

Información Cuántica y Sistemas Colectivos

Carlos Enrique López Cabrera



Tesis presentada para obtener el grado de doctor en
Ciencias con Mención en Física

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Información Cuántica y Sistemas Colectivos

Carlos Enrique López Cabrera

Tesis enviada para obtener el grado de Doctor en Ciencias con
mención en Física
USACH, Santiago, Mayo 2007

Resumen

En los últimos años, la Información y la Computación cuántica han sido objeto de una profunda investigación por parte de una creciente comunidad científica. Parte importante de este interés proviene de las auspiciosas ventajas que tiene para resolver una importante variedad de problemas con respecto a la teoría clásica de la computación. Otro aliciente para el desarrollo de estas nuevas líneas de investigación, son las constantes mejoras en la preparación, control y medición experimental de sistemas cuánticos considerados como posibles procesadores de Información cuántica.

En esta tesis se estudian algunos de estos sistemas físicos compuestos de una y más partículas. Este estudio está centrado en algunos elementos claves para la Información cuántica, tales como el entrelazamiento y la evolución de estos sistemas. Desarrollamos una técnica para encontrar la evolución de un sistema de muchas partículas en un espacio de Hilbert reducido. Usando esta técnica, estudiamos la dinámica y las propiedades de entrelazamiento del espectro de autoestados de un conjunto de átomos acoplados inhomogéneamente a un modo del campo electromagnético. Esta técnica también nos permite estudiar la viabilidad de usar un sistema compuesto por un espín electrónico interactuando con muchos espines nucleares en un Punto Cuánti-

co como un dispositivo de almacenamiento de información cuántica. También desarrollamos un método para manipular colectivamente, en un subespacio determinado, un sistema de iones atrapados en una trampa de Paul.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer al Dr. Juan Carlos Retamal. Durante estos años de trabajo con él, he aprendido mucho sobre el trabajo científico y también de lo humano y lo divino. Debido a su reconocido objetivo de que terminemos enojados con él, hemos discutido muchas veces, sin embargo, siempre ha aflorado su gran calidad humana. Junto a él, quiero agradecer muy especialmente a la Dr. Dora Altbir por su constante apoyo y preocupación.

Quiero agradecer a los miembros de la comisión informante, Dr. Jorge Gamboa, Dr. Fernando Mendez, Dr. Luis Roa y especialmente al Dr. Nicim Zagury.

Sobrellevar los años del doctorado sería una tarea demasiado ardua y aburrida si no se encontraran recorriendo este mismo camino amigos como los que yo he encontrado acá. Entre estos, quisiera primero destacar a mis colegas más cercanos: Guillermo Romero y Freddy Lastra. Con ellos el trabajo se ha hecho mucho más fácil y agradable. Espero que con el correr de los años ni la amistad ni el trabajo juntos dismuniya. También quiero agradecer a mis amigos, compañeros y vecinos de oficina: Pedro (Pitel), a mi muy mejor amigo Juanito, Robert, también a Mauricio, Roberto, el primo Justo, Sebastián, Francisco (Tuga), Paola, Pedro y por supuesto a Luschito. También agradezco a los profesores que me han apoyado y de los cuales he aprendido mucho, entre estos, Dr. Enrique Cerda, Dr. Mikhail Pliouchtai, Dr. Jorge Gamboa, Dr.

Fernando Méndez, Dr. Lautaro Vergara, Dr. Guillermo Palma, Dra. Yolanda Vargas, Dr. Ignacio Olivares y al Dr. Francisco Melo. También a los profesores y compañeros de la Universidad de Concepción, Dr. Carlos Saavedra, Dr. Aldo Delgado, al ya mencionado Dr. Luis Roa, a Ginita O., Fabián, Omar y Arturo. Por su paciencia conmigo quiero agradecerles a la Sra. Susana, Mely, Leíto y en especial a Victoria Lahn.

Un agradecimiento muy especial va para los profesores y amigos Dr. Andrei Klimov y Dr. Enrique Solano por su constante apoyo y consejo, además de Henning Christ cuya colaboración en los trabajos abordados en esta tesis ha sido vital.

Quiero destacar el vital apoyo recibido a través del proyecto MECESUP USA 0108 por el soporte económico durante mi doctorado y a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por su apoyo económico para el término de esta tesis. Agradezco también al Centro de Óptica e Información Cuántica (proyecto MILENIO ICM P02-049F) y a DIGEGRA USACH por el soporte para mi asistencia a congresos y estadias de investigación. También agradezco la hospitalidad de la Universidad Ludwig-Maximilian (Munich) y en especial al Dr. Jan von Delft y su grupo.

También quiero agradecer a mis grandes amigos desde la época escolar, que han sido una importante fuente de apoyo, me han ayudado a crecer y ser cada vez mejor (o menos malo según ud. precise) y a quienes admiro profundamente: David, Daniel y especialmente a Ximena. Por supuesto quiero agradecer también al cuarto mosquetero, mi estimado Alfredo, siempre un punto de referencia. Quiero agradecerles a todos los amigos que he hecho en la Universidad desde que llegué y también los que he hecho en esta última etapa, en especial a Rodrigo R., Fabián R., Cathy B., Carolina P., Luis R., Paul S., Verónica C., Jessica B., Mely B., Macarena C. y Fabiola R.

Quiero agradecer a toda mi familia y en especial a mis abuelos (el Tata

y la Güeli) que me recibieron en su casa y que con su cariño y preocupación la hicieron también mía. Muchas gracias.

Finalmente quisiera agradecer y dedicar mi trabajo a los más míos, a mis hermanos Manuel, Natalia y Andrea y a mis Padres, Luis y Rosa. Ustedes han sido mi más grande fuente de conocimiento, quizás no científico pero sí de lo que realmente importa. Los amo mucho a todos ustedes, gracias por estar ahí y que Dios nos mantenga unidos siempre.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	IV
1. Introducción	1
2. Fundamentos	7
2.1. Postulados de la Mecánica Cuántica	7
2.2. Computación e Información Cuántica	9
2.2.1. El Qubit	10
2.2.2. Compuertas lógicas cuánticas	10
2.2.3. Entrelazamiento	13
2.2.4. Criterios de separabilidad	15
2.2.5. Medidas de Entrelazamiento	17
2.3. Modelos físicos para la Computación e Información Cuántica .	20
2.3.1. Interacción átomo-campo. Modelo de Jaynes-Cummings	21
2.3.2. Modelo de Tavis-Cummings	24
2.3.3. Dinámica de un espín electrónico en quantum dots . .	27
2.3.4. Iones atrapados	30
3. Modelo de Tavis-Cummings inhomogéneo	35
3.1. Introducción	35

3.2. El Modelo	36
3.3. Espacio de Hilbert Efectivo	37
3.4. Evolución efectiva	40
3.5. Conclusión	46
4. Memoria cuántica y defectos distribuidos en un quantum dot	47
4.1. Introducción	47
4.2. Dinámica de espines electrónico y nucleares	50
4.3. Almacenamiento de información cuántica	58
4.4. Conclusiones	64
5. Control selectivo del subespacio simétrico de Dicke en iones atrapados	65
5.1. Introducción	65
5.2. El Modelo	67
5.3. Producción de estados de Dicke. Aplicaciones de la selectivi- dad generalizada	72
5.4. Detección de estados de Dicke y lógica cuántica colectiva . . .	76
5.5. Selectividad inhomogénea	81
5.6. Conclusión	83
6. Propiedades de entrelazamiento en el modelo de Tavis-Cummings in-homogéneo	84
6.1. Introducción	85
6.2. El Modelo	86
6.3. Propiedades del espectro de autoestados	88
6.4. Conclusión	93
7. Conclusiones	94

Índice de figuras

2.1. Representación de una compuerta controlada NOT (CNOT)	12
2.2. Representación de una compuerta controlada U arbitraria	13
2.3. Esquema Raman	31
3.1. Representación esquemática del crecimiento del espacio de Hilbert asociado con los estados atómicos colectivos.	41
3.2. Evolución de la población del estado colectivo fundamental, $P_{ \bar{0}\rangle}$, en el caso de acoplamiento inhomogéneo dado por $g_j =$ $g \sin [j\pi / (N + 1)]$, $j = 1, \dots, N$, con $N = 6$, un estado inicial $ \bar{0}\rangle$, y el campo inicialmente en un estado coherente con $\bar{n} =$ 1,8. solución exacta (línea continua) y solución aproximada (línea punteada).	42
3.3. Evolución de la población total de la segunda y tercera filas, P_{r_2, r_3} , para diferentes números N de átomos.	43
3.4. Evolución del tangle $\tau_{a-f} = 2(1 - \text{Tr}(\rho_f^2))$ para $N = 15$ áto- mos, inicialmente en el estado fundamental, acoplados a un campo coherente con $\bar{n} = 1$. La constante de acoplamiento es $g_j = g \sin (j\pi / (N + 1))$ denota la posición del j -ésimo átomo.	44

- 3.5. Evolución de las fluctuaciones de la cuadratura $(\Delta X_1)^2 = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2$ para $N = 8$ átomos inicialmente en el estado colectivo fundamental, y un campo coherente con $\bar{n} = 1$. Línea continua: acoplamiento inhomogéneo $g_j = g \sin [j\pi / (N + 1)]$, donde j denota las posición del j -th átomo. Línea segmentada: caso homogéneo con $g_j = 1/(\sqrt{N})(\sum_j g_j^2)^{1/2}$ 45
- 4.1. Población total P_T de los estados $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$, con $N = 10^3$ y una distribución para el defecto $a_j = 1/\sqrt{N}$ 56
- 4.2. Población total P_T de los estados $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$ a un tiempo $t = 2\tau$, en función del número N de espines nucleares para un defecto uniformemente distribuido $a_j = 1/\sqrt{N}$ 57
- 4.3. Evolución del tangle τ_{e-n} (línea continua) y la población P_\downarrow del estado $|\downarrow\rangle_e$ (línea segmentada) para un defecto uniformemente distribuido. El estado inicial es $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_e \otimes |\mathbf{1}\rangle_n$, $N = 10^3$, y $\tau \sim 68\tau_0$ 58
- 4.4. Evolución del tangle τ_{e-n} para la distribución del defecto centrada al borde del quantum dot. Se muestran acá, la población del espín electrónico P_\downarrow (línea punto-segmentada) y el tangle (línea segmentada) para un ancho de la distribución del defecto $\Gamma = N/50$, y el tangle para el ancho $\Gamma = N$ (línea continua) para $N = 10^3$ y el estado inicial $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_e \otimes |\mathbf{1}\rangle_n$ 60
- 4.5. Fidelidad de la memoria cuántica para $N = 10^3$ espines nucleares y distintos j_0 , $1 \leq j_0 \leq N$ 61

<p>4.6. Evolución de la población P_{\uparrow} del estado del espín electrónico $\uparrow\rangle_e$ para $N = 40$. El estado inicial para el espín electrónico es $\Psi\rangle_e = 1/\sqrt{2}(\uparrow\rangle + \downarrow\rangle)_e$ y $\rho_N = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\sigma}_+^{(j)} \mathbf{0}\rangle \langle \mathbf{0} \hat{\sigma}_-^{(j)}$ para los espines nucleares. Línea continua: $a_j = 1/N$; Línea segmentada: $a_j = [C (\Gamma/2)^2 / ((j - j_0)^2 + (\Gamma/2)^2)]^2$, con $\Gamma = N$, $j_0 = 1$, y C es una constante de normalización. Línea punto-segmentada: igual que para la línea segmentada pero con $j_0 = N$.</p>	<p>62</p>
<p>4.7. Evolución de la población P_{\downarrow} del estado del espín nuclear $\uparrow\rangle_e$ para una distribución térmica inicial para cada espín nuclear considerando $N = 10$ espines nucleares y diferentes $\langle k \rangle$. El estado inicial del espín electrónico es $\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(\uparrow\rangle + \downarrow\rangle)_e$. Para este caso, $\langle k \rangle = \exp(-\beta\hbar\omega) / (1 + \exp(-\beta\hbar\omega))$.</p>	<p>63</p>
<p>5.1. N iones de tres niveles atrapados en una trampa lineal de Paul donde el diagrama de energía del j-ésimo ión es mostrado.</p>	<p>68</p>
<p>5.2. Esquema de discriminación de estados de Dicke.</p>	<p>76</p>
<p>5.3. Esquema para la detección de estados de Dicke</p>	<p>77</p>
<p>6.1. Contribución (%) de la segunda fila de la Fig. (3.1) a la energía como función del número de átomos N. $\Delta E^{(k)} = 100((E_1^{(k)} - E_2^{(k)})/E_1^{(k)})$, donde $E_{1,2}^{(k)}$ son las energías para k excitaciones usando 1 o 2 filas de la Fig. (2.1).</p>	<p>88</p>
<p>6.2. Concurrencia bipartita $C_{1,j}$ entre el primero y el j-ésimo átomo con $k = 1$ excitación para distintos números de átomos.</p>	<p>90</p>
<p>6.3. Concurrencia C_{1N} entre el primer y los último átomo para $k = 1, 2, \dots, 6$ excitaciones como función del número de átomos N.</p>	<p>92</p>

6.4. Concurrencia $C_{1,j}$ entre el primer el el j -ésimo átomo para
 $k = 1, 2, \dots, 6$ excitaciones con $N = 20$ átomos. 93

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica ha cambiado radicalmente el entendimiento del mundo físico donde vivimos. Uno de los aspectos más profundos de esta es que predice efectos físicos, los cuales no hubiesen sido esperados de acuerdo a la teoría clásica. Otro aspecto interesante es que, en general, escapa a nuestra intuición de cómo debería comportarse la naturaleza, por ejemplo, conceptos como la incerteza cuántica y los aspectos no locales de esta teoría tienen un profundo impacto en la forma como vemos el mundo. Por este motivo, la gran fortaleza que tiene la mecánica cuántica es su impresionante capacidad para predecir variados fenómenos imposibles de interpretar a partir de teorías clásicas.

A principios de la década de 1980, P. Benioff [2,3,4] y R. Feynman [5,6], empezaron a considerar la idea de computadores que funcionen con algoritmos basados en la mecánica cuántica. En particular Feynman, motivado por su interés en los límites físicos de la computación [7], empezó a considerar computadores con componentes cuánticos [8]. Si bien Feynman [5] y anteriormente Y. Manin [9], entendieron que simular sistemas cuánticos era de alguna forma difícil, sólo con los trabajos de D. Deutsch [10] y Deutsch

y Jozsa [11] dieron luz de que los computadores basados en principios de la mecánica cuántica, podrían realizar intrínsecamente operaciones de forma más eficiente de la que podrían hacerlo los computadores clásicos. En estos últimos trabajos liderados por D. Deutsch, se mostró que la información en algún ambiente cuántico manipulado por un computador cuántico, tiene una productividad diferente a la equivalente información manipulada por un computador clásico.

Posteriores trabajos demostraban las crecientes y poderosas aplicaciones de la idea de la computación cuántica. En el problema del oráculo investigado por Deutsch y Jozsa se ve que la cantidad de recursos necesarios para realizar el cálculo en un computador cuántico es, exponencialmente, menor que para un cálculo *exacto* similar realizado en un computador clásico. Sin embargo, este trabajo por sí solo no demuestra una clara separación entre la computación clásica y la computación cuántica. Esto, debido a que un computador clásico probabilístico puede resolver el problema de Deutsch y Jozsa con un número similar de recursos, si a la salida el resultado del algoritmo puede estar errado con alguna probabilidad pequeña.

En 1993, Bernstein y Vazirani [12] desarrollaron algoritmos que no requerían la *exactitud* demandada por Deutsch y Jozsa. Estos algoritmos de Bernstein y Vazirani, mostraron una real disminución superpolinomial de los recursos requeridos por un computador cuántico respecto de un computador clásico. Siguiendo con esta tendencia, Simon [13] propuso un problema donde un computador clásico requería, exponencialmente, más recursos que su contraparte cuántica.

En este contexto, una de los trabajos más notables es el algoritmo de Shor [14]. En este trabajo, Shor desarrolla un algoritmo para la factorización de números primos y el cálculo de logaritmos discretos en un computador cuántico. Si bien este proceso de factorización puede también hacerse en un

computador clásico, la característica más importante del algoritmo de Shor es la notable reducción del tiempo de computación. Esta va de tiempos exponenciales a tiempos polinomiales de computación. Esta reducción equivale a reemplazar la tarea de contar todos los números hasta uno de 137 dígitos, por sólo escribirlo.

Evidencia posterior del poder de los computadores cuánticos fue dada por Grover cuando mostró que un computador cuántico permite un algoritmo de búsqueda mucho más eficiente [15, 16]. Aunque este algoritmo no provee una aceleración tan espectacular en la computación como el algoritmo de Shor (va de $\mathcal{O}(N)$ a $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ operaciones), la amplia gama de aplicaciones de las metodologías basadas en algoritmos de búsqueda han implicado un gran interés en el algoritmo de Grover.

Esta superioridad en el rendimiento de los llamados computadores cuánticos como procesadores de información respecto de su contraparte clásica, se debe en gran medida a una intrigante propiedad de la mecánica cuántica conocida como *entrelazamiento*. El entrelazamiento es uno de los temas centrales de debate en la teoría cuántica desde comienzos del siglo XX. Esta propiedad resulta clave a la hora de diferenciar los conceptos clásicos de los cuánticos.

El interés en el entrelazamiento a sufrido un importante incremento debido a sus nuevas aplicaciones, entre estas y tal como hemos mencionado está la computación cuántica [5, 10], además de la teleportación [17] y la criptografía cuántica [18].

Actualmente, el gran progreso experimental en el control cuántico en diferentes sistemas físicos bajo investigación, ha permitido la producción, la manipulación y la detección de estados entrelazados [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

Otro aspecto sin duda fundamental para el desarrollo de la Información

cuántica es la disponibilidad de un sistema físico que pueda ser usado como un computador cuántico.

