

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**ZONA AISLADA DE MOVIMIENTO CREADA POR LA
INTERACCIÓN DE DOS PUNTOS DE EXTRACCIÓN OPERANDO
SIMULTÁNEAMENTE**

TOM GUILLERMO WATT ARÉVALO

Tutor: Francisco Vivanco A.

Co-Tutor: Francisco Melo H.

**Trabajo de titulación presentado a
la Facultad de Ciencia, en
cumplimiento parcial de los
requerimientos exigidos para
optar al Título Profesional de
Ingeniero Físico**

**Santiago de Chile
2011**

© Tom Watt Arévalo

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA



ZONA AISLADA DE MOVIMIENTO
CREADA POR LA INTERACCIÓN
DE DOS PUNTOS DE EXTRACCIÓN
OPERANDO SIMULTÁNEAMENTE

TOM GUILLERMO WATT ARÉVALO

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FISICA

**ZONA AISLADA DE MOVIMIENTO
CREADA POR LA INTERACCIÓN
DE DOS PUNTOS DE EXTRACCIÓN
OPERANDO SIMULTÁNEAMENTE**

TOM GUILLERMO WATT ARÉVALO

Profesor Tutor: Dr. Francisco Vivanco A.

Profesor Co-Tutor: Dr. Francisco Melo H.

Profesores Comisión: Eugenio Hamn
Álvaro San Martín
Francisco Santibáñez

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO FÍSICO

SANTIAGO DE CHILE

MARZO 2011

“ZONA AISLADA DE MOVIMIENTO
CREADA POR LA INTERACCIÓN
DE DOS PUNTOS DE EXTRACCIÓN
OPERANDO SIMULTÁNEAMENTE”

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en
cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al Título
Profesional de Ingeniero Físico.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO DE CHILE

MARZO 2011

“ZONA AISLADA DE MOVIMIENTO
CREADA POR LA INTERACCIÓN
DE DOS PUNTOS DE EXTRACCIÓN
OPERANDO SIMULTÁNEAMENTE”

TOM GUILLERMO WATT AREVALO

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión de los profesores guía Dr. Francisco Melo H. y Dr. Francisco Vivanco A., del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora

.....

.....

.....

.....

Profesor Tutor

.....

Profesor Co-Tutor

.....

Director

A mis padres

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres por haberme dado todas las enseñanzas, oportunidades, desafíos y ejemplos para poder enfrentar la vida. El cariño y preocupación que entregan a sus hijos en todos sus actos siempre será una inspiración para mi, gracias por vuestro apoyo y cariño incondicionales. Gracias mamá por ser tan previsor y profundamente maternal con todos quienes te rodeamos, y a ti papá gracias por alegrarnos la vida a tus seres queridos; sigue buscando con tu alegría el lado positivo de las cosas.

Quiero también agradecer a mis hermanos, desde temprana edad fuimos cómplices y siempre mi intención ha sido quererlos, protegerlos y ayudar a mis padres a enseñarlos. Estoy orgulloso de verlos ahora desarrollándose como personas y entregándose con pasión a las ocupaciones que cada uno ha elegido, gracias por ser mis confidentes, por su complicidad y por sus palabras y acciones de apoyo.

A Andrea, mi pareja, gracias por apoyarme hasta en los momentos más difíciles del desarrollo de este trabajo. Tu compañía fue un verdadero alivio en los momentos más tensos y una inspiración diaria. Gracias por tus consejos, por ayudarme a entender las cosas desde otra perspectiva y tu amor incondicional.

Por otro lado, quiero agradecer a las personas que integran el Laboratorio de Física no Lineal de la Universidad de Santiago de Chile. A Francisco Melo, por su patrocinio y darme la oportunidad de trabajar en este Laboratorio. A Francisco Vivanco por gestionar mi ingreso y por todo lo que me enseñó sobre materiales granulares, desarrollo de modelos analíticos, análisis de resultados, y muchos otros tipos de conocimientos durante el desarrollo de este trabajo.

También quiero agradecer a la beca del proyecto Anillo ACT 95 Nano y Micromecánica de Sistemas Frágiles que ayudó a financiar parte de este trabajo.

Quiero agradecer también a mis compañeros de carrera y laboratorio por su ayuda, consejos, apoyo, alegría y compañerismo durante toda mi formación: Guillermo Guerra, Geraldine Estay, Daniela Paredes, Carlos Peña, Viviana Clavería, Cristian Valenzuela, Andrea Schmessane, Jorge Cuadra, Felipe Torres, Cristian Soto, Cristian Lopez, Karina Molina, Cristian Jimenez, Pablo Fredes, Román Jaramillo, Beatriz Gallardo, Beatriz Ramirez, Sebastián Orellana, Francisco Correa, Guillermo Maturana, Catalina Torres, Betzabé Torres, Ana Karina Maldonado, Daniela Guzmán, Rodrigo Donoso, Felipe Gatica, Hector Alarcón, Sergio Palma, Francisco Santibáñez, Franco Tapia, Javier Contreras y Loreto Troncoso.

Quiero también agradecer de todo corazón a mis amigos de infancia y compañeros de vivencias enriquecedoras: Juan Pablo García, Sara Gutiérrez, María Paz García, Yorge Gerber, Cristóbal García, Pedro Zúñiga, Pablo Zúñiga, Cristian Cruz, Gloria González, Karen Hahn, Alan Corvalán, Giselle Paz, Claudio Hernández, María Echeverría y a todos aquellos que de alguna manera aportaron en mi desarrollo personal.

Y de manera muy especial quiero recordar y agradecer a Violeta Toledo por entregar enseñanzas, cariño y apoyo a tantas personas que tuvimos el privilegio de cruzar caminos de vida con ella. Bendiciones para tu espíritu!

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Modelos Cinemático y de Plasticidad | 5 |
| 2.1. Efectos de dilatación | 6 |
| 2.2. Modelo Cinemático | 8 |
| 2.3. Modelo de Plasticidad | 13 |
| 3. Interacción de 2 IMZ: Evaluación de parámetros | 17 |
| 3.1. Modelo Cinemático | 18 |
| 3.2. Modelo de Plasticidad | 29 |
| 4. Comparación con resultados experimentales | 37 |
| 4.1. Calibración Masa-Volumen | 40 |
| 4.2. Comparación entre anchos calculados y experimentales | 42 |
| 5. Conclusiones | 45 |
| A. Publicación | 47 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. IMZ en Block Caving | 3 |
| 2.1. IEZ en frente de dilatación | 7 |
| 2.2. Sistema de coordenadas modelo de Bergmark-Roos | 14 |
| 3.1. Vista frontal, modelo cinemático | 19 |
| 3.2. Alturas de IMZ, para cambios en la separación entre puntos extractivos, modelo cinemático | 20 |
| 3.3. Figura explicativa, diferencia entre anchos totales y unitarios | 21 |
| 3.4. Anchos de IMZ, para cambios en la separación entre puntos extractivos, modelo cinemático | 23 |
| 3.5. Anchos totales de IMZ, para cambios en la separación entre puntos extractivos, modelo cinemático | 24 |
| 3.6. Alturas de IMZ, para cambios en el coeficiente de difusión, modelo cinemático | 25 |
| 3.7. Anchos de IMZ, para cambios en el coeficiente de difusión, modelo cinemático | 26 |
| 3.8. Alturas de IMZ, para cambios en el volumen extraído por el PE 2, modelo cinemático | 27 |
| 3.9. Anchos de IMZ, para cambios en el volumen extraído por el PE 2, modelo cinemático | 28 |
| 3.10. Vista frontal, modelo de Plasticidad | 30 |

| | |
|--|----|
| 3.11. Alturas de IMZ, para cambios en la separación entre puntos extractivos, modelo de plasticidad | 31 |
| 3.12. Anchos de IMZ, para cambios en la separación entre puntos extractivos, modelo de plasticidad | 32 |
| 3.13. Alturas de IMZ, para cambios en el ángulo máximo de desplazamiento, modelo de plasticidad | 33 |
| 3.14. Anchos de IMZ, para cambios en el ángulo máximo de desplazamiento, modelo de plasticidad | 34 |
| 3.15. Alturas de IMZ, para cambios en el volumen extraído, modelo de plasticidad | 35 |
| 3.16. Anchos de IMZ, para cambios en el volumen extraído, modelo de plasticidad | 36 |
| 4.1. Aplanamiento de contornos de IMZ en interacción | 38 |
| 4.2. Vista superior de simulación de 13 puntos extractivos | 42 |
| 4.3. Anchos de IMZ obtenidas por simulación V/S masa extraída | 43 |
| 4.4. Anchos de IMZ obtenidas por simulación V/S masa extraída | 44 |

Resumen

El sistema de excavación por bloques es uno de los métodos de minería subterránea más usados en la actualidad, la principal ventaja que posee es su economía, ya que utiliza la gravedad y los esfuerzos internos de las rocas para extraer mineral desde túneles y galerías subterráneas. En dos de los proyectos más importantes de minería subterránea que se están gestionando actualmente en Chile se evalúa este método como el principal candidato a ser implementado, es por ello que el desarrollo de una herramienta de estimación del flujo de material granular a través de modelos físicos implicaría una importante mejora económica y productiva.

Dentro de los modelos físicos granulares usados para determinar el movimiento de un medio granular, un elemento central es la Zona Aislada de Movimiento (IMZ, siglas en inglés), la que básicamente consiste en la superficie que separa las partículas en movimiento de las que se encuentran en reposo. En la mayoría de los casos sólo se ha caracterizado la IMZ generada por un punto de extracción aislado, en este trabajo se estudia numéricamente la interacción de dos IMZ generadas desde dos puntos de extracción operando en forma simultánea. Para el estudio de interacción entre IMZ se utilizaron los modelos cinemático y de plasticidad en tres dimensiones, la IMZ resultante fue caracterizada midiendo su altura y su ancho máximo a lo largo de la interacción, en función de los parámetros modificados para cada modelo (separación entre aperturas, volúmen extraído, etc.).

Finalmente se aplica el modelo de plasticidad usando parámetros representativos de los resultados experimentales obtenidos por Trueman y sus colaboradores, validando los anchos calculados con los anchos experimentales.

Capítulo 1

Introducción

Chile, considerado como el país que produce más cobre en el mundo, genera anualmente alrededor de 2 millones de toneladas de este mineral, el cual se obtiene desde yacimientos ubicados en el territorio nacional que se explotan ya sea por minería subterránea o por extracción a rajo abierto; la decisión de implementar un método u otro es determinada en gran parte según el espesor de material estéril en la superficie, el yacimiento será explotado a rajo abierto si esta capa es lo suficientemente pequeña, en caso contrario es más rentable implementar un método de minería subterránea. En ambos casos la vida útil de un yacimiento depende principalmente de la cantidad estimada de mineral que se puede obtener de él, sin embargo para las minas trabajadas a rajo abierto existe otro factor que afecta su vida útil: éstas crecen cada vez más a medida que son explotadas hasta llegar a un tamaño crítico, y en estas condiciones el transporte de material en el interior de la mina implica un gasto elevado, disminuyendo en gran medida la rentabilidad de la operación. Como ejemplo tenemos a Chuquicamata, conocida por ser una de las minas a rajo abierto más grandes del mundo, que ya ha alcanzado su tamaño crítico y dejará de ser rentable dentro de la próxima década de acuerdo con las estimaciones de CODELCO. Sin embargo aún existe una cantidad importante de reservas de mineral de cobre debajo de este yacimiento ya explotado a rajo abierto, esta cantidad es de alrededor de 1700 millones de toneladas según CODELCO. Un reemplazo razonable para minas a rajo abierto que aún conserven una cantidad importante de

mineral es realizar la extracción usando métodos de minería subterránea, debido a que más económico retirar el mineral desde túneles a mayor profundidad.

Al menos dos de los proyectos actuales de CODELCO (Chuquicamata Subterráneo, de la División Codelco Norte y Nuevo Nivel Mina, de la División El Teniente) contemplan la extracción subterránea de reservas utilizando el método de excavación por bloques (en inglés, block caving method), este método consiste básicamente en extraer un bloque de mineral desde un yacimiento de grandes proporciones; al retirar mineral desde la base del bloque se generan fracturas que se propagan hacia arriba provocando hundimiento del mineral. El método se implementa de la siguiente manera: en primer lugar se divide el terreno de interés en grandes bloques cuya sección horizontal es por lo general mayor que 1000 m^2 [1] (figura 1.1), en la base se abre una gran roza horizontal (canal o socavón), para privar de apoyo a la masa de mineral. Posteriormente se prepara la zona inferior de esta masa con una red de galerías y chimeneas o puntos de extracción (PE); la roza permite al material fracturarse y hundirse, luego la zona de fractura sube progresivamente en toda la masa. A medida que progresa el hundimiento, la fragmentación mejora y el mineral se quebranta para luego ser cargado en los numerosos puntos de carga. El método de excavación por bloques ha demostrado ser eficiente y económico para la extracción de mineral a gran escala, siempre que las condiciones del terreno permitan el flujo de material por efecto de la gravedad.

La mayor dificultad que se presenta al implementar el método de excavación por bloques es la contaminación o dilución de los PE por el ingreso de material estéril, además al seguir extrayendo material por un PE contaminado sólo se consigue más roca estéril ubicada en las zonas superiores, obligando a cerrar la operación del PE. Por esta razón es importante conocer el flujo del material y cómo se comporta, esta información permitiría poder optimizar el tamaño, ubicación y operación de los puntos extractivos para prevenir la dilución. Sin embargo, estudiar los desplazamientos de rocas al interior de la mina no es una tarea fácil, por un lado existen complicaciones desde el punto de vista productivo para obtener datos experimentales *in situ*, ya que hay una pérdida económica al ocupar tiempo de producción para realizar estudios, y por otro lado es

difícil aislar cada una de las distintas variables (orden de extracción, tamaño de las rocas, etc.) para realizar un estudio detallado, ya que los criterios operacionales usados en las faenas mineras se basan principalmente en conocimientos empíricos. Por estas razones el desarrollo de métodos de predicción y su verificación en montajes experimentales a escala es fundamental para obtener resultados que sean de ayuda al momento de distribuir los PE, optimizando el proceso de extracción y obteniendo mejoras desde el punto de vista económico.

Para estudiar el desplazamiento del material granular, en lugar de seguir el movimiento de cada partícula observamos la Zona Aislada de Movimiento (IMZ, siglas en inglés), que corresponde a la superficie ubicada entre las partículas que han empezado a moverse en un momento determinado y las partículas que permanecen estáticas.

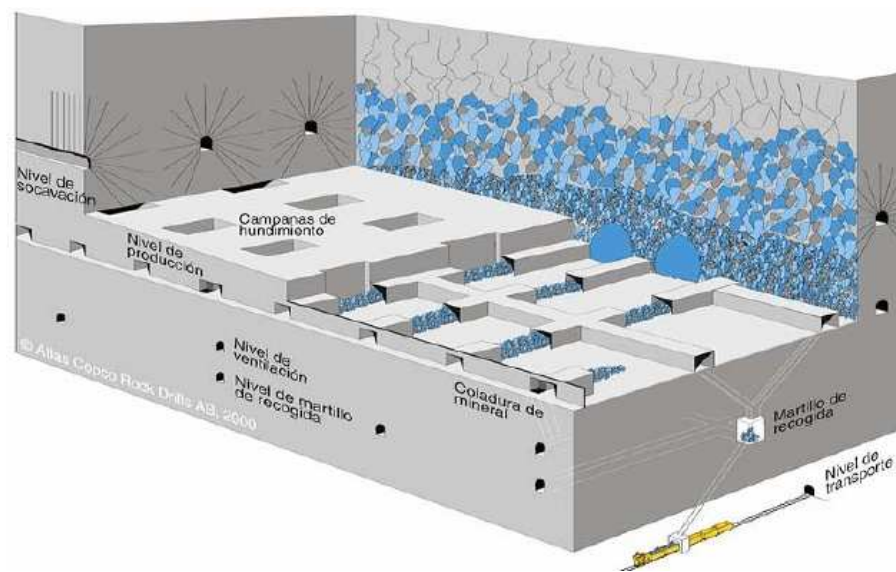


Figura 1.1: Esquema de la distribución de los puntos extractivos utilizados en el método de excavación por bloques (imagen obtenida de [1]).

Varios autores han estudiado la forma de la IMZ a través de modelos a escala [2, 3, 4, 5]; hasta ahora los estudios se han centrado principalmente en el estudio de la IMZ generada por un PE aislado, en este trabajo se ha incluido una IMZ adicional y se ha observado cómo se forman e interactúan las IMZ generadas por varios puntos

de extracción, con el fin de estudiar situaciones más complejas que involucran la operación de múltiples PE. En este trabajo se ha desarrollado una expresión analítica que permite obtener la forma de la IMZ en base a dos modelos de flujos granulares en tres dimensiones más la incorporación de un frente de dilatación. Las IMZ obtenidas fueron caracterizadas midiendo los anchos y las alturas máximas de cada una en función de los parámetros relevantes para cada modelo, cada uno de estos parámetros se describe en el Capítulo 3.

