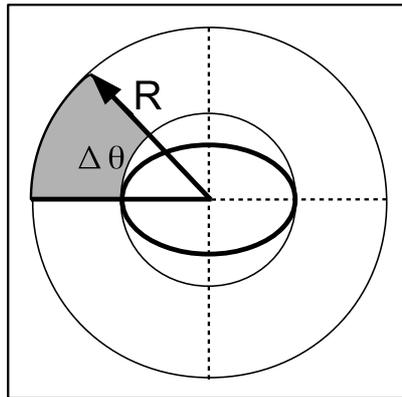


Figura 3.19: Región de análisis en la vecindad de la inclusión. Desde $R = 2,0d$ a $R = 5,0d$, las dimensiones de la elipse son semieje menor $1,0d$ y semieje mayor $1,5d$.

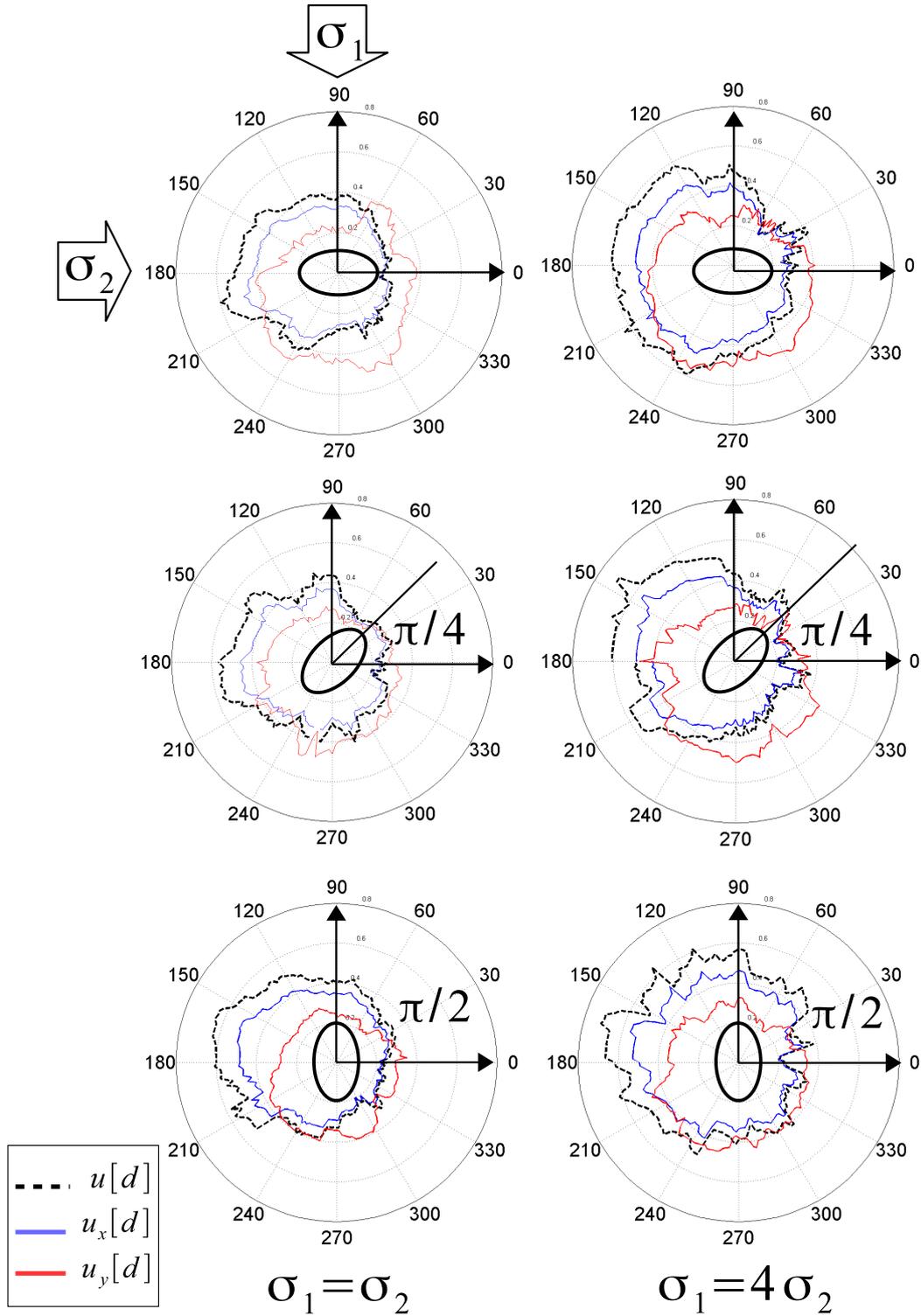


Figura 3.20: Desplazamientos a $\Delta R = 1$ en función del ángulo, la región de análisis de las curvas corresponde desde $R = 2,0d$ a $R = 5,0d$ (vecindad inmediata de la elipse). En cada gráfico polar se observa el desplazamiento, y las componentes cartesianas de este para las diferentes orientaciones.

3.4.2. Esfuerzos Locales en Celda Granular

Al retirar la inclusión, se producen múltiples cambios en las cadenas de fuerza al interior del sistema, esto se debe a la reorganización de los contactos activos (se destruyen y se crean contactos), formando grupos cuya estructura, tamaño y forma cambia instantáneamente al producirse la deformación [12]. En la figura 3.21 se observa una típica imagen del sistema experimental bajo el polariscopio circular. La fotografía a) muestra la celda experimental con la inclusión elíptica entre los granos, en la imagen b) se observa el reacomodo local producto de los contactos en todas direcciones de las cadenas de esfuerzo, luego de retirar la inclusión.

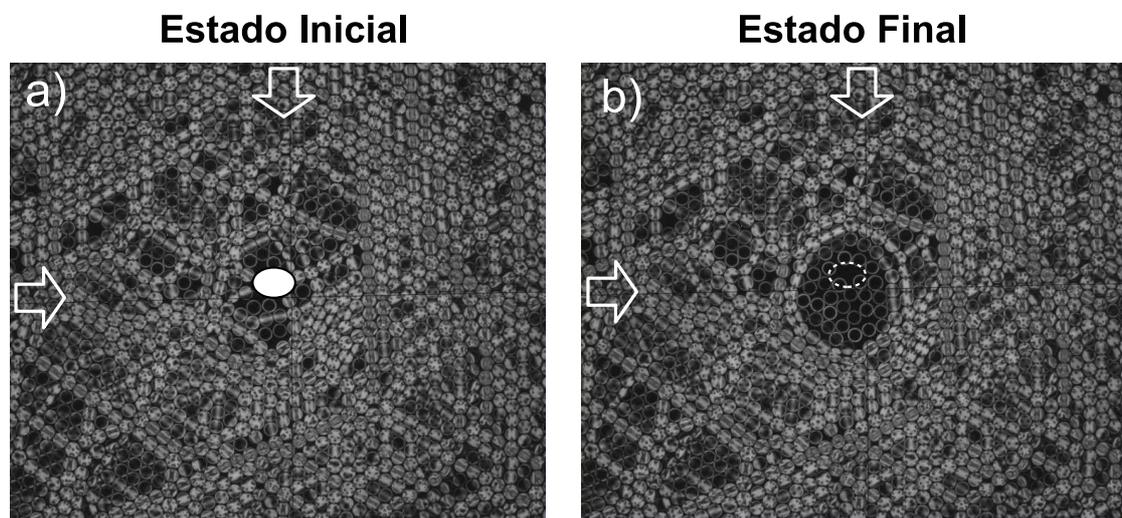


Figura 3.21: a) Estado inicial en el sistema granular con inclusión elíptica $\sigma_1 = \sigma_2$, b) Estado final tras retirar la inclusión del sistema produciendo múltiples reacomodos locales.

la figura 3.22 muestra el coarse graining del sistema anterior con una ventana de cálculo de $w = 2d$.

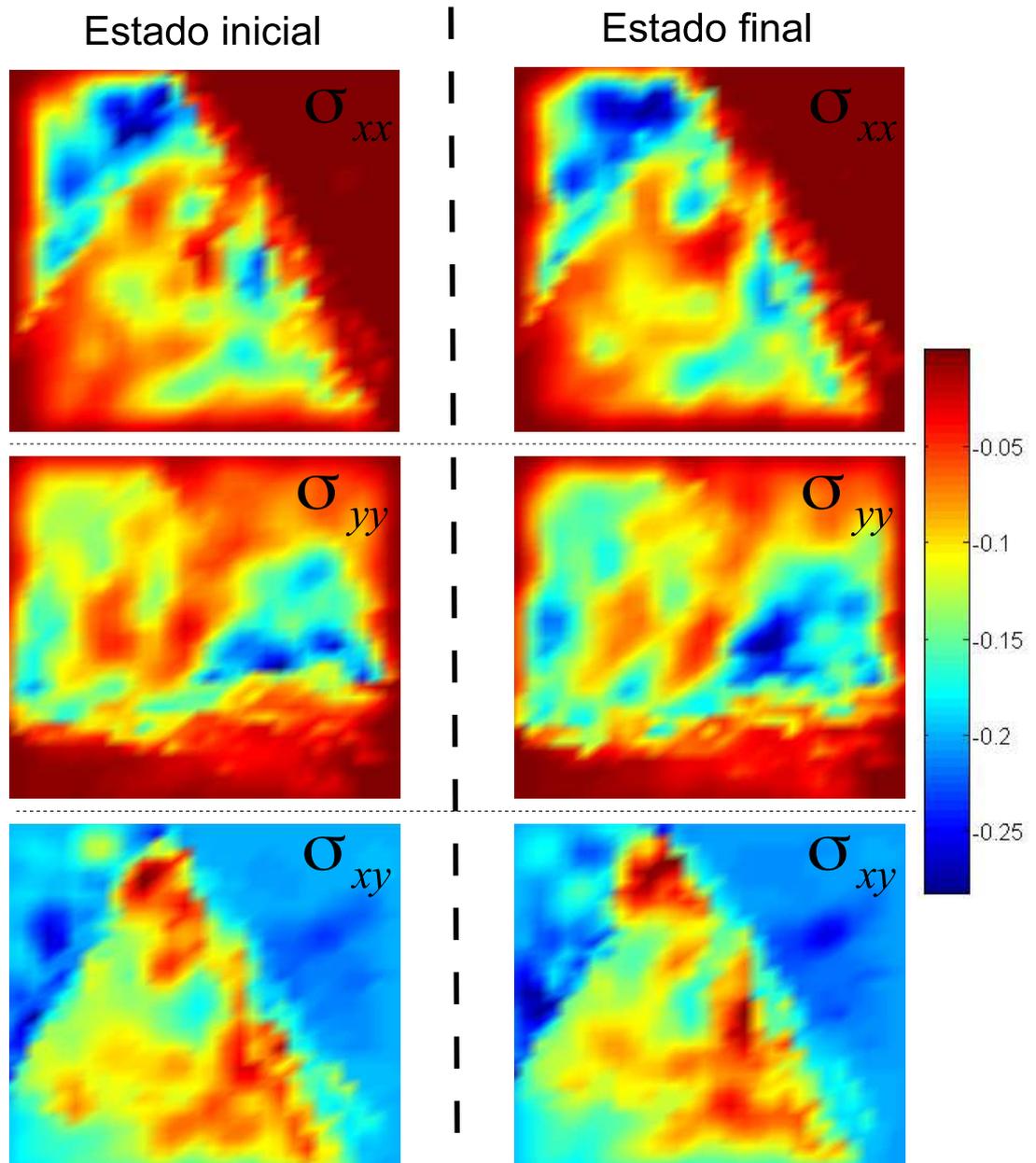


Figura 3.22: Coarse graining para σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} al retirar inclusión, para $w = 2d$

de la figura anterior es posible observar, que no existe de manera explícita una diferencia considerable entre los estados iniciales y finales del sistema, por ello se realizó la substracción del CG de cada esfuerzo final con su correspondiente CG del esfuerzo en el estado inicial, para ello se tomó un región central de la celda experimental de 14×18 diámetros, se midió las fuerzas de las

partículas en la región en ambos estados, ver figura 3.23 a partir de esta información se calculó el CG, en la figura 3.24 se observa la diferencia del promedio del CG de los esfuerzos, entre los estados finales $\sigma_{\alpha\beta}^f$ e iniciales $\sigma_{\alpha\beta}^i$ como muestra la ecuación 3.9 para $\sigma_1 = \sigma_2$ con orientación del semieje mayor de la elipse $\theta = 0$.

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle^{CG} = \frac{1}{n} \left(\sum_i^n \sigma_{\alpha\beta}^f - \sum_i^n \sigma_{\alpha\beta}^i \right) \quad (3.9)$$

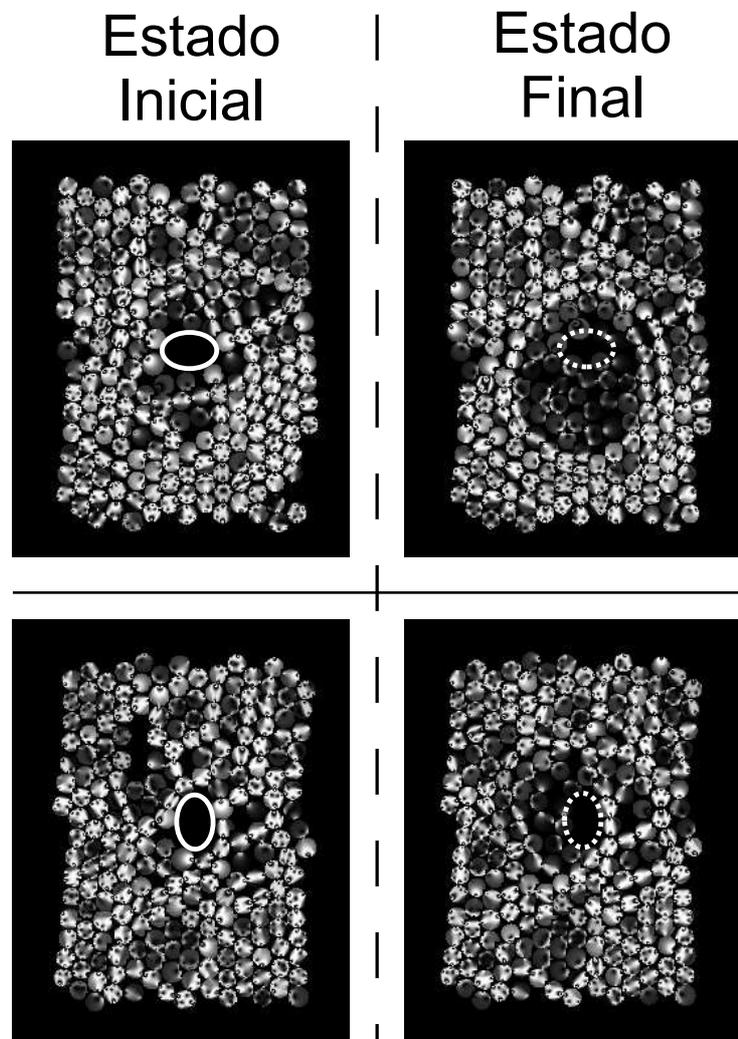


Figura 3.23: Región de cadenas de fuerzas con patrón fotoelástico reconstruido para dos orientaciones de la inclusión $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

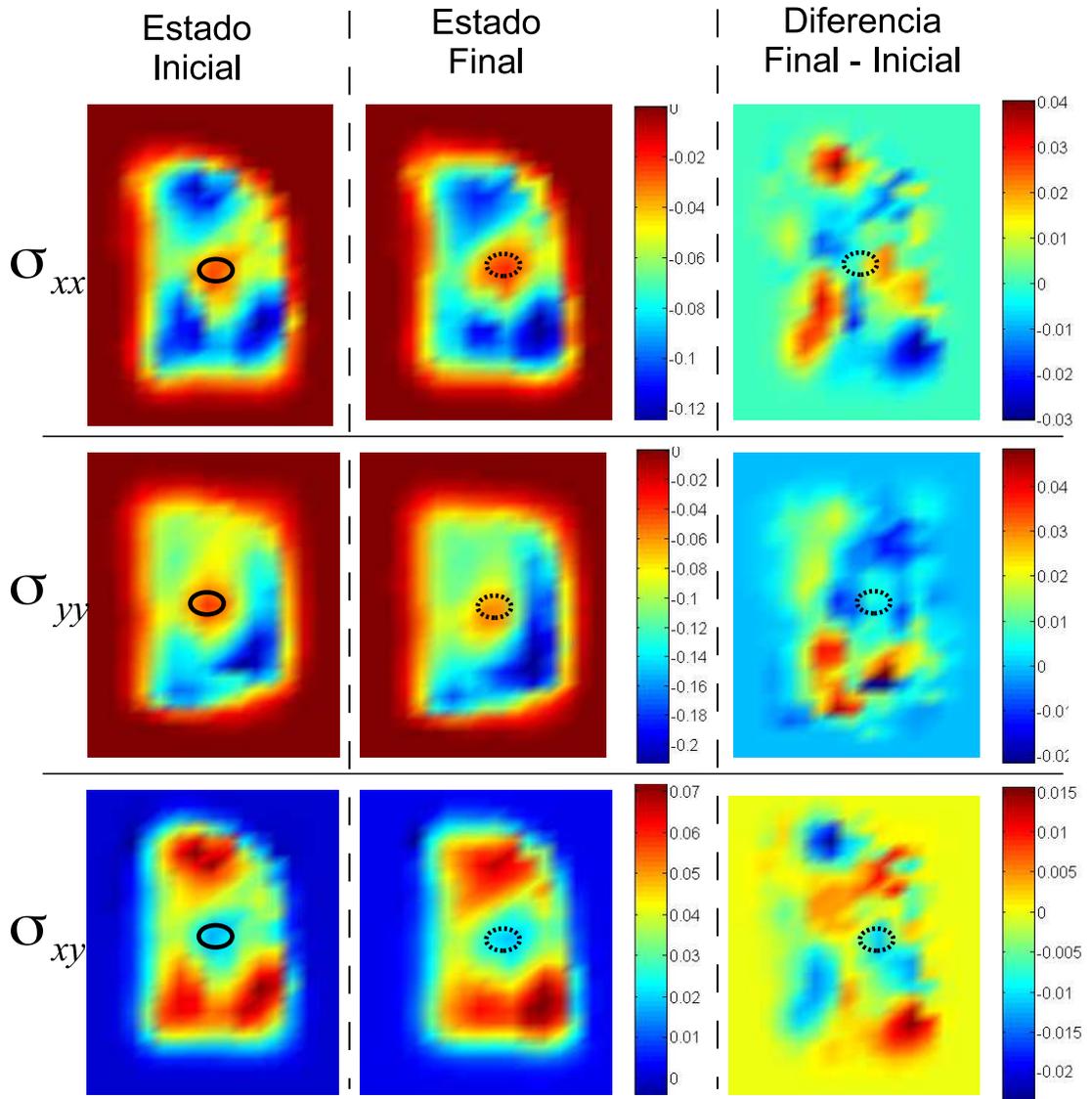


Figura 3.24: Diferencia de los promedios de CG de σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} , de típica región central de la celda experimental, para orientación de la elipse $\theta = 0$.

en la figura 3.25 se observa el promedio del CG de los esfuerzos, y la diferencia entre los estado finales e iniciales para $\sigma_1 = \sigma_2$ con orientación de la elipse $\theta = \pi/2$.