Para que un sistema físico sea candidato para cumplir el rol de un computador cuántico, debe satisfacer varios requerimientos [29]. Dentro de estos requerimientos se encuentran, por ejemplo, la iniciación controlada del sistema (estado inicial del sistema), la posibilidad de realizar operaciones unitarias, ya sean individuales (locales) y colectivas (no locales) entre uno y más qubits, respectivamente. También es fundamental que este sistema físico posea un tiempo de coherencia suficientemente alto que permita la realización de las operaciones lógicas necesarias para la computación cuántica.

Una vez realizadas estas operaciones lógicas, se requiere conocer los resultados provenientes de los algoritmos. En este sentido, el sistema físico debe permitir una confiable obtención de resultados, es decir, procedimientos para medir los observables asociados a la computación que se realice en este sistema deben implementarse con alta precisión.

Otra importante propiedad que debe tener un sistema físico candidato a ser un procesador de información cuántica es la *escalabilidad*, es decir, la capacidad para definir dentro de este sistema cuántico un número suficiente de unidades básicas de información, en este caso de qubits. De esta manera, el desarrollo pleno de la Información cuántica requiere necesariamente de sistemas físicos capaces de ser manipulados controladamente, de manera individual y colectiva.

El objetivo de esta tesis es estudiar distintos sistemas físicos compuestos de una o más partículas. El énfasis de este estudio está centrado en algunos de los elementos claves para la Información cuántica: el entrelazamiento, la descripción dinámica y una controlada manipulación de sistemas colectivos.

En particular, desarrollamos un método para estudiar la dinámica cuántica de una partícula (o un modo) interactuando inhomogéneamente con un

gran número de partículas. Este método consiste en la descripción del sistema completo en términos de estados colectivos. De esta forma, desarrollamos un acercamiento efectivo para encontrar el espacio de Hilbert accesible al sistema dada su condición inicial. Mostramos que, este método permite encontrar la dinámica efectiva de este sistema dentro de un espacio de Hilbert reducido.

Como primera aplicación de este método efectivo, estudiamos la dinámica cuántica de una colección de N átomos de dos niveles interactuando inhomogéneamente con un modo (cuántico) del campo electromagnético. En este sistema, estudiamos la validez de nuestro método comparándolo con resultados exactos. Además, mostramos que es posible estudiar configuraciones que son muy difíciles de tratar incluso numéricamente debido a las dimensiones del espacio de Hilbert asociado al problema.

Otro sistema físico abordado en esta tesis, es el compuesto por un espín electrónico interactuando con un sistema de espines nucleares en el interior de un *quantum dot*. Este sistema involucra acoplamiento inhomogéneo de manera natural debido a las características de la interacción hiperfina de intercambio que domina este sistema. Desde el punto de vista de la Información cuántica, estudiamos la viabilidad de que este sistema pueda ser utilizado para el almacenamiento de información cuántica [63] y mostramos que imperfecciones en el estado inicial, juegan un rol crucial en la fidelidad de los procesos de almacenaje y recuperación de la información cuántica.

Una de las propuestas más importantes para un computador cuántico es la basada en iones atrapados [40]. En este sistema, desarrollamos un método para manipular, colectivamente, los iones atrapados dentro de un subespacio seleccionado. Usando este método podemos preparar estados simétricos con un número fijo de excitaciones iónicas: los llamados estados de Dicke [49]. En particular podemos preparar estados maximalmente entrelazados de muchas partículas.

Finalmente, dejaremos un poco de lado el estudio de la evolución de sistemas cuánticos y nos concentraremos específicamente en el problema de la caracterización del entrelazamiento en el espectro de autoestados para un sistema de átomos acoplados inhomogéneamente a un modo del campo electromagnético cuántico.

Capítulo 2

Fundamentos

En este capítulo resumiremos algunos conceptos relativos a la mecánica y la Información cuántica. En particular, daremos una breve introducción a los postulados de la mecánica cuántica, la definición de *qubit* y la presentación de algunas compuertas lógicas cuánticas. Revisaremos algunos modelos físicos que serán usados a lo largo de esta tesis como la interacción de uno o muchos átomos de dos niveles con un modo del campo electromagnético (modelo de Jaynes- y Tavis-Cummings respectivamente), además de la interacción de un espín nuclear con muchos espines nucleares confinados en un *quantum dot* y la dinámica de iones atrapados en una trampa de Paul.

2.1. Postulados de la Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica es la piedra angular para el desarrollo de las teorías físicas. Es el modelo matemático para describir el mundo físico. Este modelo consta de cuatro postulados principales asociados a la definición de estado, observables, mediciones y la evolución del sistema físico.

Postulado 1

Asociado a cualquier sistema físico aislado hay un espacio vectorial complejo, llamado espacio de Hilbert del sistema. Este sistema está completamente descrito por su *vector de estado* el cual es un vector unitario en el espacio de Hilbert del sistema.

Un espacio de Hilbert tiene las siguientes propiedades:

a) Es un espacio vectorial sobre los números complejos \mathcal{C} . Los vectores componentes de este espacio se denotan $|\Psi\rangle$.

b) Este espacio tiene producto interno $\langle\psi|\varphi\rangle$ que mapea un par ordenado de vectores a los complejos \mathcal{C} . A su vez el producto interno tiene las siguientes propiedades

(i) $\langle\psi|\psi\rangle > 0$, para $|\Psi\rangle \neq 0$. (Positividad).

(ii) $\langle\varphi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle$. (Linealidad).

(iii) $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$

c) Es completo en la norma, esto es,

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}. \quad (2.1)$$

lo que en el caso de espacios con dimensión infinita asegura la convergencia de expansiones en funciones propias. Esto permite la expansión de estados en términos de una base ortonormal.

Postulado 2

Un *observable* es una propiedad física que, en principio, puede ser medida. Un observable corresponde matemáticamente a un operador *autoadjunto* o *Hermítico*, esto es, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Postulado 3

El resultado de realizar una medición sobre un observable \hat{A} es un autovalor de este operador. Las mediciones cuánticas están descritas por un conjunto $\{\hat{P}_m\}$ de *operadores de medición*. El índice m da cuenta de los resultados posibles de la medición. Si el sistema cuántico está en un estado $|\psi\rangle$, inmediatamente antes de la medición la probabilidad de obtener un resultado m está dada por

$$p(m) = \langle \psi | \hat{P}_m^\dagger \hat{P}_m | \psi \rangle, \quad (2.2)$$

e inmediatamente después de la medición el estado del sistema colapsará a

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_m^\dagger \hat{P}_m | \psi \rangle}}, \quad (2.3)$$

Postulado 4

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado está descrita por la *ecuación de Schrödinger*,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (2.4)$$

donde \hat{H} es un operador Hermítico llamado Hamiltoniano.

Esto completa la descripción matemática de la mecánica cuántica.

2.2. Computación e Información Cuántica

En esta sección describiremos algunos de los elementos fundamentales para la Computación y la Información cuántica, como por ejemplo el *entrelazamiento*. Introduciremos la noción de *qubit*, y algunas compuertas cuánticas.

2.2.1. El Qubit

En computación clásica, la unidad básica de información es el llamado *bit*. Un *bit* tiene dos valores posibles 0,1. En computación cuántica la correspondiente unidad básica de información es el *qubit*.

Esta unidad fundamental para la computación cuántica describe el más simple de los sistemas cuánticos, aquél compuesto por dos estados que puede ser descrito por un vector complejo de dos dimensiones en el espacio de Hilbert. Podemos denotar una base ortonormal para este espacio vectorial de dos dimensiones como $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, llamada *base computacional*. Entonces, un estado normalizado arbitrario de dos niveles puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.5)$$

donde α y β son números complejos que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Entonces, un *qubit* es un sistema cuántico de dos niveles que puede expresarse como (2.5).

2.2.2. Compuertas lógicas cuánticas

En esta parte describiremos brevemente algunas compuertas cuánticas para uno y mas qubits mencionando sus propiedades más generales.

Compuertas de un qubit

Consideremos una compuerta clásica de un qubit. La única compuerta no trivial de esta clase es la llamada compuerta NOT. Esta compuerta clásica actúa de la siguiente forma sobre un bit 0, 1

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1 \\ 1 &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La contraparte cuántica de esta compuerta, esta dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

de esta forma si tenemos un qubit inicialmente en el estado $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, la acción de la compuerta X sobre este qubit es de la siguiente forma

$$X (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle. \quad (2.8)$$

Las puertas de un qubit deben cumplir un sólo requerimiento: deber ser unitarias. De esta forma cualquier operación unitaria de un qubit puede ser considerada como una compuerta lógica.

Por otra lado, mientras que sólo existe un tipo de compuerta clásica de un bit (la compuerta NOT), existen muchas compuertas cuánticas de un qubit. Dos compuertas importantes son la compuerta Z y la compuerta Hadarmard H :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Estas compuertas actúan sobre el qubit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Z (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \\ H (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Compuertas cuánticas controladas

La idea de compuertas clásicas puede expresarse en la siguiente acción: Si A es cierto, entonces realice B . Este tipo de compuertas son unas de las más útiles tanto para la computación cuántica como para la clásica.

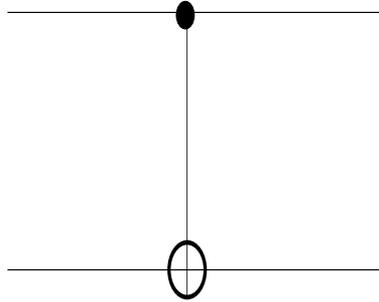


Figura 2.1: Representación de una compuerta controlada NOT (CNOT)

Una de las principales compuertas lógicas de esta clase es la compuerta NOT controlada o CNOT. Esta compuerta tiene dos qubits de entrada, llamados qubit de *control* $|c\rangle$ y qubit *objetivo* $|t\rangle$ respectivamente. Esta compuerta tiene una representación tal como se muestra en la Fig. 2.1.

La línea superior representa el qubit de control mientras que la inferior representa al qubit objetivo. La acción de la compuerta CNOT está dada por

$$|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle|t \otimes c\rangle, \quad (2.12)$$

donde \otimes representa la suma en módulo 2. En otras palabras, esta compuerta realiza una operación NOT sólo cuando el qubit de control está en el estado $|1\rangle$ de otra forma el qubit objetivo es dejado intacto.

En general, si suponemos que U es alguna operación unitaria de un qubit arbitraria, una compuerta U controlada es una operación de dos qubits, un qubit de control y otro qubit objetivo. Entonces, si el qubit de control está en un estado determinado, se aplica U sobre el qubit objetivo, de otra forma el qubit objetivo es inalterado. Esto es,

$$|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle U^c |t\rangle. \quad (2.13)$$

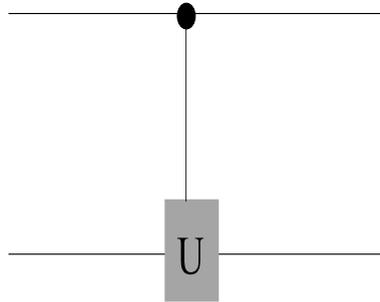


Figura 2.2: Representación de una compuerta controlada U arbitraria

Este tipo general de compuertas está representada en la Fig. 2.2.

2.2.3. Entrelazamiento

En esta parte daremos un breve análisis a una de las propiedades de la mecánica cuántica fundamentales para la Información cuántica: el entrelazamiento.

Entrelazamiento bipartito

Un sistema bipartito es un sistema cuántico compuesto por dos subsistemas físicamente diferentes. Está asociado a un espacio de Hilbert \mathcal{H} dado por el producto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ correspondientes a cada subsistema.

En el caso de estados puros se pueden distinguir dos diferentes clases de estados. Un estado cuántico $|\Psi\rangle$ se dice *estado producto* o *separable*, si puede escribirse como un producto tensorial de los estados de los subsistemas, es decir, si existen estados para los subsistemas, digamos $|\varphi\rangle$ y $|\phi\rangle$ tal que

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B. \quad (2.14)$$

Este estado describe una situación análoga a la clásica donde cada subsistema contiene toda su información independiente del otro subsistema. Por

ejemplo, si realizamos una medición sobre uno de los subsistemas, esta no tiene ninguna influencia sobre el otro subsistema, esto es, no hay correlación entre los resultados de las mediciones de estos dos subsistemas

Por otro lado, cuando el estado global del sistema bipartito no puede escribirse de la forma (2.14) si existe correlación entre las mediciones de los dos subsistemas. A este tipo de estados se les llama estados *entrelazados*. En este caso, una medición local causa la reducción del estado sistema bipartito y por lo tanto cambia los resultados de mediciones futuras en ambos sistemas.

En el caso de estados mixtos, la situación es más complicada ya que estados separables y estados productos ya no son sinónimos. Un estado producto de dos sistemas ϱ_A y ϱ_B se escribe como

$$\varrho = \varrho_A \otimes \varrho_B , \quad (2.15)$$

sin embargo, un estado separable se escribe como

$$\varrho = \sum_i p_i \varrho_1^i \otimes \varrho_2^i , \quad (2.16)$$

donde $\sum_i p_i = 1$ y $p_i > 0$. Estos estados dan cuenta de la situación donde las correlaciones entre los dos subsistemas se deben al conocimiento incompleto del estado, siendo completamente caracterizados por las probabilidades clásicas p_i .

Un estado mixto entrelazado se define entonces como

$$\varrho \neq \sum_i p_i \varrho_1^i \otimes \varrho_2^i \quad (2.17)$$

las correlaciones contenidas en estos estados no pueden ser completamente caracterizadas con el conjunto de probabilidades clásicas, de esta forma podemos decir que los estados entrelazados tienen correlaciones que no existen en ningún sistema clásico.

2.2.4. Criterios de separabilidad

Separabilidad de estados puros

Los estados puros bipartitos pueden clasificarse a través de su *descomposición de Schmidt*. Cada estado bipartito puro $|\Psi\rangle$ puede expresarse en una base producto,

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} A_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle, \quad (2.18)$$

para una matriz A con coeficientes A_{ij} .

Las bases $\{|\varphi_i\rangle\}$ y $\{|\phi_i\rangle\}$ correspondientes a cada subsistema pueden elegirse arbitrariamente. Sin embargo, para un estado bipartito dado, siempre hay una base ortonormal para cada subsistema tal que

$$|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\xi_i\rangle_1 \otimes |\xi_i\rangle_2, \quad (2.19)$$

donde la suma es hasta d , que es la dimensión del subsistema más pequeño.

La demostración de esta propiedad es directa. Escribamos A en términos de su descomposición en valores singulares,

$$A = \mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{V}, \quad (2.20)$$

donde \mathcal{U} y \mathcal{V} son matrices unitarias y \mathcal{D} es una matrix diagonal con elementos reales no negativos. Reemplazando esto en la Ec. (2.18) tenemos que

$$|\Psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ij} d_{ii} v_{ik} |\varphi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle. \quad (2.21)$$

con $u_{ij} = \langle \varphi_i | \mathcal{U} | \varphi_j \rangle$, $v_{ij} = \langle \phi_j | \mathcal{V} | \phi_i \rangle$ y d_{ii} son los elementos de matriz de \mathcal{D} .

Luego, definimos los estados ortonormales $|\xi_i\rangle_1 \equiv \sum_j u_{ij} |\varphi_j\rangle$, $|\xi_i\rangle_2 \equiv \sum_k v_{ik} |\phi_k\rangle$ y $\lambda_i \equiv d_{ii}$. Con estas definiciones la Ec. (2.21) puede reescribirse como

$$|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\xi_i\rangle_1 \otimes |\xi_i\rangle_2. \quad (2.22)$$

Las bases $|\xi_i\rangle_1$ y $|\xi_i\rangle_2$ son las llamadas *bases de Schmidt* y λ_i son los *coeficientes de Schmidt*.

Los coeficientes de Schmidt puede calcularse a partir de las matrices densidad reducidas de los subsistemas dadas por: $\varrho_1 = \text{Tr}_2|\Psi\rangle\langle\Psi|$ y $\varrho_2 = \text{Tr}_1|\Psi\rangle\langle\Psi|$ respectivamente. A partir de la Ec. (2.22) puede verse que el espectro de ϱ_1 esta dado por los coeficientes de Schmidt.

Dado que las bases de Schmidt, por construcción, incluyen sólo estados separables, toda la información acerca del entrelazamiento está incluida en los coeficientes de Schmidt. Esto puede verse ya que un estado separable está caracterizado por un vector de coeficientes de Schmidt con sólo un valor no nulo: $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_s = [1, 0, \dots, 0]$, mientras que el vector de coeficientes de Schmidt para un estado entrelazado tiene al menos dos componentes no nulas.

Un estado se llama maximalmente entrelazado cuando el vector de Schmidt es de la forma $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_m = [1/d, \dots, 1/d]$.

Entonces los coeficientes de Schmidt relacionan la cantidad de entrelazamiento de un estado bipartito puro con el grado de pureza de las matrices densidad reducidas. Una matriz reducida pura corresponde a un estado separable, mientras que una matriz reducida completamente mezclada (diagonal) da cuenta de un estado maximalmente entrelazado.

Separabilidad en estados mixtos

Hemos visto que para un estado puro es fácil verificar si este estado corresponde a un estado separable o a un estado entrelazado. Sin embargo, la tarea se complica cuando hablamos de estados mixtos.

En general, puede caracterizarse la separabilidad de un estado mixto ϱ a traves de los llamados *mapeos positivos*.