Un objetivo importante de este trabajo es validar las predicciones de los anchos de las IMZ obtenidas con el modelo de plasticidad, para ello se comparan los resultados numéricos del modelo de plasticidad con los resultados experimentales obtenidos por Trueman y sus colaboradores [4] en un contenedor diseñado especialmente para ser utilizado como modelo a escala. Este trabajo en específico es el tema central de la publicación [6], la cual se encuentra publicada en el *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, ver Apéndice A.

El presente informe se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se introduce el concepto de frente de dilatación, necesario para incorporar los cambios de densidad locales del medio granular en los modelos cinemático y de plasticidad, además se presentan las expresiones analíticas utilizadas para obtener las IMZ de dos o más PE operados en extracción simultánea para ambos modelos. Posteriormente en el Capítulo 3 se aplican ambos modelos para el caso de extracción simultánea por dos PE y se determinan los efectos en la forma de las IMZ provocados por los cambios en los parámetros evaluados. Luego en el Capítulo 4 se describen los aspectos considerados para validar los datos experimentales obtenidos por Trueman y sus colaboradores [4] incluyendo los resultados obtenidos. Finalmente se encuentran las conclusiones y el apéndice A, en donde está la publicación completa correspondiente a la referencia [6].

Capítulo 2

Modelos Cinemático y de Plasticidad

En este capítulo se introduce el Modelo Cinemático, cuya expresión analítica es una ecuación del tipo difusivo. Este modelo se aplica en contenedores de base plana y ha sido utilizado en [2] y [3] para describir el campo de desplazamientos de un medio granular, al extraer material desde una o dos aperturas en un contenedor bidimensional o tridimensional. De acuerdo a los resultados obtenidos en [2], la linealidad de este modelo permite que sea aplicable para casos de extracción simultánea a través de varias aperturas. Escribiremos la ecuación difusiva del modelo cinemático y sus distintas soluciones para una y varias aperturas.

Adicionalmente se introduce el Modelo de Plasticidad, el cual se formula suponiendo un flujo radial del material hacia la apertura; su aplicación mas común es en tolvas o contenedores cónicos, en donde el flujo radial se aprecia claramente. La formulación de una expresión para el campo de velocidades en este modelo ha sido discutida anteriormente en [2] y será explicada en este capítulo junto con su extensión analítica para varias aperturas.

Para ambos modelos se incluyen los efectos de dilatación del material granular en la expresión del campo de velocidades, estos efectos tienen la forma de un frente de dilatación que se propaga hacia arriba cambiando la densidad del medio a medida que se extrae material. Tal como se discute en [3] y [5], al trabajar con ambos modelos por sí solos los resultados concuerdan con los experimentos solamente en la zona cercana

a la apertura; posteriormente en base a los resultados de [3], los autores concluyen que al incluir la dilatación en cada modelo se consigue un mejor ajuste para las zonas superiores.

2.1. Efectos de dilatación

Al comenzar el proceso de extracción dentro de un contenedor primero descienden las partículas que se encuentran más cerca del punto de extracción (PE) generando espacio disponible en esta zona, esto disminuye la densidad local provocando que las partículas superiores deslicen hacia abajo; esta variación de densidad se incluye en la forma de un frente de dilatación que se propaga hacia arriba (figura 2.1), el contorno o superficie de este frente separa las partículas en movimiento de las partículas que aún están en reposo al no haber sido alcanzadas por el cambio de densidad. Para obtener la geometría de la IMZ se determina la velocidad del frente de dilatación en función del cambio en el flujo volumétrico. Una partícula localizada en (r, θ, ϕ) debe ser alcanzada por el frente de dilatación para comenzar a moverse hacia el punto extractivo, entonces el tiempo total requerido para extraer esta partícula se obtiene de la suma del tiempo que requiere el frente de dilatación para alcanzar la posición (r, θ, ϕ) y el tiempo que tarda la partícula en llegar a la apertura. Se han utilizado coordenadas esféricas al incluir estos efectos de dilatación en el problema ya que la distribución de la IMZ tiene simetría de rotación respecto de su eje vertical, por lo tanto, basta con determinar la velocidad del frente de dilatación en un plano de simetría definido por $\phi = 0$ para obtener el campo de velocidades en 3 dimensiones. Al introducir el balance de masas en el punto (r, θ, ϕ) cuando es alcanzado por el frente de dilatación en el instante t , tenemos

$$-\mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \cdot dt = \Delta\rho \cdot ds_F \cdot d\mathbf{A} \quad (2.1)$$

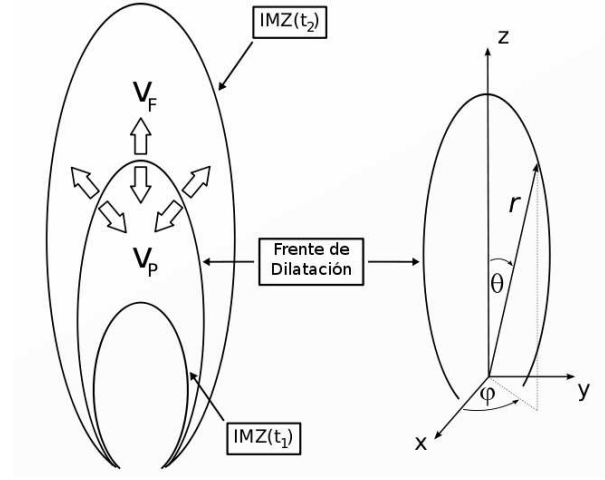


Figura 2.1: Diagrama de la zona aislada de movimiento, junto con la región del frente de dilatación y las velocidades del frente y las partículas. A la derecha se muestra el sistema de coordenadas (figura obtenida de [6])

Donde $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_P(r, \theta, \phi)$ es el flujo de granos en Kg/m^2 , $\mathbf{v}_P(r, \theta, \phi)$ es la velocidad local de las partículas en m/s , $\Delta\rho = \rho_0 - \rho$ es el cambio en la densidad del material granular introducido por el movimiento, ρ_0 es la densidad fuera de la IMZ, correspondiente a la densidad del medio antes de que las partículas deslicen, ρ es la densidad dentro de la IMZ debida al deslizamiento, todas estas densidades tienen unidades de Kg/m^3 , $d\mathbf{s}_F$ corresponde al vector desplazamiento (paralelo a la velocidad de las partículas) del frente de dilatación en un tiempo dt medido en metros, y finalmente $d\mathbf{A}$ es el elemento de área en m^2 cuya normal es paralela a $d\mathbf{s}_F$.

El lado izquierdo de la ecuación 2.1 representa la masa total de las partículas que fluyen a través del frente de dilatación; el lado derecho corresponde al cambio de densidad local provocado por el deslizamiento de partículas. Luego, la velocidad del frente de dilatación $\mathbf{v}_F(r, \theta, \phi) = d\mathbf{s}_F/dt$ en función de la velocidad de las partículas \mathbf{v}_P viene dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{v}_F(r, \theta, \phi) = -\frac{\mathbf{J}}{\Delta\rho} = -\frac{\rho}{\Delta\rho} \mathbf{v}_P(r, \theta, \phi) \quad (2.2)$$

2.2. Modelo Cinemático

Los primeros autores en proponer este modelo fueron Litwiniszyn (1971) y Mullins (1972), el primero describe el movimiento de los granos utilizando un proceso probabilístico para seleccionar el grano que desciende; por otro lado Mullins supuso que los granos fluyen por efecto de la gravedad desplazándose hacia los espacios vacíos que van dejando los granos inferiores mientras descienden dentro del material [7]. Posteriormente, Nedderman y Tüzün (1979) formalizan ambas ideas estableciendo el criterio de considerar los pequeños desplazamientos de los granos como velocidades también pequeñas y formulan una relación de proporcionalidad entre las velocidades horizontales de los granos \mathbf{v}_x y el gradiente de las velocidades verticales a lo largo de la horizontal $\partial\mathbf{v}_y/\partial x$. En 2 dimensiones la relación propuesta por Nedderman y Tüzün es

$$\mathbf{v}_x = -D_p \frac{\partial\mathbf{v}_y}{\partial x} \quad (2.3)$$

Donde D_p es una constante que depende de la naturaleza del material y se conoce como el *coeficiente de difusión* del material, tiene unidades de longitud y por lo general se considera del orden del diámetro de un grano. Para un material incompresible (de densidad constante), se puede unir esta relación de Nedderman y Tüzün con la ecuación de continuidad, la cual tiene la siguiente forma en 2 dimensiones

$$\frac{\partial\mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{v}_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Evaluando la ecuación 2.3 en la ecuación 2.4 obtenemos

$$\frac{\partial\mathbf{v}_y}{\partial y} = D_p \frac{\partial^2\mathbf{v}_y}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Análogamente en 3 dimensiones

$$\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} = D_p \left[\frac{\partial^2 \mathbf{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_z}{\partial y^2} \right] \quad (2.6)$$

Varios autores han estudiado el flujo en contenedores rectangulares, ya sea con material suelto o compactado (ver referencias de [3]). En los experimentos en que el material se encuentra en un estado compactado, el modelo cinemático deja de ajustarse a los resultados debido a los cambios de densidad provocados por el flujo de los granos comprimidos. Entonces, el modelo cinemático se aplica en sistemas con un bajo empaquetamiento de partículas.

Las soluciones de la ecuación 2.6 dependen de la geometría de la apertura y del sistema de coordenadas a utilizar. El modelo cinemático ha sido usado anteriormente para calcular la forma de la IMZ en [3] pero falla debido a que asume una densidad constante en su formulación original, esta densidad constante no es compatible con los cambios internos de volumen, los que ocurren cuando el material comienza a fluir.

Como se indica en [3], al aplicar la ecuación 2.5 para una sola apertura finita de ancho $2R$ centrada en el origen, junto con la condición inicial para la velocidad vertical $\mathbf{v}_y = v_0$ para $-R < x < R$ y $\mathbf{v}_y = 0$ para $x < -R$ y $x > R$, se obtiene la siguiente solución para el desplazamiento vertical de las partículas

$$\mathbf{v}_y(x, y) = -\frac{v_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+R}{\sqrt{4D_p y}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-R}{\sqrt{4D_p y}} \right) \right] \quad (2.7)$$

La función error es solución de la ecuación de difusión para un cambio del tipo escalón, esta función aparece al sumar las infinitas contribuciones lineales siendo la solución de cada línea una función exponencial (ver [8]). Para un material confinado en una región rectangular la solución es la superposición de dos funciones error, de esta manera obtenemos la solución para un apertura finita. En tres dimensiones la solución

a la ecuación 2.6 se obtiene simplemente del producto entre dos funciones error de la forma de la ecuación 2.7, de esta manera la velocidad vertical toma la siguiente forma en el espacio

$$\mathbf{v}_{zP}(x, y, z) = -\frac{v_0}{2} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{erf}\left(\frac{x+R}{\sqrt{4D_p z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-R}{\sqrt{4D_p z}}\right) \\ \operatorname{erf}\left(\frac{y+R}{\sqrt{4D_p z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-R}{\sqrt{4D_p z}}\right) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

En dos dimensiones, si tenemos dos aperturas ubicadas simétricamente una a cada lado del origen sobre el eje horizontal con el mismo ancho $2R$, separadas a una distancia $2L$ y con v_0 independiente para cada apertura, el campo de velocidades total se obtiene de la suma de dos soluciones de la forma de la ecuación 2.7 (ver [3]), centradas en cada uno de los puntos extractivos

$$\mathbf{v}_y(x, y) = -\frac{v_{0(L)}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{erf}\left(\frac{x-L+R}{\sqrt{4D_p y}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L-R}{\sqrt{4D_p y}}\right) \\ -\frac{v_{0(-L)}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{erf}\left(\frac{x+L+R}{\sqrt{4D_p y}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+L-R}{\sqrt{4D_p y}}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde $v_{0(L)}$ y $v_{0(-L)}$ son las velocidades verticales iniciales del material que se encuentra sobre las aperturas centradas en L y $-L$ respectivamente. Si ahora generalizamos la ecuación 2.9 a tres dimensiones, con ambas aperturas de anchos R_x y R_y para los ejes x e y respectivamente, ubicadas a distancias L_x y L_y del origen, obtendremos la componente vertical de la velocidad de las partículas \mathbf{v}_{zP} . Al evaluar esta componente en la ecuación 2.2 podemos escribir finalmente la velocidad vertical del frente de dilatación

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{zF} = & \frac{\rho}{\Delta\rho} \cdot \frac{v_{0(L_x, L_y)}}{2} \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x - L_x + R_x}{\sqrt{4D_p z}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x - L_x - R_x}{\sqrt{4D_p z}} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y - L_y + R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y - L_y - R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) \right] \\
+ & \frac{\rho}{\Delta\rho} \cdot \frac{v_{0(-L_x, -L_y)}}{2} \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x + L_x + R_x}{\sqrt{4D_p z}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x + L_x - R_x}{\sqrt{4D_p z}} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y + L_y + R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y + L_y - R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Las componentes horizontales \mathbf{v}_{xP} y \mathbf{v}_{yP} se obtienen derivando la velocidad vertical \mathbf{v}_{zP} con respecto a x o a y respectivamente y luego multiplicando por $-D_p$, de manera similar a la ecuación 2.3 pero en 3 dimensiones. A continuación se escribe la componente horizontal de la velocidad en la dirección x del frente de dilatación para dos aperturas

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{xF} = & \alpha v_{0(L_x, L_y)} \cdot \left[\exp \left(-\frac{(x - L_x - R_x)^2}{4D_p z} \right) - \exp \left(\frac{(-x - L_x + R_x)^2}{4D_p z} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y - L_y + R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y - L_y - R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) \right] \\
+ & \alpha v_{0(-L_x, -L_y)} \cdot \left[\exp \left(-\frac{(x + L_x - R_x)^2}{4D_p z} \right) - \exp \left(\frac{(-x + L_x - R_x)^2}{4D_p z} \right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y + L_y + R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y + L_y - R_y}{\sqrt{4D_p z}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\text{En donde } \alpha = \frac{\rho}{\Delta\rho} \cdot \frac{D_p}{\sqrt{4\pi D_p z}}$$

Análogamente para la componente “ y ” de la velocidad obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{yF} = \alpha v_{0(L_x, L_y)} & \cdot \left[\exp\left(-\frac{(y - L_y - R_y)^2}{4D_p z}\right) - \exp\left(\frac{(-y - L_y + R_y)^2}{4D_p z}\right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - L_x + R_x}{\sqrt{4D_p z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - L_x - R_x}{\sqrt{4D_p z}}\right) \right] \\
+ \alpha v_{0(-L_x, -L_y)} & \cdot \left[\exp\left(-\frac{(y + L_y - R_y)^2}{4D_p z}\right) - \exp\left(\frac{(-y + L_y - R_y)^2}{4D_p z}\right) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x + L_x + R_x}{\sqrt{4D_p z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x + L_x - R_x}{\sqrt{4D_p z}}\right) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Debido a que las ecuaciones 2.10, 2.11 y 2.12 no son integrables analíticamente, fueron resueltas numéricamente utilizando la función *ode45* de MATLAB, que consiste básicamente en una combinación de los métodos de Runge-Kutta de orden cuatro y cinco; la convergencia fue controlada a través de las tolerancias de error relativa y absoluta, la primera de ellas fue establecida en un $10^{-6}\%$ y se aplica en todas las componentes del vector solución (desplazamiento de las partículas en nuestro caso); la tolerancia absoluta fue fijada en 10^{-6} cm para todas las componentes del vector solución obtenido. Una vez integrado este campo de velocidades, la solución del sistema de ecuaciones entrega las trayectorias de las partículas, las que corresponden en realidad a pequeños desplazamientos que ocurren a medida que se retira material a través de las aperturas; es por esta razón que un intervalo de tiempo infinitesimal dt se interpreta como la extracción de un volumen unitario también infinitesimal; este volumen arbitrario se relaciona con la magnitud escalar v_0 .

2.3. Modelo de Plasticidad

En los primeros acercamientos teóricos para describir flujos granulares frecuentemente se usaban ecuaciones similares a las encontradas en hidrodinámica para describir el movimiento de un fluido; en estos modelos se considera que el tamaño representativo del contenedor es mucho mayor que el tamaño de las partículas del material granular. El motivo para usar estas relaciones está en que las fluctuaciones en fuerzas y velocidades son mucho menores que los valores promedio respectivos para cada una de estas magnitudes. El modelo de Bergmark-Roos es precursor del modelo de Plasticidad, este modelo anterior consiste en un campo de velocidades radial en donde se asume que las partículas se mueven en línea recta desde su lugar de reposo hacia la apertura, además se asume que la aceleración de cada partícula es constante y que cada grano se ve afectado por la fuerza de gravedad y la fuerza de fricción debido a la interacción con sus vecinos (ver [2]), el modelo de Bergmark-Roos tiene el inconveniente de introducir un aumento en la densidad de los granos a medida que éstos se acercan hacia la apertura, un elemento de volumen que desciende experimenta un aumento en su densidad que es función de la longitud de camino, lo que no es factible físicamente.