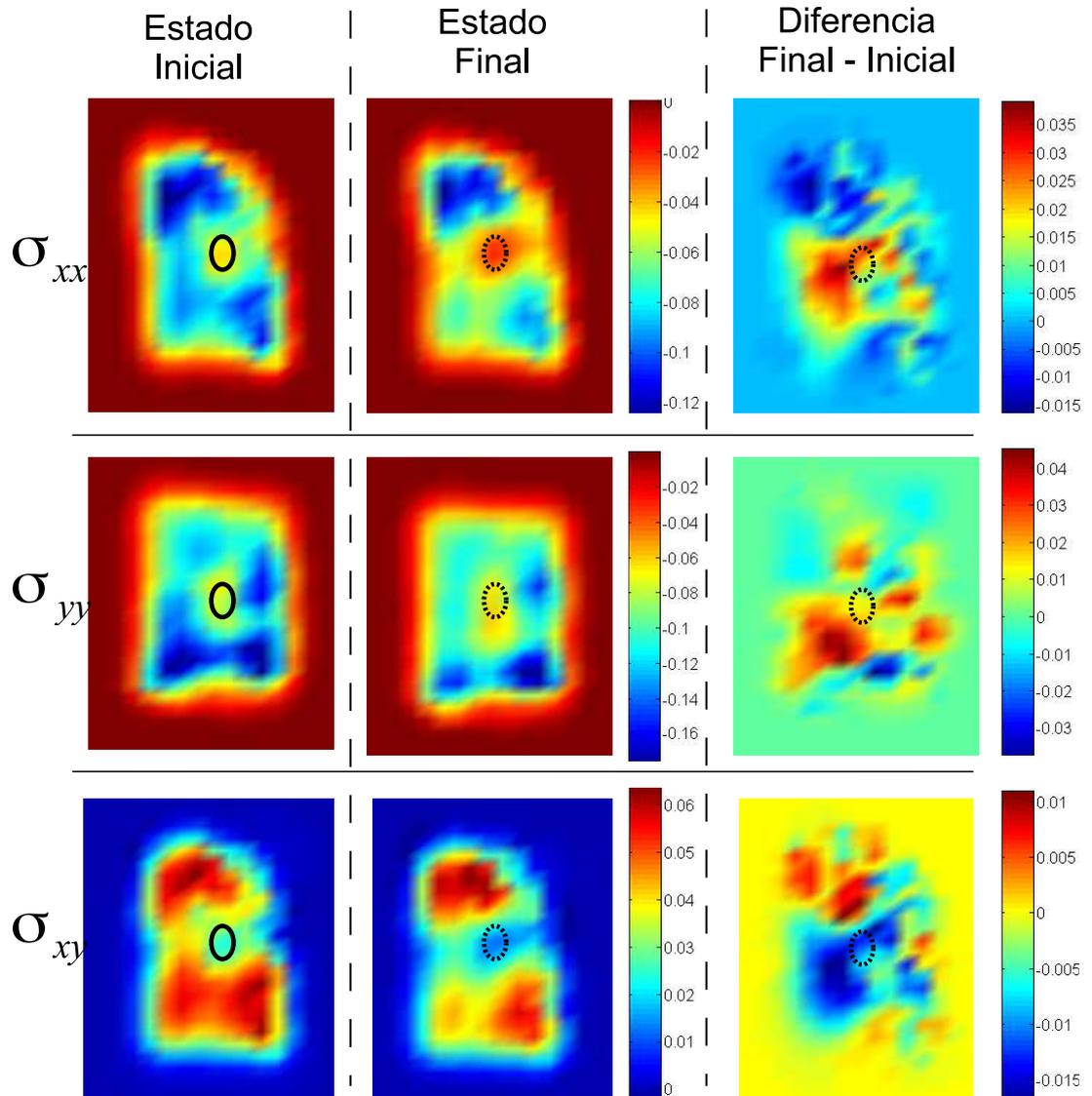


Figura 3.25: Diferencia de los promedios de CG de σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} , de típica región central de la celda experimental para orientación inicial de la elipse $\theta = \pi/2$.

3.4.3. Rattler en la Vecindad de la Inclusión

De la sección anterior, se ha observado en la fase inicial del protocolo experimental, que el conjunto de granos se encuentra confinado en una celda cuadrada con carga sobre las dos paredes móviles. El sistema se encuentra en equilibrio estático, debido a que la compresión es contenida por la ramificación de las cadenas de fuerza, como se observó en la figura 3.21. En-

tonces, en las condiciones iniciales la inclusión elíptica no es invisible a la transmisión de los esfuerzos, debido a que no impide la propagación de las tensiones.

Se ha observado que independiente del caso de deformación al cual se encuentra sometido el sistema (compresión hidrostática o cizalle puro), e independiente de la orientación que posea la inclusión, se produce una configuración que aísla tensionalmente una cantidad de granos en la vecindad donde se encontraba la inclusión, a esta configuración de granos aislados tensionalmente donde estaba la elipse se le llama rattler. En el caso más simple, para observar los esfuerzos principales sobre la cadena que rodea el rattler, se puede considerar un conjunto de granos encerrados por una única cadena, compuesta de n granos, donde cada partícula posee dos contactos ejerciendo fuerza comunes con los vecinos. En la figura 3.26 se observa un esquema de una cadena circular, el cual posee solo dos contactos activos, y muestra el coarse graining de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} , y de σ_{xy} y σ_{yx} , considerando fuerzas de igual magnitud $0,1[N]$.

Una cadena de los rattler que se asemeja a la observación empírica, fue construido basado en la información estadística de geometría, cantidad de granos que lo conforman, cantidad de lados. Así se construyó una cadena de discos, ejerciendo fuerzas aleatorias sobre los vecinos, pero cuyas fuerzas comunes fueron de igual magnitud pero sentido contrario, además se considera la fuerza de roce ejercida sobre cada vecino, y una quinta fuerza proveniente del exterior del rattler, que cumplió la función de satisfacer el equilibrio estático por cada grano de la cadena, ver la figura 3.27.

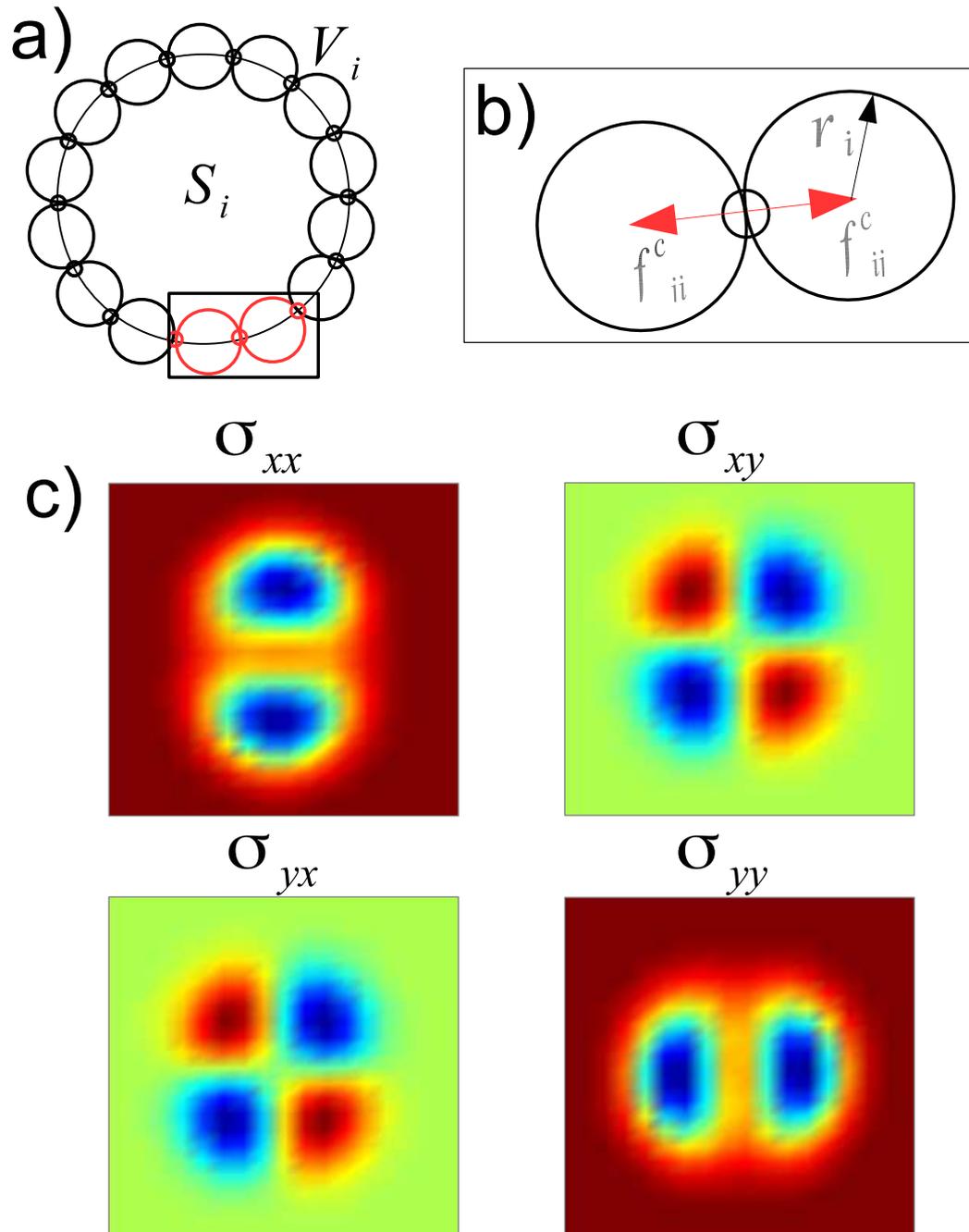


Figura 3.26: a) Modelo de cadena que rodea un rattler circular. b) Región del rattler circular con la dirección de las fuerzas en uno de los dos contactos activos. c) Coarse graining sobre un modelo de cadena de rattler circular compuesto de 30 discos, con fuerzas de $0,1[N]$.

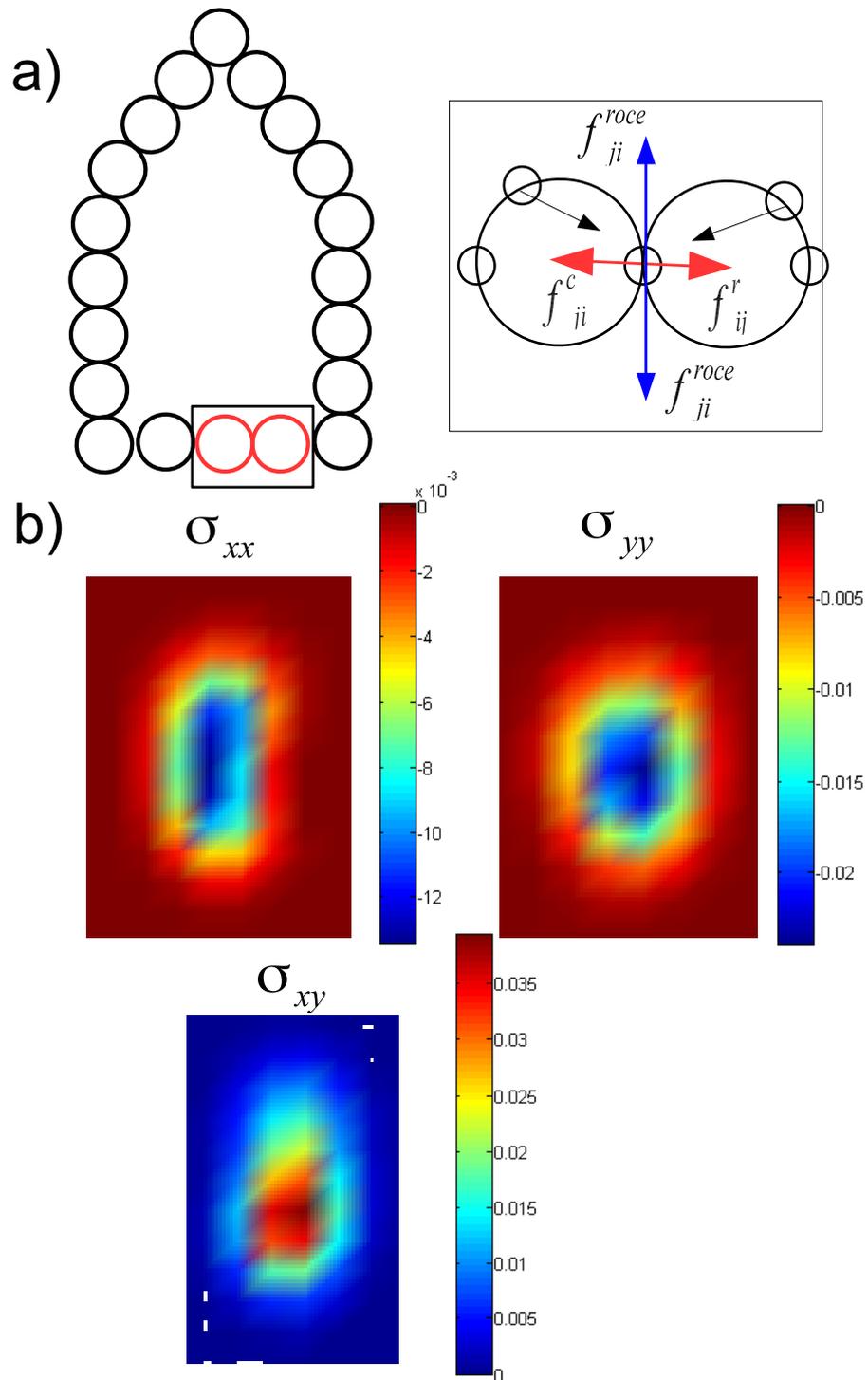


Figura 3.27: a) Modelo poligonal de cadena de rattler pentagonal. b) Coarse graining sobre el modelo de rattler pentagonal, con fuerzas aleatorias entre los discos, y que cumple condición de equilibrio estático.

En cada iteración del experimento al retirar la inclusión se formó un rattler y de manera implícita la cadena que aísla los granos tensionalmente, variado en tamaño, estructura y cantidad de granos tanto al interior como en el perímetro. Con la finalidad de centrar el estudio en esta configuración, se aisló la cadena y se midió las fuerzas en cada grano. El protocolo con el cual se estudió cada rattler, se muestra en la figura 3.28 y sigue los pasos:

- *i)* Se realiza un zoom a la región central de la fotografía post inclusión.
- *ii)* A partir del criterio de mínimo de intensidad, se encuentran los granos que son parte de la cadena externa central.
- *iii)* Se extrae el perfil de los granos que conforman la cadena.
- *iv)* Se reconstruyó el patrón fotoelástico de la cadena del rattler.

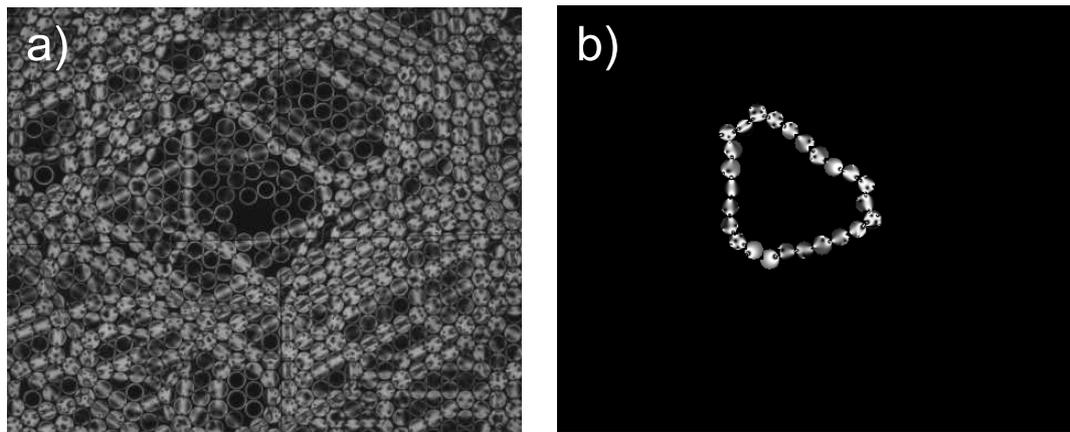


Figura 3.28: En la figura se observa el protocolo de extracción y reconstrucción de una cadena de rattler central, post inclusión.

En el caso hidrostático (cargas iguales), la excentricidad e del rattler presenta diferencias solo en la cantidad porcentual que aparece cada magnitud de excentricidad entre 10% y 20%, para las orientaciones observadas de la inclusión ($\theta = 0, \pi/4$ y $\pi/2[rad]$), ver figura 3.29. En el caso de cizalle puro, el histograma muestra que porcentualmente las cadenas de los rattler tienden a ser menos ovalados, en una transición entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, de $e = 0,7$ a $0,9$ donde su geometría es similar a un círculo.