Un mapeo $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el espacio de los operadores lineales actuando sobre \mathcal{H} se llama *positivo* cuando mapea operadores

positivos (semidefinidos positivos, es decir, con autovalores no negativos) a operadores positivos, esto es

$$\Lambda(\varrho) \geq 0, \quad \text{para todo } \varrho \geq 0. \quad (2.23)$$

A partir de la noción de mapeos positivos puede definirse que un estado es separable solo si

$$(\Lambda \otimes \mathbf{1})(\varrho) \geq 0 \quad \text{para todos los mapeos positivos } \Lambda, \quad (2.24)$$

Un tipo de mapeo positivo es la transposición $T =: \Lambda$ [88]. En particular la *transpuesta parcial* $\varrho^{pt} = (T \otimes \mathbf{1})(\varrho)$ de un estado ϱ da cuenta de la separabilidad de un estado bipartito mixto: Si ϱ^{pt} tiene al menos un autovalor negativo, esto es

$$\varrho^{pt} \not\geq 0 \quad (2.25)$$

el estado está entrelazado.

Sin embargo, a partir del criterio de la transpuesta parcial uno puede inferir separabilidad sólo para sistemas de baja dimensión, más precisamente de dimensión $2 \otimes 2$ y $2 \otimes 3$. Para estos sistemas el criterio de la transpuesta parcial distingue sin ambigüedad estados entrelazados de separables.

2.2.5. Medidas de Entrelazamiento

La medida de entrelazamiento más usada por la comunidad científica relacionada con la Información cuántica es el llamado *entrelazamiento de formación* [30]. El entrelazamiento de formación puede definirse de la siguiente manera: Sea ρ el estado mixto de un par de sistemas cuánticos compartido por dos observadores separados que pueden comunicarse sólo a través de señales clásicas. El entrelazamiento de formación de ρ es entonces el número asintótico de estados maximalmente entrelazados que el observador necesita,

por par, para crear un ensamble de pares de estados puros cuyo ensamble promedio sea ρ [31].

A continuación, mostraremos algunas derivaciones analíticas para este entrelazamiento de formación, para el caso de un sistema en un estado puro y para el caso de un sistema en una mezcla estadística.

Entrelazamiento de estados puros

Como comentamos anteriormente, un estado bipartito puro puede ser fácilmente analizado desde el punto de vista de separabilidad a partir de los coeficientes de Schmidt. En otras palabras, el entrelazamiento de un estado bipartito puro, puede cuantificarse a través del grado de mixtura de las matrices densidad reducidas de los subespacios componentes del sistema bipartito, digamos A y B . Esto es, si tenemos un estado puro $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$, a partir de las matrices densidad reducidas de cada subsistema se puede inferir que

$$\text{Tr}\rho_A^2 = \text{Tr}\rho_B^2 = 1 \quad \text{si el estado es separable,} \quad (2.26)$$

y

$$\text{Tr}\rho_A^2 = \text{Tr}\rho_B^2 = \frac{1}{2} \quad \text{si el estado está maximalmente entrelazado,} \quad (2.27)$$

donde $\rho_{A(B)}$ es la matriz densidad reducida de $A(B)$ obtenida a partir de trazar la matriz densidad global sobre el sistema $B(A)$.

A partir de estas ideas, el entrelazamiento entre dos sistemas A y B de dimensión finita arbitraria en un estado global puro, puede cuantificarse a través del llamado *tangle* [34]. Esta medida de entrelazamiento está dada por

$$\tau_{AB} = 2\nu_A\nu_B (1 - \text{Tr}(\rho_A^2)) = 2\nu_A\nu_B (1 - \text{Tr}(\rho_B^2)), \quad (2.28)$$

donde, ν_A y ν_B son constantes arbitrarias que dependen de la dimensión de los sistemas A y B respectivamente.

En este caso de estados puros, el entrelazamiento de formación puede escribirse en términos de la llamada *conurrencia* [32]. En esta situación, el entrelazamiento de formación $E_f(\rho) = \mathcal{E}(C(\psi))$ esta dado por

$$\mathcal{E}(C) = h \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - C^2} \right) \right] \quad (2.29)$$

donde h es la función entropía binaria

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x) \quad (2.30)$$

y C es la *conurrencia* dada por

$$C(\psi) = |\langle \psi^* | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi \rangle|, \quad (2.31)$$

donde σ_y es la segunda matriz de Pauli, y $|\psi^*\rangle$ es el complejo conjugado de $|\psi\rangle$.

Para el caso de dos qubits en un estado global puro, la conurrencia esta directamente relacionada con el tangle a través de la ecuación: $C^2(\psi_{AB}) = \tau_{AB}$

Entrelazamiento de estados mixtos

El caso de estados mixtos es más complejo, debido a la dificultad en los procesos de optimización procedentes del entrelazamiento de formación, ya que existen distintas descomposiciones en estados puros para la matriz densidad.

En este caso, un estado mixto ρ , puede siempre escribirse en muchas diferentes formas como una mezcla estadística de distintos aunque no necesariamente ortogonales estados puros, tal como

$$\rho = \sum_j p_j |\Phi_j\rangle \langle \Phi_j|. \quad (2.32)$$

El entanglement de formación de ρ es definido como el entrelazamiento promedio de los estados puros de la descomposición, minimizado sobre todas las posibles descomposiciones, esto es

$$E_f(\rho) = \inf \sum_j p_j E(|\Phi_j\rangle). \quad (2.33)$$

Para el caso de dos qubits, existe una fórmula explícita para el entrelazamiento de formación para un estado mixto arbitrario [33]. Esta fórmula, corresponde a la generalización para estados arbitrarios de dos qubits de la *conurrencia* [33]. En esta situación, el entrelazamiento de formación $E_f(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho))$ esta dado por

$$\mathcal{E}(C(\rho)) = h \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - C^2} \right) \right] \quad (2.34)$$

donde la concurrencia para dos qubits arbitrarios está dada por

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.35)$$

donde los λ_i son las raíces cuadradas de los autovalores de $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ ordenados decrecientemente.

A lo largo de esta tesis usaremos como medidas de entrelazamiento entre los sistemas A y B el tangle τ_{AB} y la concurrencia $C(\rho_{AB})$ para el caso de estados puros y mixtos respectivamente.

2.3. Modelos físicos para la Computación e Información Cuántica

En esta sección daremos una breve descripción de los modelos físicos que usaremos a lo largo de esta tesis. Estos modelos corresponden a la interacción de uno o muchos átomos con un modo del campo electromagnético, un espín

electrónico interactuando con espines nucleares confinados en un *quantum dot* y la dinámica iones atrapados en una trampa de Paul.

2.3.1. Interacción átomo-campo. Modelo de Jaynes-Cummings

La interacción de un campo electromagnético \mathbf{E} con un átomo de un sólo electrón puede describirse a través del Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_{\text{INT}} \quad (2.36)$$

Donde, \hat{H}_A y \hat{H}_C son las energías libres del átomo y el campo, respectivamente, y \hat{H}_{INT} representa la interacción entre ellos. Ahora, si la longitud de onda del campo electromagnético es grande comparada con el tamaño de un átomo, que típicamente es de unos 10^{-9}m , entonces la variación del campo sobre el átomo puede ser ignorada. Este sería el caso cuando la frecuencia del campo es menor a unos 10^{18}Hz . De esta forma, puede mostrarse que la parte dominante de la interacción átomo-campo aparece tratando el átomo como un dipolo compuesto por Z electrones ligados al núcleo. Si \mathbf{r}_j denota la posición del j -ésimo electrón, el Hamiltoniano de interacción átomo-campo en la aproximación dipolar está dado por

$$\hat{H}_{\text{INT}} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = -e \sum_{j=1}^Z \hat{\mathbf{r}}_j \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0), \quad (2.37)$$

donde e es la carga del electrón, $\hat{\mathbf{d}}$ es el momento dipolar atómico, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0)$ es el operador campo eléctrico dado por

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} \epsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) \hat{a}_{\mathbf{k}} + \text{h.c.} \quad (2.38)$$

Considerando un átomo con un sólo electrón tenemos que, el Hamiltoni-

ano de interacción está dado por

$$\hat{H}_{\text{INT}} = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0), \quad (2.39)$$

Por otro lado, la energía del campo \hat{H}_C está dada en términos de los operadores de creación y aniquilación tal como

$$\hat{H}_C = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_k (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}) \quad (2.40)$$

Sea, $\{|\psi_i\rangle\}$, $i = 1, \dots, N$ un conjunto completo de autoestados ortonormales accesibles para el electrón y $\{E_i\}$ las correspondientes autoenergías. Así, el Hamiltoniano libre del átomo puede escribirse como

$$\hat{H}_A = \sum_{j=1}^N E_j \hat{\sigma}_{jj}, \quad (2.41)$$

donde, $\hat{\sigma}_{ij} = |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$. En esta base, el operador de posición puede escribirse como:

$$e\hat{\mathbf{r}} = e \sum_{ij} |i\rangle\langle i|\hat{\mathbf{r}}|j\rangle\langle j| = \sum_{ij} \varrho_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (2.42)$$

con, $\varrho_{ij} = \langle i|\hat{\mathbf{r}}|j\rangle$. Asumiendo que el átomo se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, el operador campo puede escribirse como

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}), \quad (2.43)$$

con $\varepsilon_{\mathbf{k}} = (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2}$. De esta forma, el Hamiltoniano total del sistema está dado por

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{j=1}^N E_j \hat{\sigma}_{jj} + \hbar \sum_{ij} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}) \quad (2.44)$$

con $g_{\mathbf{k}}^{ij} = -\varrho_{ij} \cdot \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}} / \hbar$, donde hemos omitido los términos constantes del Hamiltoniano.

Supondremos un átomo de dos niveles, es decir, $\{|\psi_i\rangle\} = \{|e\rangle, |g\rangle\}$. Aquí hemos denotado $|g\rangle$ al estado base del átomo y $|e\rangle$ al estado excitado. Si $g_{\mathbf{k}}^{ij} = g_{\mathbf{k}}^{ji} \equiv g_{\mathbf{k}}$ y los elementos de matriz dipolares son reales, el Hamiltoniano puede reescribirse como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + (E_g \hat{\sigma}_{gg} + E_e \hat{\sigma}_{ee}) + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{eg}^\dagger) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}). \quad (2.45)$$

Definiendo los operadores atómicos

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (2.46)$$

$$\hat{\sigma}^\dagger = |e\rangle\langle g| \quad (2.47)$$

$$\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|, \quad (2.48)$$

el Hamiltoniano puede escribirse, omitiendo los términos constantes, tal como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}). \quad (2.49)$$

Los operadores atómicos $\hat{\sigma}^\dagger$, $\hat{\sigma}$ y $\hat{\sigma}_z$ satisfacen el álgebra de las matrices de Pauli de espín 1/2. El operador $\hat{\sigma}^\dagger$ lleva un átomo desde el estado base al estado excitado, mientras que el operador $\hat{\sigma}$ lleva el átomo desde el estado excitado al estado base.

El último término de la ecuación anterior, correspondiente a la parte de interacción, consta de cuatro contribuciones: el término $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ describe el proceso físico en que el átomo va desde su estado excitado al estado base creando un fotón en el modo \mathbf{k} . El término $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$ describe el proceso inverso, es decir, un átomo es llevado de su estado base al estado excitado mientras que

un fotón en el modo \mathbf{k} es aniquilado. Es importante hacer notar que estos dos términos conservan energía, ya que representan el intercambio de energía entre el campo electromagnético y el átomo. Por otro lado, el término $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ representa el proceso en que un fotón es creado y el átomo va desde su estado base al estado excitado. El término $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}}$ representa la aniquilación de un fotón y el átomo va desde su estado excitado al estado fundamental. Claramente, ambos procesos no conservan la energía ya que el primero produce una ganancia de energía de aproximadamente $2\hbar\omega$ y el segundo resulta en una pérdida de energía de igual magnitud. La eliminación de estos términos que no conservan la energía corresponde a la aproximación de onda rotante. En esta aproximación, el Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar\omega \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\sigma}). \quad (2.50)$$

Cuando suponemos que el sistema se encuentra en una cavidad electromagnética, podemos asumir que el sistema sólo acopla un modo del campo electromagnético. De esta manera, el Hamiltoniano (2.50) puede escribirse como

$$\hat{H} = \hbar\nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}). \quad (2.51)$$

Este es el llamado modelo de Jaynes-Cummings [47] para la interacción de un átomo de dos niveles con un modo cuántico del campo electromagnético.

2.3.2. Modelo de Tavis-Cummings

En la sección anterior consideramos un sistema físico compuesto por un átomo de dos niveles $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ acoplado a un campo electromagnético cuántico.

Consideremos ahora el caso en que N átomos se acoplan dipolarmente a un modo cuántico del campo electromagnético [50]. El Hamiltoniano para un modo del campo electromagnético interactuando con N átomos de dos niveles en la aproximación dipolar y de onda rotante descritas en la sección anterior está dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_e\hat{S}_e + \hbar\omega_g\hat{S}_g + \hbar g(\hat{a}\hat{S}_+ + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger) \quad (2.52)$$

donde $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ es el operador de creación (aniquilación) actuando sobre el correspondiente espacio de Fock \mathcal{F} de dimensión infinita, \hat{S}_\pm , \hat{S}_e y \hat{S}_g son los operadores colectivos atómicos definidos como

$$\hat{S}_e = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes (|e\rangle\langle e|)^j \otimes \underbrace{\mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_2}_{N-j \text{ veces}},$$

$$\hat{S}_g = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes (|g\rangle\langle g|)^j \otimes \underbrace{\mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_2}_{N-j \text{ veces}}, \quad (2.53)$$

$$\hat{S}_\pm = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_\pm^j \otimes \underbrace{\mathbf{1}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_2}_{N-j \text{ veces}} \quad (2.54)$$

donde $\hat{\sigma}_+^j = (|e\rangle\langle g|)^j$ y $\hat{\sigma}_-^j = (|g\rangle\langle e|)^j$ son los operadores atómicos en la base $\{|e\rangle_j, |g\rangle_j\}$ correspondiente al estado excitado y al estado base del j -ésimo átomo respectivamente. Estos operadores colectivos actúan sobre un espacio de Hilbert de dimensión $2^N \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2$ (N veces) tal que el Hamiltoniano (2.52) actúa en el espacio de Hilbert

$$\mathcal{F} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ veces}} \quad (2.55)$$

A continuación asumiremos por simplicidad el campo resonante a la transición atómica, es decir, $\omega_e - \omega_g - \omega = 0$. De esta manera, el Hamiltoniano (2.52)

en el cuadro de interacción está dado por

$$\hat{V} \equiv e^{-i\hat{H}_0} \hat{H} e^{i\hat{H}_0} = \hbar g (\hat{a} \hat{S}_+ + \hat{S}_- \hat{a}^\dagger) \quad (2.56)$$

Una base natural para representar este Hamiltoniano es la base de momento angular $\{|jm\rangle\}$, $j = 1, 2, 3, \dots, N/2$ y $m = -j, \dots, j$. Donde los operadores colectivos están dados por

$$\hat{S}_\pm = \bigoplus_{j=\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots} \underbrace{\hat{J}_\pm^j \oplus \hat{J}_\pm^j \oplus \dots \oplus \hat{J}_\pm^j}_{n_j \text{ veces}} \quad (2.57)$$

donde $\hat{J}_\pm^j = \sum_{m=-j}^{m=j-1} |jm\rangle \langle jm \mp 1| f_m^\mp$, y los coeficientes f_m^- y f_m^+ están dados por

$$f_m^+ = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \quad (2.58)$$

$$f_m^- = \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \quad (2.59)$$

Esta representación de los operadores atómicos colectivos está asociada a la representación unitaria irreducible del grupo SU(2)

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2 = \bigoplus_{j=\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots} n_j E^j$$

donde los espacios Hermíticos de dimensión $2j+1$, E^j aparecen con multiplicidad n_j en la suma directa, dependiendo de j , de esta forma $2^N = \sum_{j=\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots} n_j (2j+1)$. Entonces, por ejemplo, para dos, tres, y cuatro átomos tenemos la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 &= E^1 \oplus E^0 \\ \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 &= E^{\frac{3}{2}} \oplus E^{\frac{1}{2}} \oplus E^{\frac{1}{2}} \\ \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 &= E^2 \oplus 3E^1 \oplus 2E^0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

En este contexto, el Hamiltoniano (2.56) puede escribirse como

$$V = \hbar g \bigoplus_{j=\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots} n_j \left(\sum_{m=-j}^{m=j-1} |jm\rangle \langle jm+1| f_m^+ a^\dagger + \sum_{m=-j+1}^{m=j} |jm\rangle \langle jm-1| f_m^- a \right) \quad (2.61)$$

Esto significa que formalmente la solución de la ecuación de evolución puede expresarse por la suma directa de operadores de evolución actuando sobre asociados al momentum angular total tal como

$$U(t) = \bigoplus_{j=\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots} n_j U^j(t) \quad (2.62)$$

donde $U^j(t)$ son operadores de evolución de dimensión $2j+1$.

En particular, el espacio simétrico $j = N/2$ está constituido por los denominados estados de Dicke [49]. Estos estados son simétricos ante el intercambio de partículas. Entonces, si el estado inicial del sistema atómico se encuentra en alguno de estos estados de Dicke, la dinámica dada por el Hamiltoniano (2.61) ocurrirá sólo en el subespacio simétrico con $j = N/2$ sin acoplar el resto de los subespacios con $j \neq N/2$.

2.3.3. Dinámica de un espín electrónico en quantum dots

Actualmente, la dinámica de espines electrónicos confinados en estructuras semiconductoras tiene un gran interés en la investigación científica. Entre los desarrollos más importantes en esta área están los experimentos de Kikkawa y Awschalom [36, 37] quienes demostraron que en este sistema pueden lograrse tiempos de coherencia muy altos para el espín electrónico en GaAs. Esta escala de tiempo representa el tiempo T_2 , es decir, el tiempo

de relajación transversal del espín de un ensamble de electrones. Esta escala puede exceder los 100 ns. Estos resultados experimentales han generado importantes propuestas en los campos de la espintrónica y la computación cuántica en semiconductores [56, 35].