El modelo de plasticidad utiliza el mismo campo de velocidades radial del modelo de Bergmark-Roos, ambos se describen en coordenadas polares y poseen simetría azimutal; en flujos gravitacionales con esta simetría una buena aproximación es despreciar las componentes azimutales de la velocidad [7]. Asumiendo que el material es incompresible, la velocidad radial debe ser inversamente proporcional a r^2 [7]; usaremos la expresión del campo de velocidades radiales definido en [2] y utilizado posteriormente en [5] para comparar las formas de las IMZ calculadas con resultados experimentales. El campo de velocidades está determinado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_r &= -\frac{v_0 r_D^2}{r^2} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_G}\right) \\
 \mathbf{v}_\theta &= 0 \\
 \mathbf{v}_\phi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

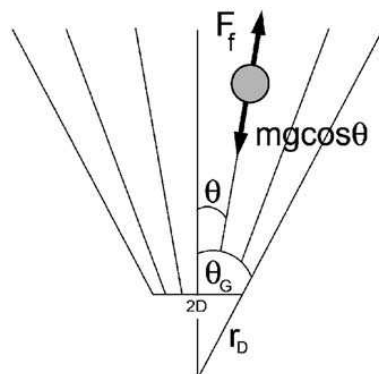


Figura 2.2: Sistema de coordenadas polar utilizado para el modelo de plasticidad, los ángulos se miden desde la vertical. El balance entre las fuerzas de fricción y el peso corresponde al análisis dinámico del modelo de Bergmark-Roos (Imagen obtenida de ref. [2])

En donde v_0 es la velocidad inicial en el centro de la apertura, r_D es la distancia entre el origen y los extremos de la apertura de radio $r_D \sin \theta_G$, θ_G es el ángulo máximo en que hay desplazamiento de los granos, medido desde la vertical (figura 2.2); este ángulo generalmente se considera como el ángulo complementario del ángulo de reposo del material granular. De la misma forma en que se hizo con el modelo cinemático, se incluyó el frente de dilatación para considerar los cambios de densidad locales en el material granular. La igualdad 2.2 toma la siguiente forma para el modelo de plasticidad:

$$\mathbf{v}_F(r, \theta) = -\frac{\rho}{\Delta\rho} \mathbf{v}_P(r, \theta) \quad (2.14)$$

Con el fin de facilitar la representación gráfica en 3 dimensiones del campo de velocidades de las partículas (ecuación 2.13 y lado derecho de la ecuación 2.14), se utilizaron coordenadas cartesianas al integrar cada una de sus componentes para obtener los desplazamientos en cada eje. Escribiendo las velocidades de la ecuación 2.14 en coordenadas cartesianas, aparecen tres ecuaciones; una para cada componente de la velocidad a lo largo de los ejes coordenados que nos permiten calcular y graficar la IMZ.

$$(\mathbf{v}_{xF}, \mathbf{v}_{yF}, \mathbf{v}_{zF}) = -\frac{\rho}{\Delta\rho} (\mathbf{v}_{xP}, \mathbf{v}_{yP}, \mathbf{v}_{zP}) \quad (2.15)$$

Para obtener el campo de velocidades del frente de dilatación primero debemos transformar las velocidades de las partículas (ecuación 2.13) a coordenadas cartesianas. Para un único PE cuyo centro está en el origen, las velocidades cartesianas de las partículas son las siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{xP} &= -\frac{v_0 r_D^2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{\pi}{2\theta_G} \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \right] \\ \mathbf{v}_{yP} &= -\frac{v_0 r_D^2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{\pi}{2\theta_G} \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \right] \\ \mathbf{v}_{zP} &= -\frac{v_0 r_D^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{\pi}{2\theta_G} \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora extendemos estas soluciones para el caso de dos o más puntos extractivos ubicados en el plano (x, y) en las posiciones $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, con velocidades v_1, v_2, \dots, v_n respectivamente. Esta solución se construye a partir de la suma lineal de dos velocidades de la forma obtenida en las ecuaciones 2.16

$$\mathbf{v}_F = r_D^2 \frac{\rho}{\Delta\rho} \sum_{i=1}^n v_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \cos \left(\frac{\pi\theta_i}{2\theta_G} \right) \quad (2.17)$$

$$\text{En donde: } \theta_i = \arctan \left(\frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}{z} \right)$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$r_i = (x_i, y_i, 0)$$

$$\mathbf{v}_F = \left(\frac{\rho}{\Delta\rho} \mathbf{v}_{xP}, \frac{\rho}{\Delta\rho} \mathbf{v}_{yP}, \frac{\rho}{\Delta\rho} \mathbf{v}_{zP} \right)$$

Para el modelo cinemático también se pueden determinar las velocidades para más de dos aperturas, basta agregar términos similares a los de las ecuaciones 2.10 y 2.11, siendo conocidas las posiciones de cada apertura, y sus áreas rectangulares obtenidas a partir de sus anchos en los ejes x e y .

La ecuación 2.17 también fue resuelta numéricamente usando la función *ode45* de MATLAB, obteniendo las líneas de corriente para cada modelo y la geometría de las IMZ para cada paso temporal. El control de la convergencia de *ode45* fue implementado con los mismos valores de tolerancias absoluta y relativa usados con el modelo cinemático (ver sección 2.2).

A continuación en el Capítulo 3 se presentan los cálculos realizados con ambos modelos para estudiar la interacción de dos IMZ al modificar la separación de aperturas, el volumen extraído, etc. A partir de la ecuación 2.17 se realizaron los cálculos necesarios para reproducir los resultados experimentales de Trueman [4], con trece puntos extractivos en extracción simultánea; estos resultados se encuentran en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Interacción de 2 IMZ: Evaluación de parámetros

A partir de las expresiones analíticas descritas en el Capítulo 2 podemos obtener las líneas de corriente para el modelo cinemático (ecuaciones 2.10 y 2.11) y para el modelo de plasticidad (ecuación 2.17). A medida que se realizan extracciones, más partículas ingresan en la IMZ y por lo tanto las líneas de corriente que llegan hasta la frontera crecen con cada extracción; para graficar la superficie de la IMZ se unen los puntos extremos de estas líneas de corriente.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al evaluar las expresiones analíticas de cada modelo para las IMZ generadas por 2 aperturas en extracción simultánea, modificando la separación de las aperturas, el coeficiente de difusión, el ángulo máximo de desplazamiento y el volumen extraído. En primer lugar se presentan los resultados del modelo cinemático y luego se exponen los resultados del modelo de plasticidad.

3.1. Modelo Cinemático

Para este modelo se modificaron de manera independiente los siguientes parámetros: la distancia o separación entre aperturas Δd , con valores de 10, 8, 6, 4 y 2 *cm*; el volumen extraído por una de las aperturas, a razones de 1:2, 1:3 y 1:4, en donde el volumen de referencia corresponde a 100 *cm*³ por cada extracción y finalmente el coeficiente de difusión D_p , que convencionalmente se elige proporcional al tamaño del grano, con valores de 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 y 0,5 *cm*. El área de las aperturas es cuadrada y con un valor constante de 1 *cm*² para todos los casos calculados; el volumen extraído por cada apertura viene dado por la siguiente expresión

$$v_k = Q_k \cdot N_p \quad (3.1)$$

En donde Q_k corresponde al volumen unitario, medido en *cm*³ que es extraído en N_p pasos por la apertura “ k ” (apertura 1 o 2) hasta llegar al volumen total de la extracción que esté siendo calculada. Para todos los valores de volumen evaluados se fijó un valor de pasos de $N_p = 10$ y se modificó Q_k según los requerimientos de cada caso.

Para graficar la IMZ se utilizó una grilla de puntos, los que inicialmente se ubican sobre el plano xy ($z = 0$) a distancias regulares (formando cuadrados de 0,2 *cm* de lado) y de forma simétrica con respecto a los puntos centrales de ambos PE.

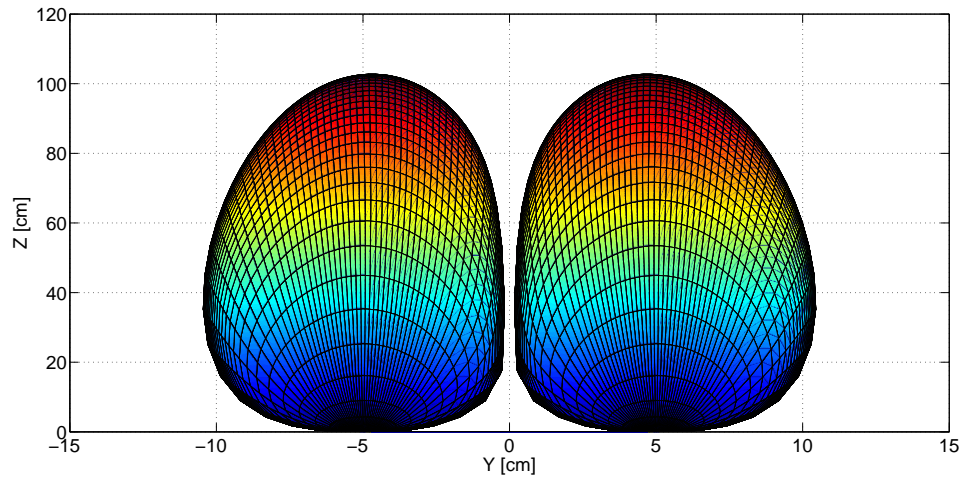


Figura 3.1: Vista frontal de un caso de extracción por 2 aperturas para el modelo cinemático.

El eje horizontal corresponde al eje y , dirección en que se midieron los anchos de las IMZ.

A lo largo del eje vertical z fueron medidas las alturas máximas de las IMZ.

Parámetros utilizados: $D_p = 0,1 \text{ cm}$, $v_1 = v_2 = 2000 \text{ cm}^3$, $\Delta d = 10 \text{ cm}$.

Las geometrías de las IMZ son frecuentemente evaluadas en este tipo de estudios midiendo sus alturas y anchos máximos; las que han sido medidas en las direcciones paralelas a los ejes z e y respectivamente (ver figura 3.1). En la mayoría de las simulaciones el ancho a lo largo de la dirección de la interacción (eje y) se ve más afectado que en la dirección perpendicular a ésta (eje x); en la figura 3.1 el punto extractivo que no sufre modificaciones para los cambios en el volumen extraído es el de la izquierda, el cual será denominado por PE1; mientras que el de la derecha será identificado como PE2. A continuación se presentan para el modelo cinemático los gráficos de las alturas y anchos obtenidos para cada parámetro evaluado.

- Separación entre puntos extractivos

En la figura 3.2 se muestran las curvas de las alturas medidas para ambas IMZ a medida que se modifica la separación entre los PE

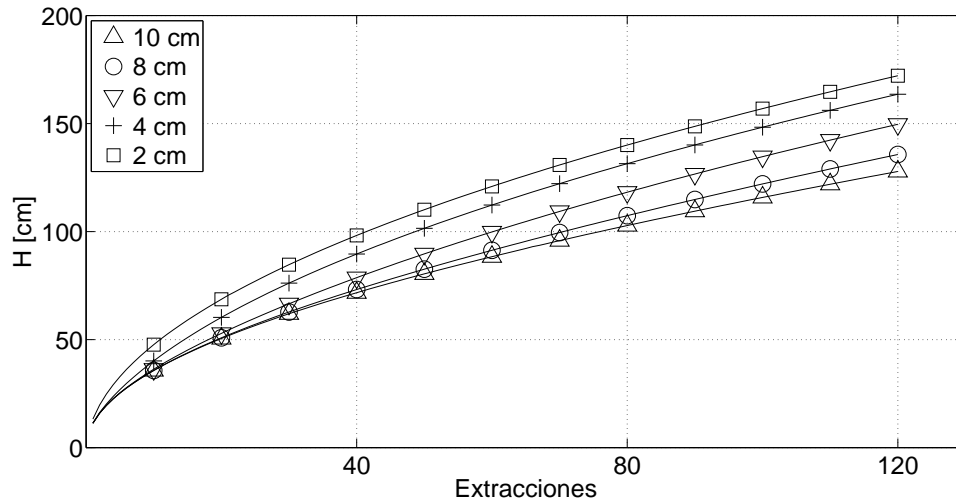


Figura 3.2: Alturas máximas $H[cm]$ de las IMZ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para diferentes separaciones entre aperturas en cm , modelo cinemático

Se observa que, en general, a mayor separación entre los puntos de extracción la altura máxima de las zonas de movimiento crece más lentamente. Al reducir la separación entre las aperturas se requiere de menos extracciones para lograr una interacción notoria; en esta interacción las IMZ se deforman aumentando su altura con mayor rapidez. Esto se debe a que las líneas de corriente de las partículas no pueden cruzarse, de manera que al acercarse se estiran a lo largo de la vertical.

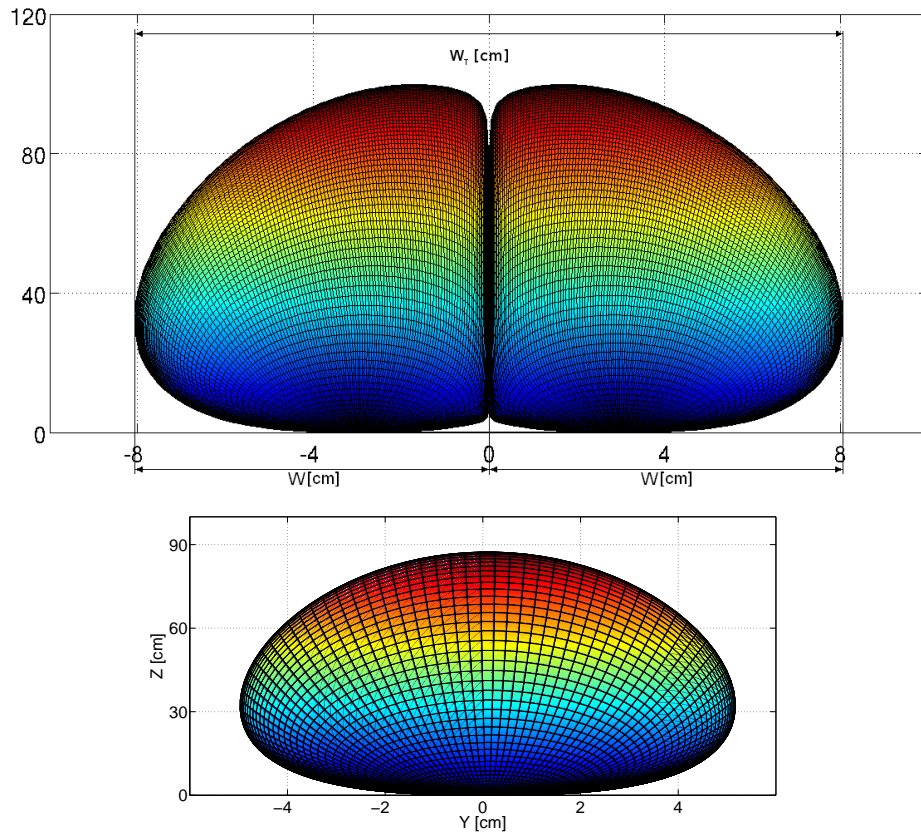


Figura 3.3: Arriba: Diferencia entre anchos totales W_T y unitarios W de las IMZ, ambos medidos en cm . Las unidades de los ejes son también cm y los parámetros usados para obtener la figura son: $D_p = 0,1 cm$, $v_1 = v_2 = 6000 cm^3$, $\Delta d = 6 cm$.
Abajo: IMZ unitaria obtenida con $D_p = 0,1 cm$ y $v_1 = 6000 cm^3$.

Una vez alcanzada la interacción entre IMZ, es claro que la forma de cada una de ellas se achata horizontalmente en un costado y se alarga verticalmente. Al continuar extrayendo material luego de la interacción, se llega a un estado en que la forma total de ambas IMZ se asemeja a la de una IMZ aislada, generada por un solo punto de extracción tal como se observa en el ejemplo de la figura 3.3 (la escala de los ejes ilustra de manera exagerada la fuerte interacción entre IMZ). Se midieron los anchos de cada IMZ unitaria (W) para todas las extracciones y, en los casos en que se observó este estado, fueron medidos también los anchos de la IMZ total W_T . Se presentan a continuación los resultados para ambas series de datos en las figuras 3.4 y 3.5 respectivamente.