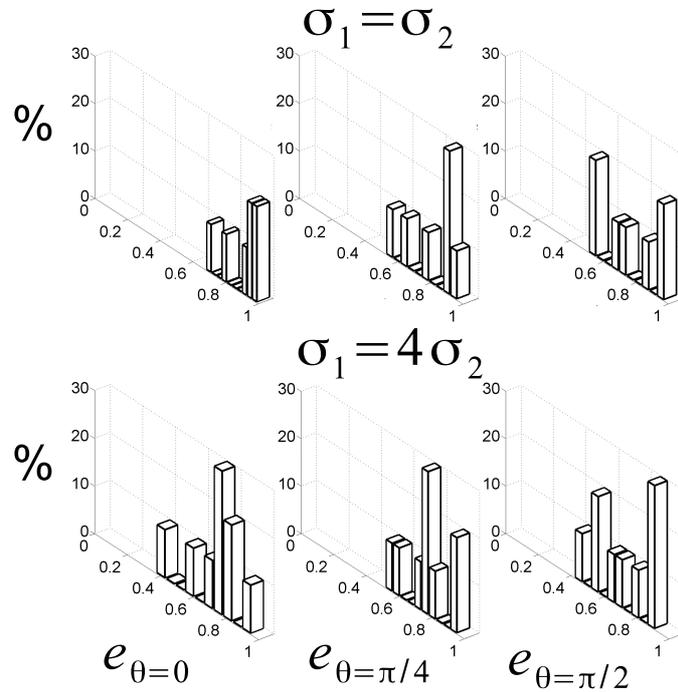


Figura 3.29: Histograma de excentricidad en geometría rattler. Excentricidad en término de carga en las paredes y orientación de la inclusión ($\theta = 0, \pi/4$ y $\pi/2$ [rad]).

Estas configuraciones cerradas de granos, se puede considerar como un conjunto compuesto de cadenas lineales laterales debido a la presión que ejercen las paredes. El histograma de la figura 3.30 muestra la aproximación a que una cadena de rattler se conformara solo de cadenas lineales, caracterizando el porcentaje de encontrar una geometría poligonal específica.

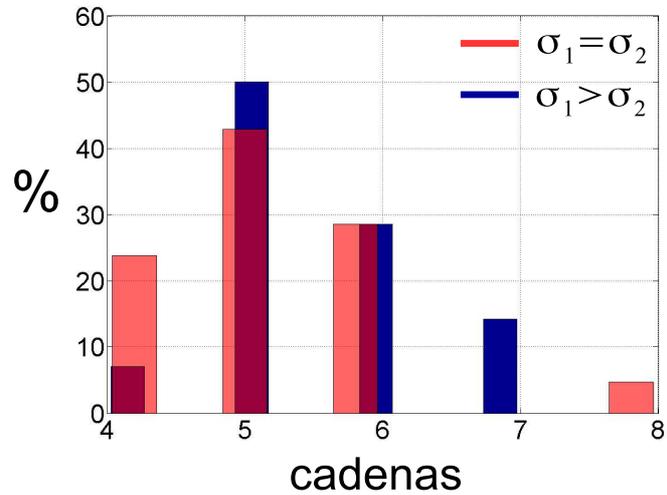


Figura 3.30: Histograma porcentual de cadenas lineales que forman un rattler para $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_1 > \sigma_2$

Un rattler como figura poligonal, en gran medida se puede especificar como una cadena con tendencia pentagonal para ambos tipos de deformaciones. Siendo 4 la mínima cantidad de cadenas que encierran el conjunto de partículas individuales S_i como un cuadrado, llegando a una figura poligonal de 7 u 8 lados.

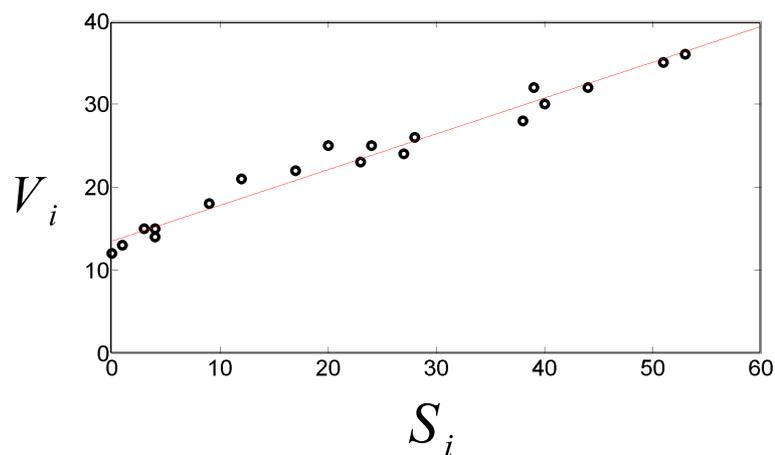


Figura 3.31: Relación entre granos en el interior S_i y en el perímetro V_i del rattler para $\sigma_1 = \sigma_2$.

La relación entre la cantidad de granos que cierran la cadena del rattler V , y la cantidad

de granos que conforman el rattler S (partículas aislada de tensiones), sigue una relación similar al número de partículas en el perímetro respecto al area cubierta al interior, esta relación es del tipo $\sqrt{(x)}$, al observar el comportamiento de la cantidad de granos en la cadena V y el número de partículas que conforman el rattler S en una ventana lineal se observa una relación $V(S) = 0,43S + 13,53$.

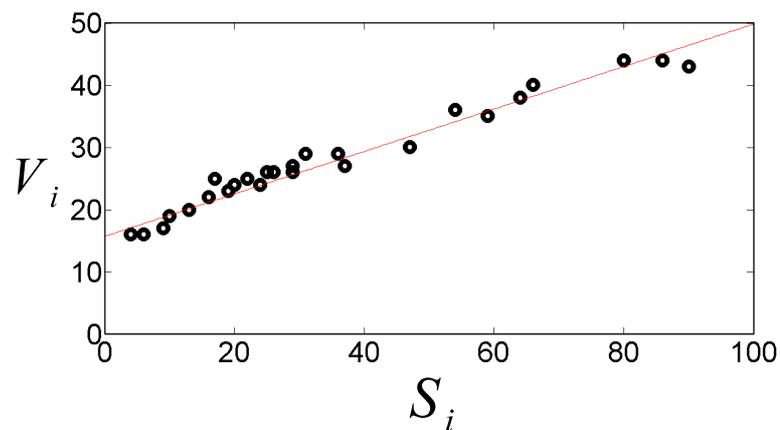


Figura 3.32: Relación entre granos en el interior S_i y en el perímetro V_i del rattler para $\sigma_1 = 4\sigma_2$.

De igual manera para el caso de $\sigma_1 = 4\sigma_2$, la relación entre V y la cantidad de granos que conforman el rattler S , resulta ser del tipo \sqrt{x} , pero al observar ambas variables en una ventana lineal resulta $V(S) = 0,34S + 16$.

La longitud máxima del semieje mayor, en términos porcentuales está descrita en la figura 3.33, donde el tamaño para rattler generados en cizalle puro alcanzan aproximadamente el doble que los producidos en compresión.

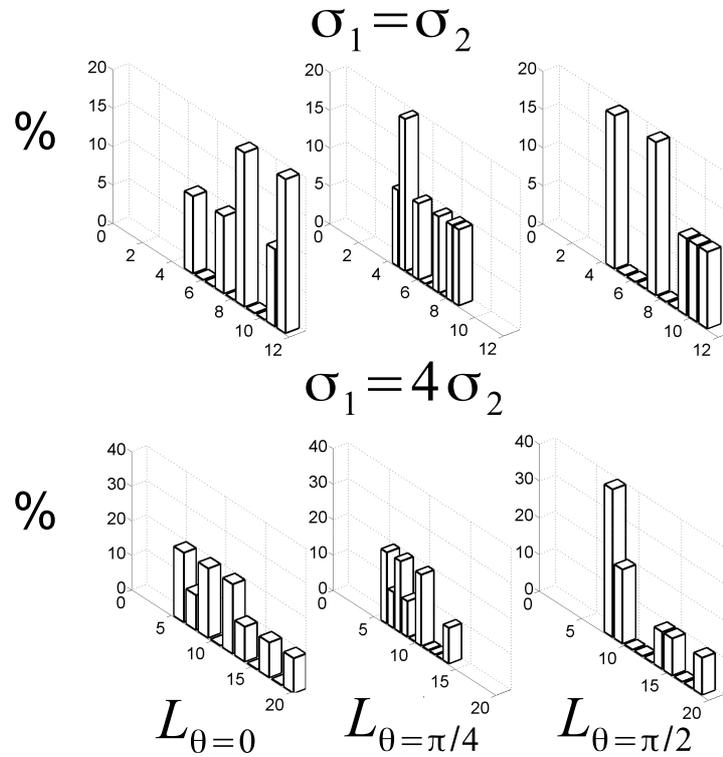


Figura 3.33: Longitud máxima del rattler.

Como se ha mencionado anteriormente, por medio del método de inversión fotoelástico (ver apéndice B), se obtuvo para cada grano la magnitud y dirección de la fuerza en sus contacto activo, previamente se expuso en la figura 3.28 una región central de la celda con granos que muestra la cadena de un rattler y las fuerzas medidas, con el patrón de la cadena reconstruido. A cada imagen se extrajo solo la cadena conservando sus contactos activos, y se midieron las fuerzas con los programas diseñados en MATLAB, en la figura 3.34 a) se muestra la celda granular con cargas iguales, y orientación de la elipse en el estado inicial con $\theta = \pi/2$, con el patrón de fuerzas calculado 3.34 b), y el coarse graining de los esfuerzos σ_{xx} y σ_{yy} en una ventana de 2 diámetros 3.34 c) y d).

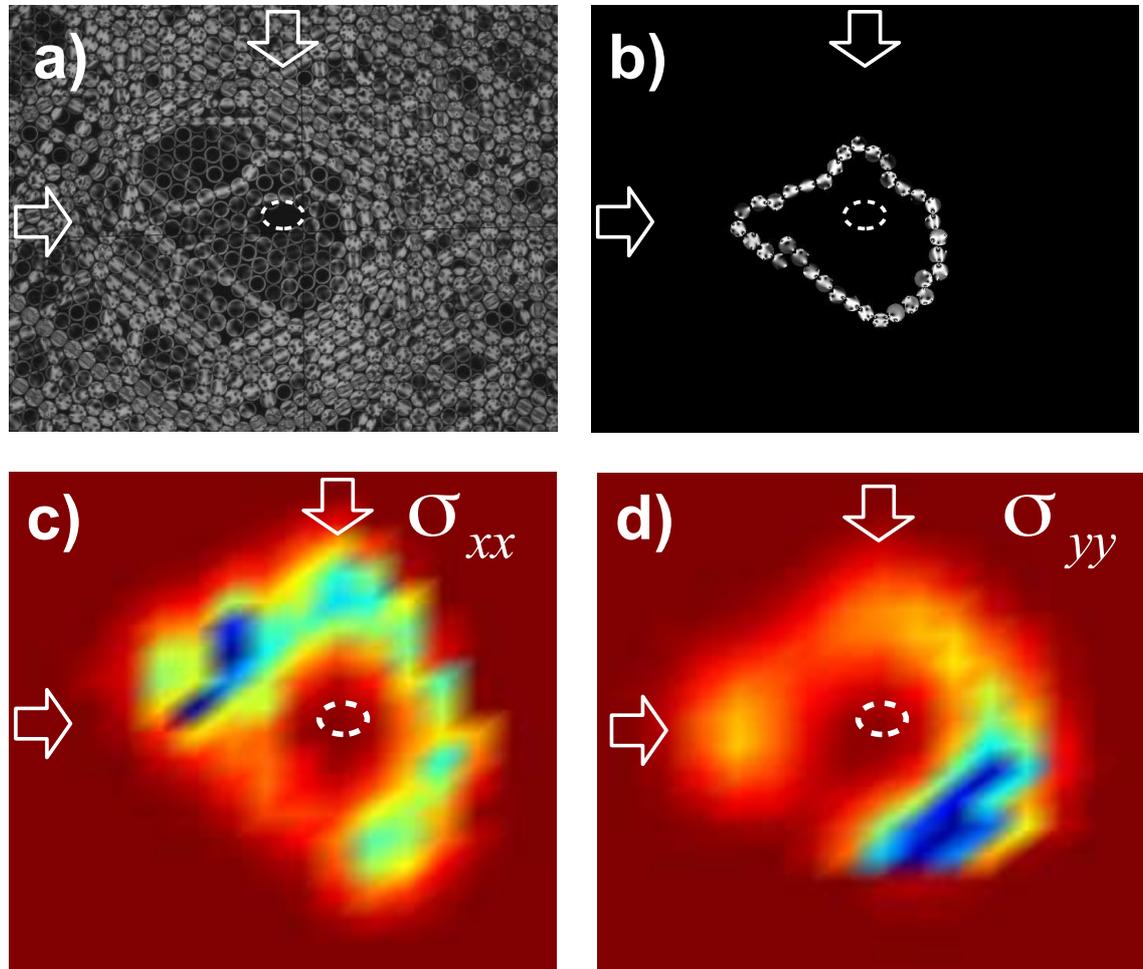


Figura 3.34: a) Fotografía de celda granular con rattler. b) extracción de la cadena que encierra el rattler y reconstrucción del patrón fotoelástico, c) y d) coarse graining de σ_{xx} y σ_{yy} para una ventana de cálculo de 2d.

Luego se promedió las cadenas obtenidas, con los coarse graining de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} calculados sobre 10 eventos, con orientación de la elipse $\theta = 0$ en la figura 3.35 y $\theta = \pi/2$ en la figura 3.36, se observa en ambos casos la tendencia a formar un único lóbulo aproximadamente circular, en coherencia con el esquema de las cadenas en sentido de su geometría. Una cadena de granos en equilibrio estático, que aísla tensionalmente a las partículas en su interior.

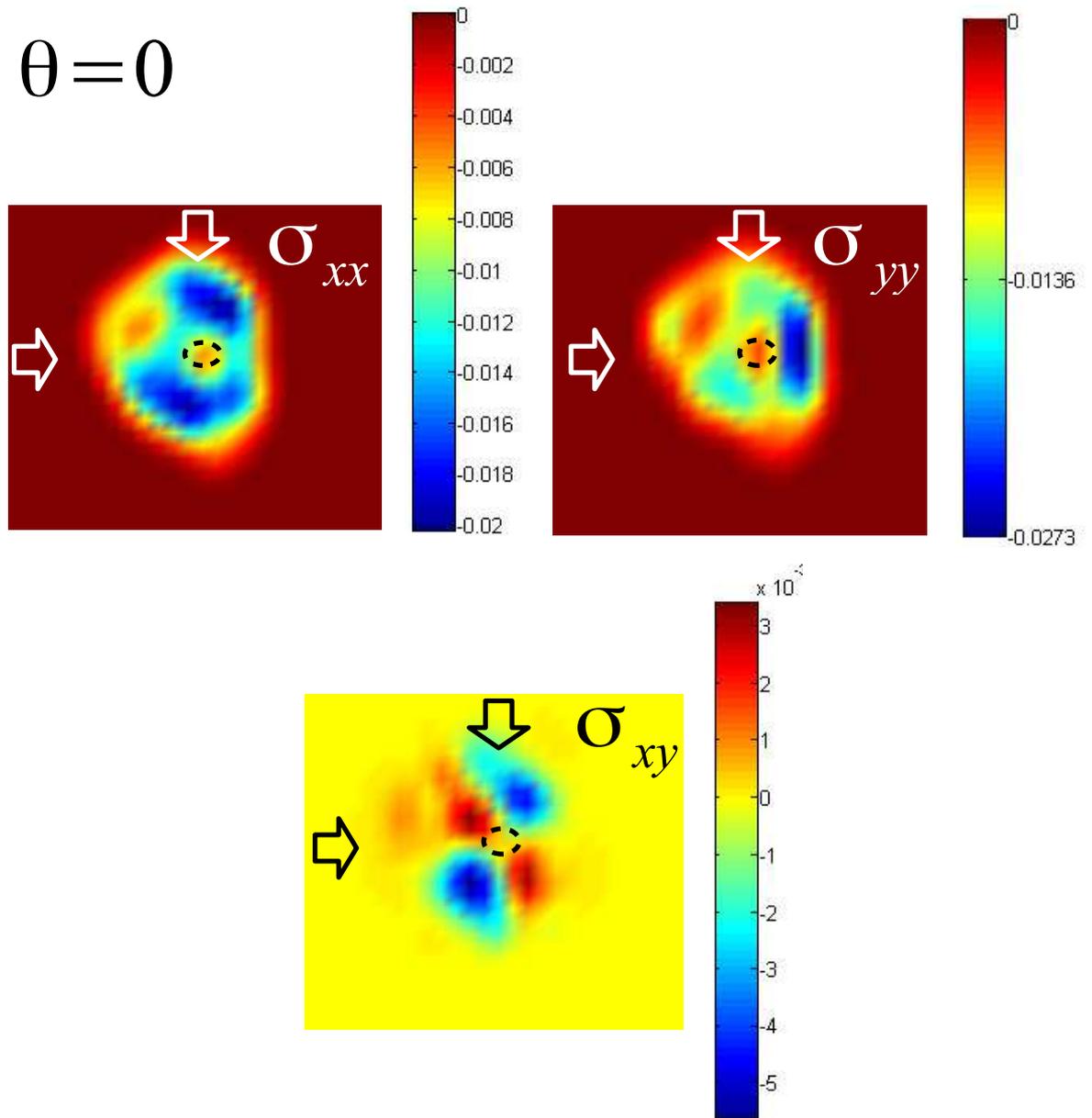


Figura 3.35: Coarse graining promedio del rattler para los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} de rattler para $\theta = 0$, con ventana de cálculo de 2d.