Consideramos un electrón confinado en un quantum dot semiconductor en una banda de conducción tipo s. Asumimos además que el electrón se encuentra en algún autoestado orbital de acuerdo al potencial de confinamiento, en general, el estado base orbital en el quantum dot. El grado de libertad de espín se acopla con un campo magnético \vec{B} con un factor electrónico g , y a los espines que lo rodean a través de la interacción de contacto hiperfina. Entonces el Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = g\mu_B\vec{S} \cdot \vec{B} + \vec{S} \cdot \sum_i A_i\vec{I}_i, \quad (2.63)$$

donde el subíndice i representan los núcleos y las constantes de acoplamiento A_i están dados por

$$A_i = Av_0|\Psi(\vec{r}_i)|^2 \quad (2.64)$$

con

$$A = \frac{4\mu}{3I}\mu_B\mu_I\eta n_0 \quad (2.65)$$

donde $n_0 = 1/v_0$ es la densidad de los núcleos.

El Hamiltoniano (5.1) también describe la interacción hiperfina entre los espines nucleares y el espín de un electrón ligado en una orbita tipo hidrógeno alrededor de un donador en un cristal de silicio.

Estudiemos ahora el orden de magnitud de la interacción hiperfina. Un quantum dot de GaAs con un volumen del orden de 10^5 nm^3 contiene del orden de $N = 10^6$ núcleos con una densidad $n_0 = 45,6 \text{ nm}^{-3}$. Tomando en cuenta la abundancia natural de los isótopos ^{69}Ga , ^{71}Ga y ^{75}As se tiene un momento magnético nuclear promedio de $\mu_I = 1,84\mu_N$. Los valores estimados

de η en la Ref. [38] llevan a una constante de acoplamiento total A del orden de $10^{-5} - 10^{-4}$ eV. Esta es la fuerza de un acoplamiento hiperfino actuando sobre el espín electrónico en presencia de un sistema de espines nucleares completamente polarizados. Con el factor g electrónico $g = -0,44$ para GaAs este corresponde a un campo magnético efectivo del orden de unos pocos tesla. Para un sistema de espines nucleares completamente no polarizados la fuerza del campo hiperfino fluctúa alrededor de cero con un valor típico dado por A/\sqrt{N} , donde N es el número de núcleos en el quantum dot interactuando efectivamente con el espín electrónico.

En el caso del GaAs, todos los momentos magnéticos son positivos lo que implica un acoplamiento hiperfino antiferromagnético. La situación es distinta en Si:P, donde el momento magnético del ^{31}P es positivo mientras que el ^{29}Si tiene un momento magnético nuclear negativo, lo que lleva a un acoplamiento predominantemente ferromagnético con el espín electrónico. La abundancia natural del ^{29}Si lleva a una densidad $n_0 = 2,3 \text{ nm}^{-3}$. Asumiendo un radio de Bohr de 30\AA para la orbita del tipo hidrógeno del electrón, el número de núcleos interactuando efectivamente con el espín electrónico es aproximadamente de unos pocos cientos y de la Eq. (2.65) se tiene que $|A|$ es del orden de 10^{-7} eV, con η dado en Ref. [39].

Otro tipo de interacción involucrada en este sistema físico es el acoplamiento dipolar entre los espines nucleares. La contribución de esta interacción al Hamiltoniano (5.1) se obtiene a partir de su contraparte clásica expresando los momentos magnéticos en términos de operadores de espín nuclear, $\vec{\mu}_I = \vec{I}(\mu_I/I)$. Entonces, la interacción entre dos espines nucleares está dada por

$$\hat{H}_{ij} = -\frac{\mu_0\mu_i\mu_j}{4\pi I_i I_j} \frac{1}{r_{ij}^3} \left(\frac{3(\vec{I}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{I}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^2} - (\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) \right), \quad (2.66)$$

donde \vec{r}_{ij} es el vector de posición entre los núcleos. En GaAs, el isótopo ^{71}Ga

tiene el mayor momento magnético nuclear con $\mu_I = 2,562\mu_N$. Si asumimos dos de estos núcleos como primeros vecinos entre si uno encuentra que $r_{ij} = 0,24$ nm y la escala de energía de la interacción dipolar entre estos dos núcleos es de $\mu_0\mu_I^2/(4\pi r_{ij}^3) = 7,6 \times 10^{-12}$ eV. Esta es una cota superior para el acoplamiento dipolar entre núcleos vecinos en GaAs y fija una escala de tiempo de $10^{-4} - 10^{-5}$ s en la cual esta interacción dipolar influencia indirectamente la dinámica cuántica del espín electrónico. Las escalas de tiempo más largas para la dinámica del espín electrónico debida al acoplamiento hiperfino son del orden de 10^{-6} s. Entonces, la escala de tiempo del acoplamiento dipolar es mucho mayor que la escala de tiempo de la interacción hiperfina. Por este motivo, la interacción dipolar entre los espines nucleares es despreciada frente al acoplamiento hiperfino.

Otra contribución al Hamiltoniano (5.1) que también es despreciada es el acoplamiento de los espines nucleares al campo magnético externo. Esta interacción es mucho menor que el acoplamiento Zeeman del espín electrónico debido a lo pequeño del magnetón nuclear comparado con el magnetón de Bohr para electrones.

2.3.4. Iones atrapados

A partir del trabajo de I. Cirac y P. Zoller [40], los iones atrapados han sido centro de gran interés para las áreas de la Computación y la Información cuántica. En aquel trabajo describieron un proceso usando este sistema físico para realizar una compuerta lógica CNOT, la cual, sumada a rotaciones locales son compuertas universales, es decir, cualquier compuerta lógica puede realizarse a partir de una CNOT junto con rotaciones locales.

Las trampas de iones más populares son la trampa de Penning [41], en la cual las partículas cargadas son sujetas por una combinación de campos electrostáticos y campos magnéticos, y la otra es la trampa de Paul [42], en

láser j . El operador \hat{r}_j , es la posición asociada con el movimiento del centro de masa. Considerando que los iones están atrapados en un potencial armónico, el operador de posición del centro de masa \hat{r} puede ser escrito como

$$\hat{r}_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_j}} (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j), \quad j = x, y, z. \quad (2.68)$$

Cada campo láser, es sintonizado a una transición dipolar permitida a un electrónico excitado de corta vida $|c\rangle$ pero suficientemente fuera de resonancia ($\Delta \gg \delta$) como para despreciar la población de este estado. El Hamiltoniano que describe esta situación puede escribirse como

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (2.69)$$

con,

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_c|c\rangle\langle c|, \quad (2.70)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hbar g_1 \exp[-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)] |g\rangle\langle c| \\ &+ \hbar g_2 \exp[-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)] |e\rangle\langle c| + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

donde hemos asumido que sólo vibraciones en una dirección son excitadas, esto puede suceder en el caso que ω sea mucho mayor en aquella dirección, o bien, $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ está en esa dirección.

Cuando el acoplamiento aumenta y se tiene que $\Delta \gg \delta$ el nivel excitado $|c\rangle$ puede ser eliminado adiabáticamente dejando un acoplamiento efectivo de dos niveles entre los estados metaestables $|a\rangle$ y $|b\rangle$. De esta forma y sintonizando las frecuencias tales que: $\omega_c - \omega_g - \omega_1 = \Delta$ y $\omega_c - \omega_e - \omega_2 = \Delta - \delta$, el Hamiltoniano efectivo está dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{efec}} &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\bar{\delta}\hat{\sigma}_z \\ &- \frac{\hbar\Omega_0}{2} \{|e\rangle\langle g| \exp[i\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi_1]\} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

con $\Omega_0 = 2|g_1g_2|/\Delta$, $\hat{\sigma}_z = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)/2$ y $\eta = |\vec{k}_1 - \vec{k}_2| \text{sqrth}/(2m\omega)$ es el parámetro de Lamb-Dicke. Haciendo una expansión de la exponencial de esta última ecuación tenemos en el cuadro de interacción

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{efec}}^I &= -\frac{\hbar\Omega_0}{2} [|e\rangle\langle g| \exp\left(-\frac{\eta^2}{2} + i\phi\right) \\ &\times \sum_{l,l'} \frac{(i\eta)^{l+l'}}{l!l'} \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^{l'} \exp it[(l-l')\omega + \bar{\delta}] + \text{H.c.}]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Sea $k = l' - l$ y $\Delta_k \equiv \bar{\delta} - k\omega$. Entonces, en la aproximación de onda rotante podemos escribir

$$\hat{H}_{\text{efec}}^I = -\hbar (\Omega_k \exp(i\Delta_k t) \hat{a}^k |e\rangle\langle g| + \text{H.c.}), \quad (2.74)$$

donde,

$$\Omega_k = \frac{\Omega_0}{2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2} + i\phi\right) (i\eta)^k \sum_l \frac{(i\eta)^{2l}}{l!(l+k)!} \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l. \quad (2.75)$$

Distintos tipos de dinámicas pueden obtenerse a partir de este Hamiltoniano con el ajuste de algunos de los parámetros en el límite de Lamb-Dicke, $\eta\sqrt{n}$, donde n es el número de excitaciones (fonones) del centro de masa. En este límite, tenemos que $\bar{\delta} \sim \delta$. A continuación describiremos algunos de estos tipos de dinámicas concentrándonos en el caso donde desaparece la dependencia temporal, es decir, $\Delta_k = 0$.

Transición Carrier

Esta dinámica corresponde al caso $\delta = 0$, $k = 0$. En este caso, el Hamiltoniano a más bajo orden en η está dado por

$$\hat{H}_{\text{carrier}} = -\frac{\hbar\Omega_0}{2} (\exp(i\phi)|e\rangle\langle g| + \exp(-i\phi)|g\rangle\langle e|). \quad (2.76)$$

Este Hamiltoniano produce una evolución (oscilaciones de Rabi) entre los dos niveles metaestables $|e\rangle$ y $|g\rangle$ sin perturbar el estado del centro de masa.

Primer red sideband (corrimiento al rojo)

Este caso corresponde a $\delta = \omega$, $k = 1$. En este caso, el Hamiltoniano a más bajo orden en η está dado por

$$\hat{H}_{\text{rsb}} = -i\eta\hbar\frac{\Omega_0}{2} (\hat{a}|e\rangle\langle g| \exp(i\phi) - \hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e| \exp(-i\phi)). \quad (2.77)$$

Este Hamiltoniano corresponde al modelo de Jaynes-Cummings [47], el cual produce inversión de población del estado $|e\rangle$ al estado $|g\rangle$ liberando una excitación (fonón) al centro de masa.

Esta interacción puede ser usada para enfriar los iones [43,44] [19.8Orzag]. En otras palabras usando la interacción de Jaynes-Cummings podemos disminuir el número de excitaciones del centro de masa. Para lograr esto se puede realizar la siguiente secuencia: Primero se realiza una inversión completa de población (pulso π) del nivel $|g\rangle$ al nivel $|e\rangle$. Si el centro de masa esta en un estado de Fock con n excitaciones esta operación, de acuerdo con el Hamiltoniano (5.33) lleva a

$$|g\rangle|n\rangle \rightarrow |e\rangle|n-1\rangle \quad (2.78)$$

Luego, un láser de bombeo resonante a la transición $|e\rangle \leftrightarrow |h\rangle$ produce inversión de población de $|e\rangle$ a $|c\rangle$. Como mencionamos anteriormente este último nivel es de corta vida, es decir, decae de forma espontánea rápidamente al nivel $|g\rangle$ sin afectar el estado del centro de masa. De esta forma el estado final después de este proceso será $|g\rangle|n-1\rangle$. Entonces, aplicaciones sucesivas de estos procesos producen la sistemática reducción del número de excitaciones del centro de masa.

Capítulo 3

Modelo de Tavis-Cummings inhomogéneo

En este capítulo desarrollamos un método efectivo para estudiar la dinámica de un modo del campo electromagnético acoplado inhomogéneamente a N átomos. En particular, en la Sección 3.2 analizamos la interacción de una colección de átomos de dos niveles con un modo del campo electromagnético cuantizado. En la Sección 3.3 identificamos un subconjunto del espacio de Hilbert que resulta ser relevante para la dinámica. En la Sección 3.4 mostramos que se pueden reproducir resultados precisos con un reducido número de estados componentes del espacio de Hilbert efectivo [103].

3.1. Introducción

La interacción de un átomo con un modo electromagnético cuantizado, descrito por el modelo de Jaynes-Cummings (JC) [47], ha tenido un papel central en óptica cuántica y otros sistemas físicos relacionados. Entre sus muchas predicciones podemos mencionar las oscilaciones de Rabi del vacío

electromagnético, colapsos y resurgimientos de las poblaciones atómicas, y squeezing del campo electromagnético [96]. Por otro lado, la física de nubes atómicas puede ser convenientemente descrita por el modelo de Dicke [49], cuando consideramos que la interacción de los átomos con el campo electromagnético ocurre en el espacio libre, o por el modelo de Tavis-Cummings (TC) [50], cuando los acoplamientos toman lugar dentro de una cavidad electromagnética.

En la mayoría de las aplicaciones y tratamiento del modelo de TC, se asume que los átomos están igualmente acoplados al campo electromagnético. Esta simplificación reduce considerablemente la complejidad de una descripción analítica [51, 52, 53, 74]. Más aún, en este caso de muchos átomos el acoplamiento homogéneo de las partes se beneficia de la estructura de grupo $SU(2)$ que tienen los operadores colectivos involucrados, permitiendo al menos, soluciones numéricas. Sin embargo, la situación se vuelve drásticamente diferente cuando consideramos el caso más realista de acoplamiento inhomogéneo entre los átomos y el campo electromagnético. En este caso, no hay una forma directa de enfrentar el problema, ya que todas las representaciones de momento angular se mezclan durante la evolución dinámica.

3.2. El Modelo

El Hamiltoniano que describe el acoplamiento inhomogéneo de N átomos de dos niveles con un modo del campo cuantizado, en las aproximaciones dipolar y de onda rotante, puede escribirse como

$$\hat{H} = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sum_{i=1}^N\hat{\sigma}_i^z + \hbar\sum_{i=1}^Ng_i(\hat{\sigma}_i^-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_i^+\hat{a}), \quad (3.1)$$

donde ν es la frecuencia del campo y ω es la frecuencia de la transición entre los dos niveles de energía de los átomos. Considerando el campo resonante

a la transición atómica, es decir, $\omega = \nu$, el Hamiltoniano en el cuadro de interacción se escribe como ($\hbar = 1$)

$$\hat{H}_{\text{ITC}} = \sum_{i=1}^N g_i (\hat{\sigma}_i^- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_i^+ \hat{a}). \quad (3.2)$$

Aquí, $g_i = g(\vec{r}_i)$ es la constante de acoplamiento inhomogéneo del átomo i en la posición \vec{r}_i , $\hat{\sigma}_i^-$ ($\hat{\sigma}_i^+$) es el operador de aniquilación (creación) de excitación atómica del átomo i , y \hat{a} (\hat{a}^\dagger) es el operador de aniquilación (creación) del modo del campo.

Este modelo descrito por el Hamiltoniano (3.2), lo llamaremos modelo de Tavis-Cummings inhomogéneo.

En el caso homogéneo ($g_i = g, \forall i$), se pueden definir operadores de momento angular $\hat{J}^\pm \propto g \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^\pm$, que describen las transiciones entre los autovectores comunes del sistema completo de observables compatibles formado por los operadores \hat{J}_z y \hat{J}^2 , donde $\hat{J}_z = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{z_i}$.

Sin embargo, esto ya no es cierto en el caso inhomogéneo, ya que esta característica del sistema en estudio implica, naturalmente, que los operadores $\{\hat{J}^\pm, \hat{J}_z\}$ no satisfacen más el álgebra $su(2)$.

A pesar de esto, mostraremos que este problema aún puede ser abordado con ciertas restricciones. La estrategia consiste en seguir el espacio de Hilbert que el sistema visita durante su evolución y la implementación de un criterio de truncación.

3.3. Espacio de Hilbert Efectivo

Asumamos que inicialmente el sistema se encuentra en el estado

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0} c_n |n\rangle |\bar{0}\rangle, \quad (3.3)$$

donde $|n\rangle$ denota un estado de Fock fotónico y $|\bar{\mathbf{0}}\rangle$ a la colección de N átomos en el estado fundamental.

Para cada estado producto $|n\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle$, tenemos un número fijo de excitaciones, el cual, incluso en el caso inhomogéneo es conservado durante la dinámica dada por \hat{H}_{ITC} .

Si el estado inicial es $|0\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle$, la evolución unitaria es trivial

$$|0\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle \longrightarrow |0\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle. \quad (3.4)$$

Comenzando desde el estado inicial $|1\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle$, \hat{H}_{ITC} produce una dinámica no trivial sólo a través del término $\hat{J}^+\hat{a}$, tal que

$$\hat{J}^+\hat{a}|1\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle = |0\rangle \sum_{i=1}^N g_i |\bar{\mathbf{1}}_i\rangle, \quad (3.5)$$

donde $|\bar{\mathbf{1}}_i\rangle = \hat{\sigma}_i^+|\bar{\mathbf{0}}\rangle$ representa un estado de N átomos con una excitación en el i -ésimo átomo. Definimos

$$|\bar{\mathbf{1}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_i^2}} \sum_{i=1}^N g_i |\bar{\mathbf{1}}_i\rangle, \quad (3.6)$$

como un estado normalizado tal que

$$\langle 0|\langle \bar{\mathbf{1}}|H_{\text{ITC}}|1\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^N g_i^2} \equiv N_0. \quad (3.7)$$

Es posible notar acá que el sistema evoluciona en un subespacio bi-dimensional cerrado $\{|1\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle, |0\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle\}$ en el cual todos los estados tienen el mismo número de excitaciones.