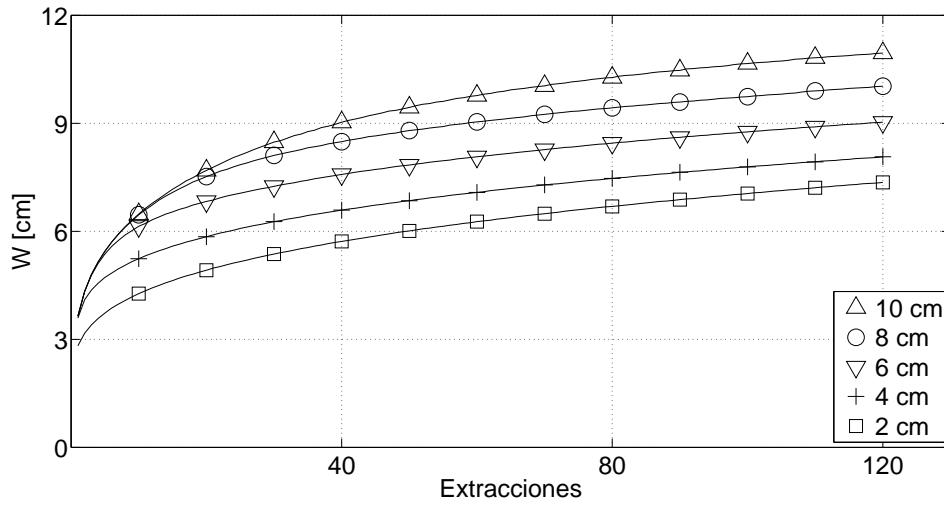


Figura 3.4: Anchos máximos unitarios $W[cm]$ de las IMZ, obtenidos en función de la cantidad de extracciones para diferentes separaciones entre aperturas, modelo cinemático

Al observar la figura 3.4 podemos ver que para una mayor separación entre puntos extractivos, aumenta el ancho de las IMZ en interacción; como señalamos anteriormente al comentar la figura 3.2, mientras mayor sea la separación entre aperturas se requieren más extracciones para lograr que las IMZ interactúen; lo que se puede constatar en la figura 3.4 mirando los puntos correspondientes a las extracciones décima y vigésima, especialmente en lo cerca que se encuentran los anchos máximos para 8 y 10 *cm* de separación, lo que indica que la interacción aún es despreciable para esas distancias y por ende los anchos se deforman levemente.

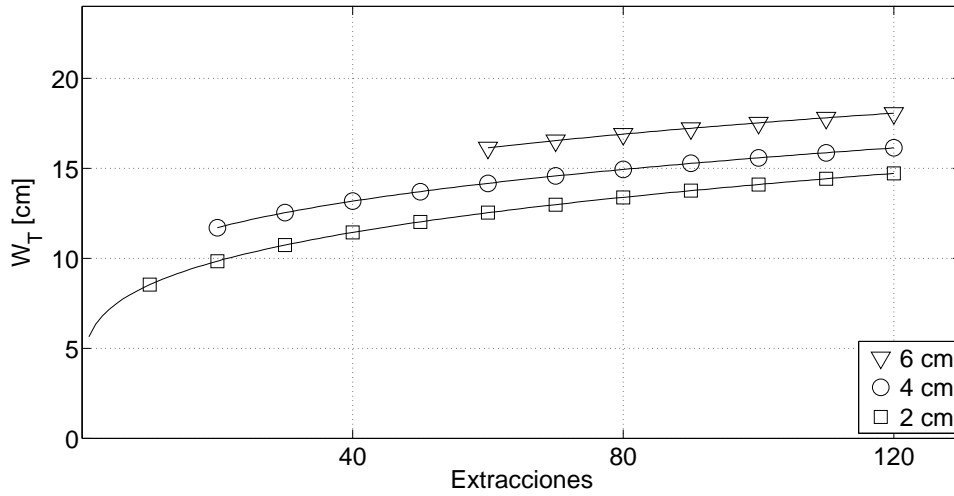


Figura 3.5: Anchos máximos totales W_T [cm] de la IMZ obtenida en función de la cantidad de extracciones para diferentes separaciones entre aperturas, modelo cinemático

Como se aclara en el comentario de la figura 3.3, si la interacción entre las IMZ es lo suficientemente fuerte, la forma de la IMZ total se asemeja a la de una IMZ aislada. Los anchos máximos totales medidos para estos casos (figura 3.5) evolucionan en la misma proporción que los anchos máximos de las IMZ unitarias (figura 3.4), esto se debe a que el ancho total es el doble del ancho unitario respectivo. Se destaca que solamente para una separación de 2 cm se obtuvo una IMZ total en todas las extracciones y, a medida que aumentamos la separación, se requieren de más extracciones para formar la IMZ total. Para todas las extracciones calculadas con separaciones de 8 y 10 cm la interacción no es lo suficientemente fuerte para lograr este estado.

- Coeficiente de Difusión

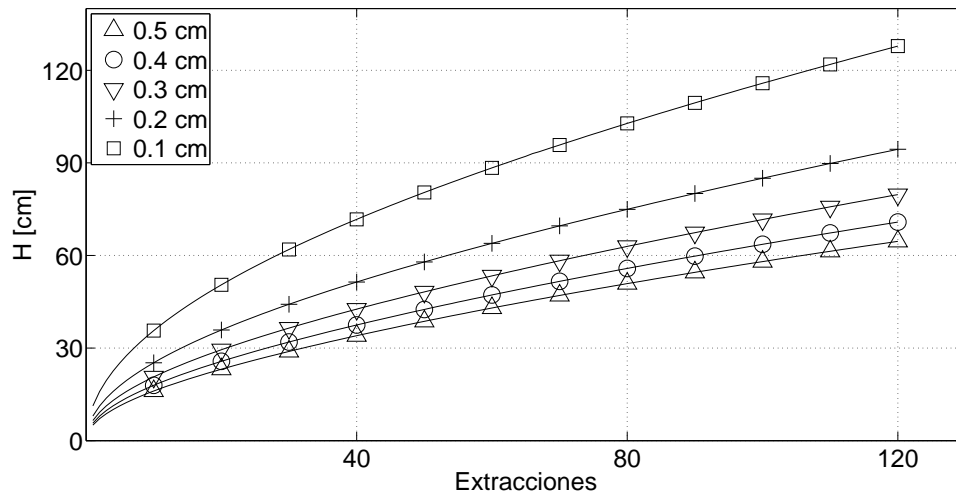


Figura 3.6: Alturas máximas $H[cm]$ de las IMZ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para distintos coeficientes de difusión del material granular, modelo cinemático

En la figura 3.6 se observa que al aumentar el coeficiente de difusión, las alturas disminuyen en todas las extracciones. Para las curvas con un mayor D_p las alturas son más cercanas, por ejemplo, si observamos las curvas correspondientes a un D_p de 0,4 y 0,5 cm vemos que sus valores de alturas son mucho más cercanos que los de las curvas generadas con D_p de 0,1 y 0,2 cm . Un caso extremo de disminución de las alturas al incrementar D_p se observa en la extracción 120, en donde la altura máxima de las IMZ generadas con $D_p = 0,5 cm$ es de poco más de 60 cm , aproximadamente la mitad de la altura respectiva obtenida en el caso $D_p = 0,1 cm$, cuyo valor supera los 120 cm .

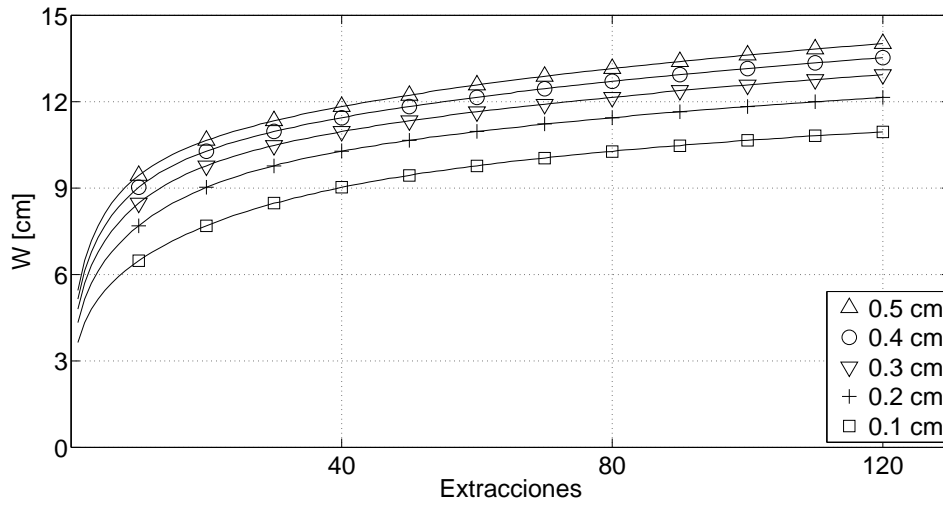


Figura 3.7: Anchos máximos $W[cm]$ de las IMZ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para distintos coeficientes de difusión del material granular, modelo cinemático

Se aprecia en la figura 3.7 que ambas IMZ aumentan sus anchos cuando se incrementa D_p , este aumento en los anchos es cada vez menor en magnitud a medida que se usa un coeficiente de difusión mayor. Comparando las magnitudes de las curvas, el caso más extremo con $D_p = 0,5 \text{ cm}$ en la extracción 120 apenas supera los 14 cm lo que corresponde a un aumento de poco menos de un tercio del ancho respectivo obtenido con $D_p = 0,1 \text{ cm}$, de unos 11 cm . Este mismo caso extremo fue discutido para las alturas en la figura 3.6 obteniendo una disminución cercana a los 60 cm ; podemos decir entonces que el coeficiente de difusión determina en gran manera la forma de las IMZ en el modelo cinemático desarrollado y que al incrementar su valor disminuye considerablemente la altura de las IMZ y aumenta sus anchos en una pequeña cantidad.

• Volumen extraído relativo

En el gráfico siguiente se tienen las alturas máximas de las IMZ obtenidas para el caso de variación del volumen extraído por una apertura.

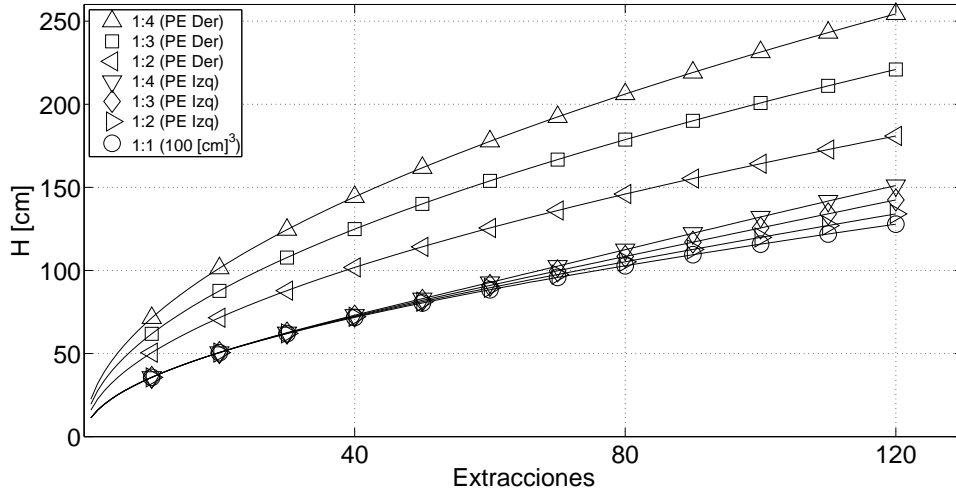


Figura 3.8: Alturas máximas $H[\text{cm}]$ de las IMZ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para cambios en el volumen extraído por el PE 2, modelo cinemático. La curva con círculos representa el caso en que se extraen 100 cm^3 de material en cada extracción por ambos PE.

Observando el gráfico de la figura 3.8 se distingue un rápido crecimiento en todas las curvas de altura para las IMZ formadas por el PE derecho, mientras que para las alturas de la IMZ izquierda el aumento es de menor magnitud; y comienza a ser distinguible alrededor de la extracción número 50. Por lo tanto, en general, al aumentar el volumen extraído por un PE tendremos un aumento considerable en la IMZ respectiva, y aumentará en menor cantidad la altura de la IMZ vecina.

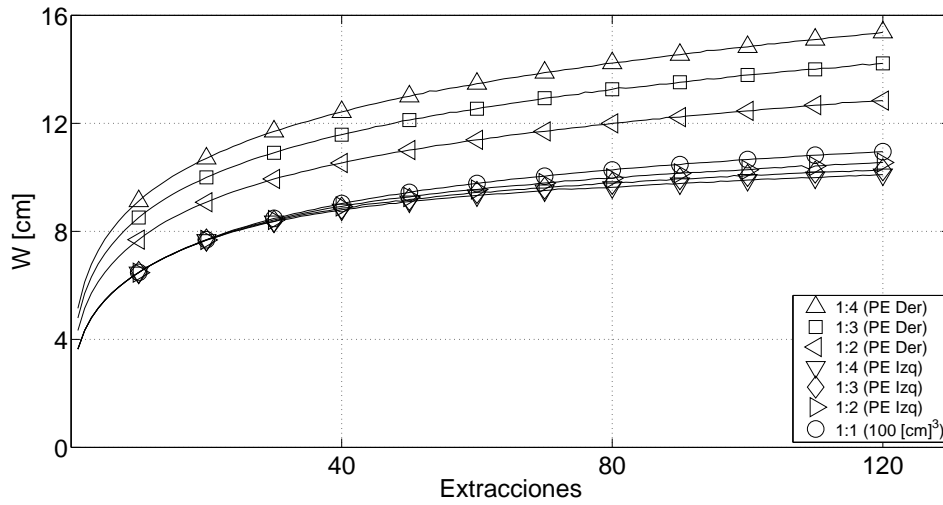


Figura 3.9: Anchos máximos $W[cm]$ de las IMZ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para cambios en el volumen extraído por el PE 2, modelo cinemático. La curva con círculos representa el caso en que se extraen 100 cm^3 de material en cada extracción por ambos PE

En la figura 3.9 se aprecia que el ancho de la IMZ derecha crece al aumentar el volumen de material retirado por el PE derecho (PE2) y, por otro lado, disminuye el ancho de la IMZ izquierda si se aumenta el volumen extraído por el PE2; el ensanchamiento de la IMZ mayor provoca que ancho de la IMZ menor disminuya, sin embargo esta disminución tiende a atenuarse a medida que se extrae un volumen mayor por el PE2.

3.2. Modelo de Plasticidad

En la evaluación del modelo de plasticidad se variaron los siguientes parámetros: la distancia o separación entre aperturas Δd , con valores de 10, 8, 6, 4 y 2 *cm*; el volumen extraído por una de las aperturas, a razones de 1:2, 1:3 y 1:4, en donde el volumen de referencia corresponde a 100 *cm*³ por extracción y por último el ángulo máximo de desplazamiento θ_g con valores de 45°, 40°, 35°, 30°, 25°, 20° y 15°. El área de las aperturas es circular y con un valor constante de 1 *cm*² para todos los casos evaluados. Analíticamente el volumen extraído por cada apertura viene dado por la siguiente expresión:

$$v_k = v_{0k} \pi r_D^2 \sin^2(\theta_G) N_p \quad (3.2)$$

En donde v_{0k} corresponde a la velocidad inicial (medida en *cm/s*) en el centro de la apertura asociada al volumen unitario $v_{0k} \pi r_D^2 \sin^2(\theta_G)$ que es extraído en N_p pasos por la apertura “*k*” (apertura 1 o 2) hasta llegar al volumen total correspondiente a la extracción que esté siendo calculada. Para todas las extracciones se fijó un valor de pasos de $N_p = 10$ y se modificó v_{0k} de acuerdo al volumen necesario para cada extracción, para los casos en que se varió θ_g se debió ajustar también un valor de r_D (en *cm*) para mantener el área de la apertura constante, la cual viene dada por $\pi r_D^2 \sin^2(\theta_G)$ (ver figura 2.2); en los demás casos el valor de r_D permaneció constante. La grilla usada para graficar es de las mismas características a la utilizada para el modelo cinemático, solo se modificó la separación entre sus puntos (para el modelo de plasticidad forman cuadrados de 0,5 *cm* de lado).

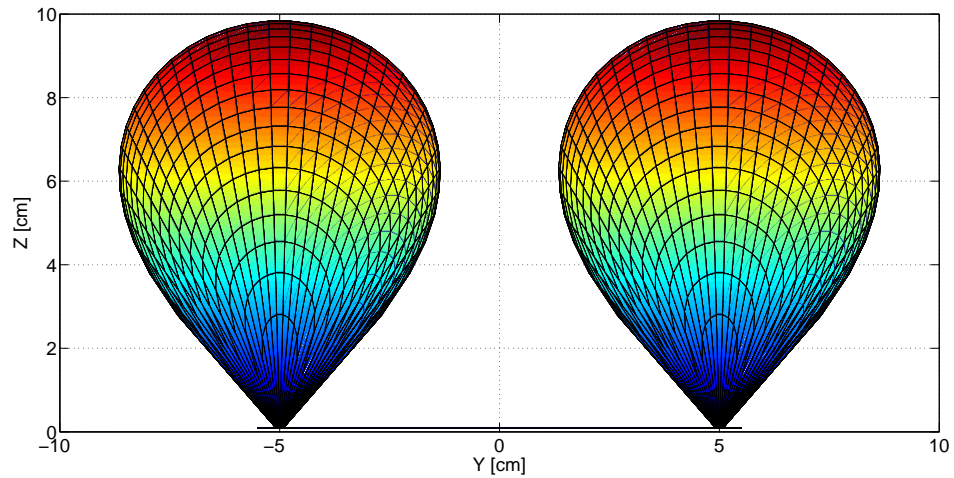


Figura 3.10: Vista frontal de un caso de extracción por 2 aperturas para el modelo de plasticidad.