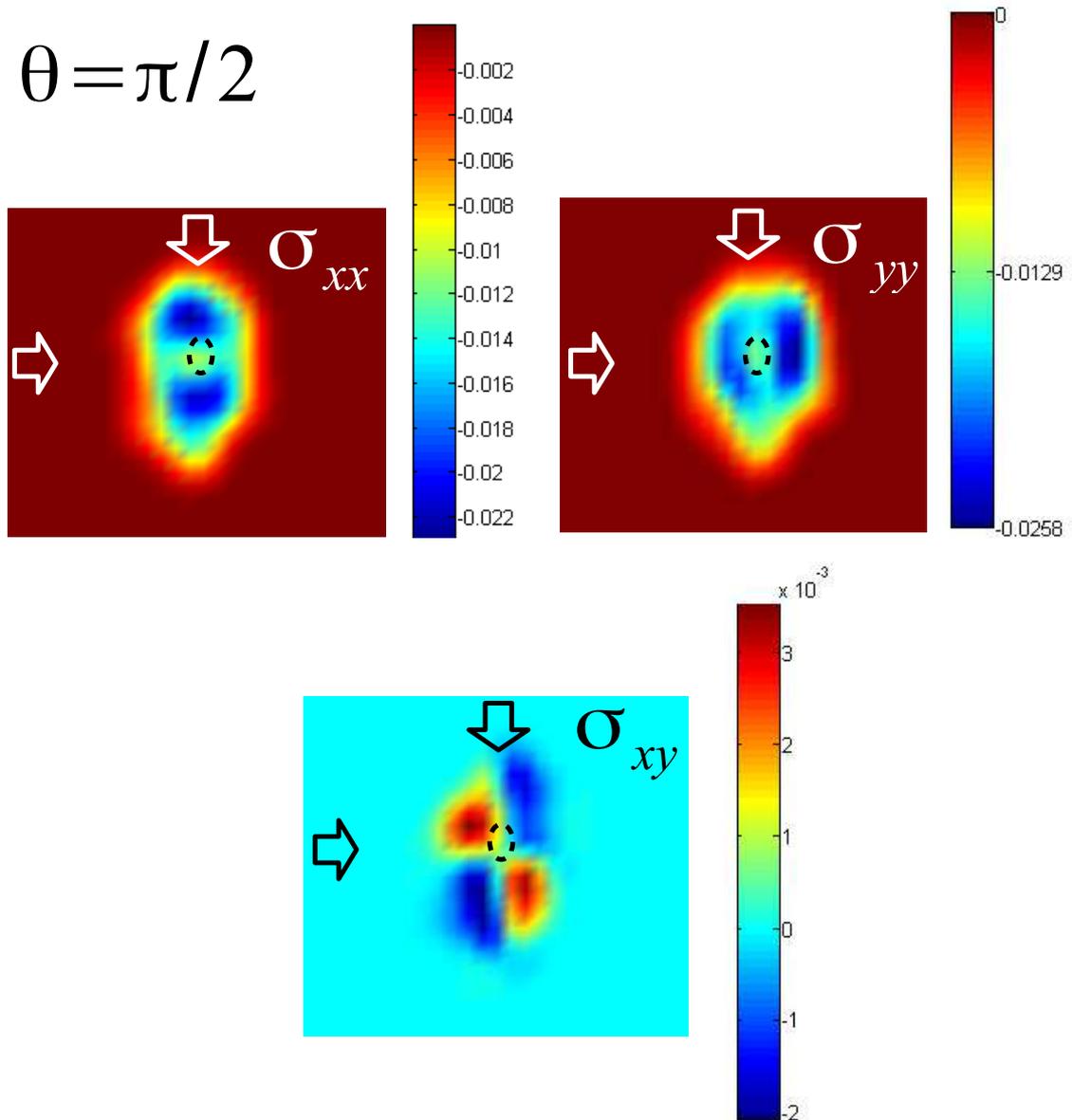


Figura 3.36: Coarse graining para los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} del promediado de rattler para $\theta = \pi/2$, con ventana de cálculo de 2d.

El perímetro es donde se presenta el cúmulo de esfuerzos, tanto de σ_{xx} , como de σ_{yy} y el núcleo del rattler es la parte negativa, presentando en promedio fuerzas en sentido contrario a la identificación de los radios (por definición del tensor de esfuerzos). Este promedio es similar a la figura 3.27 obtenida en el diseño de un rattler modelo, cuyos parámetros fueron precisamente los de mayor porcentaje de aparición en las cadenas de los rattler observados.

Capítulo 4

Conclusiones

Conclusiones generales

Se ha estudiado los efectos sobre la dilatancia, la fuerza de cizalle y la fricción efectiva debido a la geometría de los granos, en un sistema granular bidimensional bajo deformación por cizalle simple en el régimen cuasiestático. En el caso de un sistema granular monodisperso homogéneo, se han observado tres mecanismos de relajación planos deslizantes para los discos, rodadura y deslizamiento de pentágonos desalineados y pivotes rígidos en hexágonos. Estos mecanismos son los responsables por la magnitud de las fluctuaciones en la dilatancia y en la fuerza de cizalle, y son influenciados por la capacidad del medio granular para formar dominios cristalinos, capacidad que está determinada por la forma de los granos. Las caídas repentinas y sincronizadas observadas en la dilatancia y la fuerza de cizalle tienen diferentes orígenes; en discos es producto del deslizamiento de planos adyacentes, desalineamiento de pentágonos adyacentes y colapso de pivotes rígidos en hexágonos. Como era esperable, el coeficiente de fricción es independiente de la velocidad de deformación para el rango experimental utilizado. Por otro lado, la fricción efectiva tampoco depende del tamaño inicial de la celda. Sin embargo, para los hexágonos se ha observado un máximo para la fricción para un tamaño inicial del sistema $L_0/d \sim 6,5$. Este valor corresponde a la máxima longitud permitida para un pivote rígido estable, el cual es favorecido por la formación de dominios hexagonales con una sola orientación que conectan las fronteras del sistema. Para valores más pequeños de L_0/d la rugosidad del sistema interfiere fuertemente en la formación de los dominios hexagonales. Mientras que para valores mayores, las diferentes orientaciones de los dominios hexagonales impiden la formación de cadenas más largas. Este resultado es compatible con la longitud crítica obtenida por Guo mediante simulaciones numéricas utilizando partículas elipsoidales. Las grandes fluctuaciones observadas en la dilatancia y en la fuerza de cizalle son consecuencia de las cadenas que conectan las fronteras del sistema y que se comportan como pivotes rígidos. Por otro lado, las rotaciones no correlacionadas de los pentágonos, son responsables de la alta frecuencia de variación de la fuerza de cizalle.

En sistemas bidispersos compuestos por discos y hexágonos, se han observado tres regímenes para el coeficiente de fricción: valores similares a los de los discos para concentraciones pequeñas de hexágonos ($< 20\%$), una dependencia lineal con la concentración de hexágonos para concentraciones intermedias, y valores similares a los de los hexágonos para concentraciones altas de éstos ($> 80\%$). Este comportamiento es debido a la compatibilidad de las redes cristalinas que pueden formar tanto los discos como los hexágonos. En el caso de los sistemas compuestos

por pentágonos y hexágonos, la fricción efectiva es prácticamente independiente de la concentración de hexágonos en el sistema, para concentraciones bajo 60 %, principalmente, producto de la inestabilidad introducida por los pentágonos. Para concentraciones mayores, el efecto de los pentágonos es apantallado por los dominios hexagonales lo que incrementa la magnitud de la fricción rápidamente.

En resumen, sistemas monodispersos conformados por partículas poligonales en el régimen cuasi estático, la fricción efectiva y las fluctuaciones en la dilatancia y la fuerza de cizalle dependen de la capacidad de creación de dominios cristalinos del sistema. Esta capacidad está fuertemente influenciada por la forma de los granos. En sistema binarios, el comportamiento del sistema depende de compatibilidad de los granos y de su capacidad para distribuirse en redes cristalinas compatibles.

Se ha estudiado los efectos creados por un evento plástico localizado generado mediante la incorporación de una inclusión elíptica en un medio granular bidimensional. Los resultados han mostrado que el decaimiento del campo de desplazamiento promedio no presenta una dirección angular preferencial. Por otro lado, este decaimiento presenta una dependencia radial de $\sim 1/r^{0,6}$ en compresión y de $\sim 1/r^{1,2}$ en cizalle. Aún cuando las imágenes muestran una variación perceptible de la red de fuerzas de contacto, los campos obtenidos por coarse graining indican que, en términos macroscópicos, el sistema no presenta mayor variación respecto del estado de esfuerzos antes y después de la creación del evento plástico localizado.

En este estudio también se ha observado la aparición de rattlers, o zonas en las cuáles los granos no está sometidos a fuerza. El tamaño de estos rattlers es diferente dependiendo si el sistema granular está sometido a compresión o a cizalle, siendo mayor para este último. El número característico de elementos que conforman la frontera del rattler es típicamente de 20 granos. La excentricidad características de los rattlers varía entre 0,5 y 0,9 para compresión y cizalle, siendo más frecuente los valores de 0,7 en cizalle y 0,9 en compresión. Se determinó que los rattlers se asemejan a un polígono irregular con un número característico de segmentos o lados igual a 5 en cizalle y compresión. En el caso de cizalle se ha observado que la longitud del semi-eje mayor del rattler puede alcanzar veinte granos, la cual es casi el doble del típico obtenido para la compresión. Con el fin de determinar el efecto de la geometría y la distribución de fuerzas de compresión y de fricción sobre los campos de esfuerzo, se ha modelado el rattler mediante un polígono regular de cinco lados con longitud similar a la característica observada en los experi-

mentos. Mediante este modelo se ha determinado que la asimetría observada en el esfuerzo de cizalle σ_{xy} es debido a la fuerza fricción que actúa sobre cada grano de la cadena que conforma la frontera del rattler. Sin embargo, en el caso de compresión, al promediar las componentes del campo de esfuerzo sobre varias realizaciones, se observa que estas componentes se simetrizan asemejándose al caso de una cadena con fuerza distribuida a lo largo de si misma. Además, se ha observado que el número de granos contenidos en la frontera del rattler sigue una relación lineal con el número de granos en el interior del mismo.

Bibliografía

- [1] R. M. Nedderman, *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press, New York, 1992)
- [2] M. Oda and K. Iwashita (Eds.), *Mechanics of Granular Materials: an Introduction* (Balkema, Rotterdam, 1999)
- [3] J. Duran, *Sands, Powders and Grains* (Springer, New York, 2000)
- [4] S. J. Anthony, W. Hoyle and Y. Ding (Eds.), *Granular Materials Fundamentals and Applications* Chapter 6, pp. 157 - 183, The Royal Society of Chemistry, (2004)
- [5] O. Reynolds, *On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles in Contact, with Experimental illustrations*, Phil. Mag., S. 5., Vol. **20**, N° 127. (1885)
- [6] S. Nemat-Nasser, *On Behavior of Granular Materials in Simple Shear*, Soils and Foundations, Vol. **20**, N. 3, (1980)
- [7] D. M. Wood, *Soil Behavior and Critical States Soil Mechanics*, pp. 226 - 255, Cambridge University Press, (1990)
- [8] D. Taylor, *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1948)
- [9] F. Spaepen, *A Microscopic Mechanism for Steady State Inhomogeneous Flow in Metallic Glasses*, Acta Metallurgica., Vol **25**, pp 407-415, (1977)
- [10] A. S. Argon, *Plastic Deformation in Metallic Glasses*, Acta Metallurgica., Vol **27**, pp 47-58, (1978)
- [11] M. L. Falk and J. S. Langer, *Dynamics of Viscoplastic Deformation in Amorphous Solids*, Phys. Rev. E., Vol. **57**, 7192, (1998)

- [12] J. Christoffersen, M. Mehrabadi and S. Nemat-Nasser, *A Micromechanical Description of Granular Material Behavior*, J. App. Mech., **48**, 339-344 (1981)
- [13] A. Drescher and G. De Josselin de Jong, *Photoelastic Verification of a Mechanical Model for the Flow of a Granular Material*, J. Mech. Phys. Solids, Kingston, **20**, 337-351, (1972)
- [14] M. Lätzel, S. Luding, and H. Herrmann, *Macroscopic Material Properties from quasi-static, Microscopic Simulations of a two-dimensional Shear-Cell*, J. Granular Matter, **2(3)**, (2000)
- [15] M. M. Mehrabadi, S. Nemat-Nasser and M. Oda, *On Statistical Description of Stress and Fabric in Granular Materials*, J. App. Mech., Vol **6**, pp. 95-108 (1982)
- [16] F. Radjai, J.-Y. Delenne, E. Azéma and S. Roux, *Fabric Evolution and Accessible Geometrical States in Granular Materials*, Granular Matter., Vol **14**, 259 (2012)
- [17] K. Kanatani, *Distribution of Directional data and Fabric Tensor*, Int. J. Engng Sci., Vol **22**, N°2 pp. 149-164, (1984)
- [18] M. Satake, *Constitution of Mechanics of Granular Materials Through Graph Representation*, Theoretical and Applied Mechanics, University Tokyo Press, Vol **26**, pp. 257-266 (2012)
- [19] M. Oda *Fabric Tensor for Discontinuous Geological Materials*, Soils and Foundations, Vol **22**, 4 (1982)
- [20] M. Oda, S. Nemat-Nasser and M. M. Mehrabadi, *A Statistical Study Of Fabric in Random Assembly of Spherical Granules*, Earthquake Research and Engineering Laboratory, Technical Report. Dept. of Civil Eng. Northwestern University, Evanston, Ill. N° **804**, - 29 (1980)
- [21] A. E. Scheidegger *On the Statistics of the Orientation of Bedding Planes, Grain Axes, and Similar Sedimentological Data*, U.S. Geol. Survey Prof. Paper, **525-c**, pp. 164 (1965)
- [22] X. Li, H. S. Yu, X. S. Li *Macro-micro Relations in Granular Mechanics*, Int. J. of Sol. and Struct., Vol **46**, 4331 (2009)
- [23] P. Guo *Critical Length of Force Chains and Shear Band Thickness in Dense Granular Materials*, Acta Geotechnica, **7**, pp. 41 (2012)
- [24] R. Bhowmick, R. Raghavan, K. Chattopadhyay and U. Ramamurty, *Plastic Flow Softening in a Bulk Metallic Glass*, Acta Materialia Inc., Vol. **54**, pp. 4221-4228, (2006)

- [25] V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Annal. Sci. de l'Ecole Norm. Supér., Vol. **24**, 401-517, (1907)
- [26] P. Chaudhari and P. J. Steinhardt, *Displacement vector and energy of a screw dislocation in a Lennard-Jones amorphous solid* Philos. Mag. A **46** (1):25-30., (1982)
- [27] L. T. Shi and P. Chaudhari *Computer Simulation of Dislocationlike Motion in a Lennard-Jones Amorphous Solid*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1581., (1983)
- [28] A. Lemaître *Origin of a Repose Angle: Kinetics of Rearrangement for Granular Materials*, Phys Rev. L **89**: 064303., (2002)
- [29] C. Maloney and A. Lemaître *Amorphous systems in athermal, quasistatic shear*, Phys Rev. E **74**: 016118., (2006)
- [30] J.D. Eshelby *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*, Proc. R. Soc. A **241** (1226): 376–396., (1957)
- [31] J.D. Eshelby *The elastic field outside an ellipsoidal inclusion*, Proc. R. Soc. A **252** (1271): 561–569., (1959)
- [32] G. Picard, A. Adjari, F. Lequeux, L. Bocquet, Eur. Phys. J. E **15**, 371–381 (2004)
- [33] K. Ramesh *Photoelasticity*, Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, Sharpe (Ed.), Springer, **25**, pp. 701 (2008)
- [34] J. Zhang, R. P. Behringer and I. Goldhirsch *Coarse-Graining of a Physical Granular System*, Prog. of Theoretical Physics Supplement, **N°184** (2010)
- [35] I. Goldhirsch and C. Goldenberg *On the Microscopic Foundations of Elasticity*, Eur. Phys. J. E., **N°9** 245. (2002)
- [36] L. Coronel and L. Vasquez *Estudio y Diseño para la Iluminación de la Cancha y Graderías del Estadio Municipal de la Ciudad de Azogues*, Ingeniería Eléctrica/Tesis de Pregrado (2009) <http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/74>
- [37] P. V. C. Hough *Method and Means for Recognizing Complex Patterns*, U. S. Patent, **3,069,654**, (1962)
- [38] R. Duda and P. Hart *Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures*, Comm. ACM, **15**, pp. 11 (1972)

- [39] C. Kimme, D. H. Ballard and J. Sklansky *Finding Circles by an Array of Accumulators*, *Communs Ass. comput. Mach.* **18**, 120-122 (1975)
- [40] D. H. Ballard *Generalizing the Hough Transform to Detect Arbitrary Shapes*, *Pattern Recognition*, **13**, N°2, pp. 111 (1981)
- [41] J. H. Michell *Some Elementary Distributions of Stress in Three Dimensions* *Proc. London Math. Soc.* s1-32 (1): 23-61. (1900)
- [42] J. A. Nelder and R. Mead. *A simplex method for function minimization*, *The Computer Journal* **7** (4): 308–313. (1965)

Apéndice A

Transformada de Hough

La transformada de Hough es una patente [37] desarrollada en 1962 para el reconocimiento de patrones complejos a partir de imágenes en escala de grises, por medio de transformar puntos en rectas. La optimización se consigue empleando la transformada posterior a una detección de bordes, el objetivo de esto, es eliminar puntos que interfieran con los patrones. Este reconocimiento a partir de rectas concurrentes (intercepto de pendientes), también se ha llevado al *espacio de parámetros* (representación paramétrica de las líneas en el plano), en el caso de detección de elipses, círculos [38], un trabajo posterior de D. Ballard presentó la transformada de Hough generalizada (1981) el cual permite detectar geometrías arbitrarias complejas [40] (ver figura A.1).

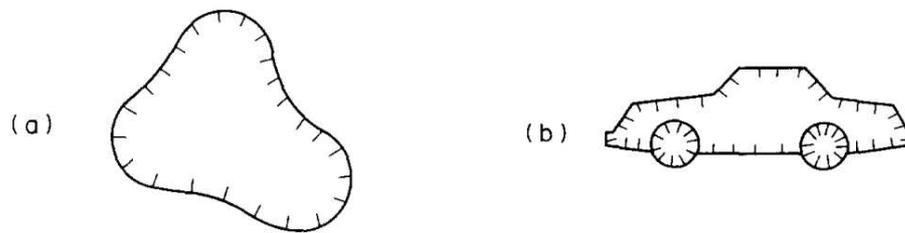


Figura A.1: Tipos de geometrías detectadas con la transformada de Hough generalizada [40]

La transformada de Hough generalizada consiste en la parametrización de una línea recta, es decir, se describe por medio de dos parámetros siendo estos la distancia (ρ) de la recta al origen, y el ángulo respecto a la horizontal (θ), que es normal a la línea recta. Se realiza este procedimiento para todos los puntos en la imagen, n rectas por cada punto, con n ángulos con respecto a la horizontal [38], ver figura A.2.