Si comenzamos la dinámica con el estado de dos excitaciones $|2\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle$, este evoluciona a través del término $\hat{J}^+\hat{a}$, tal que

$$\begin{aligned} \hat{J}^+\hat{a}|2\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle &= \sqrt{2}|1\rangle \sum_{i=0} g_i |\bar{\mathbf{1}}_i\rangle, \\ &= \sqrt{2}N_0|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

El estado generado $|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle$ lleva a

$$\begin{aligned}\hat{J}^+\hat{a}|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle &= \frac{1}{N_0}|0\rangle\sum_{i=1}^N g_i\hat{\sigma}_i^+\sum_{j=1}^N g_j|\bar{\mathbf{1}}_j\rangle, \\ &= \frac{N_1}{N_0}|0\rangle|\bar{\mathbf{2}}\rangle,\end{aligned}\quad (3.9)$$

donde

$$|\bar{\mathbf{2}}\rangle = \frac{2}{N_1}\sum_{i<j} g_i g_j |\bar{\mathbf{2}}_{ij}\rangle, \quad (3.10)$$

y

$$N_1 = \sqrt{4\sum_{i<j} g_i^2 g_j^2}. \quad (3.11)$$

Al mismo tiempo,

$$\hat{J}^-\hat{a}^\dagger|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle = \sqrt{2}N_0|2\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle. \quad (3.12)$$

Por otro lado, el estado $|0\rangle|\bar{\mathbf{2}}\rangle$ evoluciona de acuerdo a

$$\begin{aligned}\hat{J}^-\hat{a}^\dagger|0\rangle|\bar{\mathbf{2}}\rangle &= |1\rangle\frac{2}{N_1}\sum_k\sum_{i<j} g_k g_i g_j \hat{\sigma}_k^- |\bar{\mathbf{2}}_{ij}\rangle, \\ &= |1\rangle|\phi_1\rangle,\end{aligned}\quad (3.13)$$

con

$$|\phi_1\rangle = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} c_{ij} g_j \right) |\bar{\mathbf{1}}_i\rangle, \quad (3.14)$$

y $c_{ij} = 2g_i g_j / N_1$.

El resultado es un estado de una excitación diferente al estado $|\bar{\mathbf{1}}\rangle$ definido en la Ec. (3.6). El estado resultante puede ser expresado como una combinación lineal de $|\bar{\mathbf{1}}\rangle$ y un estado ortogonal $|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle$ el cual puede escribirse convenientemente como

$$|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\phi_1|\phi_1\rangle - |\langle\bar{\mathbf{1}}|\phi_1\rangle|^2}}(|\phi_1\rangle - \langle\bar{\mathbf{1}}|\phi_1\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle), \quad (3.15)$$

lo que lleva a

$$|1\rangle|\phi_1\rangle = \langle\bar{\mathbf{1}}|\phi_1\rangle|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}\rangle + \sqrt{\langle\phi_1|\phi_1\rangle - |\langle\bar{\mathbf{1}}|\phi_1\rangle|^2}|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle. \quad (3.16)$$

El estado $|1\rangle|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle$ es un nuevo estado ortogonal del subespacio de Hilbert de dos excitaciones considerado. Podemos observar que mientras $\hat{J}^- \hat{a}^\dagger |1\rangle|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle = 0$, el subespacio de Hilbert asociado crece de acuerdo a

$$\hat{J}^+ \hat{a} |1\rangle|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle = \alpha_2 |0\rangle|\bar{\mathbf{2}}\rangle + \alpha_{2p} |0\rangle|\bar{\mathbf{2}}_p\rangle, \quad (3.17)$$

donde introducimos el estado $|\bar{\mathbf{2}}_p\rangle$ ortogonal a $|\bar{\mathbf{2}}\rangle$. El estado resultante $|\bar{\mathbf{2}}_p\rangle$ es acoplado a través del término \hat{J}^- a los estados $|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle$ y $|\bar{\mathbf{1}}_{pp}\rangle$, donde $|\bar{\mathbf{1}}_{pp}\rangle$ es ortogonal a $|\bar{\mathbf{1}}_p\rangle$, y así sucesivamente. De hecho, aplicando $(\hat{J}^+ \hat{a})^n$ sobre $|n\rangle|\bar{\mathbf{0}}\rangle$ resulta en el estado

$$|0\rangle|\bar{\mathbf{n}}\rangle = (n!)^{3/2} |0\rangle \sum_{i_1 < \dots < i_n} g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} |\bar{\mathbf{n}}_{i_1 i_2 \dots i_n}\rangle, \quad (3.18)$$

y los estados colectivos se acoplan siguiendo la tabla de la Fig. (3.1). En general, los estados $|n\rangle|\bar{\mathbf{m}}\rangle$ llevan a espacios linealmente independientes de $n + m$ excitaciones, las cuales se conservan durante la evolución.

3.4. Evolución efectiva

Eventualmente, todos los estados del espacio de Hilbert serán visitados por alguna evolución arbitraria del sistema. Sin embargo, bajo ciertas condiciones y en ciertos momentos o ventanas de tiempo, sólo una porción restringida del espacio de Hilbert será visitada. De acuerdo a esto, en el ejemplo de la Fig. (3.2) podemos observar que nuestra aproximación para la evolución del estado atómico colectivo fundamental, es muy cercana a la solución numérica

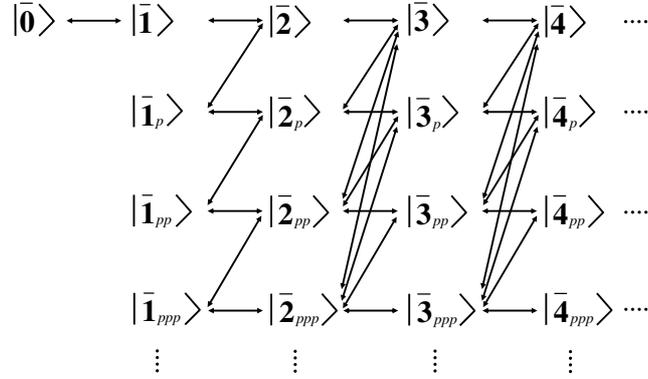


Figura 3.1: Representación esquemática del crecimiento del espacio de Hilbert asociado con los estados atómicos colectivos.

exacta para tiempos bastante largos relativos al sistema, tanto así que reproduce incluso los colapsos y resurgimientos de la población del estado atómico colectivo fundamental.

Lo que resulta sorprendente en este caso, es que para lograr esta precisión en los resultados, sólo es necesario considerar las primeras dos filas de la Fig. (3.1). El número total de columnas que se deben considerar está dado por el número inicial de excitaciones que tiene el sistema ya que el Hamiltoniano de la Ec. (3.2) preserva este número. En consecuencia, el bajo número medio de fotones $\bar{n} = 1,8$ sugiere que los estados atómicos inicialmente desocupados pueden alcanzar a lo más un valor medio similar. Dado que el número de átomos es mayor, $N = 6$, es de esperar que los acoplamientos normalizados entre los pocos estados atómicos de la primera fila de la Fig. (3.1) y las filas siguientes sean muy pequeños. Para confirmar esta intuición, en la Fig. (3.3) mostramos cómo la población de la segunda y la tercera fila de la

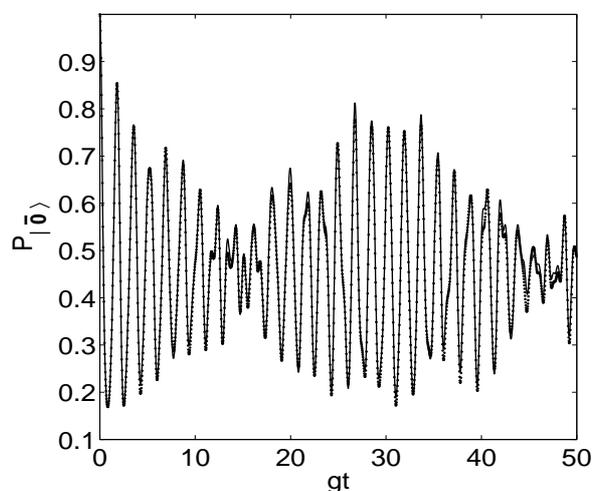


Figura 3.2: Evolución de la población del estado colectivo fundamental, $P_{|\bar{0}\rangle}$, en el caso de acoplamiento inhomogéneo dado por $g_j = g \sin [j\pi / (N + 1)]$, $j = 1, \dots, N$, con $N = 6$, un estado inicial $|\bar{0}\rangle$, y el campo inicialmente en un estado coherente con $\bar{n} = 1,8$. solución exacta (línea continua) y solución aproximada (línea punteada).

Fig. (3.1) decrece mientras el número de átomos N aumenta para los mismos parámetros de la Fig. (3.2).

Es importante recalcar que en el ejemplo de la Fig. (3.2) nuestro método reduce la dimensión del espacio de Hilbert desde $2^6 \times 7 = 448$, donde 7 es la dimensión del espacio truncado del campo cuántico, a una dimensión efectiva de 49. Intuitivamente podemos decir que en general, para mejorar la precisión, sólo necesitamos tomar en cuenta más filas de la Fig. (3.1) en el cálculo.

Entonces, gracias a las propiedades de esta forma de encontrar la dinámica de un sistema complejo, como el descrito por el Hamiltoniano (3.2), podemos

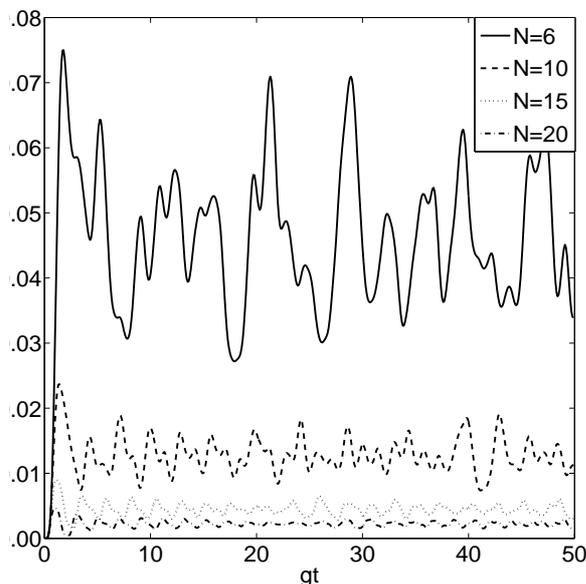


Figura 3.3: Evolución de la población total de la segunda y tercera filas, P_{r_2, r_3} , para diferentes números N de átomos.

ahora estudiar problemas que resultarían muy demandantes numéricamente usando los métodos estándar de diagonalización. En nuestra aproximación, estos requerimientos numéricos son considerablemente menores.

En la Fig. (3.4) se muestra la evolución del entrelazamiento bipartito entre el sistema atómico y el campo electromagnético cuantizado. El entrelazamiento en este caso, puede ser cuantificado a través del tangle τ_{a-f} [34] ya que el estado total del sistema es un estado puro. Consideramos aquí $N = 15$ átomos interactuando con un campo electromagnético inicialmente en un estado coherente. La dinámica de esta interacción está descrita a través del Hamiltoniano (3.2). Para este caso, la inhomogeneidad en el acoplamiento entre los átomos y el campo cuántico impide una simplificación a través de consideraciones de simetría, por lo cual, en principio se debiera considerar

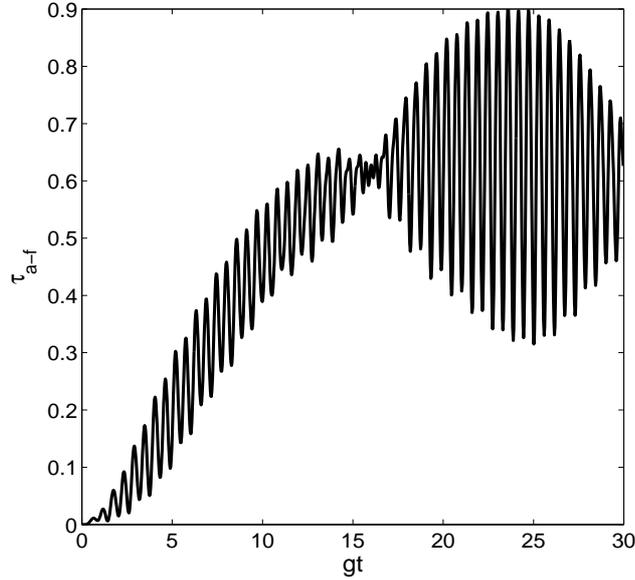


Figura 3.4: Evolución del tangle $\tau_{a-f} = 2(1 - \text{Tr}(\rho_f^2))$ para $N = 15$ átomos, inicialmente en el estado fundamental, acoplados a un campo coherente con $\bar{n} = 1$. La constante de acoplamiento es $g_j = g \sin(j\pi/(N+1))$ denota la posición del j -ésimo átomo.

una dimensión total para el espacio de Hilbert del subsistema atómico de 2^{15} , lo que resulta en un difícil problema de diagonalización para describir la dinámica. Por otro lado, vimos que [Fig. (3.3)] el procedimiento de seguir el espacio de Hilbert que visita el sistema es más preciso cuando el número de átomos interactuando con el campo cuántico aumenta. Por lo tanto, la dimensión del espacio de Hilbert relevante para la dinámica se reduce considerablemente.

Como otro ejemplo, podemos estudiar cuan fuertes son los efectos de la inhomogeneidad en la dinámica de observables relevantes. En la Figura (3.5), comparamos las diferentes predicciones para las fluctuaciones de las cuadraturas del campo. En el caso homogéneo, la primera escala de tiem-

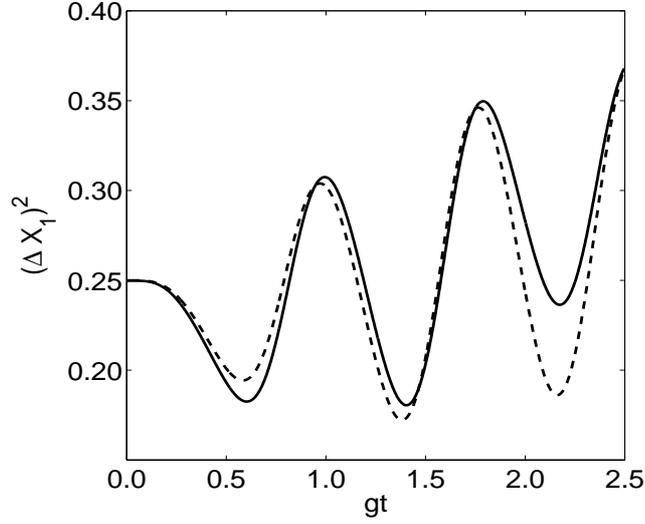


Figura 3.5: Evolución de las fluctuaciones de la cuadratura $(\Delta X_1)^2 = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2$ para $N = 8$ átomos inicialmente en el estado colectivo fundamental, y un campo coherente con $\bar{n} = 1$. Línea continua: acoplamiento inhomogéneo $g_j = g \sin [j\pi / (N + 1)]$, donde j denota las posición del j -th átomo. Línea segmentada: caso homogéneo con $g_j = 1/(\sqrt{N})(\sum_j g_j^2)^{1/2}$.

po corresponde a $\sqrt{N}g$, mientras que para el caso inhomogéneo el análogo sería $(\sum_j g_j^2)^{1/2}$. Entonces, para hacer los dos casos comparables, consideramos en el caso homogéneo una constante de acoplamiento igual a $g_j = 1/(\sqrt{N})(\sum_j g_j^2)^{1/2}$. En este ejemplo podemos observar [Fig. (3.5)] que la situación inhomogénea no solo difiere de la homogénea en la escala de tiempo típica, sino que también muestra efectos adicionales, los cuales en nuestro caso están reflejados en un incremento en las fluctuaciones de la cuadratura.

3.5. Conclusión

En este capítulo, hemos desarrollado una técnica basada en la inspección y la truncación del espacio de Hilbert asociado, que permite seguir la evolución cuántica de sistemas interactuantes. En particular, hemos ilustrado este método en el modelo de Tavis-Cummings inhomogéneo donde vimos por ejemplo, cómo propiedades estadísticas pueden cambiar apreciablemente dependiendo de la distribución espacial de los acoplamientos. Finalmente, podemos recalcar que nuestro método permite el estudio de estos efectos para números de partículas que no son tratables con los métodos estándar de simulación.

Capítulo 4

Memoria cuántica y defectos distribuidos en un quantum dot

En el capítulo anterior desarrollamos un método efectivo para estudiar la dinámica del modelo de Tavis-Cummings inhomogéneo. En este capítulo, usaremos el formalismo desarrollado para estudiar la dinámica de un espín electrónico acoplado (inhomogéneamente) a N espines nucleares dentro de un quantum dot. En particular, analizaremos la propuesta de M. D. Taylor, *et. al* [63] para utilizar un quantum dot como memoria cuántica [103].

4.1. Introducción

La dinámica de espines nucleares y electrónicos en nanoestructuras semiconductoras ha sido de gran interés en los últimos años [54, 56]. En este contexto, varias técnicas para el procesamiento de información cuántica han sido propuestas para estos sistemas [57, 58, 59, 60, 61, 62]. Por ejemplo, en ensamblajes de espines nucleares polarizados en quantum dots se han propuesto como memorias cuánticas de larga vida [63, 64].