El eje horizontal corresponde al eje y , dirección en que se miden los anchos de las IMZ.

A lo largo del eje vertical z se midieron las alturas máximas de las IMZ.

Parámetros utilizados: $\theta_g = 41^\circ$, $v_1 = v_2 = 100 \text{ cm}^3$, $\Delta_d = 10 \text{ cm}$.

Al igual que con el modelo cinemático, las geometrías de las IMZ fueron evaluadas de acuerdo a sus alturas y anchos máximos; las que han sido medidas en las direcciones paralelas a los ejes z e y respectivamente (Ver figura 3.10). En la mayoría de las simulaciones el ancho a lo largo de la dirección de la interacción (eje y), se ve más afectado que el ancho en la dirección perpendicular (eje x); en la figura 3.10 el punto extractivo que no sufre modificaciones para los cambios en el volumen extraído es el de la izquierda, denotado por PE1; mientras que el de la derecha será denotado por PE2. A continuación se presentan los gráficos de las alturas y anchos obtenidos para cada parámetro evaluado del modelo de plasticidad.

- Separación entre puntos extractivos

Con el fin de presentar los resultados con mayor claridad, en las figuras 3.11 y 3.12 se han incluido solamente las separaciones entre PE de 2, 6 y 10 *cm* debido a que los valores de alturas para todas las curvas son bastante cercanos y al graficar todas las series de datos los puntos son demasiado cercanos.

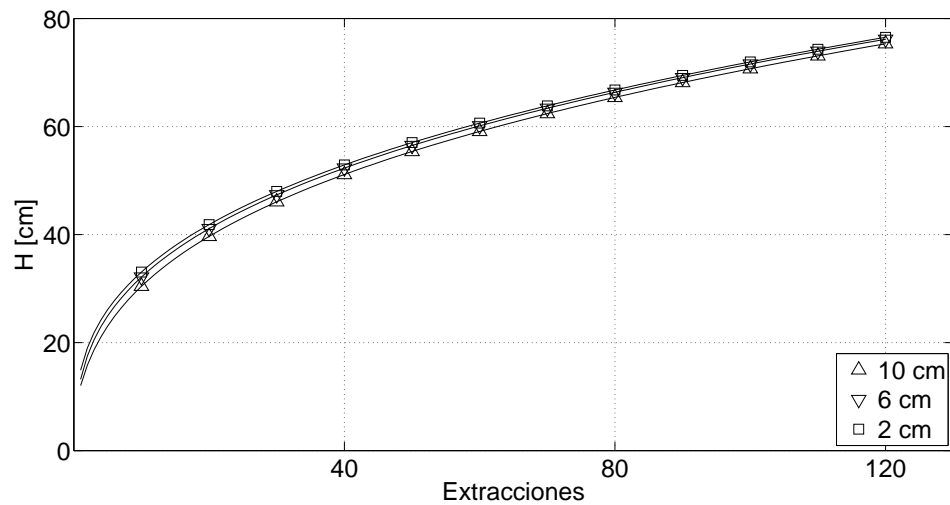


Figura 3.11: Alturas máximas $H[cm]$ de las IMZ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para distintas separaciones entre PE, modelo de plasticidad

En la figura 3.11 se observa que, a medida que se acercan los PE las alturas máximas de las IMZ crecen levemente, este aumento en las alturas es cada vez menor a medida que se extrae más material; todas las curvas se asemejan a una función logarítmica. Podemos decir entonces que al variar la separación entre los PE las alturas de las IMZ se ven afectadas en muy poca cantidad y que, al aumentar la cantidad de material extraído, el cambio en las alturas se hace cada vez más despreciable.

A continuación se presentan los anchos de las IMZ, obtenidos al cambiar la separación entre los PE. Debido a que se observó una fuerte interacción desde las primeras extracciones, presentaremos solamente los anchos de la IMZ total observada para todas las extracciones (Ver figura 3.3 y su discusión posterior sobre IMZ total y unitaria).

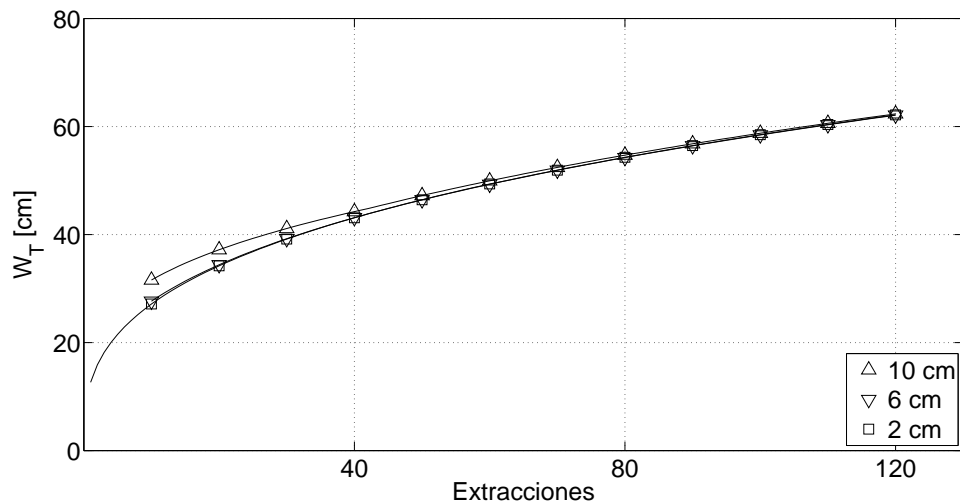


Figura 3.12: Anchos máximos totales $W_T[cm]$ obtenidos en función de la cantidad de extracciones para distintas separaciones entre los PE, modelo de plasticidad

Para los anchos de la figura 3.12 podemos observar diferencias significativas dentro de las primeras 80 extracciones, mientras mayor separación entre las aperturas más rápidamente crecen los anchos en las primeras extracciones, sin embargo para un número de extracciones suficientemente alto (alrededor de 90 para esta evaluación) los anchos terminan acercándose en magnitud llegando a una diferencia entre ellos prácticamente despreciable; similar al comportamiento encontrado para las alturas máximas en la figura 3.11.

Para un mismo número de extracciones mientras más cerca estén ubicados los PE menor será la cantidad de espacio que cubran ambas IMZ. De la misma manera que al evaluar la separación en el modelo cinemático, a mayor cercanía de los PE se requiere de menos extracciones para que las IMZ interactúen.

• **Ángulo máximo de desplazamiento θ_G**

A continuación se grafican los valores obtenidos para las alturas máximas en función de las extracciones para distintos valores de θ_G , ángulo máximo para el desplazamiento del material granular (ver ecuación 2.13)

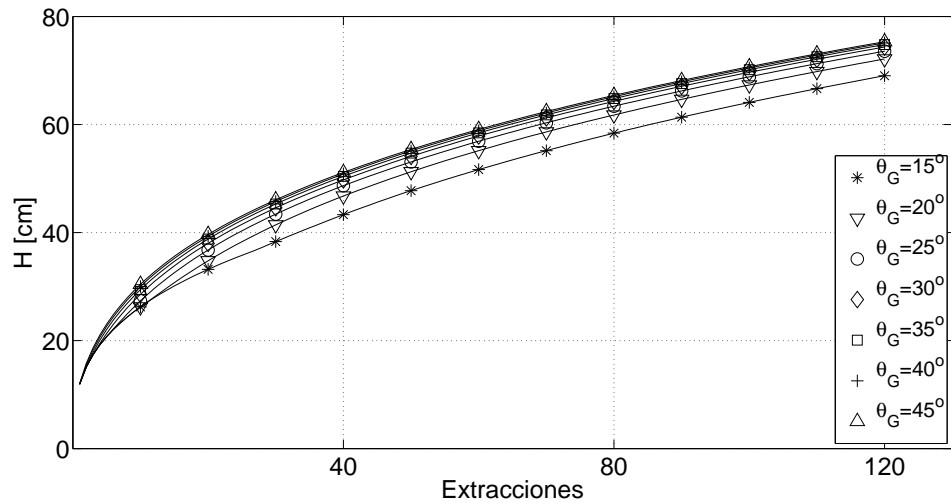


Figura 3.13: Alturas máximas $H[cm]$ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para cambios en el ángulo máximo de desplazamiento θ_G para ambos PE, modelo de plasticidad

Como podemos observar en la figura 3.13 mientras más pequeño es θ_G , más lentamente aumentan las alturas con cada extracción, esto se debe a que con un mayor θ_G se incrementa el ancho del cono que contiene a la IMZ, provocando interacción y aumento de las alturas. Además se observa que para mayores ángulos de desplazamiento las curvas se acercan cada vez más, los cambios en la altura de las IMZ son muy leves para ángulos de desplazamiento de 30° y mayores.

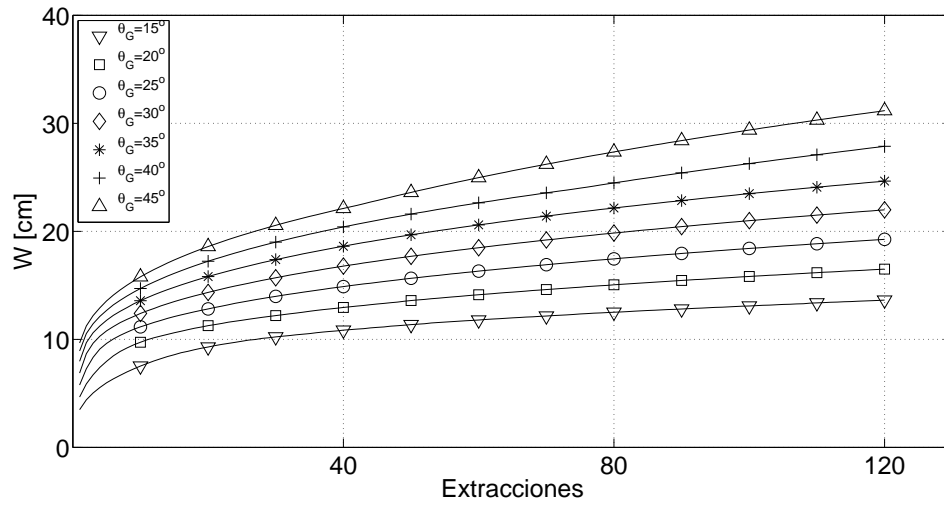


Figura 3.14: Anchos máximos $W[cm]$ obtenidos en función de la cantidad de extracciones para cambios en el ángulo máximo de desplazamiento θ_G para ambos PE, modelo de plasticidad

En la figura 3.14 es claro que mientras menor sea θ_G tendremos menores anchos para ambas IMZ generadas; un resultado que es de esperar ya que al disminuir θ_G se disminuye el ancho del volumen cónico en donde se puede mover el material para este modelo (ver figura 2.2), lo que restringe el espacio en donde pueden descender los granos y en consecuencia disminuye el ancho de la IMZ.

Además podemos observar de la figura 3.14 que para un menor θ_G la tasa de crecimiento de los anchos es también menor a medida que se realizan extracciones, para la curva $\theta_G = 15^\circ$ los anchos no sobrepasan las 14 unidades de longitud y mirando las demás curvas es claro que a mayor valor de θ_G , mayor es la pendiente de la curva.

• Volumen extraído relativo

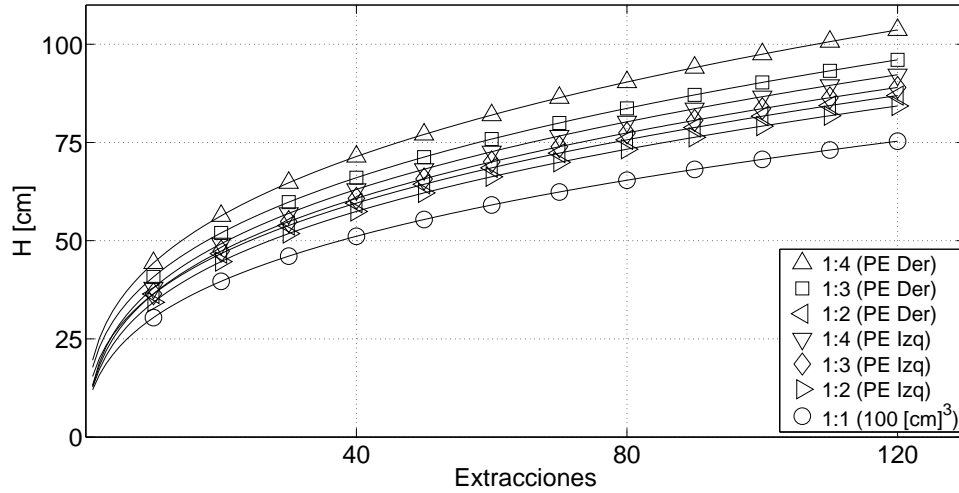


Figura 3.15: Alturas máximas $H[cm]$ obtenidas en función de la cantidad de extracciones para cambios en el volumen extraído por el PE2, modelo de plasticidad. La curva con círculos representa el caso en que se extraen 100 cm^3 de material en cada extracción por ambos PE.

En la figura 3.15 se observa que al aumentar el volumen extraído por el PE2 crecen las alturas de ambas IMZ generadas. De manera evidente, crece más rápidamente la altura de la IMZ generada por el PE2, y también existe un crecimiento de menor magnitud en la altura de la IMZ menor para todos los casos medidos; la distancia entre aperturas debe ser suficientemente pequeña como para que exista interacción, de otra manera las dimensiones de la IMZ menor corresponden a las de una IMZ aislada.

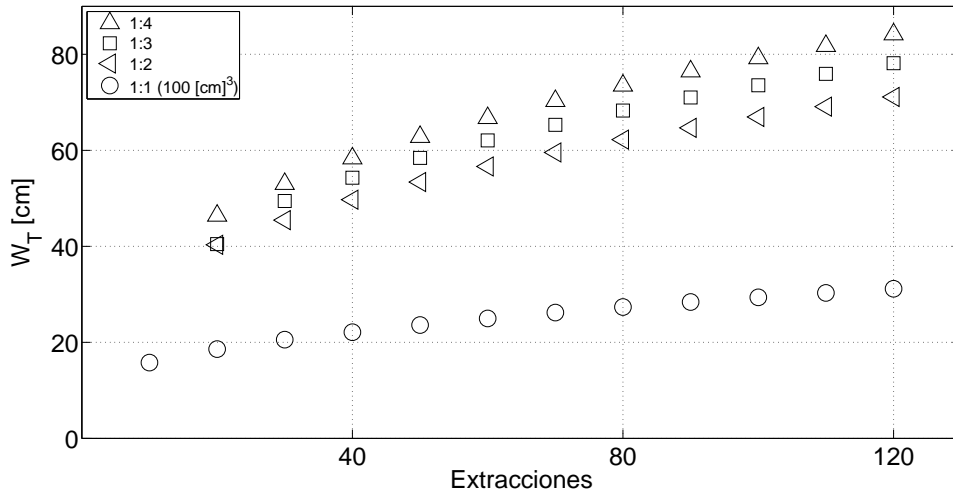


Figura 3.16: Anchos máximos totales $W_T[cm]$ obtenidos en función de la cantidad de extracciones para cambios en el volumen extraído por el PE2, modelo de plasticidad. La curva con círculos representa el caso en que se extraen 100 cm^3 de material en cada extracción por ambos PE

En la figura 3.16 vemos que al incrementar el volumen extraído por el PE2, crece el ancho total de la IMZ, para casi todos los casos evaluados (salvo en la extracción número 10 para todas las curvas) la interacción es fuerte y la forma completa de ambas IMZ es similar a la forma de una IMZ generada por una apertura. Al medir los anchos separadamente, se observó que para la IMZ del PE1 su ancho disminuye más rápidamente a medida que se extrae más material por el PE2. Este resultado da cuenta de que, en la interacción, la IMZ de mayor tamaño ocupa una gran parte del espacio central y comprime cada vez más el ancho de la IMZ menor a medida que se realizan extracciones.

Capítulo 4

Comparación con resultados experimentales

Desafortunadamente, los modelos cinemático y de plasticidad no describen completamente el problema real del método de excavación por bloques en minería subterránea, ya que existen condiciones reales que han sido poco estudiadas, como son los distintos tamaños de las rocas, la humedad y la temperatura ambientales. Incluir estos parámetros complicaría el desarrollo de una herramienta de predicción, por esto los modelos que han sido objeto de estudio pretenden acercarse al problema de manera simplificada, considerando solamente los aspectos más generales del problema (flujo gravitacional, densidad del material, tamaño uniforme de rocas, etc.). Con el objetivo de verificar que estos modelos simplificados generen resultados compatibles con el comportamiento de un caso real análogo, es necesario validar nuestros cálculos a través de la comparación con resultados experimentales generados en condiciones controladas.