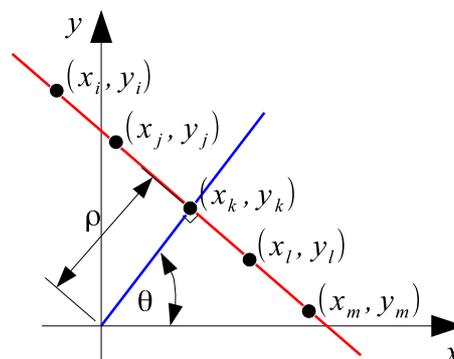


Figura A.2: Parametrización de la línea recta en la transformada de Hough. [38]

Si se observase en un gráfico de distancias del origen a cada recta normal con respecto

al ángulo, se observa un punto *acumulador* donde convergen estas curvas, a criterio de la transformada de Hough ese punto de acumulación corresponde a la distancia y ángulo, de la recta que une los puntos vecinos.

En el caso particular de detección de círculos, cada punto arbitrario de la figura (x_i, y_i) se transforma al espacio de parámetros (abr) que queda definido según la ecuación para la figura plana de un círculo [38].

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2 \quad (\text{A.1})$$

Cada punto de la figura debe ser transformado en un cono recto, entonces la intersección debido a los conos de varios puntos arroja el acumulador en un punto (a_0, b_0, r_0) común [38, 39, 40].

Entonces, el algoritmo que encuentra y detecta los círculos necesita de tres parámetros de ajuste. Con el uso de la ecuación A.1 y la información direccional los parámetros libres se pueden reducir solo a uno. Esto se debe a que el centro del círculo en el punto (x, y) debe tener r unidades a lo largo de la dirección del gradiente [40], esto se puede expresar como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, a) = 0 \quad (\text{A.2})$$

donde $f(x, a) = 0$ es una curva analítica, x es un punto de la imagen y a es un parámetro vector.

Para cada imagen de la celda experimental con granos fotoelásticos, se tomo una imagen del sistema solo con luz superior, esto permitió observar de mejor manera el borde de los granos.

Al aplicar un primer detector de bordes, y utilizar la transformada de Hough en todas las partículas la imagen del acumulador reveló los granos encontrados con sus centros respectivos, ver figura A.3 con acumulador de Hough.

Con la ubicación de los centros para cada grano en la celda en un estado inicial y final, fue posible realizar el tracking de partículas y obtener el campo de desplazamientos. En cada centro de grano del estado inicial, se genero un círculo virtual del tamaño de un grano entonces se busco en la imagen del estado final, el centro de grano que estaba al interior de esta región. Sabiendo experimentalmente que el desplazamiento de los granos no fue mas de un grano, este análisis permitió trazar para cada grano su desplazamiento.

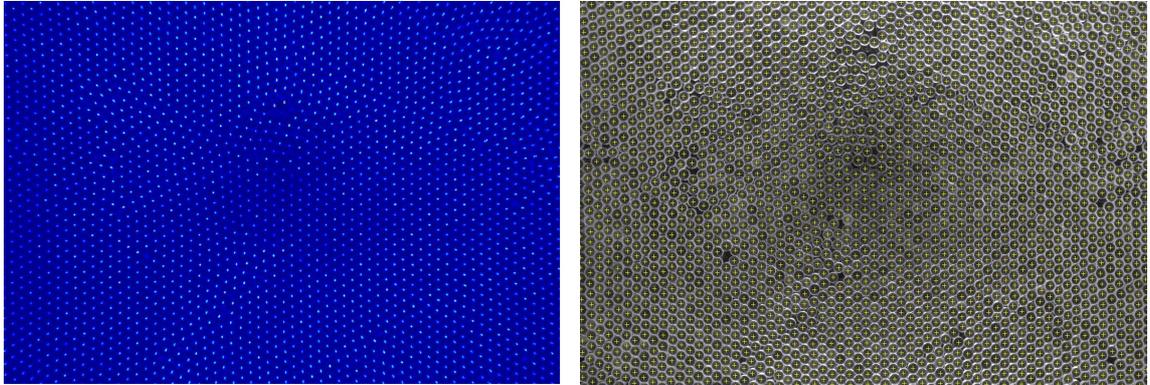


Figura A.3: Imagen de la derecha muestra acumulador en la detección de centros de discos, imagen de la izquierda muestra centros detectados.

Algunas características que se pueden resumir del uso de la Transformada de Hough en Matlab, para la detección de discos es:

Ventajas:

- Robustez en la detección
- Robustez al ruido de la imagen

Desventajas:

- Costo computacional
- Detección de falsos positivos
- Luz homogénea

Apéndice B

Método de inversión fotoelástico

En la caracterización de eventos locales, mencionada en el capítulo 3, se ha utilizado la información de las fuerzas de contacto entre las partículas. Estas fuerzas han sido determinadas a partir de los patrones de fotoelasticidad de cada partícula mediante el método de inversión fotoelástico. A continuación describiremos el método de inversión fotoelástico.

B.0.0.1. Fotoelasticidad.

La fotoelasticidad es una técnica no destructiva utilizada en la determinación de la información de esfuerzo o deformación, la cual no requiere contacto directo con la muestra, como por ejemplo un extensómetro. Para tal efecto, la muestra es iluminada con luz polarizada analizándose la luz emergente, la cual puede ser reflejada o transmitida, ver figura B.1.

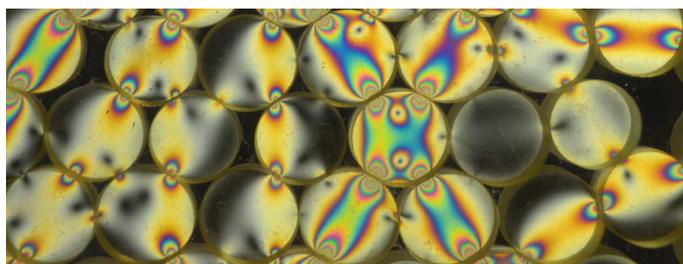


Figura B.1: Fotografía de patrones fotoelásticos en discos sometidos a cargas.

La formación de los patrones típicos de fotoelasticidad (franjas de colores) es un efecto debido a la birrefringencia de los materiales utilizados en los moldes o recubrimientos. En general, los medios cristalinos son ópticamente anisótropos dando lugar a la birrefringencia o doble refracción. Esto es, un haz de luz que incida sobre este tipo de material dará lugar a dos rayos refractados; un rayo ordinario y otro extraordinario. Ambos rayos están polarizados y sus planos de polarización son perpendiculares entre sí. El término extraordinario se refiere al hecho que, bajo ciertas circunstancias apropiadas, este rayo violaría la Ley de Snell. En general, el rayo extraordinario no necesita estar confinado al plano de incidencia. Además, su velocidad cambia continuamente con el ángulo de incidencia. Los índices de refracción asociados son iguales sólo en la dirección de un eje óptico. A diferencia de un cristal anisótropo, dentro del cual la luz que viaja siempre está polarizada, un material isotrópico es capaz de transmitir luz no polarizada. Debido a los dos índices de refracción existentes en los materiales anisótropos, la luz viaja con distintas velocidades en su interior, por lo que se les puede considerar como retardadores. En la fotoelasticidad, el uso de láminas retardadoras es de gran importancia. En general, en una lámina retardadora los planos de incidencia de la luz están orientados de tal manera que los rayos ordi-

nario y extraordinario viajan en la misma dirección pero con diferentes velocidades. La diferencia de fase neta entre estos dos rayos se puede escribir de la siguiente forma:

$$\delta = 2\pi f \left(\frac{h}{v_1} - \frac{h}{v_2} \right) = 2\pi h \frac{c}{\lambda} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_1 - n_2), \quad (\text{B.1})$$

donde, h es el espesor de la lámina, f la frecuencia de la luz incidente v_1 y v_2 las velocidades de propagación de la luz en el interior de la lámina, λ la longitud de onda de la luz incidente y n_1 y n_2 , los índices de refracción ordinario y extraordinario. Si la luz que incide sobre la lámina retardadora está polarizada, entonces la luz emergente estará, en general, elípticamente polarizada. Por otro lado, si el espesor h es un múltiplo de la longitud de onda, entonces, se pueden obtener láminas de cuarto de onda $\lambda/4$, $\delta = \pi/2$, de media onda $\lambda/2$, $\delta = \pi$, o de onda completa λ , $\delta = 2\pi$, la que deja inalterada la onda incidente. En nuestro caso, las partículas modelo corresponden a cilindros de caras planas paralelas, por lo que pueden ser considerados como láminas retardadoras, obtenidos cortando una lámina de material polimérico, PSM-4, fabricado por Vishay Instruments. La luz incidente por una de estas caras y es analizada en la cara opuesta. Por consiguiente, nuestras partículas pueden ser consideradas como láminas retardadoras y, en consecuencia, el desfase entre el rayo ordinario y extraordinario puede ser calculado con la ecuación B.1. Como se ha mencionado anteriormente, las fuerzas de contacto entre partículas han sido calculadas a partir de patrones de fotoelasticidad obtenidos mediante fotoelasticidad por transmisión. En este modo, se hace incidir un haz de luz lineal o circularmente polarizada sobre un modelo transparente con el fin de obtener la información de esfuerzo. El equipo básico utilizado se denomina polariscopio (plano o circular). Ciertos materiales poliméricos, como el PSM-4, se comportan como un material óptico isótropo en condiciones normales, pero que se transforman en materiales birrefringentes al ser sometidos a esfuerzos. Este efecto persiste mientras la condición de esfuerzo se mantenga. Una vez que el esfuerzo es eliminado el material vuelve a su condición normal después de un cierto intervalo de tiempo, el cual puede llegar a ser muy corto dependiendo del material y las condiciones de esfuerzo aplicadas. Entonces, el modelo de polímero se comporta como un retardador, en el que el retardo característico difiere en cada punto y depende del campo de esfuerzo inducido en el material. Si la luz incide perpendicularmente sobre la partícula, entonces, los ejes de los esfuerzos principales actúan como ejes de polarización en el punto de interés. De esta forma, los rayos ordinario y extraordinario, con ejes de polarización mutuamente perpendiculares, viajan en la misma dirección pero con velocidades diferentes, generándose un retardo entre ambas componentes al recomponerse cuando emergen de la muestra, contribuyendo a la formación de las franjas

características de los patrones de fotoelasticidad, ver figura B.1.

La conexión entre la información de los esfuerzos principales y las franjas de fotoelasticidad está dada por la Ley del Esfuerzo-Óptico. Esta ley conecta la información del patrón de fotoelasticidad a través del desfase δ con la diferencia entre los esfuerzos principales en cada punto de la muestra $\sigma_1 - \sigma_2$.

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda}(n_1 - n_2) = \frac{2\pi h C}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (\text{B.2})$$

donde C es el coeficiente de esfuerzo óptico relativo, que normalmente se supone constante para el material birrefringente. Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente que este coeficiente depende de la longitud de la onda incidente. En términos del orden de las franjas N , la ecuación B.2 se escribe como:

$$N = \frac{\delta}{2\pi} = h \frac{C}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{B.3})$$

o, equivalentemente,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h} \quad (\text{B.4})$$

donde $f_\sigma = \lambda/C$, es el llamado valor de franja de esfuerzo del material y cuyas unidades son N/mm/franja. Esta ecuación es la que se conoce como Ley del esfuerzo-óptico y que relaciona la información del esfuerzo con la medición óptica. En los materiales fotoelásticos comerciales el valor de C es incluido en la información del fabricante. Conocidos el valor de franja de esfuerzo del material y el orden de franja es posible determinar la diferencia de los esfuerzos principales. La relación entre estas dos cantidades es, en general, lineal. Sin embargo, esta relación deja de ser válida para valores de esfuerzo altos, ya que la dependencia entre ambas cantidades deja de ser lineal. La determinación de las franjas características de un patrón de fotoelasticidad son obtenidas a través de un instrumento llamado polariscopio. El caso utilizado para el análisis de la reconstrucción de los patrones de fotoelasticidad, fue el polariscopio circular de transmisión y de campo oscuro. A continuación se describe este tipo de polariscopio.

B.0.0.2. Polariscopio circular de transmisión y de campo oscuro.

En general, un polariscopio de transmisión es un instrumento que permite enviar luz polarizada (lineal o elípticamente polarizada) en forma perpendicular a una muestra y analizar la luz transmitida. El más simple de este tipo de analizadores es el polariscopio plano, el cual envía una luz linealmente polarizada sobre la muestra, la que analizada a través de un polaroide, cuyo eje de

transmisión está orientado perpendicular a la dirección de polarización de la onda incidente. En este caso, se tiene un polariscopio de campo oscuro, ya que en ausencia de muestra anisótropa no hay luz transmitida a través del analizador, ver esquema en B.2.

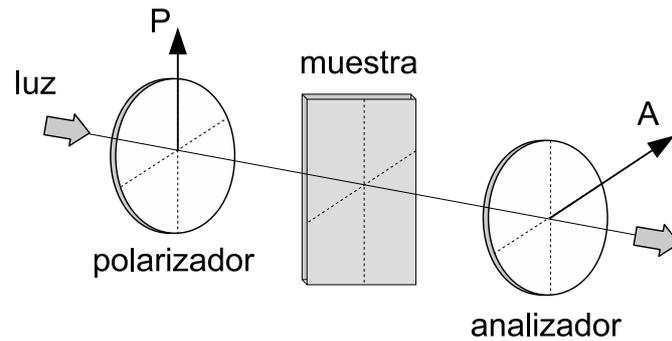


Figura B.2: Esquema Polarizador Plano, compuesto de **P** polarizador, muestra birrefringente y **A** analizador.

En este caso, la intensidad de luz transmitida viene dada por:

$$I(\delta, \theta) = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\theta, \quad (\text{B.5})$$

donde, I_0 es la intensidad de la luz incidente, δ es la magnitud de la diferencia de los esfuerzos principales y θ su orientación. De la ecuación B.5 se observa que la transmisión de la luz se extinguirá cuando se anule alguna de las funciones $\text{seno}(x)$, el primer término del lado derecho se anula cuando $\sin \frac{\delta}{2} = 0$, entonces implica que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} &= N\pi \\ \therefore \frac{\delta}{2\pi} &= N \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

con $N = 0, 1, 2, \dots$, que corresponde al orden de franja en el material, da origen a las *Isocromáticas*, mientras que el segundo término se anula cuando $\sin 2\theta = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 2\theta &= n\pi \\ \therefore \theta &= n\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, esto indica que se formaran zonas oscuras de la muestra. A estas regiones o franjas oscuras, se les llama *Isoclinas*.

Las isoclinas representan las localizaciones en donde la orientación del esfuerzo principal coincide con la orientación del conjunto formado por el polaroide y el analizador. Por otra parte, las isocromáticas representan las zonas en donde la diferencia de los esfuerzos principales permanece constante. En general, en un patrón de fotoelasticidad contiene tanto las isocromáticas como las isoclinas, las que se muestran como zonas oscuras superpuestas sobre las isocromáticas. Usualmente, las isoclinas representan un problema al momento de interpretar los patrones de fotoelasticidad. Este problema puede ser eliminado utilizando un *polariscopio circular* de campo oscuro. Este polariscopio consiste de dos pares, cada uno compuesto por: un polaroide más una lámina retardadora de cuarto de onda. Los ejes de transmisión de los polaroides se ubican en direcciones perpendiculares entre sí y el eje rápido de las láminas retardadoras se orientan a 45 grados respecto de los ejes de los polaroides. Estos ejes también se orientan en direcciones perpendiculares, ver figura B.3.

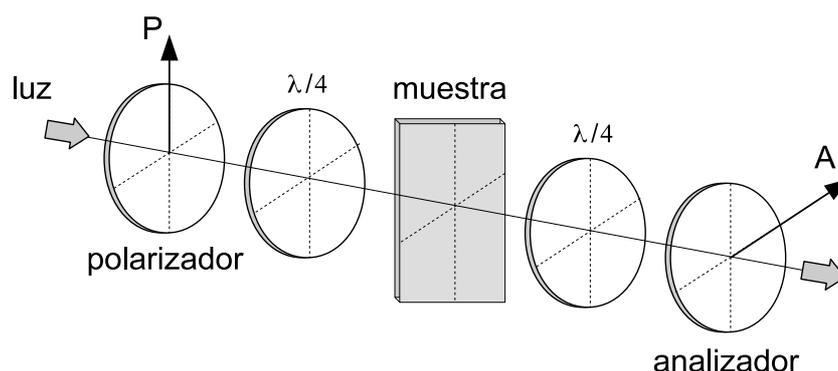


Figura B.3: Polarizador Circular, compuesto de **P** polarizador, dos láminas retardadoras de $\lambda/4$, muestra birrefringente y **A** analizador.

Esta configuración permite eliminar las isoclinas en el patrón de fotoelasticidad conservando las isocromáticas. En consecuencia, se puede obtener la información respecto de la magnitud de la diferencia de los esfuerzos principales. La intensidad de luz resultante en el polariscopio circular de campo oscuro, se escribe como:

$$I(\delta) = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (\text{B.8})$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente y δ es el cambio de fase introducido por estado de esfuerzos al que está sometido la muestra.