Este sistema físico involucra acoplamiento inhomogéneo de forma natural, ya que el electrón interactúa con los espines nucleares a través del traslape de sus funciones de onda, las cuales varían espacialmente. Es por este motivo que este sistema físico resulta apropiado para ser estudiado con el método desarrollado en el capítulo anterior

En presencia de un campo magnético B_0 a lo largo del eje z y despreciando las interacciones dipolares entre los espines nucleares, el Hamiltoniano que describe la interacción de un espín electrónico con N espines nucleares está dado por [66, 67]

$$\hat{H}_{\text{QD}} = g^* \mu_B B_0 \hat{S}_z + g_n \mu_n B_0 \sum_{i=1}^N \hat{I}_z^{(i)} + \hat{V}_{\text{HF}}. \quad (4.1)$$

Los primeros dos términos corresponden a las energías Zeeman del espín electrónico y los espines nucleares, y $\hat{V}_{\text{HF}} = \hat{V}_D + \hat{V}_\Omega$ da cuenta de la interacción hiperfina de contacto de un espín electrónico interactuando con N espines nucleares, donde

$$\hat{V}_D = \sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{I}_z^{(i)} \hat{S}_z, \quad (4.2)$$

$$\hat{V}_\Omega = \sum_{i=1}^N (\alpha_i/2) \left(\hat{I}_-^{(i)} \hat{S}_+ + \hat{I}_+^{(i)} \hat{S}_- \right). \quad (4.3)$$

Los coeficientes $\alpha_i = Av_0 |\psi(\vec{r}_i)|^2$ son las constantes inhomogéneas de acoplamiento, donde A es la constante de acoplamiento hiperfino, v_0 es el inverso de la densidad de núcleos en el material, y $\psi(\vec{r}_i)$ es la envolvente de la función de onda del electrón en la posición \vec{r}_i .

Por otro lado, el término \hat{V}_D induce un campo magnético efectivo para el electrón dado por

$$\hat{B}_{\text{eff}} = \hat{B}_0 + (1/g^* \mu_B) \sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{I}_z^{(i)}, \quad (4.4)$$

llamado campo Overhauser.

De aquí en adelante, las energías Zeeman de los espines nucleares serán despreciadas debido a que su momento magnético es mucho menor que el electrónico [66].

Si aplicamos un campo B_0 de forma tal que, $g^* \mu_B \hat{B}_{\text{eff}} \ll \hat{V}_\Omega$, el término de intercambio dominará la dinámica [63]. En este caso, el Hamiltoniano de la Ec. (4.1) se reduce aproximadamente a

$$\hat{H}_{\text{QD}} \simeq \hat{V}_\Omega = \frac{1}{2}(\hat{A}_- \hat{S}_+ + \hat{A}_+ \hat{S}_-), \quad (4.5)$$

donde hemos definido $\hat{A}_{\pm,z} = \sum_j \alpha_j \hat{I}_{\pm,z}^{(j)}$.

Sin embargo, el término $\hat{V}_D = \hat{A}_z \hat{S}_z$ en general no puede ser despreciado. Esto ya que incluso en resonancia, donde $B_0 = -(1/g^* \mu_B) \langle \hat{A}_z \rangle$, uno tiene $\langle \hat{A}_z^2 \rangle - \langle \hat{A}_z \rangle^2 \neq 0$. Por lo tanto, el campo Overhauser sentido por el espín electrónico no puede ser completamente compensado.

Para incluir este efecto, reescribimos la componente zz de la interacción como $\hat{A}_z = \bar{\alpha} \hat{J}_z + \delta \hat{A}_z = \bar{\alpha} \sum_{i=1}^N \hat{I}_z^{(i)} + \sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \hat{I}_z^{(i)}$, tal que en resonancia, el Hamiltoniano se escribe ahora como

$$\hat{\tilde{H}}_{\text{QD}} = \frac{1}{2} (\hat{A}_- \hat{S}_+ + \hat{A}_+ \hat{S}_-) + \bar{\alpha} \hat{S}_z (\hat{J}_z - \langle \hat{J}_z \rangle_0) + \hat{V}_{zz}, \quad (4.6)$$

donde $\langle \hat{J}_z \rangle_0$ es el valor de espectación con respecto al estado completamente polarizado, $\bar{\alpha} = \sum_i \alpha_i / N$ es la constante de acoplamiento promedio y $\hat{V}_{zz} = \hat{S}_z \delta \hat{A}_z$. La contribución inhomogénea al término zz de la interacción puede ser tratado perturbativamente. Como veremos después, el término homogéneo $\hat{S}_z \hat{J}_z$ es despreciado frente al término de intercambio de espín debido a un pequeño factor $1/\sqrt{N}$. El término \hat{V}_{zz} es incluso más pequeño y despreciable, ya que depende adicionalmente del parámetro de inhomogeneidad, como la varianza de la (suave) función de onda del electrón.

Consideramos aquí, espines nucleares $I = 1/2$ ubicados en un quantum

dot esférico, y

$$|\psi(\vec{r})|^2 \propto e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}, \quad (4.7)$$

como la envolvente de la función de onda de tamaño r_0 [66].

4.2. Dinámica de espines electrónico y nucleares

Tal como fue analizado en el capítulo anterior, el acoplamiento inhomogéneo del espín electrónico con los espines nucleares no permite una solución analítica general para la dinámica de este sistema. Sin embargo, si asumimos que los espines nucleares se encuentran inicialmente completamente polarizados, la dimensión del espacio de Hilbert relevante para la dinámica se reduce desde 2^{N+1} a 2 con lo cual el problema puede ser resuelto analíticamente sin dificultad. Por otro lado, un estado inicial más general de los espines nucleares incrementa considerablemente la dimensión del espacio de Hilbert que el sistema visitará a lo largo de la evolución.

En el año 2003 J. M. Taylor, C. M. Marcus, y M. D. Lukin propusieron una técnica para utilizar el estado colectivo de los N espines nucleares dentro del quantum dot como una memoria cuántica de larga vida para qubits [63]. La idea principal es lograr un mapeo reversible del estado de un espín electrónico en el estado colectivo de los espines nucleares a través de la interacción hiperfina. El principal requerimiento de esta propuesta es el estado inicial del ensamble de espines nucleares. Se asume que los espines nucleares se encuentran completamente polarizados, esto es, en el estado $|\mathbf{0}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle_n = |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\downarrow\rangle_n$. Si la dinámica está gobernada por el Hamiltoniano de la Ec. (4.5), sólo habrá dinámica no trivial cuando el espín electrónico se encuentra inicialmente en el estado $|\uparrow\rangle_e$. Entonces, la evolución del estado inicial $|\uparrow\rangle_e|\mathbf{0}\rangle$

estará dada por

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) |\uparrow\rangle_e |\mathbf{0}\rangle_n + i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) |\downarrow\rangle_e |\mathbf{1}_L\rangle_n, \quad (4.8)$$

donde, $\Omega = \sqrt{\sum_j |\alpha_j|^2}$ es la frecuencia de Rabi y $|\mathbf{1}_L\rangle_n$ está definido como

$$|\mathbf{1}_L\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{\sum_j |\alpha_j|^2}} \sum_j \alpha_j |\mathbf{1}_j\rangle_n, \quad (4.9)$$

con $|\mathbf{1}_j\rangle_n \equiv |\downarrow\downarrow \dots \uparrow_j \dots \downarrow\downarrow\rangle_n$.

Consideremos un estado total inicial del espín electrónico y los espines nucleares dado por

$$|\Psi\rangle = (\mu |\uparrow\rangle_e + \nu |\downarrow\rangle_e) \otimes |\mathbf{0}\rangle_n, \quad (4.10)$$

con $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$.

Si dejamos que este sistema evolucione de acuerdo al Hamiltoniano (4.5) por un tiempo $t = \pi/\Omega$, tendremos

$$(\mu |\uparrow\rangle_e + \nu |\downarrow\rangle_e) \otimes |\mathbf{0}\rangle_n \rightarrow |\downarrow\rangle_e \otimes (\nu |\mathbf{0}\rangle_n + i\mu |\mathbf{1}_L\rangle_n), \quad (4.11)$$

donde claramente vemos que existe un mapeo reversible del estado del espín electrónico al estado colectivo de los espines nucleares. De esta forma, si los espines nucleares están inicialmente completamente polarizados podemos usar el estado cuántico colectivo de estos últimos como medio físico de almacenamiento de información cuántica.

Sin embargo, ¿qué ocurre con el almacenamiento de la información cuántica cuando no podemos tener un estado inicial de los espines nucleares completamente polarizados?. Esta es una pregunta válida ya que experimentalmente, aún no es posible obtener una completa polarización de los espines nucleares [68, 69, 70, 71]. En particular, en la Ref. [68] se describe un método para polarizar ópticamente los espines nucleares.

Motivados por esto, a continuación estudiaremos el caso en que los espines nucleares se encuentran inicialmente en un estado de alta, pero no completa polarización. Nos centraremos primero en el caso más simple, cuando consideramos que el sistema de espines nucleares se encuentra en un estado inicial completamente polarizado excepto por un único espín nuclear con espín invertido. A este espín invertido lo llamaremos “defecto”.

El estado puro más general que describe esta situación se puede escribir como

$$|\mathbf{1}\rangle_n = \sum_{j=1}^N a_j |\mathbf{1}_j\rangle_n, \quad (4.12)$$

con $\sum_{j=1}^N |a_j|^2 = 1$, y $|\mathbf{1}_j\rangle_n$ representa ahora el estado $|\downarrow\downarrow \dots \uparrow_j \dots \downarrow\downarrow\rangle_n$ con un defecto en la posición r_j . El coeficiente a_j representa la amplitud de probabilidad de que el defecto se encuentre inicialmente en la posición r_j . En particular, consideraremos el caso de un defecto uniformemente distribuido, es decir, $a_j = 1/\sqrt{N}$ y un defecto localizado en la posición j con amplitud de probabilidad a_j dada por

$$a_j = C (\Gamma/2)^2 / [(j - j_0)^2 + (\Gamma/2)^2], \quad (4.13)$$

donde C es una constante de normalización y Γ caracteriza el ancho de la distribución.

Consideremos los dos estados iniciales posibles para el espín electrónico y el estado colectivo de espines nucleares con un defecto,

$$|\downarrow\rangle_e |\mathbf{1}\rangle_n \equiv |\downarrow \mathbf{1}\rangle, \quad (4.14)$$

$$|\uparrow\rangle_e |\mathbf{1}\rangle_n \equiv |\uparrow \mathbf{1}\rangle. \quad (4.15)$$

Para encontrar la dinámica efectiva del sistema total, empleamos el método de seguir el espacio de Hilbert relevante para una condición inicial dada del sistema que vimos en el capítulo anterior.

Podemos ver que, bajo la acción del Hamiltoniano (4.6), el estado inicial $|\downarrow \mathbf{1}\rangle$ se acopla al estado $|\uparrow \mathbf{0}\rangle$ a través de

$$\hat{S}_+ \hat{A}_- |\downarrow \mathbf{1}\rangle = \gamma |\uparrow \mathbf{0}\rangle, \quad (4.16)$$

con $\gamma = \sum_i a_i \alpha_i$.

Ahora, el estado $|\uparrow \mathbf{0}\rangle$ se acoplará a través del término $\hat{S}_- \hat{A}_+$ a un estado con una excitación, pero distinto al estado $|\downarrow \mathbf{1}\rangle$. De forma similar a la usada en el capítulo anterior, podemos escribir

$$\hat{S}_- \hat{A}_+ |\uparrow \mathbf{0}\rangle = \gamma |\downarrow \mathbf{1}\rangle + \beta |\downarrow \mathbf{1}_\perp\rangle, \quad (4.17)$$

donde el estado

$$|\mathbf{1}_\perp\rangle = \frac{1}{\beta} \left(\sum_i \alpha_i |\mathbf{1}_i\rangle - \gamma |\mathbf{1}\rangle \right) \quad (4.18)$$

es ortogonal al estado $|\mathbf{1}\rangle$, con $\beta = \sqrt{(N_0)^2 - \gamma^2}$ y $N_0 = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}$. Finalmente, podemos observar que $\hat{S}_+ \hat{A}_- |\downarrow \mathbf{1}_\perp\rangle = \beta |\uparrow \mathbf{0}\rangle$.

En resumen, los términos de intercambio llevan a

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ \hat{A}_- |\downarrow \mathbf{1}\rangle &= \gamma |\uparrow \mathbf{0}\rangle, \\ \hat{S}_- \hat{A}_+ |\uparrow \mathbf{0}\rangle &= \gamma |\downarrow \mathbf{1}\rangle + \beta |\downarrow \mathbf{1}_\perp\rangle, \\ \hat{S}_+ \hat{A}_- |\downarrow \mathbf{1}_\perp\rangle &= \beta |\uparrow \mathbf{0}\rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por otro lado, la componente zz del Hamiltoniano (4.6) tiene elementos de matriz

$$\begin{aligned} \langle \downarrow \mathbf{1} | \bar{\alpha} \hat{S}_z (\hat{J}_z - \langle \hat{J}_z \rangle_0) | \downarrow \mathbf{1} \rangle &= -\frac{\bar{\alpha}}{2}, \\ \langle \uparrow \mathbf{0} | \bar{\alpha} \hat{S}_z (\hat{J}_z - \langle \hat{J}_z \rangle_0) | \uparrow \mathbf{0} \rangle &= 0, \\ \langle \downarrow \mathbf{1}_\perp | \bar{\alpha} \hat{S}_z (\hat{J}_z - \langle \hat{J}_z \rangle_0) | \downarrow \mathbf{1}_\perp \rangle &= -\frac{\bar{\alpha}}{2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vemos entonces que, para la condición inicial (4.14) el sistema evoluciona sólo en el subespacio $\{|\downarrow \mathbf{1}\rangle, |\uparrow \mathbf{0}\rangle, |\downarrow \mathbf{1}_\perp\rangle\}$.

Debido a la baja dimensionalidad de este subespacio, la evolución temporal del sistema para la condición inicial dada puede encontrarse exactamente. Esta evolución es $|\Psi_{\downarrow}(t)\rangle_{e-n} = a_1(t)|\downarrow \mathbf{1}\rangle + b_1(t)|\uparrow \mathbf{0}\rangle + c_1(t)|\downarrow \mathbf{1}_{\perp}\rangle$, donde las amplitudes de probabilidad están dadas por

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 1 + \frac{\gamma^2 \exp(i\bar{\alpha}t/4)}{\Omega^2 \delta} [\delta \cos(\delta t/2) \\ &\quad + i\frac{\bar{\alpha}}{2} \sin(\delta t/2) - \delta \exp(-i\bar{\alpha}t/4)], \\ b_1(t) &= -i\frac{\gamma}{\delta} \exp(i\bar{\alpha}t/4) \sin(\delta t/2), \\ c_1(t) &= \frac{\gamma\beta \exp(i\bar{\alpha}t/4)}{\Omega^2 \delta} [\delta \cos(\delta t/2) + i\frac{\bar{\alpha}}{2} \sin(\delta t/2) \\ &\quad - \delta \exp(-i\bar{\alpha}t/4)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Aquí, $\Omega = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2} = N_0$ y $\delta = \sqrt{(\bar{\alpha}/2)^2 + \Omega^2}$ juegan el rol de una frecuencia de Rabi generalizada para un proceso con desintonía $\bar{\alpha}$. El término zz del Hamiltoniano (4.6) produce entonces una pequeña desintonía para el intercambio de excitaciones entre los espines electrónico y nucleares.

Es importante notar que en el caso de un estado inicial nuclear completamente polarizado $|\mathbf{0}\rangle_n$ y el espín electrónico en $|\downarrow\rangle_e$ el sistema no es afectado por los términos $\hat{S}_- \hat{A}_+$ y $\hat{S}_+ \hat{A}_-$ de la interacción de intercambio.

Por otro lado, si el sistema está inicialmente en el estado $|\uparrow\rangle_e |\mathbf{1}\rangle_n$, el acoplamiento a través del Hamiltoniano de la Ec. (4.6) no lleva a un espacio de Hilbert cerrado. En este caso, para encontrar la evolución del sistema es necesario hacer algunas aproximaciones.

Empezando desde $|\uparrow \mathbf{1}\rangle$, tenemos que

$$\hat{S}_- \hat{A}_+ |\uparrow \mathbf{1}\rangle = |\downarrow\rangle \sum_{i<j} b_{ij} |\mathbf{2}_{ij}\rangle, \quad (4.22)$$

donde $b_{ij} = a_i \alpha_j + a_j \alpha_i$ y $|\mathbf{2}_{ij}\rangle = |\downarrow \dots \uparrow_i \dots \uparrow_j \dots \downarrow\rangle$. Definiendo

$$|\mathbf{2}\rangle = \sum_{i<j} c_{ij} |\mathbf{2}_{ij}\rangle, \quad (4.23)$$

con $c_{ij} = b_{ij}/N_2$ y $N_2 = \sqrt{\sum_{i<j} b_{ij}^2}$, observamos que el estado $|\downarrow \mathbf{2}\rangle$ se acopla sólo a través de

$$\hat{S}_+ \hat{A}_- |\downarrow \mathbf{2}\rangle = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} c_{ij} \alpha_j \right) |\uparrow \mathbf{1}_i\rangle \equiv |\uparrow \phi_1\rangle. \quad (4.24)$$

Aquí, $|\phi_1\rangle$ puede considerarse como si tuviese una componente a lo largo del estado $|\mathbf{1}\rangle$ y otra componente en el estado ortogonal $|\mathbf{1}_p\rangle$, tal que

$$|\phi_1\rangle = \langle \mathbf{1} | \phi_1 \rangle |\mathbf{1}\rangle + \sqrt{\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle - \langle \mathbf{1} | \phi_1 \rangle^2} |\mathbf{1}_p\rangle, \quad (4.25)$$

donde

$$|\mathbf{1}_p\rangle = \frac{1}{N_{\mathbf{1}_p}} (|\phi_1\rangle - \langle \mathbf{1} | \phi_1 \rangle |\mathbf{1}\rangle), \quad (4.26)$$

con $N_{\mathbf{1}_p} = \sqrt{\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle - \langle \mathbf{1} | \phi_1 \rangle^2}$. Siguiendo este procedimiento, tenemos

$$\hat{S}_- \hat{A}_+ |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle = |\downarrow \mathbf{2}\rangle + N_{\mathbf{2}_p} |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle \equiv |\uparrow \phi_2\rangle, \quad (4.27)$$

donde

$$|\mathbf{2}_p\rangle = \frac{1}{N_{\mathbf{2}_p}} (|\phi_2\rangle - \langle \mathbf{2} | \phi_2 \rangle |\mathbf{2}\rangle), \quad (4.28)$$

con $|\phi_2\rangle = \hat{A}_+ |\mathbf{1}_p\rangle$ y $N_{\mathbf{2}_p} = \sqrt{\langle \phi_2 | \phi_2 \rangle - \langle \mathbf{2} | \phi_2 \rangle^2}$.