Se compararon los cálculos del modelo de plasticidad con resultados experimentales generados por Trueman y sus colaboradores [4, 9] en una maqueta a escala 1:100, la base del contenedor tiene dimensiones de 239×275 *cm*, y fue llenado hasta una altura de 330 *cm*. El material granular usado fue filita machacada, cuyo tamaño medio de grano fue de 8 *mm*, medido por los autores; los puntos de extracción en la maqueta son cuadrados

de $12 \times 10 \text{ cm}$. El experimento reproducido con nuestros cálculos corresponde a trece PE en extracción simultánea, los que se encuentran separados a una distancia constante de 48 cm en configuración triangular.

Al obtener los resultados presentados para el modelo de plasticidad en la sección 3.2 se observó que al haber interacción entre dos IMZ sus contornos se aplanaban en la zona de contacto entre ellas (ver figura 4.1); para más de 2 IMZ se llega a un punto de saturación en que los anchos de las IMZ dejan de crecer en la dirección de la interacción. En la gran mayoría de los casos estudiados en la sección 3.2 la interacción provoca un alargamiento en las alturas de las IMZ con respecto a la altura de una IMZ aislada generada con los mismos valores para cada parámetro (v_0 , θ_G y r_D).

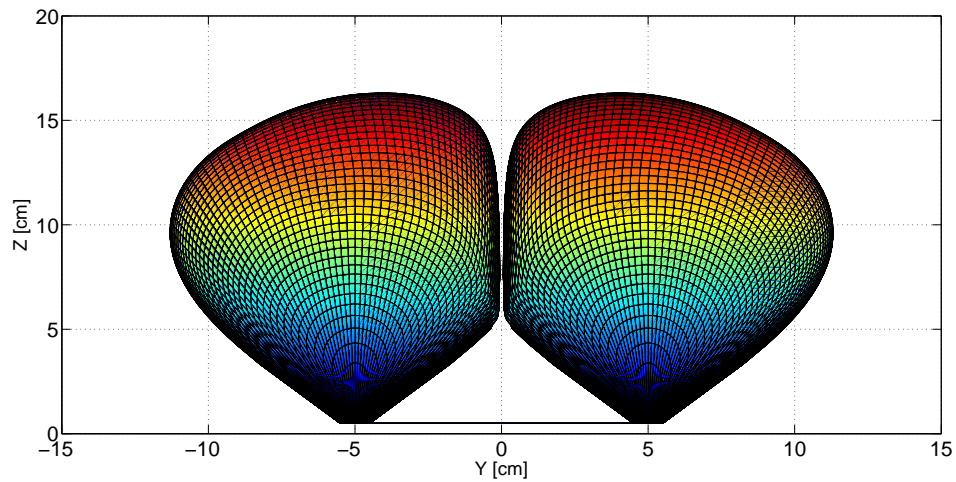


Figura 4.1: Deformación observada en los contornos adyacentes de dos IMZ en interacción. Gráfica generada con $\Delta d = 10 \text{ cm}$, $\theta_G = 41^\circ$, $v_1 = v_2 = 200 \text{ cm}^3$ y $r_D = 0,86 \text{ mm}$.

En los experimentos de Trueman y sus colaboradores en la referencia [4] también se observa una interacción entre las IMZ que finalmente satura sus anchos, especialmente para las IMZ correspondientes a las aperturas centrales que entran en contacto con más de una IMZ vecina.

En las siguientes secciones mostraremos que usando el modelo de Plasticidad hemos logrado reproducir los valores de los anchos de las IMZ obtenidas experimentalmente por Trueman y sus colaboradores en [4]; también se ha reproducido el comportamiento de interacción entre 2 o más IMZ y la saturación del crecimiento de sus anchos. El material usado en el montaje experimental de [4] fue cuantificado en masa por los autores (10 Kg por extracción); dado que para el modelo de Plasticidad el material extraído debe ser cuantificado en volumen y, al no conocer la densidad del bulk que nos permite convertir masa a volumen y viceversa, se optó por generar una curva que permitiera transformar estas cantidades, esta calibración se presenta en la sección 4.1. Luego con este volumen equivalente fueron reproducidas las condiciones del experimento $8mm-T_4$ (ver [4]), los resultados de los cálculos y la comparación entre los anchos simulados y experimentales se presentan en la sección 4.2.

4.1. Calibración Masa-Volumen

Para obtener un volumen representativo de la cantidad de material retirado en cada extracción del experimento *8mm-T4* de [4], fue necesario fijar los valores de los parámetros de la ecuación 3.2 a cantidades que representaran las características del montaje utilizado por Trueman y sus colaboradores. El radio de la apertura r_D y el ángulo máximo de desplazamiento θ_G se obtuvieron de las condiciones experimentales (tamaño de puntos extractivos y ángulo de fricción del material) y el parámetro de ajuste utilizado para obtener los volúmenes retirados en las extracciones fue v_0 . Para realizar la calibración se ingresaron distintos valores de v_0 al programa implementado en MATLAB hasta que la diferencia entre el valor experimental y el valor calculado para el ancho de la IMZ fuera inferior al 0,1 % del ancho experimental de la IMZ. Se escogió sólo una apertura ¹ para obtener la curva de transformación, con el fin de calibrar los anchos a partir de un solo punto extractivo aislado; sólo se usaron los anchos de las primeras cuatro extracciones (10, 20, 30 y 40 Kg), de manera que al calibrar los anchos de la IMZ no hubiera influencia de las interacciones con las IMZ vecinas, las que se observan desde los 50 Kg extraídos en adelante.

En primer lugar, se determinó el ángulo máximo de desplazamiento θ_G para la *flita*, que corresponde a un material no cohesivo con un ángulo de fricción interna de $\theta_f = 41^\circ$ [4]. De acuerdo con el análisis de fallas de Mohr-Coulomb [7] el ángulo de fricción interna coincide con el ángulo de reposo cuando el material es no cohesivo; por otro lado, tenemos que el ángulo de reposo (medido desde la horizontal) y el de desplazamiento máximo (medido desde la vertical) son complementarios, de aquí se obtuvo que $\theta_G = 90^\circ - \theta_f = 49^\circ$.

Los puntos extractivos del montaje utilizado por Trueman son rectangulares, las dimensiones de estos puntos sólo se presentan gráficamente en la figura 2b de la referencia [4]. Se buscó un valor específico de las dimensiones de las aperturas en una publicación anterior de los mismos autores [9], en donde se explican las características de la misma

¹Punto de extracción *dp9* en la figura 7 de la referencia [4]

maqueta a escala y la metodología empleada para trabajar en ella; el área rectangular de las aperturas fue de $12 \times 10 \text{ cm}$. Dado que para el modelo de Plasticidad las aperturas son circulares, se igualó esta área rectangular con el área circular $\pi r_D^2 \sin^2 \theta_G$, una vez obtenido $\theta_G = 49^\circ$ se calculó el radio de las aperturas a utilizar en nuestras simulaciones con el modelo de plasticidad obteniendo el valor de $r_d = 8,19 \text{ cm}$.

| M (Kg) | W_e (cm) | v'_0 (cm) | W_c (cm) | $ W_e - W_c $ (cm) | Volumen (cm^3) |
|--------|------------|-------------|------------|--------------------|---------------------------|
| 10 | 178,95 | 50,3 | 178,96 | 0,01 | 6035,24 |
| 20 | 247,37 | 66,4 | 247,34 | 0,03 | 15934,00 |
| 30 | 289,04 | 70,6 | 288,98 | 0,06 | 25412,82 |
| 40 | 320,55 | 72,3 | 320,60 | 0,05 | 34699,65 |

Tabla 4.1: Valores utilizados en la calibración masa-volumen, la diferencia entre los anchos experimental W_e y calculado W_c no supera el 0,1 % del ancho de la IMZ experimental

En la tabla 4.1 se resumen los valores obtenidos en la calibración, M corresponde la masa total de material retirado luego de cada extracción, W_e es el ancho experimental de la IMZ del $dp9$ [4], v'_0 es la velocidad inicial en el centro de la apertura para cada extracción unitaria, luego de 100 extracciones unitarias por cada 10 Kg extraídos se obtiene el valor total $v_0 = v'_0 N_e$ (ver ecuación 3.2); en la siguiente columna W_c corresponde al ancho calculado con el valor de v_0 correspondiente y la última columna muestra el volumen equivalente calculado. Luego al graficar los valores de v_0 del Cuadro 4.1 en función del número de extracciones se ajustó una recta por regresión lineal a los puntos de la tabla (se agregó el punto adicional $v_0 = 0 \text{ cm}$ para 0 extracciones) para obtener de la pendiente un valor de v_0 característico, el cual sería utilizado en los cálculos posteriores para generar todas las extracciones. Este valor característico resultó ser de

$$v_0 = 73,99 \pm 3,26 [\text{cm}] \quad (4.1)$$

4.2. Comparación entre anchos calculados y experimentales

Nuestro modelo se implementó siguiendo de la mejor manera posible las características del montaje experimental que Trueman y sus colaboradores usaron en [4], sin embargo, hay aspectos que difieren de las condiciones experimentales; en primer lugar, en nuestro modelo el tamaño del contenedor es infinito y por esta razón no considera las interacciones de las IMZ con los contornos del contenedor; además hay diferencias en la geometría de las aperturas siendo circulares para nuestras simulaciones con el modelo de plasticidad y rectangulares en el montaje experimental [9]. Pese a estas diferencias, hay bastante cercanía entre los anchos calculados y experimentales como veremos más adelante. A continuación en la fig. 4.2 se presenta una gráfica de las IMZ calculadas con los 13 puntos extractivos en interacción

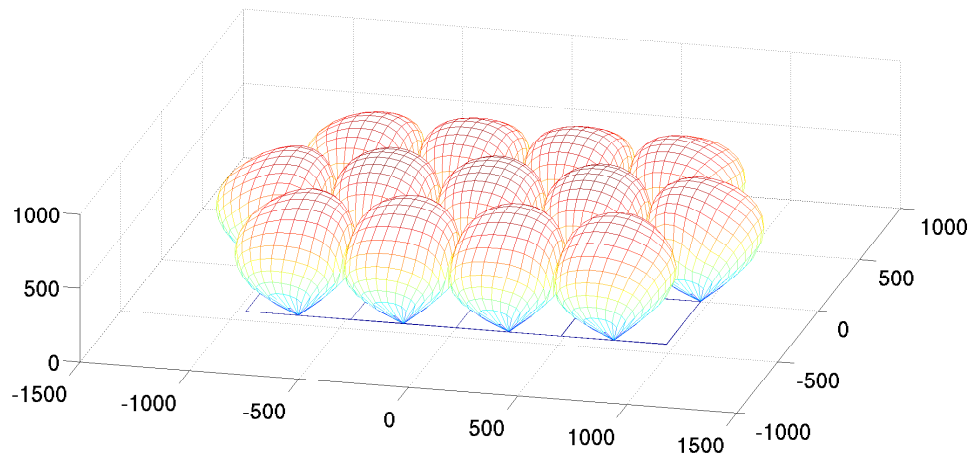


Figura 4.2: Gráfica de 13 puntos extractivos en interacción separados a una distancia de 480 mm en configuración triangular. Extracción equivalente a 60 Kg retirados, todos los ejes tienen unidades en milímetros.

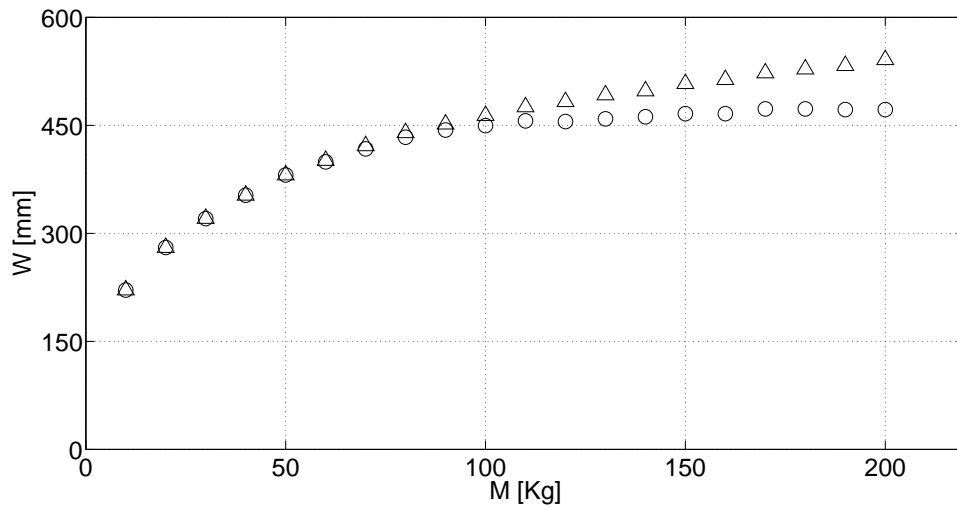


Figura 4.3: Anchos de las IMZ (W) de los PE ubicados en los extremos (Δ) y centrales (\circ) en función de la masa total de material extraído (M), se aprecia la saturación de los anchos de las IMZ centrales para las extracciones por sobre los 160 Kg

En la figura 4.3 se distingue que desde los 60 Kg extraídos hay una diferencia entre los anchos de las IMZ centrales y los anchos de las IMZ ubicadas en los extremos, hecho que también fue detectado al observar los perfiles obtenidos para cada extracción. Bajo estas condiciones de interacción, las geometrías de las IMZ experimentan un aplanamiento como el que se muestra en la fig. 4.1, este aplanamiento se puede explicar teniendo en cuenta la forma de las líneas de corriente que se encuentran en la zona de interacción, las que al deformarse se estiran a lo largo de la vertical y, como las partículas recorren la misma longitud para un mismo volumen extraído, tenemos que las IMZ en interacción reducen su ancho y aumentan su altura con respecto a una IMZ aislada de las mismas características (cantidad de material extraído y geometría de la apertura).

Es claro que la interacción entre las IMZ reduce el crecimiento de sus anchos a medida que se extrae material, en las últimas extracciones en la fig. 4.3 se observa que los anchos de las IMZ centrales finalmente llegan a un punto de saturación en que sus valores son fijos y de una longitud equivalente a la separación entre las aperturas, a medida que se alcanza la saturación las IMZ cambian su geometría y se van aplanando cada vez más en las zonas adyacentes a otra IMZ. Otro cambio observado en las geometrías de las IMZ es también se aplanan en sus zonas superiores, lo que indica que podría existir un flujo masivo del material ubicado por sobre el conjunto de IMZ.

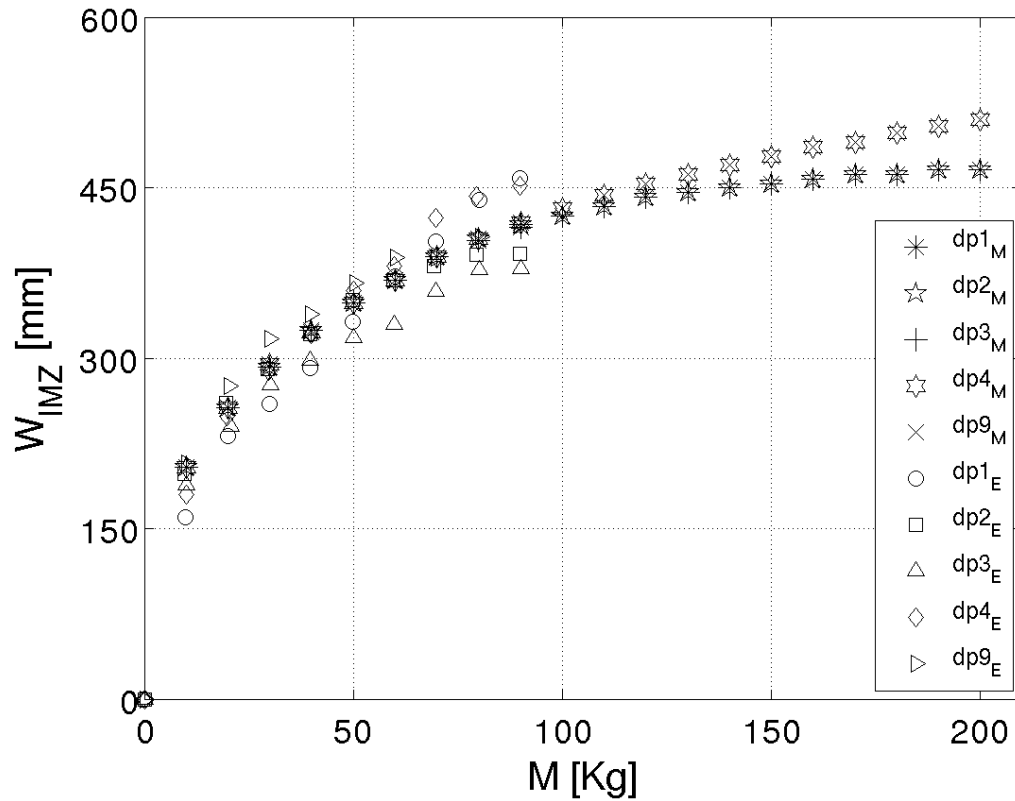


Figura 4.4: Comparación entre Anchos calculados y experimentales de las IMZ. En el recuadro los nombres de los puntos extractivos (dp) corresponden a los usados por Trueman y sus colaboradores en [4]; el subíndice M indica los anchos modelados y el subíndice E se aplica para los anchos experimentales.