B.0.0.3. Fuerzas de contacto

La determinación de las fuerzas de contacto está basada en un proceso de ajuste no lineal del patrón de fotoelasticidad obtenido con el polariscopio circular de campo oscuro. Este patrón es comparado con el patrón calculado a partir de las ecuaciones de elasticidad para un disco sometido a una serie de cargas puntuales sobre su superficie [41]. El esfuerzo radial se escribe:

$$\sigma_{rr} = \frac{2F \cos \theta}{\pi L r} \quad (\text{B.9})$$

donde F es la magnitud de la fuerza aplicada sobre el disco y L es el largo del disco. Este tensor es rotado para obtener sus componentes respecto del centro del disco.

$$\sigma_c = M^T \sigma M \quad (\text{B.10})$$

donde,

$$M = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La diferencia de los esfuerzos principales, se escribe como:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \tau_{max} = \sqrt{\frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2}{4} + \tau^2} \quad (\text{B.12})$$

donde σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y τ son las componentes del tensor rotado σ_c . Reemplazando la diferencia de los esfuerzos principales en la expresión para el desfase δ y luego en la fórmula para la intensidad B.8, se obtiene el patrón de fotoelasticidad calculado. Este patrón, se compara con el patrón fotoelástico registrado en las imágenes y mediante un proceso iterativo se ajustan los valores de las fuerzas, de forma de minimizar la diferencia entre los patrones calculado y medido, ver figura B.4. Este proceso se realiza sobre cada partícula presente en el medio granular. El algoritmo utilizado en el ajuste de los patrones de fotoelasticidad es el algoritmo de búsqueda simplex directa de Nelder-Mead. Este algoritmo está basado en la minimización de una función objetivo en un espacio multidimensional [42], representado en nuestro caso, por las fuerzas que actúan sobre un grano.

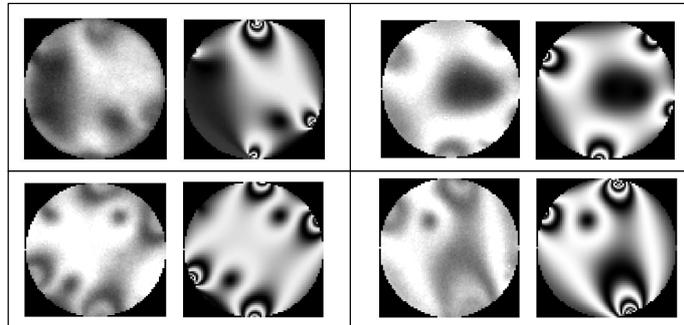


Figura B.4: En la imagen se muestran cuatro casos de fotografías y patrón calculado respectivamente.

Apéndice C

Publicaciones

Effects of grain shape on the response of a two-dimensional granular material under constant shear rate.

Effects of grain shape on the response of a two-dimensional granular material under constant shear rate

Nelson Sepúlveda, Francisco Melo, and Francisco Vivanco

*Laboratorio de Física no Lineal, Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile,
Av. Ecuador 3493, Casilla 307 correo 2, Santiago, Chile*

(Received 20 May 2014; revised manuscript received 21 September 2014; published 7 November 2014)

We present a study on the effects of particle shape (disks, hexagons, and pentagons) on the macroscopic coefficient of friction of a two-dimensional, monodisperse, single-shaped, granular system, subjected to shear. We found that the mechanism of stress relaxation in disks is based on the sliding of adjacent planes parallel to the applied deformation direction. In hexagons, stress is relaxed through the creation of rigid pivots, which require hexagonal domains to nucleate and are responsible for the large fluctuations in the dilatancy and shear force. In pentagons the stress relaxation mechanism is through the rotation of individual pentagons, which is a consequence of their permanent misalignment, and are responsible for the small but relatively rapid fluctuations in the shear force. We observed that the friction coefficient is larger for polygonal particles than for the rounded ones. A maximum in the friction coefficient is observed in hexagon granulates with an initial width around 6.5 grains caused by the increased frequency in nucleation of rigid pivots. In mixtures of disks and hexagons we observed three different friction coefficient behaviors, which depended on the relative concentration of hexagons; in low concentrations of hexagons, <20%, the friction coefficient corresponds to that obtained in solely disks, at intermediate concentrations, <80%, the coefficient varies linearly with concentration, and at larger concentrations the friction coefficient corresponds to the values obtained for solely hexagons. On the contrary, mixtures of pentagons and hexagons showed two regimes; a low constant friction regime at concentrations lower than 60%, and an increased in friction observed with higher concentrations of hexagons.

DOI: [10.1103/PhysRevE.90.052202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.052202)

PACS number(s): 45.70.Cc, 81.05.Rm

I. INTRODUCTION

The wide presence of granular materials in nature and industries (e.g., mining, agriculture, and pharmaceutical) has lead to intensive research on their properties in various fields of science [1–5], and engineering [6–8]. Recent numerical simulations referred to protection of coastal shores and banks of waterways [9] and production of parts using additive manufacturing [10] have shown the importance of the shape of grains at macroscopic and microscopic scales. In most situations, the granular systems are considered to be composed of discrete nondeformable particles or grains interacting through contact forces and friction. The mobility of these grains occurs via sliding and rolling and, in general, induce plastic deformations, which are facilitated by the strong contact forces. Theoretical models and experimental results have shown that the friction due to the sliding and rolling processes plays an important role in flow initiation and failure of granular materials (such as the stick-slip instability) [11–15]. One of the characteristic modes of failure is the stick-slip instability. As proposed by Anthony and Marone [16], this instability may be associated with the failure of the force chains, which are located inside the shear bands, and support high levels of stress. Mair [17] showed that the stick-slip instability depends on the distribution of grain size. According to Mair, in wider distributions of sizes, the stress is sustained by a large network of contacts opposed to localized chains. This allows for localized rearrangement of the grains perturbing the contacts network, which significantly reduces or suppresses the stick-slip instability. Conversely, within narrow grain distributions, their rearrangement considerably modifies the surrounding contacts network, collapsing the force chains and inducing the stick-slip instability. The underlying mechanism

in the force chain's collapse is a complex process that is correlated to the extent of rolling and sliding activity of the grains. As pointed out by Anthony and Marone [16] rolling and sliding activity is influenced by the shape of the grains, which affects their alignment, interlocking, and surface friction. They found that the frictional bulk resistance and the inhibition of rolling are increased with the percentage of angular particles, because the angularity increases the jam and lock of the neighboring grains. Additionally, force chains are considered to be the driving mechanism for the transition between jamming and unjamming states [18]. Studies have shown the importance of these force chains as a controlling mechanism of velocity fluctuations in dense granular flow [18–22]. In a recent numerical study, Azéma *et al.* [23] showed that a granulate consisting of polydisperse regular pentagons exhibits a high force anisotropy that enhances the shear strength comparing to the polydisperse rounded grains. This result might be a consequence of the combined effect of the grain's geometry and the polydispersity.

Here we investigate the response to shear of a two-dimensional granular system composed of regular and monodisperse polygonal grains. This setup prevents the combined effects of polydispersity and grain's geometry. In configurations where the system size is several particle diameters, we present evidence indicating that the fluctuations in the dilatancy and the shear force are related with stick-slip instability. Fluctuations in the shear force are due to an identified decrease in friction coefficient caused by structural instability, and not by speed dependence. The characteristic signature of these fluctuations is determined by the crystallization capability of the granulate, which in turn is strongly dependent on the grain's shape. Macroscopic

behavior is characterized through the friction coefficient, determined by the ratio between the average shear force and the average normal force, which represents the apparent externally mobilized friction parallel to the applied deformation [24] or the effective friction [25]. There are two factors that contribute to this friction: a solid friction contribution (macroscopic) due to the shear and normal stresses applied externally, and a geometric contribution (microscopic) due to the local deformation (dilation and compression) induced by the relative motion of the grains. Taylor [26] proposed a simple model that connects these terms with the effective friction. Assuming that all the external work is dissipated by friction and controlled by the normal load N and the frictional coefficient μ , Taylor obtained the following relation

$$\frac{\tau}{N} \approx \phi_s + \frac{\delta D}{\delta x}, \quad (1)$$

where $\tau/N = \mu$ is the effective friction, ϕ_s is the solid friction and $\delta D/\delta x$ is the variation of the dilatancy (dilatancy angle). We applied this model to study the effects of nearly instantaneous compaction on the instantaneous effective friction. By extending the concept of dilatancy angle to intermediate spatial scale, we show that negative dilatancy angles are unstable and produce sudden system collapses, small compression angles are totally suppressed, whereas positive dilatancy angles vary continuously. We investigate the effects of the shape of particles on these results by considering monodisperse single-shaped systems of hexagons, disks, and pentagons. Finally, we explore the influence of the compatibility of the grains, based on their crystallization capability, in the binary mixtures: disks-hexagons and pentagons-hexagons.

II. EXPERIMENTAL DETAILS

The experimental system consists of a two-dimensional shear cell (Jenicke's type), which allows for the measurement of dilatancy and shear force simultaneously. The granulate is arranged between two glass plates, and it is horizontally confined by two metal plates located above and below, and contained by two pivoting side walls made of nickel-chromium stainless steel rods, as shown in Fig. 1. Air bearings (1), (2), and (3) are used to reduce the friction and keep the top plate aligned. Each connecting rod is connected to a Teflon disk (5) and passes through a hole in another Teflon disk (4). Each connecting rod passes through a hole in a Teflon disk (4) while remaining fixed to another Teflon disk (5). Both disks freely rotate around their axis of symmetry. The bottom plate is made of two parts connected at either end by two steel sheets arranged in a parallel formation (6). The bottom plate is placed on a low friction rail and is moved through a worm drive (7) connected to a stepping motor. The dimensions of the cell are: width $H \sim 50$ cm and L_0 , which varies between 4 cm and 6 cm depending on the number of grains placed into the cell. A constant normal force per unit of length, ranging from 0.13 N/cm to 0.25 N/cm, is exerted on the grains by the top plate. The granulate is sheared by moving the bottom plate at constant speed v_0 . Half cylinders of different radius are distributed randomly on one of the sides of both plates to avoid the creation of a single crystal. The dilatancy is determined by measuring the changes in relative position of the top plate using an inductive position sensor

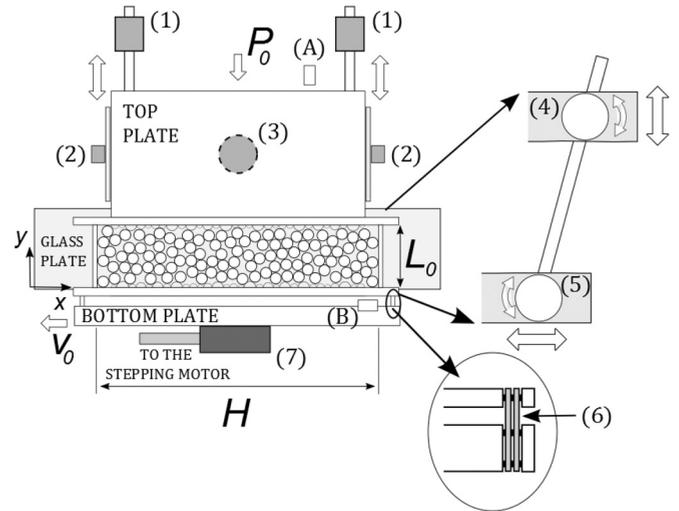


FIG. 1. Scheme of the shear cell. The grains are located between the two parallel plates and two rotating side walls. A constant pressure P_0 is applied on the granulate through the top plate, while it is sheared by moving the bottom plate at constant speed v_0 . Gravity is oriented in $-z$ direction. The cell allows for the measurement of the dilatancy and the shear force simultaneously. See text for details.

(SCHAEVITZ ENG S/N 8038), with sensitivity of $\sim 20 \mu\text{m}$ (A). The force τ exerted by the granulate, in opposition to the bottom plate motion, is determined by registering the deflection of parallel thin steel sheets by means of a capacitive proximity sensor (B). After a calibration, a sensitivity of ~ 1 mN was obtained. The signal from both sensors were digitized at sampling rate of 10000 points per second. The grains were obtained by molding an epoxy resin (RESILAM-95) and their dimensions are such that they fit in a cylinder of diameter 0.8 cm and height 0.9 cm. According to the shape, the grains selected were: pentagons, hexagons, and disks. Between these particles, the hexagonal are the most likely to create crystalline lattices, followed by the disks and finally by the pentagonal, which are virtually unable to form crystalline lattices. The granulate is illuminated homogeneously from below and pictures of its spatial distribution are registered every second using a high-resolution camera (Prosilica GX6600 with a resolution of 29 Mpx from Allied Vision Technologies) located above the granulate. The cell is initially prepared with the side walls oriented perpendicular to the plates. The grains are placed in a random arrangement, as outlined in Fig. 1. The granulate is sheared by moving the bottom plate towards left at constant speed until the side walls form an angle of $\sim 45^\circ$ with respect to the plates. Then, the bottom plate is moved back to its initial position at the same speed. This process defines a cycle with two limiting states; nondeformed and deformed, with angle of inclinations at 0° and 45° , respectively. Each experiment involves several cycles N_c , typically $N_c \sim 30$.

The range of variation for the velocity of deformation is $0.01 \lesssim v \lesssim 0.5$ cm/s, and for the initial width is $5 \lesssim L_0/d \lesssim 8$, where $d \sim 0.8$ cm is the characteristic size of the particles. The shear rate $\dot{\gamma} = v_0/L_0$ was varied from 1.5×10^{-3} to $1.3 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ and the maximum shear was $\gamma_{\text{max}} = \Delta x_{\text{max}}/L_0 \sim 1.2$. The normal constraint force remains constant at $N \sim 7$ N. According to these values and considering

the particle density, $\rho \sim 0.0012 \text{ Kg/cm}^3$, the range for the inertial number, $I = \dot{\gamma}d(P/\rho)^{-1/2} = vdL_0^{-1}(P/\rho)^{-1/2}$, is $9.8 \times 10^{-6} \lesssim I \lesssim 7.8 \times 10^{-4}$, which corresponds to the quasistatic regime. This ensures that inertial effects are negligible. Similarly, considering the air as the surrounding fluid, $\mu_f \sim 1.9 \times 10^{-5} \text{ Kg/m s}$, a shear rate $\dot{\gamma} \sim 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ and a confining pressure $P \sim 1.75 \text{ kPa}$, we obtain a viscous number (ratio of viscous time to flow time) $I_v \sim 2.3 \times 10^{-11}$ showing that viscous effects are not relevant.

III. RESULTS

A. Monodisperse systems

We consider monodisperse systems composed of single shape grains and kept the velocity of deformation and normal force constant at values 0.01 cm/s and 7 N respectively. The system was prepared such that the initial width is $L_0 = D/d \sim 6.5$ between different realizations and different shapes of the grains. First, we describe the general features of the dilatancy and the shear force curves. Then, the mechanisms of stress relaxation observed in the granulate for the different shaped grains are discussed. Finally, the effect of the shape of the grains on the magnitude of fluctuations in both, the dilatancy and the shear force are presented, along with a description of the macroscopic behavior of the granulate through an effective coefficient of friction.

1. General features

Large fluctuations in the dilatancy reaching amplitudes of the size of a grain, $d \sim 0.8 \text{ cm}$, are observed in hexagonal grains, see Fig. 2. In contrast, the maximum fluctuations of the dilatancy observed with either circular or pentagonal particles are only a small fraction of the grain size. For hexagons have the lowest frequency of variation of the dilatancy between the three shapes. The variation in frequency of fluctuations between particle shapes is more evident in the shear force curves, where the pentagons clearly show rapid fluctuations compared to that of hexagons. However, the magnitude of variations observed in the shear force are similar for the three different grain shapes. A common characteristics observed in the three systems is the synchronized sudden drop in dilatancy and shear force curves. Almost every sudden drop in dilatancy was accompanied by a sudden drop in shear force, however, the same pattern was not observed in the converse situation. Other less significant drops in shear force are associated to sudden

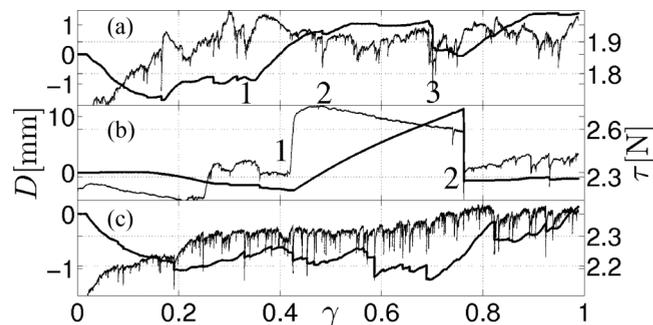


FIG. 2. Typical raw data obtained for (a) disks, (b) hexagons, and (c) pentagons. (Thick line) D vs γ and (thin line) τ vs γ .

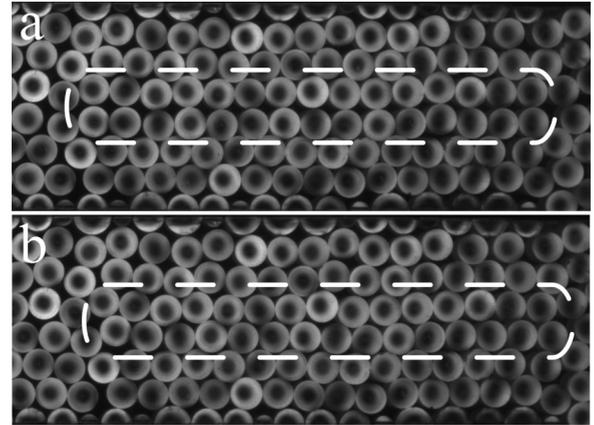


FIG. 3. The mechanism of sliding planes. (a) The lower plane is forced to move in the direction of the strain pushing the upper plane upwards to its highest position. (b) The particles in the upper plane abruptly slide down due to the misalignment with the lower plane. The sliding planes are identified by the dotted white line.

changes in the slope of the dilatancy. It was noticed that the shear signal reflects any fluctuation or rearrangement occurring close to the cell bottom sensor, while the compression plate motion detects mainly events leading to global dilation or compression. Subsequently, shear fluctuations that were not synchronized to dilation jumps were called local events, while a synchronized drop of both curves was associated with a global event. The typical strain sustained between two local events are $\Delta\gamma_d \sim 0.05$ for disks, $\Delta\gamma_h \sim 0.3$ for hexagons, and $\Delta\gamma_p \sim 0.01$ for pentagons. The corresponding durations, estimated with a velocity of deformation $v \sim 0.01 \text{ cm/s}$ are $\Delta t_d \sim 25 \text{ s}$, $\Delta t_h \sim 150 \text{ s}$ and $\Delta t_p \sim 5 \text{ s}$ for disks, hexagons and pentagons respectively. To explore these features further we studied the local motion of the grains using pictures of adequate resolution ($6576 \text{ px} \times 4384 \text{ px} \sim 29 \text{ Mpx}$).