Para implementar una descripción semi-analítica para el sistema total, debemos truncar el espacio de Hilbert. Esto puede hacerse aproximando la acción de $\hat{S}_+ \hat{A}_-$ sobre $|\mathbf{2}_p\rangle$ tal como

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ \hat{A}_- |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle &= N_{\mathbf{2}_p} |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle + N_{\mathbf{1}_{pp}} |\uparrow \mathbf{1}_{pp}\rangle \\ &\simeq N_{\mathbf{2}_p} |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde el estado $|\uparrow \mathbf{1}_{pp}\rangle$ está similarmente definido en términos de $|\uparrow \mathbf{1}_p\rangle$. Esta aproximación puede justificarse viendo la Fig. (4.1) donde se ha graficado la probabilidad de ocupación total de los estados dentro del subespacio de los primeros estados ortogonales $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$. Como todos estos

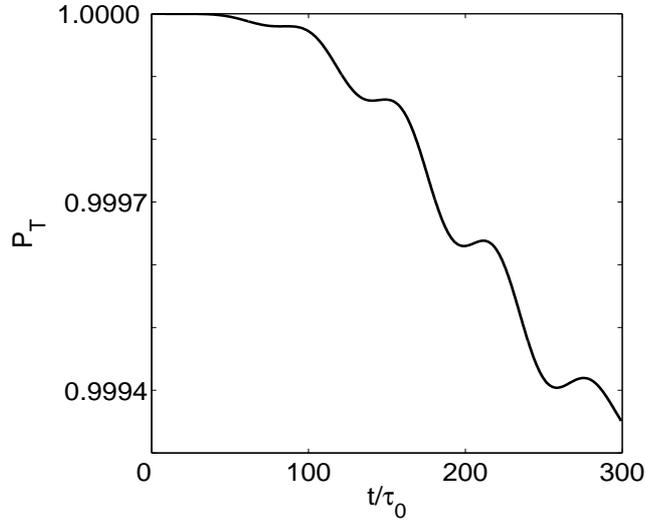


Figura 4.1: Población total P_T de los estados $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$, con $N = 10^3$ y una distribución para el defecto $a_j = 1/\sqrt{N}$.

estados son autoestados del término \hat{J}_z , su efecto es también una pequeña desintonía. Estos resultados se han obtenido a través de cálculos numéricos considerando un espacio de Hilbert truncado de dimensión 12 hasta $|\downarrow \mathbf{2}_{pppp}\rangle$. Sin embargo, usando en la simulación numérica un espacio de Hilbert truncado hasta $|\downarrow \mathbf{2}_{pp}\rangle$, la probabilidad total de ocupación del mencionado subespacio es prácticamente igual a la mostrada en la Fig. (4.1).

Hemos visto antes que la escala típica para el intercambio de una excitación entre el espín electrónico y los núcleos está dada por la inversa de la frecuencia de Rabi generalizada

$$\tau := \pi/\Omega = \pi/N_0. \quad (4.30)$$

A partir de la Fig. (4.1) deducimos que la dinámica del sistema total está bien descrita para tiempos mayores que τ , lo cual es importante para el análisis de la memoria cuántica. En particular, para el caso $N = 10^3$, este tiempo es aproximadamente $\tau \approx 68\tau_0$, con $\tau_0 = \hbar/A$, y hemos restringido la

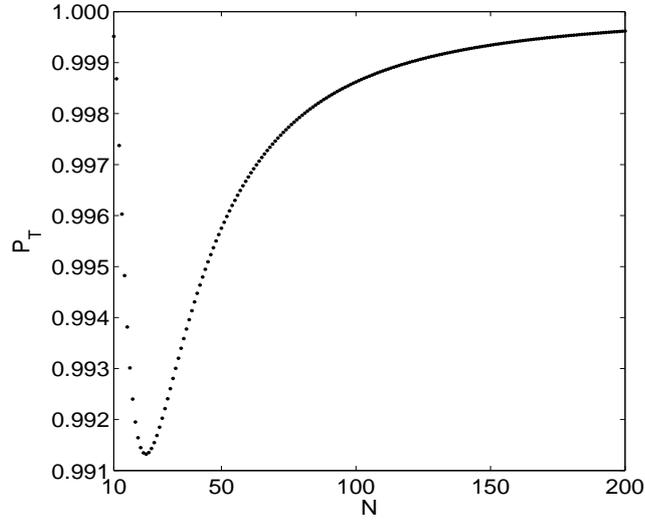


Figura 4.2: Población total P_T de los estados $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$ a un tiempo $t = 2\tau$, en función del número N de espines nucleares para un defecto uniformemente distribuido $a_j = 1/\sqrt{N}$.

dinámica al subespacio $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$. Esta es una importante característica de nuestro método, ya que los cálculos numéricos se simplifican significativamente.

Para ver cómo esta característica depende del número de espines nucleares presentes en el quantum dot, en la Fig (4.2) mostramos, al igual que en la Fig. (4.1), la probabilidad total P_T dentro del subespacio de los primeros estados ortogonales $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$, ahora como función del número de núcleos para un tiempo $t = 2\tau$, con τ dado por la Ec. (4.30), esto es, dos veces la escala típica para el intercambio de una excitación. Podemos claramente ver de esta figura, que la proporción correspondiente a la población de los estados $\{|\uparrow \mathbf{1}\rangle, |\downarrow \mathbf{2}\rangle, |\uparrow \mathbf{1}_p\rangle, |\downarrow \mathbf{2}_p\rangle\}$ se mantiene casi constante (con diferencias del orden de 10^{-2}) incluso para un número reducido de espines nucleares.

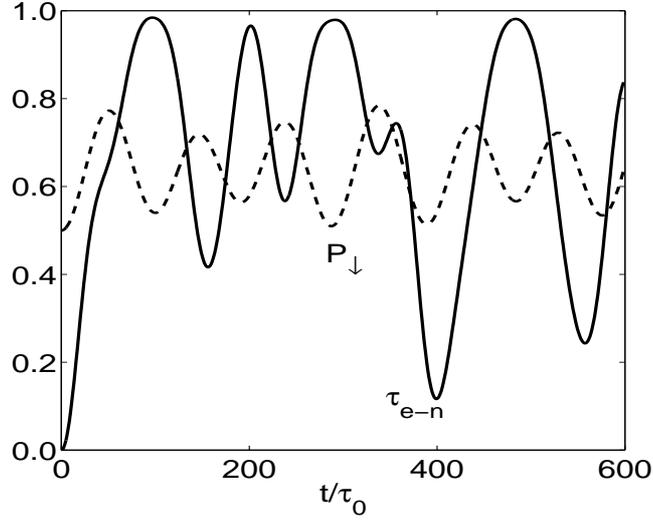


Figura 4.3: Evolución del tangle τ_{e-n} (línea continua) y la población P_{\downarrow} del estado $|\downarrow\rangle_e$ (línea segmentada) para un defecto uniformemente distribuido. El estado inicial es $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_e \otimes |\mathbf{1}\rangle_n$, $N = 10^3$, y $\tau \sim 68\tau_0$.

4.3. Almacenamiento de información cuántica

Como previamente comentamos, en la Ref. [?] es propuesta una memoria cuántica de larga vida basada en la capacidad de que el estado de un espín electrónico sea mapeado reversiblemente a un estado colectivo de espines nucleares completamente polarizados.

Esto está representado por la Ec. (4.11),

$$(u|\uparrow\rangle + v|\downarrow\rangle) \otimes |\mathbf{0}\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle (v|\mathbf{1}\rangle + iu|\mathbf{0}\rangle),$$

donde $|\mathbf{1}\rangle = (1/N_0) \sum_i \alpha_i |\mathbf{1}_i\rangle$.

A continuación, estudiamos esta dinámica en el contexto de un defecto distribuido en el estado inicial de los espines nucleares.

Para que la transferencia sea exitosa, es necesario que el estado electrónico

se factorice del estado de los espines nucleares. Esto implica, que en algún punto de la evolución se cumpla que

$$(u|\uparrow\rangle + v|\downarrow\rangle) \otimes |\mathbf{1}\rangle_n \rightarrow \begin{cases} |\downarrow\rangle_e \otimes |\psi_{u,v}^\downarrow\rangle_n \\ |\uparrow\rangle_e \otimes |\psi_{u,v}^\uparrow\rangle_n \end{cases} \quad (4.31)$$

Para verificar si este tipo de mapeo es posible cuando consideramos un defecto en el estado inicial de los núcleos, analizamos las poblaciones del espín electrónico y estudiamos el entrelazamiento entre el espín electrónico y los espines nucleares. Como el sistema total se encuentra, a todo tiempo en un estado puro, podemos usar como medida de entrelazamiento el tangle [34].

Primero, consideramos el caso de una excitación uniformemente distribuida en los núcleos. En la Fig. (4.3) mostramos la población del espín electrónico P_\downarrow y el tangle τ_{e-n} entre el espín electrónico y los $N = 10^3$ espines nucleares. Podemos observar claramente en la figura que para el caso de un defecto uniformemente distribuido, no existe un tiempo para el cual el sistema total evolucione a un estado factorizado como el de la Ec. (4.31). La población del espín electrónico nunca es máxima ni mínima (en ambos casos el tangle desaparecería), lo que significa que no hay alta fidelidad en la transferencia de información cuántica hacia los núcleos.

Estudiaremos ahora el proceso de transferencia para el caso de un defecto localizado como se muestra en la Ec. (4.13). Cuando consideramos que la distribución del defecto tiene su máximo en el centro del quantum dot, el almacenamiento de la información cuántica se ve seriamente perjudicada. Sin embargo, si el defecto tiene mayor probabilidad de estar ubicado en un extremo del quantum dot, el acoplamiento de este defecto con el espín electrónico es débil, por lo cual la condición de separabilidad requerida para la transferencia de información se mantiene incluso cuando la distribución del defecto es relativamente ancha, como puede verse en la Fig. (4.4). Las condiciones necesarias para una exitosa transferencia de la información cuántica se

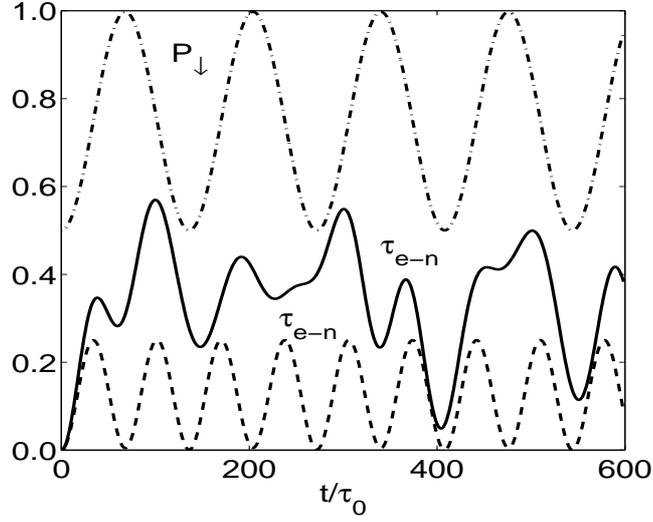


Figura 4.4: Evolución del tangle τ_{e-n} para la distribución del defecto centrada al borde del quantum dot. Se muestran acá, la población del espín electrónico P_\downarrow (línea punto-segmentada) y el tangle (línea segmentada) para un ancho de la distribución del defecto $\Gamma = N/50$, y el tangle para el ancho $\Gamma = N$ (línea continua) para $N = 10^3$ y el estado inicial $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_e \otimes |\mathbf{1}\rangle_n$.

alcanzan después de un tiempo $t \approx 68\tau_0$, el cual es muy cercano al tiempo de transferencia para un estado inicial de los espines nucleares completamente polarizados dado por la Ec. (4.30)

El rendimiento del proceso de almacenaje de la información cuántica lo analizamos ahora de una forma más cuantitativa simulando un ciclo completo de escritura, almacenaje y recuperación de la información.

En el primer paso, el espín electrónico inicialmente en el estado $|\psi_i\rangle$ interactúa con los espines nucleares y después de un tiempo τ la evolución se interrumpe sacando de resonancia el sistema manipulando el campo magnético aplicado y luego trazamos el espín electrónico. Luego, un nuevo electrón con espín en el estado $|\downarrow\rangle$ interactúa con los núcleos y después de un tiempo τ

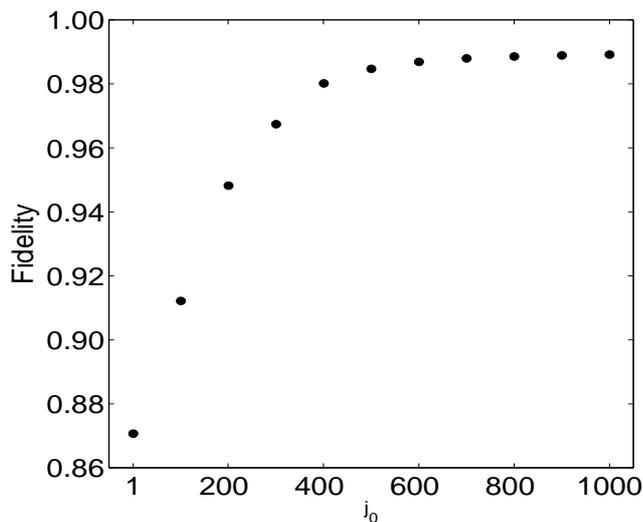


Figura 4.5: Fidelidad de la memoria cuántica para $N = 10^3$ espines nucleares y distintos j_0 , $1 \leq j_0 \leq N$.

los núcleos son trazados. La fidelidad $F = \langle \psi_i | \rho_f | \psi_i \rangle$ entre este estado final del espín electrónico ρ_f y el estado inicial es graficado en la Fig. (4.5) para distintas distribuciones del defecto, donde F se ha calculado promediando sobre el estado del espín electrónico en la esfera de Bloch. Podemos ver en esta figura, que debido a la disminución de la magnitud del acoplamiento, la fidelidad del proceso aumenta a medida que la posición más probable para el defecto (j_0) se acerca a los bordes del quantum dot.

A continuación, estudiaremos el caso en que los espines nucleares se encuentran inicialmente en un estado mixto de la forma

$$\rho_N = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\sigma}_+^{(j)} |0\rangle \langle 0| \hat{\sigma}_-^{(j)}. \quad (4.32)$$

En la Figura (4.6) mostramos las poblaciones del estado del espín electrónico. Esta figura muestra que el espín electrónico experimenta oscilaciones de Rabi muy regulares, desviándose muy levemente de la situación ideal donde no hay defectos en el estado de los espines nucleares. En particular, el

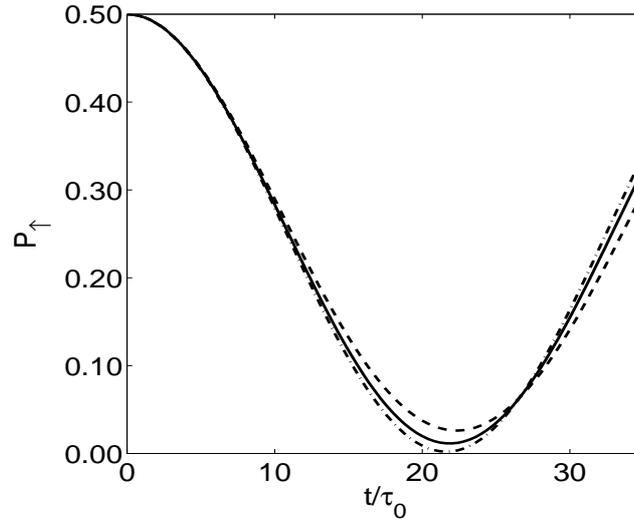


Figura 4.6: Evolución de la población P_{\uparrow} del estado del espín electrónico $|\uparrow\rangle_e$ para $N = 40$. El estado inicial para el espín electrónico es $|\Psi\rangle_e = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_e$ y $\rho_N = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\sigma}_+^{(j)} |\mathbf{0}\rangle \langle \mathbf{0}| \hat{\sigma}_-^{(j)}$ para los espines nucleares. Línea continua: $a_j = 1/N$; Línea segmentada: $a_j = [C(\Gamma/2)^2 / ((j - j_0)^2 + (\Gamma/2)^2)]^2$, con $\Gamma = N - j_0 = 1$, y C es una constante de normalización. Línea punto-segmentada: igual que para la línea segmentada pero con $j_0 = N$.