Capítulo 5

Conclusiones

Se trabajó con los modelos cinemático y de plasticidad, incluyendo en ambos los efectos de dilatación explicados en la sección 2.1; al modificar los valores de cada parámetro evaluado se observan deformaciones de las IMZ en interacción. Estas deformaciones ocurren debido a que las líneas de corriente de una IMZ no pueden cruzarse con las de otra IMZ vecina, por lo que sólo pueden estirarse en el eje vertical. Al reducir la separación entre los PE se observó que para el modelo cinemático disminuyen los anchos y crecen las alturas; en cuanto al modelo de plasticidad al acercar los PE los anchos crecen mas lento para las primeras extracciones y las alturas aumentan levemente. El otro parámetro evaluado en común para ambos modelos fue el volumen extraído por una de las aperturas, para el modelo cinemático al aumentar el volumen retirado por un PE crecen todas las dimensiones de la IMZ mayor, mientras que para la IMZ menor crece la altura y su largo disminuye; al aumentar este mismo volumen en el modelo de plasticidad crecen las alturas de ambas IMZ y los anchos de la IMZ mayor también crecen achatando el ancho de la IMZ menor.

Se evaluó el coeficiente de difusión para el modelo cinemático, al aumentar esta constante disminuyen las alturas de las IMZ y aumentan sus anchos; para un mayor valor de D_p los cambios son de menor magnitud. El ángulo máximo de desplazamiento θ_G del modelo de plasticidad también se evaluó, al incrementar dicho ángulo aumentan los anchos de manera regular y las alturas crecen cada vez en menor cantidad.

Se probó el modelo de Plasticidad con las mismas condiciones que el experimento *8mm-T4* de Trueman y sus colaboradores [4], en la interacción se observó que aunque el crecimiento de las IMZ ubicadas en los extremos se detiene en la zona adyacente a su IMZ vecina, el lado libre continúa creciendo en el contenedor infinito de nuestro modelo; si una IMZ en particular se encuentra entre 2 o más vecinas entonces su ancho llega a un valor máximo de saturación. Este valor de saturación corresponde a la distancia entre los centros de dos aperturas vecinas.

Comparando los resultados experimentales de Trueman y sus colaboradores con los de nuestro modelo se puede apreciar que el modelo de plasticidad representa bien el comportamiento de los anchos de las IMZ centrales, sólo existen diferencias en los anchos de las IMZ de las aperturas ubicadas en los extremos y estas diferencias se deben a que nuestro modelo no contiene las condiciones de borde necesarias para incluir la interacción entre una IMZ y un muro. Pese a esto se observó que se aplanaban las zonas superiores de las IMZ centrales al alcanzar la saturación, lo que indica que se podría generar un flujo masivo del material observado también en el experimento correspondiente de [4]. Por lo tanto, a pesar de que el modelo de Plasticidad-Dilatación aún no contiene todas las características de un problema real de extracción por bloques u otro caso experimental a escala, logra representar satisfactoriamente el comportamiento experimental de los anchos de las IMZ y puede usarse como punto de partida en el estudio de la interacción de varias IMZ creadas por configuraciones complejas de varios puntos extractivos.

Apéndice A

Publicación

Author's personal copy

International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences 48 (2011) 406–411



Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of
Rock Mechanics & Mining Sciencesjournal homepage: www.elsevier.com/locate/ijrmms

The 3D shape of the loosening zone above multiple draw points in block caving through plasticity model with a dilation front

F. Vivanco*, T. Watt, F. Melo

Laboratorio de Física no Lineal, Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile, USACH, Avenida Ecuador 3493, Casilla 307 Correo 2, Santiago, Chile

ARTICLE INFO

Article history:

Received 18 February 2010
 Received in revised form
 2 November 2010
 Accepted 28 November 2010
 Available online 23 December 2010

Keywords:

Block caving
 Isolated extracted zone
 Isolated movement zone
 Draw points
 Plasticity flow model

ABSTRACT

The thorough understanding of the loosening zone created by the interaction of the flow of multiple draw points in block caving mines is of utmost importance, because this knowledge would help to improve the operation of these mines reducing the mining costs. However, this loosening zone is usually roughly estimated by superimposing multiple single loosening zone centered at each draw point, without considering the interaction of the associated flows. In this article we extended the loosening zone for a single isolated draw point, determined by the plasticity model and a dilation front, to calculate the shape of the loosening zone created by multiple draw points including the interaction of the individual flows. We observed that the interaction of flows created by two draw points breaks the symmetry of the loosening zone shape, and increase its height within the interaction region. At constant extracted volume or mass drawn the strength of this interaction is mainly controlled by the separation distance between draw points. In the limit where positions of both draw points coincide, the resulting loosening zone shape resembles the one created by an isolated single draw point, with twice the extracted volume for one single draw point. In the case of a linear array of multiple draw points we observed two different behaviors depending on the location of draw points. On the one hand, the width of the loosening zone for the inner draw points saturates to a value corresponding to the addition of the half separation distance to the nearest neighbors. On the other side, the draw points located at the ends of the linear array reduces the ratio of growth of the width of the loosening zone because the side located near the interaction region stops to growth due to the interaction with the neighbor draw point. The plasticity model with a dilation front captures the experimental results for a linear array of five draw points obtained by an independent group. It is also observed that the top surface of the inner draw points is more even, suggesting that a mass flow might be observed above these draw points when they are separated a distance smaller than 1.5 times the width of the isolated loosening zone, contradicting the Laubscher criterion. Although the plasticity model with a dilation front does not include the whole complexity found in the actual underground mines or even in the experimental scaled models, it is a useful tool to study the interaction of complex arrangement of draw points both qualitatively and quantitatively.

© 2010 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The operation cost of open pit mines is increased with the size of the mine, due to this fact some companies are considering to transform these type of mines in underground mines to extend their life beyond the stage where they become unprofitable. For example, Codelco is planning to transform Chuquicamata open pit mine in underground mine during the next years. Hence, any improvement on the underground mining methods that increases the performance and/or reduces the inherent risks associated to them is considered of utmost importance.

One of the underground mining techniques is the block caving which consists of an arrangement of extraction points called draw points, organized in galleries forming a lattice and built below the ore. The extraction of material from the draw points induces a downwards motion of the upper layers creating a flow. This flow contains ore along with significant percentage of undesired useless material called dilution. The dilution is one of the main problem in underground mining because any draw point contaminated with dilution is lost for further ore extraction increasing the mine's operation costs.

In principle, a good control of the flow might prevent the contamination of draw points with dilution. It can be achieved by an adequate spatial arrangement of draw points and the appropriate handling of them. This requires that the flow created by multiple draw points must be thoroughly understood and characterized.

* Corresponding author.

E-mail addresses: francisco.vivanco@usach.cl, fvivanco@gmail.com (F. Vivanco).

Several scaled experimental and theoretical models have been developed to address this issue. However, as shown by McNearney [1] the complex flow created inside the cave is very difficult to characterize in detail. Instead of characterizing the rocks flow, the focus is centered on the description of the limiting boundary of the loosening zone, that we named the isolated movement zone (IMZ). The IMZ is the surface that encloses all rocks that move because of drawing process and distinguishes them from the rocks that remain static. Previous works based on geometrical and radial flow approaches have been developed to characterize the IMZ created by either a single draw point or several draw points in simultaneous extraction, see for example Refs. [2–6]. However, these approaches have presented important weaknesses. On the one hand, the geometrical view has no foundation on physical principles, and on the other hand, radial flows resulting in Bergmark–Roos type models have shown non-physical increasing of the density when rocks approach the draw point, see [7].

Although the interaction of draw points plays a main role in the control of dilution it has not been fully characterized. In this article we present an expression for the IMZ created by several draw points in simultaneous extraction by combining the plasticity model and the concept of dilation front and compared with experimental results obtained by an independent group. In Section 2 we describe the plasticity model, introduce the concept of dilation front and obtain the IMZ for a single isolated draw point. Section 3 is devoted to obtain the IMZ for an array of several interacting draw points in simultaneous extraction. In Section 4 we compare the predictions of the IMZ obtained in Section 3 with independent experimental results. Finally, we summarize the results in Section 5.

2. Plasticity model and dilation front

In the actual block caving operation the rock fragments to be extracted are highly packed. As a consequence, the packing should be reduced or loosening must be created to allow the rock fragments to flow when material is removed from the draw points. At the beginning, the packing changes or loosening are localized at the opening and then start to propagate upwards with subsequent extractions causing the upper layers slide down. Thereby, at early stages of the extraction process the flow is fed by the excess of volume resulting from the local dilation increment. As we mentioned in a previous work [9] the IMZ is significantly affected by the packing changes because the sliding capacity of rocks is strongly dependent of the available interstitial space.

The plasticity model has been applied in determining the velocity field in granular flow in hoppers [8] and also in calculating the boundary of the loosening zone or IMZ, see Refs. [7,9,10]. In particular, for a radial flow, assuming incompressibility of the material and considering an axis symmetric three dimensional system, the plasticity model results in a velocity components given by

$$v_r = -\frac{v_0 r_D^2}{r^2} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_C}\right), \quad (1)$$

$$v_\theta = 0, \quad (2)$$

$$v_\phi = 0, \quad (3)$$

where r and θ are the radial and angular positions, see Fig. 1, r_D is the radial position of the draw point and v_0 is the vertical speed of the extracted rock fragments at the middle of the draw point. The range of variation for the angular position is given by $0 < \theta < \theta_C$, for angles beyond θ_C the flow vanishes. The parameter θ_C , called angle of slide, represents the maximum angle of inclination where the rocks can

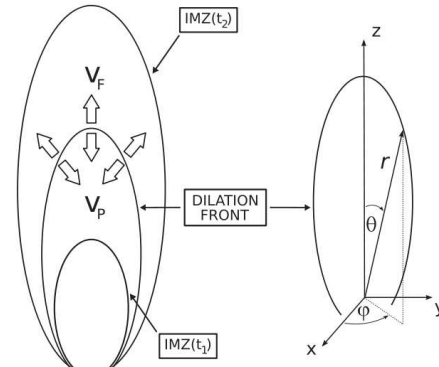


Fig. 1. A schematic illustration that shows the dilation front moving upwards with velocity v_F and the IMZ at two different times, t_1 and t_2 . Behind the front, the rocks move downwards with velocity v_P while the rocks located ahead of the front remain static. At rightmost is shown the coordinate system.

slide and depends on the angle of repose and the rocks features, for further details see Refs. [7,11].

The IMZ is determined calculating the trajectory of the rocks from Eq. (1) and finding all the locations where rocks move a certain small arbitrary distance, see Refs. [7,9]. Note that, when the arbitrary distance tends to zero the height of the IMZ diverges. It means that any small extraction from the draw point creates a local displacement of rocks or loosening zone that covers the extent of the system or, equivalently, the loosening zone reaches the top surface. This contradicts the experimental observations that show that loosening zone is rather localized near the draw point and moves upwards with subsequent extractions. The difference between the experimental findings and model predictions about the IMZ is a consequence of the packing decrease or loosening that is not considered in the modeling. To improve the predictions obtained with plasticity model is necessary to include the effect of packing decrease. In a first approximation, the packing decrease or loosening can be included in the plasticity model by introducing a dilation front¹ propagating upwards from the draw point. In Fig. 1 are shown the IMZ at two different positions and the dilation front (left) and the coordinate system employed (right).

The dilation or loosening front starts to propagate from the opening after an amount of material is removed from the draw point. When a rock fragment is reached by the dilation front it starts to move down because the available space created below it. Then, assuming a steady state the mass balance in the volume element, defined by two consecutive positions of the dilation front separated a time interval dt , at the point (r, θ, ϕ) located on the front can be written as

$$-\mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} dt = \Delta\rho ds_F \cdot d\mathbf{A}, \quad (4)$$

where $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_p(r, \theta, \phi)$ is the flow of particles in kg/m^2 , $\mathbf{v}_p(r, \theta, \phi)$ is the local particles velocity in m/s , ds_F is the displacement vector (parallel to the particles speed) of the dilation front at dt measured in meters, $\Delta\rho = \rho_0 - \rho$ is the density change introduced by the rocks' movement in kg/m^3 , ρ_0 is the density outside the IMZ, corresponding to the density of rock mass before loosening, ρ is the density inside the IMZ, created by the loosening and $d\mathbf{A}$ is the area element whose normal is parallel to ds_F in m^2 .

¹ Dilation front is referred to a surface that moves propagating a local volume increase or equivalently a packing decrease or loosening.

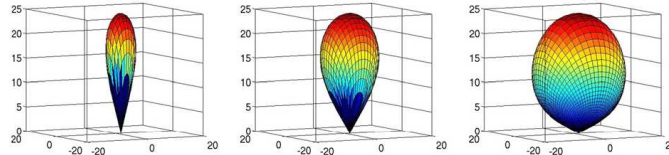


Fig. 2. (Color online) Effect of θ_C in the aspect ratio of IMZ. Each IMZ is obtained from Eq. (7) as described in text, the draw point is located at position (2,0) (axes in cm). The parameters are: $v_0 = 10$ cm/s, $\vec{x}_D \cdot \vec{x}_D = r_D^2 = 0.01$ cm². The total extracted volume is $V \sim 157$ cm³. From left to right: $\theta_C = 20, 40, 70^\circ$. The different gray levels shading on the surface have been chosen to improve 3D visualization and they have no specific meaning.

Experiments based on transmitted light through granular material have shown that at early stages the extraction of material creates a homogeneous zone with lower density than the initial compact state, suggesting that the packing is reduced near the draw point, see Ref. [9]. Therefore, it is reasonable to assume constant density outside and inside the IMZ. Then, assuming ρ and ρ_0 are constant the velocity of propagation of the dilation front can be written as

$$\frac{d\mathbf{s}_F}{dt} = \mathbf{v}_F(r, \theta, \phi) = -\frac{\mathbf{J}}{\Delta\rho} = -\frac{\rho}{\Delta\rho} \mathbf{v}_\rho(r, \theta, \phi). \quad (5)$$

The velocity of propagation of the dilation front is proportional to the velocity of the rocks and the factor of proportionality depends on the local changes of density and its initial value. Note that, in this simplified model the packing and particles velocity have a discontinuity at front position. Thus, replacing the velocity of the rock fragments equation (1) in Eq. (5) the velocity of the dilation front becomes

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{\rho}{\Delta\rho}\right) \left(v_0 \frac{r_D^2}{r^2}\right) \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_C}\right). \quad (6)$$

In order to simplify the graphical representation of the IMZ, Eq. (6) will be represented in Cartesian coordinate system. Thus, the components of the dilation front velocity can be written as

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{\rho}{\Delta\rho}\right) v_0 \vec{x}_D \cdot \vec{x}_D \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))^{3/2}} \times \cos\left[\frac{\pi}{2\theta_C} \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}}\right)\right], \quad (7)$$

where $\vec{x}_D \cdot \vec{x}_D = r_D^2$ and \vec{x}_0 is a vector representing the location of the center of the draw point.

The IMZ at time t is represented by a surface which is obtained through the path lines corresponding to the solution of equation (7) which is solved numerically using fourth order Runge–Kutta method, see Refs. [7,9] for further details. Note that, in this case the path lines of the system are equivalent to the streamlines,² for further details about the IMZ calculation see [10]. Then, hereafter we referred to streamlines instead of path lines. If there are no local loosening or packing changes then $\Delta\rho \rightarrow 0$ and the IMZ extends to infinity reaching the top surface as is expected for a model where the velocity profile depends on $1/r^2$ mentioned above. Examples of IMZ calculated from Eq. (7) are shown in Fig. 2. Note that the aspect ratio of the IMZ mainly depends on the angle θ_C such that the IMZ is more elongated for smaller values of this angle.

² Path lines represent the individual trajectory of a single grain when it moves through space with time (Lagrangian approach) and are solutions of $d\vec{r}/dt = \vec{v}$. Streamlines represent the direction of the rocks velocity in different locations at the same time (Eulerian approach) and are found by solving the system of equations $dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$. In general, path lines and stream lines are different but in the case of flows independent of time they coincide.

3. IMZ for interacting draw points

The operation of an underground mine via block caving technique involves the extraction of material from several draw points simultaneously. Depending on the separation distance between neighbors draw points, the extraction procedure might create a complex IMZ which cannot be represented as several IMZ corresponding to the isolated draw points.