2. Disks

The shear strain on the disks ensemble promotes the formation of planes that are parallel to the applied shear and can mutually slide relaxing some internal stress (Fig. 3). The easy rearrangement of disks, due to their rounded shape and relatively low friction, favors the partial crystallization of the granulate, and ultimately facilitates the creation of these planes, whose extension ranges from ten to twenty particles. The mechanism of sliding planes was observed to be similar to that described by Argon [27] in his early paper on plasticity of glassy materials, and can be described in three steps. The lower plane is moved by the applied shear strain pushing the upper plane. Then, the planes continue to slide up to the maximum separation corresponding to a local square lattice, see Fig. 3(a). This is responsible for both a gradual dilation and a shear force increase [see the zone limited by 1 and 3 in Fig. 2(a)]. Subsequently, the upper plane abruptly slides down due to the misalignment with the lower plane, see Fig. 3(b). Consequently, the shear force is immediately decreased. At this point the system can compact locally. However, relatively high variations in shear force with minimal changes in global dilatancy are also observed, as indicated

by 2 in Fig. 2(a). This dilatancy screening is the result of zones distributed inside the material that simultaneously slide. Moreover, fast but low amplitude fluctuations of the shear force do not induce global dilatancy changes and therefore are related with small changes in the force network. Careful observations indicated that most of these fluctuations were correlated with sudden changes in the derivative of dilatancy. According to this scenario, the maximum variation in the dilatancy corresponds to the difference in height between the square and hexagonal arrangement of grains. In this case, for particles with radius of $R = 0.4$ cm, the height difference is given by $\Delta h = (2 - \sqrt{3})R \sim 0.1072$ cm, which is consistent with the experimental values.

3. Hexagons

Under shearing, while the inherent capacity for partial crystallization of the hexagonal grains allows for the creation of coherent structures, such as those shown in Fig. 4, the additional roughness created in the forcing plates of the cell prevents the creation of a monocrystal and promotes the nucleation of multiple hexagonal domains with different grain boundary orientations. Thus, the rotation and slide of the adjacent hexagonal domains favors the nucleation of chains of hexagons that connects the upper and lower cell plates. These chains arise from a mechanism similar to the detachment by cleavage of a crystalline plane from a monocrystal under shear, and behave like a rotating rigid pivot capable of supporting the pressure exerted by the top plate. At the nucleation point of such a chain, the dilatancy starts to increase gradually while the shear force increases rapidly. As pivot rotation progresses dilatancy increases and the shear force gradually decreases, see the zone delimited by 1 and 2 in Fig. 2(b). At the steepest position the pivot suddenly collapses due to buckling, see 2 in Fig. 2(b). Hence, the granulate is suddenly compacted changing its spatial configuration. Notice that this sudden reduction of packing fraction does not produce a blockage of the system: immediately following the collapse the shear force increases slowly and the dilatancy remains almost constant. In the simplest description these chains can be considered as rotating rigid pivots anchored to the bottom and top plates. By applying the conditions due to the anchoring points we obtained for the dilatancy D ,

$$D = \sqrt{L_p^2 - (L_p \sin \theta_0 - x)^2} - L_p \cos \theta_0, \quad (2)$$

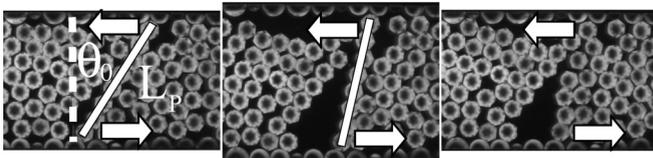


FIG. 4. The mechanism of rigid pivot: The nucleation of a rigid pivot (left). The rigid pivot rotates giving rise to an apparent increase in the volume of the granulate (center). The rigid pivot is destroyed due to the buckling effect resulting in a simultaneous sudden drop in dilatancy and shear force (right). The arrows indicate the motion of the ends of the rigid pivot and the line its relative orientation.

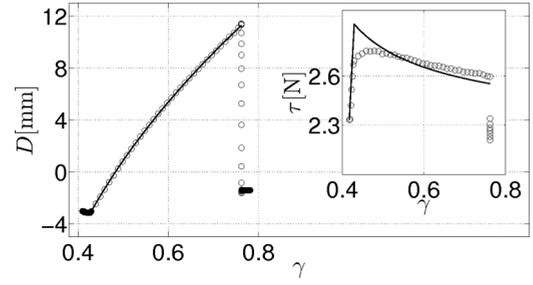


FIG. 5. D and τ (inset) vs γ during the evolution of a rigid pivot. (Open symbols) Experimental values. (Solid lines) Curves of best fit obtained with the pivot model. $L_0/d \sim 6.5$, $v \sim 0.01$ cm/s and $N = 7$ N.

where L_p and θ_0 are the initial length and inclination angle (see Fig. 4) of the pivot at nucleation point, and x is the displacement of the bottom plate. Now, applying the torque balance we obtain,

$$\frac{\tau}{N} = \frac{L_p \sin \theta_0 - x}{\sqrt{L_p^2 - (L_p \sin \theta_0 - x)^2}}. \quad (3)$$

Here, τ and N are the tangential and the normal forces applied on the pivot. Comparison with experimental results (Fig. 5) shows that this simple model captures the main features of the dynamic in a chain of hexagons. The variation of the dilatancy is accurately reproduced by this model. In contrast, the shear force presents some deviations since it is overestimated during early stages and underestimated during later stages. This deviation indicates that the force is not solely concentrated on a single pivot, but it is partially distributed on the surrounding particles, see Fig. 4. It is worth mentioning that the mechanism of stress relaxation based on sliding planes was not detected in hexagons, probably due to the characteristic facets of the regular hexagons prohibiting the sliding of adjacent planes. Therefore, the rolling of hexagonal domains with different grain boundary orientations is the main mode of grains rearrangement, while rigid pivots are responsible for the large fluctuations observed in the dilatancy and the shear force.

4. Pentagons

Pentagon's granulates produce complex disordered amorphous structures. The facets prevent the arrangement of pentagons in adjacent planes and the formation of crystalline domains. As a result of their high frustration to rolling and sliding under shearing, pentagons rearrange by alternating facets with neighboring pentagons, as shown in Fig. 6. Misaligned pentagons are laterally supported by their corners, and the applied deformation causes rotation and abrupt sliding, which aligns the two neighboring facets. This results in a momentary decrease of the dilatancy and shear force, creating a new configuration. This process is repeated constantly. The rolling and sliding of individual pentagons create small perturbations on the surrounding area, as illustrated in the relative orientation of neighboring pentagons in Fig. 6. We observed that the change in dilatancy ΔD during the synchronized sudden drop of dilatancy and shear force is increased with the number of simultaneous cluster of pentagons N_R , suffering significant

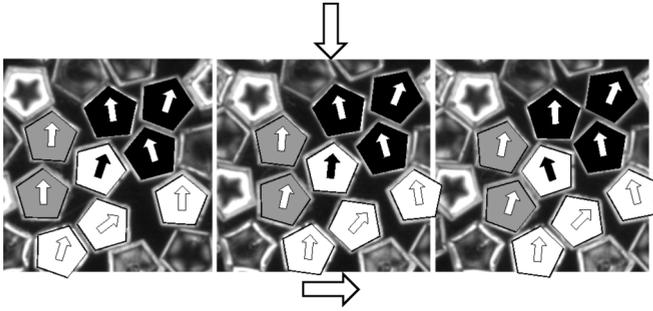


FIG. 6. Local rolling of pentagons. A misaligned pentagon (black arrow) begins to roll because of the strain (left). Gradual rotation of the pentagon (center). Loss of the neighboring support and sudden slide that relaxes the stress momentarily (right). A nonaffine deformation is created around the rolling pentagon (white and gray pentagons).

distortion, as shown in Fig. 7. In order to identify such clusters, image acquisition is synchronized with the dilatancy jumps. We approximately determined grain displacements by subtracting images taken immediately before and after a sudden collapse. Significant displacement of groups of neighboring pentagons were observed, since they appeared as bright spots in the resulting image. The size of these clusters ranged from three to six pentagons. The fact that compaction is an increasing function of N_R suggests that each cluster contributes with a characteristic local compaction, δS , to the average global compaction. Thus, in pentagons the frustration of the contacts network would be high enough to prevent the formation of stable force chains that would otherwise screen cluster compaction. From Fig. 7 we estimate that each cluster contributes to a compaction that is a fraction of the grain area ($\delta S \approx 0.3d^2$).

The D and τ curves shown in Fig. 2 indicate that the fastest events are obtained with pentagons. To characterize the temporal features as function of grain shape we studied the number of events per unit of strain N_e/γ due to the changes in v and L_0/d . The largest value of N_e/γ is observed with the pentagons, followed by the disks and then the hexagons, see Fig. 8. The permanent misalignment of the pentagons and high mobility of the disks result in the large frequency of shear force fluctuations observed with these grains. Conversely, the coordinated motion of the grains in a pivot requires a significant amount of strain, which explains the low frequency of events in hexagons. On the other hand, N_e/γ is independent of L_0/d and v in disks and hexagons, see Fig. 8. However, in

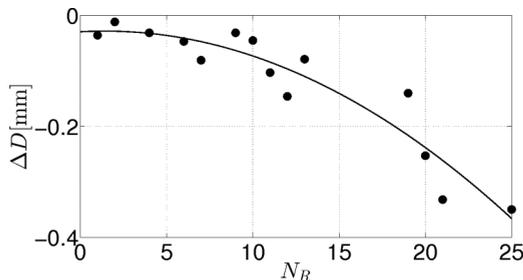


FIG. 7. The magnitude of the dilatancy jump ΔD vs the number of active pentagons N_R , at the synchronized sudden jump of D and τ . $L_0/d \sim 6.5$, $v \sim 0.01$ cm/s and $N = 7$ N.

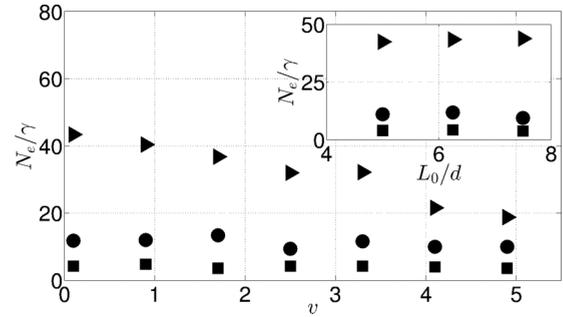


FIG. 8. Number of events per unit γ , N_e/γ vs. v . (Inset) N_e/γ vs L_0/d . (●) disks, (▶) pentagons, and (■) hexagons. $L_0/d \sim 6.5$, (inset) $v \sim 0.01$ cm/s and $N \sim 7$ N.

pentagons N_e/γ is nearly independent of L_0/d but it decreases with v . This result is striking as the inertial number, $I < 10^{-3}$, is small. We claim that the decrease in N_e/γ observed for pentagons is due in part to a partial shear localization when v is increased. Indeed, at the bottom of the system ($y \sim 0$ cm), the total displacement of the pentagons is imposed by the moving plate and is independent of v , see Fig. 9(a). However, if v is significantly increased the pentagons in the vicinity of the top plate ($y \sim 40$ cm) remain virtually uninfluenced by the motion of the bottom plate, see Fig. 9(b). This reduces the number of particles available to slide and relax the local accumulation of stress, which decreases the number of events N_e/γ . The origin of this shear localization (observed only in pentagons) is, however, unknown. We believe that it is due to the frequency response of the experimental device, which limits the reaction of the compression plate to the faster fluctuations. To account for that effect, we associate an inertial number to the moving compressing plate, $I_p \equiv \sqrt{2dM_p/F_p}/(d/v)$, where $d \sim 8 \times 10^{-3}$ m is the characteristic size of the grains, $M_p \sim 1.6$ Kg is the mass of the compression plate, $F_p \sim 7$ N is the normal load on the compression plate and $v \sim 5 \times 10^{-3}$ m/s is the highest deformation velocity, with these values we obtained $I_p \sim 3.8 \times 10^{-2}$. This indicates that the experimental device response is about 20 times smaller than the typical time d/v .

5. Friction

In granulates composed of disks and pentagons the effective friction μ [Fig. 10(a)] is practically independent of the initial width of the cell L_0/d while in hexagons it varies

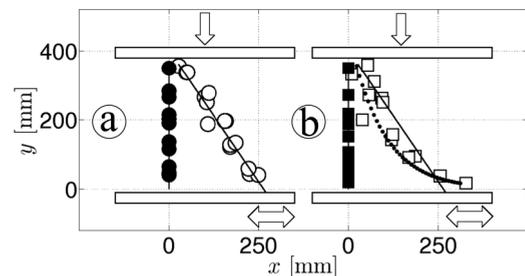


FIG. 9. Profile of the pentagons' relative displacement. (Solid symbols) $\gamma = 0$ and (open symbols) $\gamma \sim 1$. (a) $v \sim 0.01$ cm/s and (b) $v \sim 0.5$ cm/s. $L_0 \sim 6.5$ and $N \sim 7$ N. The lines are visual guides.

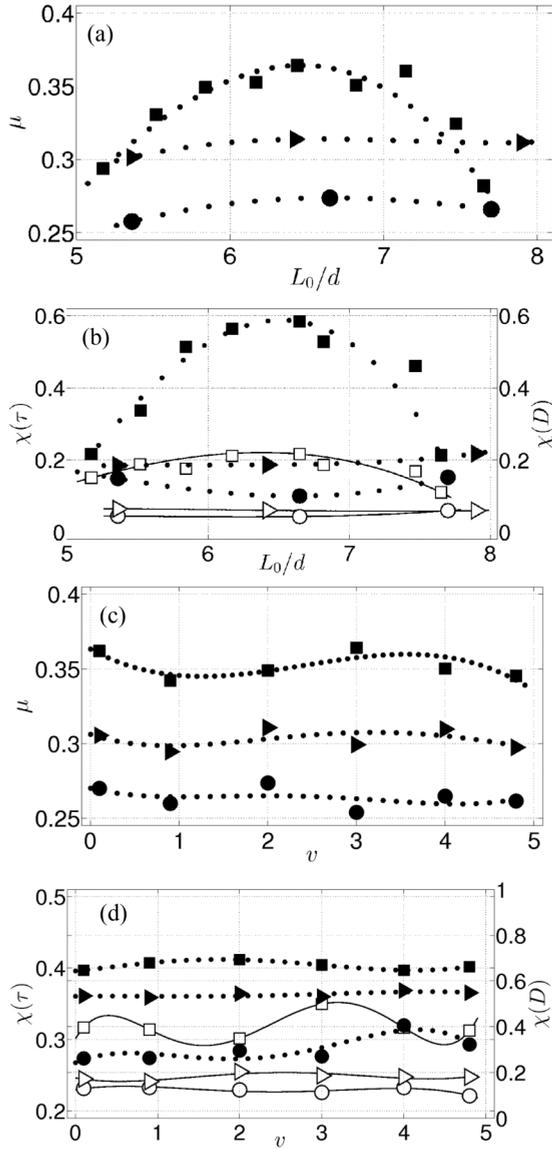


FIG. 10. μ , $\chi(D)$ (open symbols) and $\chi(\tau)$ (solid symbols) vs L_0/d (a) and (b) and vs v (c) and (d). For (a) and (b) $v \sim 0.01$ cm/s and (c) and (d) $L_0/d \sim 6.5$. $N = 7N$, disks (\bullet), pentagons (\blacktriangleright), and hexagons (\blacksquare). The lines are visual guides.

from the value obtained for pentagons at $L_0/d \sim 5.5$, to the value observed in disks at $L_0/d \sim 7.5$. Higher values of μ are observed close to $L_0/d \sim 6.5$. This behavior is a consequence of the creation of rigid pivots, which increases the average value of τ beyond the value given by the solid friction. The nucleation of these pivots requires the connection of the shear boundaries through a hexagonal domain. At small values of L_0/d the creation of hexagonal domains is significantly reduced due to the distortion induced by the roughness of the shear boundaries; pivots are less frequent and the friction coefficient fluctuates less and is dominated by the solid friction only. Similarly, at large values of L_0/d a different orientation of the hexagonal domains formed interferes with the nucleation of rigid pivots, the friction coefficient is again dominated by solid friction. However, around $L_0/d \sim 6.5$ the friction increases because of the high

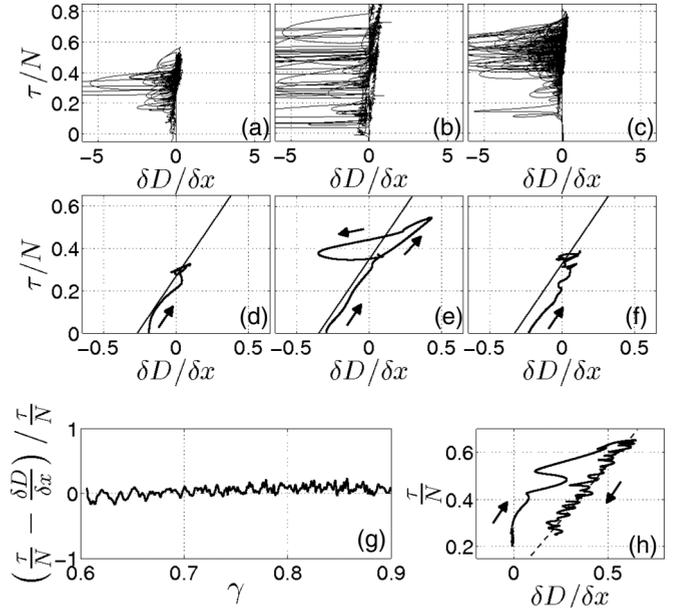


FIG. 11. Instantaneous τ/N vs. $\delta D/\delta x$, raw data [disks (a), hexagons (b), and pentagons (c)]. Slow variation of $\delta D/\delta x$ filtered from the raw data, (d) disks, (e) hexagons, and (f) pentagons. The arrows indicate the trajectory of the system, starting at a compression stage. (g) Normalized difference between τ/N and $\delta D/\delta x$ during the pivot shown in Fig 2. (h) Behavior of an isolated pivot. $L_0/d \sim 6.5$, $v \sim 0.01$ cm/s and $N \sim 7N$.

probability of connecting the shear boundaries through a hexagonal domain with a single orientation, which increases the duration of rigid pivots. Independent evidence supports the existence of an optimum pivot size. Indeed, in a recent numerical study [28] it is shown that in a two-dimensional (2D) system the stable force chains, formed with rounded particles, have a critical length between seven and eight grains for ellipsoids of aspect ratio 1.5. By considering the distance between opposite corners and opposite facets we estimated the aspect ratio of hexagons as ~ 1.16 , which leads to a critical length between six and seven grains. This value is compatible with our experimental result that locates the highest value of μ around $L_0/D \sim 6.5$. In the following we investigate the effect of nearly instantaneous compaction (dilatancy changes $\delta D/\delta x$) on the instantaneous effective friction τ/N . The parametric representation of τ/N and $\delta D/\delta x$, is presented in Figs. 11(a) (disks), 11(b) (hexagons), and 11(c) (pentagons).