To determine the IMZ produced by several draw points in simultaneous extraction we generalize Eq. (7) by replacing the velocity field created by a single draw point with the total velocity field created by several draw points. Then, by adding the contribution to the velocity field of each draw point and assuming both a homogeneous initial density in the whole system and equal density variation across the dilation front, Eq. (7) becomes

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{\rho}{\Delta\rho}\right) \sum_k v_{0k} \vec{x}_{Dk} \cdot \vec{x}_{Dk} \frac{\vec{x} - \vec{x}_{0k}}{((\vec{x} - \vec{x}_{0k}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_{0k}))^{3/2}} \times \cos\left[\frac{\pi}{2\theta_{Gk}} \arccos\left(\frac{z}{(\vec{x} - \vec{x}_{0k}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_{0k})}\right)\right], \quad (8)$$

where $\vec{x}_{Dk} \cdot \vec{x}_{Dk} = r_{Dk}^2$, \vec{x}_{0k} is the location of the k th draw point and θ_{Gk} is the local angle of slide at this position. The IMZ is obtained by integrating Eq. (8) with respect to time.

The IMZ originated from the interaction of the flows created by two neighbors draw points is shown in Fig. 3. For simplicity we considered two identical draw points with parameters value; $v_{0k} = 10$ cm/s, $\vec{x}_{Dk} \cdot \vec{x}_{Dk} = r_{Dk}^2 = 0.01$ cm², $\theta_{Gk} = 40^\circ$, and the same total extracted volume for each draw point $V \sim 157$ cm³. We observed that the magnitude of the interaction is controlled by the separation distance between neighbors draw points. Thus, for a large enough separation distance no deformation of the individual IMZ is observed, in this case we say that the draw points do not interact. That is each draw point generates an IMZ as if it were isolated, as shown in left plot of Fig. 3. On the contrary, if the separation distance is smaller than a certain critical value then the flows created by the neighbors draw points interact resulting in a deformed IMZ. This interaction also increased the height of the IMZ in the middle zone between draw points, see center plot of Fig. 3. If the draw points are placed too close then the IMZs merge into a single one and its width and height approximate to the values of a single IMZ with twice the extracted volume, as shown in right plot of Fig. 3. The deformation of the IMZ is explained by the restriction on the streamlines that indicates that they must remain parallel and cannot cross to others. Therefore, if two draw points are close enough such that they interact, then the streamlines in the interaction region deviate to keep parallel to the others. This deviation breaks the symmetry of the IMZ and increases its height. It is also observed that the width of the IMZ increases slower after the draw points begin to interact, because the side of the IMZ in the interaction region saturates to a maximum value equal to the half of the neighbors separation distance. This is also due to the fact that streamlines do not intercept as mentioned above.

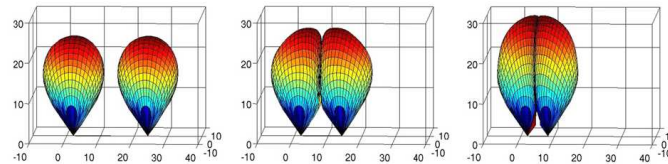


Fig. 3. IMZ for a pair of neighbor draw points in simultaneous extraction obtained from Eq. (8) as described in text (axes in cm). The parameters for each draw point are: $v_{0k} = 10 \text{ cm/s}$, $\bar{x}_{Dk} \cdot \bar{x}_{Dk} = \bar{r}_{Dk}^2 = 0.01 \text{ cm}^2$, $\theta_{Ck} = 40^\circ$. The total extracted volume per draw point is $V \sim 157 \text{ cm}^3$. The center of draw points are located at (2,0) and (24,0) cm (left), (2,0) and (14,0) cm (center) and (2,0) and (8,0) cm (right).

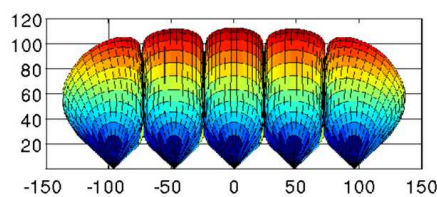


Fig. 4. IMZ for simultaneous extraction of five draw points align parallel to y-axis (axes in cm). The parameters for each draw point are: $v_{0k} = 7.4 \text{ cm/s}$, $\bar{x}_{Dk} \cdot \bar{x}_{Dk} = \bar{r}_{Dk}^2 = 38.2 \text{ cm}^2$, $\theta_{Ck} = 49^\circ$. The draw points are located at (-96,0), (-48,0), (0,0), (48,0) and (96,0) cm. These parameters correspond to the values used by Trueman et al. in their experiment, see Ref. [12]. In the volume to mass conversion we have considered a bulk density $\rho \sim 0.55 \text{ g/cm}^3$. The total extracted mass draw per draw point is 90 kg.

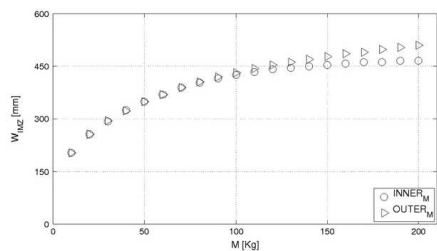


Fig. 5. Average width of IMZ as a function of the mass drawn per draw point obtained from an array of five draw points aligned parallel to y-axis in simultaneous extraction, similar to configuration shown in Fig. 4. The parameters for each draw point are the same as in Fig. 4.

Two different behaviors are observed when more than two draw points, arranged in a linear array, interact, see Fig. 4. On the one hand, along the interaction line, the width of the IMZ for the inner draw points saturates to a value corresponding to the addition of the half separation distance to the nearest neighbors. On the other hand, the width of the IMZ of the outer draw points reduces its rate of growth with mass drawn, because the side located near the interaction region stops to growth due to the interaction with the neighbor draw point, see Fig. 5. It is also observed that the height of the IMZ is larger in the inner draw points than the outer ones. These effects are also due to the restriction on the streamlines mentioned above.

In general, the intensity of the interaction between draw points depends on the separation distance, the size of the draw point aperture, the total extracted volume per draw point, the local angle of repose and the rocks features.

4. Comparison with experimental scaled model

In a recent work Trueman et al. [12] have studied experimentally the interaction of multiple draw points through the IMZ in a

large gravel scaled model. They considered a triangular arrangement of 13 draw points with a characteristic separation of 480 mm in simultaneous extraction, and studied the width of the IMZ as a function of the mass drawn in a set of five draw points arranged on a line, denoted by $dp1$, $dp2$, $dp3$, $dp4$ and $dp9$, where the last two are located at the ends of this line. As can be seen from Fig. 7 in Ref. [12], for a mass drawn of 90 kg the width of the IMZ in draw points $dp1$ and $dp4$ grows at the same speed observed initially, while for draw points $dp2$, $dp3$ and $dp9$ the growing speed reduces significantly. This effect indicates the initiation of the interaction between draw points. According to the authors, at this point the uniform draw down or mass flow had already started.

To compare the experimental results obtained by Trueman and his collaborators with the predictions of the plasticity model combined with the dilation front, it was necessary to calibrate the extracted volume in the model such that it represents the equivalent mass drawn in the experiments. For this purpose the IMZs width of the $dp9$ draw point was fitted using the mass drawn values such that no interaction between neighbors draw points is initiated, 10–40 kg. In the fitting process were considered the same physical dimensions as in the experimental scaled model including the area of the aperture through the term \bar{r}_D^2 . To determine the angle θ_C we used the fact that the material employed by Trueman et al. [12] was cohesionless with an internal friction angle about 41° . As inferred from Mohr–Coulomb failure analysis [11], the angle of internal friction coincides with the angle of repose when the material is cohesionless as in this case. Then identifying θ_C with the angle of internal friction given by Trueman et al., we obtained $\theta_C \sim 49^\circ$ measured from the vertical.

Once the calibration was completed, a similar triangular array of 13 draw points as used in the experiment was employed to calculate the total IMZ through Eq. (8) considering the mass drawn conversion determined above. The results obtained from the plasticity-dilation front model show that the draw points start to interact at approximately 100 kg of mass drawn. It is confirmed by the IMZs width that at this mass drawn, all draw points located at the inner positions on the interaction line (in this case $dp1$, $dp2$, $dp3$) slightly reduce their IMZs width, while the outer draw points ($dp4$, $dp9$) continue to grow at the expected speed. According to the model results, if more than 170 kg of mass is drawn, a strong interaction between draw points is observed that practically vanishes the growth of the IMZs width corresponding to the inner draw points. It is also observed that the outer draw points slightly reduce the IMZs width growth. We observe that the model reproduces the behavior of the IMZs width obtained experimentally, as shown in Fig. 6. However, in the case of the outer draw point $dp9$, the measured IMZs width practically stops to grow at 90 kg contradicting the model predictions. This apparent contradiction might be explained by the proximity of $dp9$ to the container's wall that limits the growth of the corresponding IMZ. On the other hand, the inner draw point $dp1$ is expected to reduce its growth according to the model, but it continues to grow. It might be possible that this draw point interacts slightly with its neighbors or have an interaction with just one of them explaining the non-expected

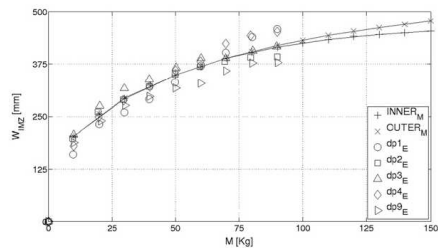


Fig. 6. Comparison of the width of IMZ obtained by Trueman et al. [12] and the predicted values by plasticity-dilation front model. $dp1_E, \dots, dp9_E$ identified the draw points in the experiment and $INNER_M$ and $OUTER_M$ stand for inner and outer draw points in the model. The parameters are the same as in Fig. 4. The experimental data were extracted from Fig. 7 in Ref. [12]. According to Trueman et al. [12] the standard error of measured IMZ is ± 22.8 mm, in consequence, the model predictions are correct within the experimental error.

growing of this inner draw point. We observed that top surface of the inner draw points is more even, similar to what is shown in Fig. 4, suggesting that a mass flow might be observed in the material located above the IMZ. This supports the conclusions raised by Trueman et al., indicating that the mass flow is obtained when the separation distance between neighbors draw points is close or smaller than the width of the non-interacting IMZ. Thus, such observation violates the Laubscher criterion [13] which states that such mass flow should be obtained for separation distances that are smaller than 1.5 times the width of the non-interacting IMZ.

To estimate the error in the values of the IMZ predicted by the model, we determined the percentage of deviation ϵ of the width of the IMZ between experimental and predicted values as a function of the mass drawn. This deviation is defined as

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{(W_k^e - W^m)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_k^e} \quad (9)$$

where W_k^e and W^m are the experimental and predicted width of the IMZ. The sum is taken over the inner and outer draw points separately. We observed that the larger percentage of deviation occurs at the initial stage, where small amount of material is drawn. This percentage is reduced to about 10% for mass drawn larger than 40 kg. This might be explained by the large uncertainty expected in measuring the width of the IMZ at low mass drawn. It is also observed that the percentage of deviation is smaller for the inner than the outer draw points. The larger percentage of deviation found in the outer draw points might be due to their proximity to container's walls.

5. Conclusions

The boundary of the loosening zone or IMZ has been determined through the improvement of the plasticity model by inserting a dilation front. Due to the motion of this front, a local enlargement propagates upwards increasing the volume behind it and reducing the bulk density, which in turn facilitates the downwards sliding of the rocks located at the front. The front moves faster than rocks and its velocity is proportional to their downwards velocity. The proportionality factor depends on the local changes of the bulk density and its initial value such that it is larger for smaller density variations. In the limit where changes of density tends to zero the height of the IMZ extends to the top surface, as is expected for an axis symmetric velocity profile that decay as $1/r^2$. The aspect ratio of the IMZ is mainly controlled by the angle of slide θ_c which in turn depends on the internal friction angle and the rocks features.

The resulting IMZ from the interaction of the flows created by several draw points is calculated by adding the velocity field corresponding to each draw point. At constant extracted volume or mass drawn the strength of the interaction depends on the separation distance between draw points. If the separation distance is large enough such that the single flows do not interact, then the resulting IMZ consists of many single IMZ as the number of existing draw points. On the other hand, if the separation distance is smaller than a certain critical value, then the flows begin to interact and the symmetry of the single IMZ is broken at the region of interaction, increasing the height of the IMZ in this region. In the extreme case where the separation distance is too small, the IMZs merge into a single one and its width and height approximate to the values of a single IMZ with twice the extracted volume. The deformation of the IMZ in the interaction region is due to the restriction on the streamlines that indicates that they must remain parallel and cannot cross to others.

For a linear arrangement of several draw points we observed two different behaviors depending on the location of the draw points. On the one hand, the width of the IMZ for the inner draw points saturates to a value corresponding to the addition of the half separation distance to the nearest neighbors. On the other hand, the draw points located at the ends of the linear array reduces the ratio of growth of the width of the IMZ, because the side located near to the interaction region stops to growth due to the interaction with the neighbor draw point. It is also observed that the height of the IMZ is larger in the inner draw points than the outer ones. These effects are also due to the restriction on the streamlines mentioned above.

The comparison between the predictions of plasticity model including the dilation front and the experimental results obtained by Trueman et al. for a linear array of five draw points, have shown that the modeling captures the behavior of the width of the IMZ for all draw points except; $dp1$ and $dp9$. This difference might be explained by the proximity to the wall of $dp9$ and by a weak interaction with the neighbors draw points in the case of $dp1$. It is also observed that the top surface of the inner draw points is more even. This suggests that a mass flow begin to develop above the inner draw points when the width of IMZ reaches the draw points spacing. This observation supports the conclusion obtained by Trueman et al. and violates the Laubscher criterion.

In summary, even though the plasticity model with the addition of a loosening front does not contain the complexities presented in actual underground mines, it captures the relevant features observed in the IMZ, and reproduces experimental results found in scaled models. Hence, it can be considered as a suitable tool to develop physical insight onto interacting flows for the assessment of the IMZ found in complex arrangements of draw points of importance in industrial applications.

Acknowledgments

This work was supported by program ANR-Conicyt ANR-011. Vivanco, F. thanks the support from Conicyt through Proyecto PBCT PSD-54.

References

- [1] McNearny R, Abel J. Large-scale two-dimensional block-caving model tests. Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr 1993(30):93–109.
- [2] Bergmark JE. The calculation of drift spacing and ring burden for sublevel caving. LKAB Memo # RU 76-16, 1975. (in Swedish).
- [3] Janelid I, Kvapil R. Sublevel caving. Int J Rock Mech Min Sci 1966;3:129–53.
- [4] Kuchta ME. A revised form of the Bergmark–Roos equation for describing the gravity flow of broken rock. Min Resour Eng 2002;11:349–60.
- [5] Kvapil R. Gravity flow of granular material in hoppers and bins Part 1. Int J Rock Mech Min Sci 1965;2:35–41.

Author's personal copy

F. Vivanco et al. / International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences 48 (2011) 406–411

411

- [6] Rustan A. Gravity flow of broken rock—What is known and unknown. In: Conference proceeding of MassMin 2000: the Australasian Institute of Mining and Metallurgy, 2000, p. 557–67.
- [7] Melo F, Vivanco F, Fuentes C, Apablaza V. On drawbody shapes: from Bergmark–Roos to kinematic models. *Int J Rock Mech Min Sci* 2007;44:77–86.
- [8] Pariseau WG. Discontinuous velocity fields in gravity flows of granular materials through slots. *Powder Technol* 1970;3:218–26.
- [9] Melo F, Vivanco F, Fuentes C, Apablaza V. Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving; dilatancy effect on drawbody shapes. *Int J Rock Mech Min Sci* 2008;45:248–59.
- [10] Melo F, Vivanco F, Fuentes C, Apablaza V. Calculated isolated extracted and movement zones compared to scaled models for block caving. *Int J Rock Mech Min Sci* 2009;46:731–7.
- [11] Nedderman RM. Statics and kinematics of granular materials. Cambridge: Cambridge University Press; 1992.
- [12] Trueman R, Castro R, Halim A. Study of multiple draw-zone interaction in block caving mines by means of a large 3D physical model. *Int J Rock Mech Min Sci* 2008;45:1044–51.
- [13] Laubscher D. Cave mining—the state of the art. *J South Afr Inst Min Metall* 1994;94:279–93.

Bibliografía

- [1] J. Herrera Herbert F. Pla Ortiz de Urbina. *Fundamentos de Laboreo de Minas*. Fundacion Gómez-Pardo, Madrid, 1994.
- [2] F. Melo F. Vivanco C. Fuentes, V. Apablaza. On drawbody shapes: from bergmark-roos to kinematic models. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 44:77–86, 2007.
- [3] F. Melo F. Vivanco C. Fuentes, V. Apablaza. Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 45:248–259, 2008.
- [4] R. Trueman R. Castro, A.Halim. Study of multiple draw-zone interaction in block caving mines by means of a large 3d physical model. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 45:1044–1051, 2008.
- [5] F.Melo F.Vivanco, C.Fuentes. Calculated isolated extracted and movement zones compared to scaled models for block caving. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 46:731–737, 2009.
- [6] F. Vivanco T. Watt, F. Melo. The 3d shape of the loosening zone above multiple draw points in block caving through plasticity model with a dilation front.
- [7] R. M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press, 3 edition, 1992.
- [8] J. Crank. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, 2 edition, 1975.

- [9] R. Castro R. Trueman, A. Halim. A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3d physical model.