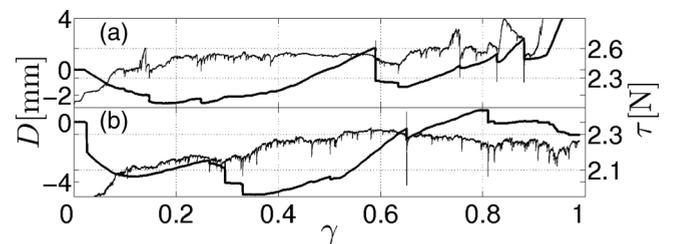


FIG. 12. Typical raw data for (a) disks-hexagons and (b) pentagons-hexagons. (Thick lines) D and (thin lines) τ vs γ . $f \sim 80\%$, $v \sim 0.01$ cm/s, $L_0/d \sim 6.5$ and $N \sim 7N$.

Each point on this curve corresponds to a different strain value or, equivalently, a different time. Note that the large negative fluctuations in $\delta D/\delta x$ correspond to sudden collapses of the granulate. Although, these are presented in all the granulates, they are markedly larger in hexagons. In the following, we assumed that the Taylor formula, Eq. (1) is valid. For the averaged quantities this leads to,

$$\left\langle \frac{\tau}{N} \right\rangle \approx \phi_S + \left\langle \frac{\delta D}{\delta x} \right\rangle, \quad (4)$$

where ϕ_S is the solid friction and the brackets indicate a time average. From the Taylor's diagram [Figs. 11(a)–11(c)], we confirm that the geometrical contribution to the effective friction was less significant in disks and pentagons compared to that of hexagons (reflected by the strong negative fluctuations of $\frac{\delta D}{\delta x}$).

Since time average is simply, $\langle \frac{\tau}{N} \rangle \approx \phi_S + \frac{1}{vT} \int_0^T \frac{\delta D}{\delta t} dt$, it is immediately seen that sudden collapses can not be captured accurately by the Taylor's expression due to the singularity in the derivative. Indeed, shear stress has narrow negative peaks at each event, and after each event shear stress recovers. However, we observe that shear force is directly related to the local slope of dilatancy, which is more evident for pentagons [see Fig. 2(c)] than the other shapes. Thus, friction coefficient, at the scale of our experiment, is directly given by the average dilatancy angle between events,

$$\left\langle \frac{\tau}{N} \right\rangle \approx \phi_S + \frac{1}{vT} \sum_{\text{events}} (D_+ - D_-), \quad (5)$$

where T is the total observation time and D_- and D_+ are the dilatancies at the limits of the intervals defined by two successive collapses. Equation (5) can be seen as the unwrap process necessary to correctly account for the internal angle average.

In the case of hexagons, between a limited range of $5 < L_0/d < 8$, the effective friction shows a significant contribution from the dilatancy variations due to the presence of rigid pivots. Indeed, by taking the instantaneous variations of the dilatancy from Eq. (2),

$$\frac{\delta D}{\delta x} = \frac{L_P \sin \theta_0 - x}{\sqrt{L_P^2 - (L_P \sin \theta_0 - x)^2}} = \frac{\tau}{N}, \quad (6)$$

it is seen that the effective friction depends solely on the dilatancy variations in the rigid pivot regime, which is confirmed in the experimental curve, $\tau/N - \delta D/\delta x$ versus strain γ , shown on Fig. 11(g).

Thus, hexagonal compacts fluctuate similar to a stick-slip oscillator: a synchronized drop occurs as a consequence of the collapse of the rigid pivots due to the buckling effect. A similar mechanism, based on the collapse of chains, has been proposed by Anthony and Marone [17] to explain the repetitive stick-slip failure observed in experiments with gouges, consisting of smooth rounded mono disperse grains.

In order to explore the features of slow fluctuations we removed the discontinuities and applied a low pass filter to the raw data, see Figs. 11(a), 11(b), and 11(c). Thus, the slow variations of $\delta D/\delta x$ can be better distinguished in the Taylor's diagram. We observed from Figs. 11(d), 11(e), and 11(f)

that the granulate is initially compressed and τ/N is quickly increased. Then, the granulate is dilated until it reaches the operating regime, where the friction fluctuates around its macroscopic effective value, determined by the intersection of the Taylor's model (straight line at 45°) and the τ/N axis. The large magnitude of the fluctuations observed in hexagons is due to the creation of rigid pivots, which modifies the τ/N and $\delta D/\delta x$ significantly. On a rigid pivot, the friction is mainly due to variation of dilatancy, $\delta D/\delta x$, as shown in Fig. 11(g). The typical behavior of a single pivot is shown in Fig. 11(h). At the nucleation point the granulate is quickly compressed while a sudden dilation is initiated. Then, the compression and the dilation rate are gradually decreased (trajectory marked with the dashed line) until the granulate abruptly collapses.

6. Fluctuations

We have presented evidence that the magnitude of fluctuations in the dilatancy and the shear force depend heavily on particle shape. To better characterize these fluctuations we calculate the variation coefficient of the root-mean-square deviation, defined as $\chi(x) \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} / \langle x \rangle$ where x generically represents the shear force (τ) or the dilatancy (D). In addition, we also investigate the effects induced by the cell size and deformation velocity. As the cell variation is lower than a grain's characteristic size, the relevant parameter is the normalized initial width of the cell L_0/d . In Fig. 10(b) are shown $\chi(D)$ (open symbols) and $\chi(\tau)$ (solid symbols) as a function of L_0/d . Both are practically independent of L_0/d for disks and pentagons. This is explained by the high mobility of disks and the rotation of the pentagons driven by their local misalignment, which are independent of the cell size. In hexagons, $\chi(D)$ and $\chi(\tau)$ shown a maximum around $L_0/d \sim 6.5$. The rigid pivots connecting the shear boundaries increases D and τ , and are responsible for the maximum observed in $\chi(\tau)$. As mentioned above, hexagonal domains with single orientations that connect the shear boundaries are more frequent at L_0/d , which increases the nucleation of rigid pivots and modifies the fluctuations of D and τ significantly. On the other hand, we observed that $\chi(D)$ and $\chi(\tau)$ are practically independent of the velocity of deformation v , as shown in the curves of Fig. 10(d). Thus, at the small inertial numbers explored, the velocity of deformation does not interfere with the mechanisms of relaxation, maintaining the characteristic fluctuations of D and τ unaffected.

B. Bidisperse systems

Compatible systems such as disks-hexagons, which tend to arrange in hexagonal lattices, and incompatible systems such as pentagons-hexagons, where disorder and crystalline structure are competing, can be envisioned. In both systems the effects on μ , $\chi(D)$ and $\chi(\tau)$ due to the relative concentration of hexagons f (ratio between the number of hexagons and the total number of grains) were studied. The velocity of deformation and normal force were kept constant at $v \sim 0.01$ cm/s and $N \sim 7$ N respectively while the granulate was always prepared with an initial width $L_0/d \sim 6.5$ where the largest stable pivots are favored. Typical behavior of dilatancy and shear force for bidisperse systems are shown in Fig. 12.

1. Disks-hexagons

The effective friction μ is a smooth function of the relative concentration of hexagons f . At $f \leq 0.2$, μ remains nearly constant to the value observed in disks. In the middle range $0.2 \leq f \leq 0.8$, μ grows almost linearly with f and at high concentration, $f \geq 0.8$, the effective friction reaches the value obtained for the hexagons. The large concentration of hexagons reduces the slip capacity and the number of sliding planes, which increases the nucleation of hexagonal domains and stable pivots, which in turn increases the value of μ . It is also observed that $\chi(D)$ increases gradually for $f \lesssim 0.8$. This is due to the compatibility of the lattices, which allows the incorporation of disks into the hexagonal domains minimizing their influence. Subsequently, a rapid increase occurs because of the dominance of the hexagonal domains at $f \geq 0.8$. Conversely, $\chi(\tau)$ increases approximately at the same rate to f , but shows slightly smaller values at intermediate concentrations of hexagons.

2. Pentagons-hexagons

The effective friction for the pentagons-hexagons combination remains almost constant for concentrations of hexagons $f < 0.7$, and it starts to increase monotonically with f . An analogous behavior is observed in $\chi(D)$ and $\chi(\tau)$, see Figs. 13(c) and 13(d). This is a consequence of the characteristic facets of the pentagons, which impede the creation of the crystalline lattice domains even at relatively low concentrations. Instead, pentagons promote the formation of an amorphouslike arrangement avoiding the creation of long coherent structures such as the rigid pivots. On the other hand, large hexagons concentrations, $f \gtrsim 0.8$, increase the value of μ , $\chi(D)$ and $\chi(\tau)$. This is a natural consequence of the presence of the hexagonal domains favored by the relative large number of hexagons. However, it should be noted that the perturbations introduced by pentagons is much more pronounced than that of disks; a few pentagons are sufficient to prevent the formation of pivots. As expected, the compatibility of the crystalline lattices favors the creation of hexagonal domains and increases the nucleation of rigid pivots, which modifies D and τ behavior significantly.

IV. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

The effects on the dilatancy, the shear force, and the effective friction coefficient due to the initial width of the granulate and the shape of grains in the quasistatic regime have been presented. In homogeneous monodisperse granulates composed of regular polygons with a single shape, three different main stress relaxation mechanisms were found: sliding planes in disks, rolling and sliding of individual misaligned pentagons, and rigid pivot in hexagons. These mechanisms are responsible for the magnitude of the fluctuations in the dilatancy and the shear force, and are influenced by the ability of the granulate to create crystalline domains, which in turn is determined by the shape of the grains. Synchronized sudden drops of dilatancy and shear force were observed. These events have different causes, which depend on the stress relaxation mechanism: slip of adjacent planes in disks, misalignment of adjacent pentagons, and collapse of rigid pivots in hexagons.

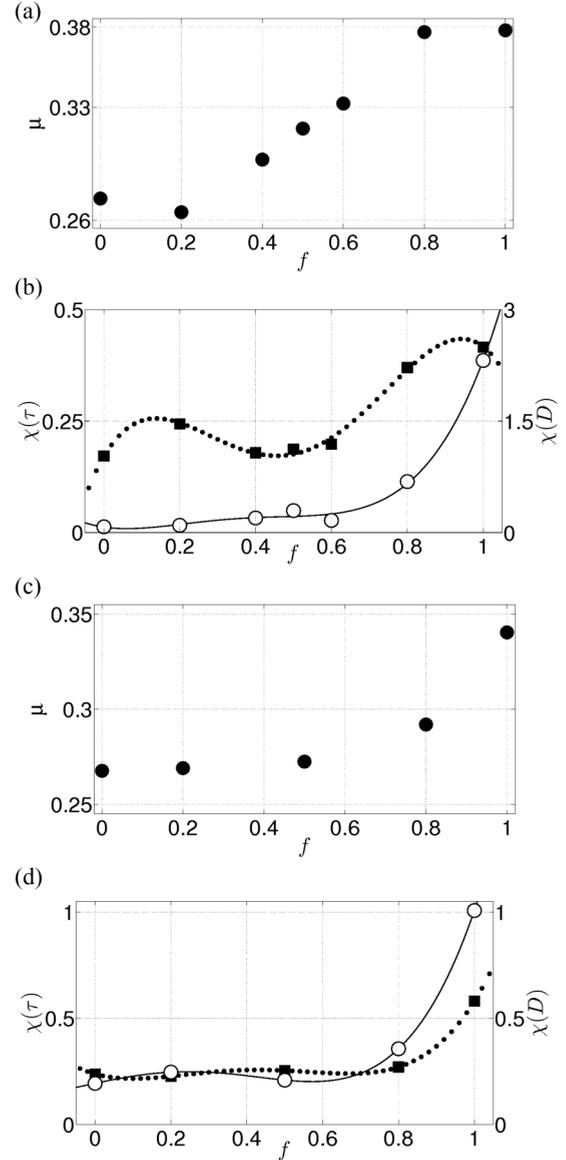


FIG. 13. μ , $\chi(\tau)$ (solid symbols) and $\chi(D)$ (open symbols) for a binary system. Disks-hexagons (a) and (b) and pentagons-hexagons (c) and (d). $v \sim 0.01$ cm/s, $L_0/d \sim 6.5$, and $N \sim 7$ N. The lines are visual guides.

As expected for small inertial numbers $I \ll 1$, the macroscopic effective coefficient of friction is independent of the velocity of deformation, regardless of the shape of the particles. This coefficient is also independent of the initial width of the granular system for disks and pentagons. However, in hexagons a maximum coefficient value for an initial width $L_0/d \sim 6.5$ grains is observed. This value corresponds to the maximum allowable length for stable chains favored by the formation of a hexagonal domain with a single orientation that connects the boundaries of the system. At small values of L_0/d the roughness strongly interferes with the formation of hexagonal domains, and at large values the different orientations of the hexagonal domains avoid the creation of long chains. Our result is compatible with the critical length obtained numerically by Guo for ellipsoidal particles. The large fluctuations observed in

the dilatancy and the shear force in hexagons are consequences of the long chains that behaves like a rotating rigid pivot. The uncorrelated individual rotations of pentagons are responsible of the high frequency of variation observed in the shear force.

In disk-hexagon mixtures the friction coefficient presented three regimes: low values similar to the disks at low concentrations of hexagons (<20%), linear dependence with the hexagons concentration at intermediate values, and high value similar to the hexagons at large concentrations (>80%). This is due to the compatibility of the crystalline lattice of disks and hexagons. In pentagon-hexagon combinations, the effective friction and magnitude of variations of the dilatancy and the shear force are practically independent of concentration of hexagons at concentrations below 60% because of the instability introduced by the pentagons. At larger concentrations the effect of pentagons is screened by the hexagonal domains and the magnitude of fluctuations and friction coefficient are rapidly increased.

In summary, in systems with monodisperse regular polygons in the quasistatic regime, the effective friction, the fluctuations in the dilatancy, and the shear force depend on the creation of crystalline domains. This ability is strongly influenced by the shape of the grains. In binary systems, this behavior depends on the compatibility of the grains and their ability to arrange themselves into compatible crystalline lattices.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the ANR-Conicyt ANR-011 (France-Chile) program. F.V. thanks the funding support from Conicyt (Chile) through Fondecyt No. 1120615 and PBCT PSD-54. N.S. thanks funding support from Conicyt (Chile) through PhD Grant No. D-21090840. The authors would like to thanks Dr. Hervé Caps and Dr. Martin Melhus for their valuable help.

-
- [1] J. Duran, *Sands, Powders and Grains* (Springer, New York, 2000).
 - [2] G. H. Ristow, *Pattern Formation in Granular Materials* (Springer, New York, 2000).
 - [3] L. P. Kadanoff, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 435 (1999).
 - [4] P. G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S374 (1999).
 - [5] S. J. Anthony, W. Hoyle and Y. Ding, *Granular Materials Fundamentals and Applications* (Athenaeum Press, Cambridge, Massachusetts, 2004)
 - [6] R. M. Nedderman, *Static and Kinematic of Granular Materials* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
 - [7] M. Oda and K. Iwashita, *Mechanics of Granular Materials: an Introduction* (Balkema, Rotterdam, 1999).
 - [8] C. S. Chang, A. Misra, T. Y. Liang and M. Babic, *Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials* (American Society of Civil Engineers, New York, 1997).
 - [9] L. Mittelbach, *AIP Conf. Proc.* **1542**, 1178 (2013).
 - [10] E. J. R. Parteli, *AIP Conf. Proc.* **1542**, 185 (2013).
 - [11] P. L. Newland and B. H. Alley, *Géotechnique* **7**, 17 (1957).
 - [12] P. W. Rowe, *Proc. Roy. Soc. A* **269**, 500 (1962).
 - [13] S. Nemat-Nasser, *Soils and Foundations* **20**, 59 (1980).
 - [14] M. Oda, J. Konishi and S. Nemat-Nasser, *Mech. Mater.* **1**, 269 (1982).
 - [15] F. Alonso-Marroquín, I. Vardoulakis, H. J. Herrmann, D. Weatherley and P. Mora, *Phys. Rev. E* **74**, 031306 (2006).
 - [16] J. Anthony and C. Marone, *J. Geophys. Res.* **110**, B8 (2005).
 - [17] K. Mair, K. M. Frye, and C. Marone, *J. Geophys. Res.* **107**, ECV 4-1 (2002).
 - [18] D. M. Walker and A. Tordesillas, *Phys. Rev. E* **85**, 011304 (2012).
 - [19] A. Tordesillas, *Phil. Mag.* **87**, 4987 (2007).
 - [20] A. Tordesillas, D. M. Walker, and Q. Lin, *Phys. Rev. E* **81**, 011302 (2010).
 - [21] F. Vivanco, S. Rica, and F. Melo, *Granular Matter* **14**, 563 (2012).
 - [22] A. Tordesillas, D. M. Walker, G. Froyland, J. Zhang, and R. P. Behringer, *Phys. Rev. E* **86**, 011306 (2012).
 - [23] E. Azéma, F. Radjai, R. Peyroux, and G. Saussine, *Phys. Rev. E* **76**, 011301 (2007).
 - [24] D. Wood, *Soil Behavior and Critical State Soil Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
 - [25] G. D. R. Midi, *Eur. Phys. J. E* **14**, 341 (2004).
 - [26] D. W. Taylor, *Fundamentals of Soil Mechanics* (Wiley, New York, 1948).
 - [27] A. S. Argon, *Acta Metall* **27**, 47 (1979).
 - [28] P. Guo, *Acta Geotechnica* **7**, 41 (2012).