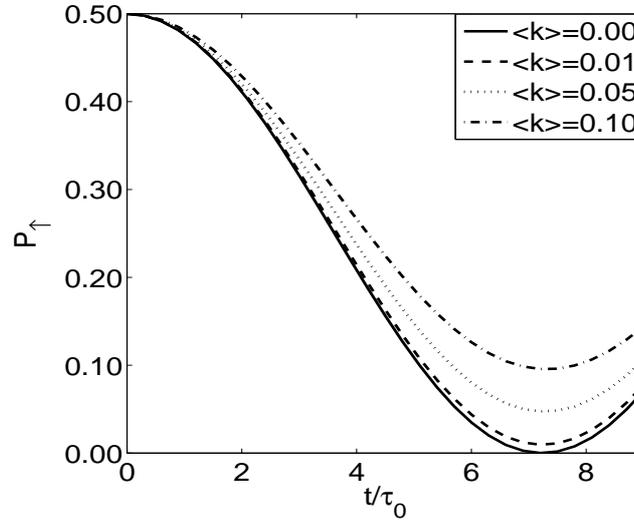


Figura 4.7: Evolución de la población P_{\downarrow} del estado del espín nuclear $|\uparrow\rangle_e$ para una distribución térmica inicial para cada espín nuclear considerando $N = 10$ espines nucleares y diferentes $\langle k \rangle$. El estado inicial del espín electrónico es $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_e$. Para este caso, $\langle k \rangle = \exp(-\beta\hbar\omega) / (1 + \exp(-\beta\hbar\omega))$.

rendimiento es mejor que en los casos correspondientes de defectos distribuidos coherentemente. Esto es esperable debido a que el almacenamiento de información cuántica es sensible a la coherencia del estado de espines nucleares, la cual está ausente en el caso de un estado mixto. Es importante notar que en la Fig. (4.6) el número inicial de excitaciones en los espines nucleares está fija, a diferencia de una distribución térmica. En este caso, el espacio de Hilbert que visita el sistema escala como N^2 y no como 2^{N+1} , lo que permite un cálculo numérico exacto.

Otro posible escenario físico es el de un estado inicial de los espines nucleares a temperatura finita. Nuestro método no es directamente aplicable a esta situación debido a que el estado inicial ya cubre una parte importante del espacio de Hilbert. Sin embargo, a modo de completitud incluiremos un breve

análisis de este caso en el contexto de una memoria cuántica en presencia de defectos.

Consideremos un estado térmico para cada espín nuclear

$$\rho_{\text{th}}^i = \frac{e^{-\hbar\omega\hat{\sigma}_z^i\beta}}{\text{tr}(e^{-\hbar\omega\hat{\sigma}_z^i\beta})} \quad (4.33)$$

con $\beta = 1/(k_B T)$, donde T es la temperatura asociada. La población media de cada espín es $\langle k \rangle = \langle \hat{\sigma}_z^{(i)} \rangle + 1/2$. Tal como para el caso de un estado inicial mixto de la Fig. (8), no es posible definir estados colectivos como fue para el caso de estados iniciales puros. En la Fig. (4.7) se muestran los resultados de la simulación numérica tomando en cuenta el espacio de Hilbert completo del problema. En esta figura se muestran las poblaciones del estado $|\uparrow\rangle$ del espín electrónico. Para polarizaciones nucleares sobre el 95 %, las oscilaciones de Rabi del espín electrónico se desvían del caso ideal sólo en un pequeño porcentaje.

4.4. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la dinámica de un espín electrónico interactuando inhomogeneamente con un sistema de espines nucleares polarizados en un quantum dot, considerado previamente como un candidato a memoria cuántica. Demostramos que la viabilidad del proceso de almacenaje de información cuántica depende fuertemente de la presencia y la posición de defectos en el estado polarizado de los espines nucleares.

Capítulo 5

Control selectivo del subespacio simétrico de Dicke en iones atrapados

En este capítulo, mostraremos un método que permite producir de forma secuencial y unitaria estados de Dicke de N iones con un arbitrario número de excitaciones. También proponemos una técnica no determinista para producir directamente estados de Dicke iónicos a partir de condiciones iniciales apropiadas [105].

5.1. Introducción

Los estados de muchas partículas juegan un rol fundamental en información cuántica. Este tipo de estados son usados en diferentes aplicaciones y recientemente para mejoras de espectroscopía, acercándola al límite de Heisenberg [72].

En este sentido, técnicas para la generación secuencial de estados entre-

lazados de muchas partículas han sido propuestas recientemente [73]. También, un método para generar entrelazamiento multipartito accedando globalmente una cadena de iones en el marco del modelo de Tavis-Cummings ha sido desarrollado [74]. Desde el punto de vista experimental ha habido un importante desarrollo en las técnicas de control de sistemas de muchas partículas. Por ejemplo, en iones atrapados se ha descrito un experimento donde se prepara un estado W de hasta ocho iones [75]. En este sistema, los qubits son codificados en los niveles electrónicos internos de los iones atrapados, y el estado W se prepara realizando una secuencia de operaciones sobre los diferentes iones que en total suman N operaciones, donde N es el número de iones en la trampa. Podemos mencionar también, el experimento realizado en los laboratorios del NIST en Boulder, donde se ha preparado un estado GHZ de hasta 6 iones atrapados [76].

Por otro lado, como ya hemos discutido anteriormente, un sistema físico debe cumplir varios requerimientos si quiere utilizarse como un computador cuántico [29]. Entre estos requerimientos se encuentran: la escalabilidad del sistema, esto es, la viabilidad para definir un número suficiente de unidades básicas de información (qubits) y por otro lado, mitigar los efectos de la decoherencia. En este contexto, una forma eficiente para manipular sistemas de muchas partículas, o dicho de otra manera, sistemas compuestos por muchos qubits, puede ser una herramienta de mucha importancia para mejorar, por ejemplo, la eficiencia de protocolos de información y computación cuántica.

En este capítulo, consideramos un sistema compuesto de N iones atrapados accedados colectivamente por dos láseres en un esquema Raman. En este sistema, desarrollamos un método para manipular el espacio de Hilbert de tal manera que se pueda restringir la dinámica del sistema cuántico dentro de un subespacio determinado, permitiendo de este modo, la manipulación selectiva del sistema cuántico. Como veremos más adelante, este método permite una

forma útil de manipular colectivamente el sistema de iones y el movimiento (cuantizado) de su centro de masa. En particular, las interacciones selectivas de muchas partículas permite la generación secuencial de estados de Dicke iónicos con un número cualquiera de excitaciones.

Interacciones selectivas han sido propuestas para cavidades QED [77] y para iones atrapados [78, 79]. Además, se ha demostrado que estas interacciones selectivas permiten la generación de estados arbitrarios de oscilador armónico [80] y su medición a través de interacciones instantáneas [81].

Específicamente, en la Ref. [79] se han descrito interacciones selectivas para un único ión atrapado interactuando con láseres en una configuración Raman. Sin embargo, una generalización de este esquema selectivo a N iones atrapados no es directa y envuelve una física diferente como mostraremos a continuación.

5.2. El Modelo

Consideraremos una configuración Raman de láseres interactuando con N iones atrapados de tres niveles tal como muestra la Fig. (5.1). Un campo estacionario con una fuerza de acoplamiento Ω_{1j} excita fuera de resonancia, con desintonía $\Delta + \nu \gg \Omega_{1j}$, la transición entre los estados electrónicos internos $|e_j\rangle \rightarrow |c_j\rangle$. Similarmente, un láser de onda viajera con una fuerza de acoplamiento Ω_{2j} , excita la transición entre los estados electrónicos internos $|g_j\rangle \rightarrow |c_j\rangle$ con una desintonía Δ ($\Delta \gg \Omega_{2j}$). Esta situación es descrita por

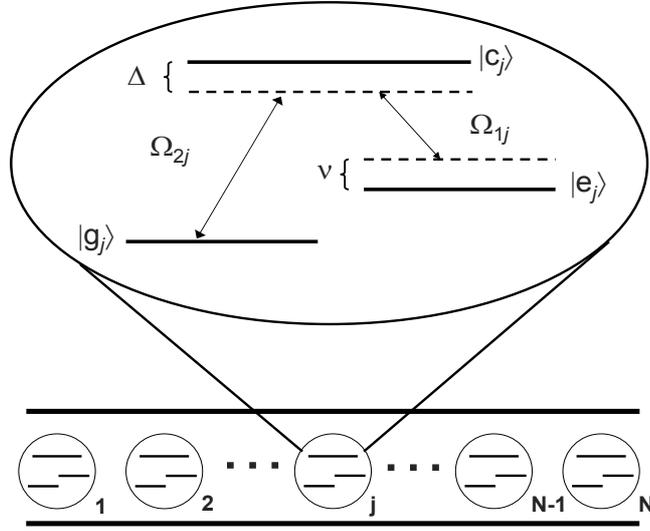


Figura 5.1: N iones de tres niveles atrapados en una trampa lineal de Paul donde el diagrama de energía del j -ésimo ión es mostrado.

el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_e \sum_{j=1}^N |e_j\rangle\langle e_j| + \hbar\omega_c \sum_{j=1}^N |c_j\rangle\langle c_j| \\
& + \hbar \left[\cos(k_1\hat{z})e^{i\omega_1 t} \sum_{j=1}^N \Omega_{1j}|g_j\rangle\langle c_j| \right. \\
& \left. + e^{-i(k_2\hat{z}-\omega_2 t)} \sum_{j=1}^N \Omega_{2j}|e_j\rangle\langle c_j| + \text{H.c.} \right], \quad (5.1)
\end{aligned}$$

donde, $\Omega_{1j} = \Omega_{1j}(\vec{r}_j)$ y $\Omega_{2j} = \Omega_{2j}(\vec{r}_j)$ son las fuerzas de acoplamiento dependientes de la posición de cada ión con los láseres Raman.

En el régimen de Lamb-Dicke, esto es, $\eta_i\sqrt{\bar{n}} \ll 1$, donde \bar{n} es el número promedio de fonones y $\eta_i \equiv k_i\sqrt{\hbar/2m\nu}$ son los llamados parámetros de Lamb-Dicke y eliminando adiabáticamente los niveles $|c_j\rangle$, el Hamiltoniano (5.1) en el cuadro de interacción puede escribirse como

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\hbar\hat{\Delta}_n + \hat{a}^\dagger\hat{J}^+ + \hat{a}\hat{J}^-, \quad (5.2)$$

donde $\hat{\Delta}_n$ es el llamado AC Stark shift que depende del estado del centro de masa y está dado por

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_n &= \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^N [1 - \eta_1^2 (2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)] |\Omega_{1j}|^2 |g_j\rangle \langle g_j| \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^N |\Omega_{2j}|^2 |e_j\rangle \langle e_j|,\end{aligned}\quad (5.3)$$

además,

$$\hat{J}^+ = \sum_{j=1}^N \Omega_{\text{eff}}^j \hat{\sigma}_j^\dagger \quad (5.4)$$

$$\hat{J}^- = \left(\hat{J}^+\right)^\dagger, \quad (5.5)$$

con $\Omega_{\text{eff}}^j = 2i\hbar\eta_2\Omega_{1j}^*\Omega_{2j}/\Delta$ y $\hat{\sigma}_j = |g_j\rangle \langle e_j|$. En este caso, hemos eliminado los términos que involucran el nivel $|c_j\rangle$ ya que asumimos que no hay población inicial en estos niveles.

La dependencia del número de fonones en el Stark shift (5.3) proviene del láser onda estacionaria, el cual junto con el de onda viajera producen la dinámica de la Ec. (5.2).

La desintonía $\hat{\Delta}_n$ dependiente del número de fonones puede compensarse ya sea, provocando DC Stark shifts (Stark shifts que no dependen del número de fonones) o bien corriendo la frecuencia de los láseres en un valor fijo δ_0^j para el j -ésimo ión. De esta forma, el Hamiltoniano (5.2) puede escribirse como

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{\hbar}{\Delta} \sum_{j=1}^N \Omega_0^j (\hat{n} - \delta_0^j) |g_j\rangle \langle g_j| + \hat{a}^\dagger \hat{J}^+ + \hat{a} \hat{J}^-, \quad (5.6)$$

donde $\Omega_0^j = 2\eta_1^2 |\Omega_{1j}|^2 / \Delta$. En el cuadro de interacción, la Ec. (5.6) se transforma en

$$\hat{H}_{\text{eff}}^I = \sum_{j=1}^N \Omega_{\text{eff}}^j \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_j^\dagger e^{-i[\Omega_0^j(\hat{n}-\delta_0^j) + \sum_{k \neq j} \Omega_0^k \hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_k^\dagger]} + \text{H.c.}, \quad (5.7)$$

donde $\hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_k^\dagger = |\mathbf{g}_k\rangle\langle\mathbf{g}_k|$.

Para ilustrar cómo aparece la selectividad en el caso de N iones, estudiaremos el caso especial donde todos los iones se acoplan igualmente a los láseres Raman, es decir, el caso de acoplamiento homogéneo donde $\Omega_{\text{eff}}^j \equiv \Omega_{\text{eff}} = 2i\hbar\eta_2\Omega_1^*\Omega_2/\Delta$ y $\Omega_0^j \equiv \Omega_0 = 2\eta_1^2|\Omega_1|^2/\Delta$.

En este caso, la parte de interacción en el Hamiltoniano (5.6) corresponde al llamado modelo de (anti) Tavis-Cummings [50]. Este modelo corresponde a una generalización a espín $j = N/2$ del modelo de (anti) Jaynes-Cummings [47]. En el modelo de Tavis-Cummings, $\hat{J}^\pm \rightarrow \Omega_{\text{eff}}\hat{J}^\pm$, donde los nuevos operadores colectivos \hat{J}^\pm pueden considerarse como operadores de momento angular, imponiendo una simetría de permutación sobre el subsistema iónico. Esto permite reducir la dimensión del espacio de Hilbert donde se produce la evolución desde 2^N a $N+1$ en términos de los estados simétricos de Dicke [49]. De esta manera, si el sistema se encuentra a cualquier tiempo en el subespacio simétrico de Dicke, este evolucionará sólo dentro de este mismo espacio.

Si asumimos entonces que el estado iónico está inicialmente en el subespacio simétrico, los operadores colectivos \hat{J}^\pm pueden reescribirse exclusivamente en términos de los estados simétricos de Dicke. En el espacio simétrico podemos escribir entonces

$$\sum_{j=1}^N |\mathbf{g}_j\rangle\langle\mathbf{g}_j| \rightarrow \sum_{k=0}^N (N-k) |\mathbf{D}_k\rangle\langle\mathbf{D}_k| \quad (5.8)$$

$$\hat{J}^+ \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} f_k |\mathbf{D}_{k+1}\rangle\langle\mathbf{D}_k|, \quad (5.9)$$

con $f_k = \sqrt{(k+1)(N-k)}$ y $|\mathbf{D}_k\rangle$ son los estados simétricos de Dicke con k excitaciones dados por

$$|\mathbf{D}_k\rangle = \binom{N}{k}^{-\frac{1}{2}} \sum_k P_k(|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{N-k}, \mathbf{e}_{N-k+1}, \dots, \mathbf{e}_N\rangle), \quad (5.10)$$

donde P_k es el conjunto de todas las distintas permutaciones. Es importante notar que en las expresiones Ec. (5.8) y Ec. (5.9), hemos omitido las componentes no simétricas, esto debido a que hemos asumido un estado inicial para los iones en el espacio simétrico.

En consecuencia, el Hamiltoniano (5.7) puede escribirse ahora como

$$\hat{H}_{\text{eff}}^I = \hat{a}^\dagger \Omega_{\text{eff}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\Omega_0 \hat{n} t} e^{i\Omega_0(N-1-k+\delta_0)t} |D_{k+1}\rangle \langle D_k| + \text{H.c.}, \quad (5.11)$$

esta expresión será útil para estudiar interacciones selectivas dentro del subespacio simétrico.

Consideremos el sistema preparado inicialmente en el estado $|N_0\rangle|D_{k_0}\rangle$. Entonces, sintonizando las frecuencias de los láseres tales que $\delta_0 = k_0 + N_0 - N + 1$ tendremos un acoplamiento selectivo resonante a la transición $\{|N_0\rangle|D_{k_0}\rangle, |N_0 + 1\rangle|D_{k_0+1}\rangle\}$. Además, si se cumple que $\Omega_{\text{eff}} \ll \Omega_0$, todos los otros subespacios quedarán fuera de resonancia, con lo que obtenemos una dinámica efectiva de dos niveles.

Entonces, seleccionando un subespacio determinado, el Hamiltoniano (5.11) puede reescribirse como

$$\hat{H} = \sqrt{N_0 + 1} \Omega_{\text{eff}} f_{k_0} (\hat{\sigma}_{N_0}^+ \hat{J}_{k_0}^+ + \hat{\sigma}_{N_0}^- \hat{J}_{k_0}^-) \quad (5.12)$$

donde $\hat{J}_{k_0}^+ = |D_{k_0+1}\rangle \langle D_{k_0}|$ y $\hat{\sigma}_{N_0}^+ = |N_0 + 1\rangle \langle N_0|$ son operadores efectivos de espín 1/2 del espacio de Hilbert reducido del estado colectivo de los iones y el campo bosónico respectivamente.

Considerando los parámetros de los experimentos de iones en el NIST en Boulder [19], se pueden lograr acoplamientos efectivos del orden de $\Omega_{\text{eff}} \sim 10^5$ Hz, lo cual produce inversión de población en el subespacio $\{|N_0\rangle|D_{k_0}\rangle, |N_0 + 1\rangle|D_{k_0+1}\rangle\}$ en un tiempo $\tau \leq 0,1$ ms menor que el tiempo de decoherencia típico del estado del centro de masa que es del orden de $\tau_d \sim 10$ ms.

5.3. Producción de estados de Dicke. Aplicaciones de la selectividad generalizada

En esta sección describiremos métodos para la preparación de estados de Dicke de cualquier número de excitaciones y además, propondremos un método no determinista para proyectar alguna superposición de estados de Dicke en uno de estos estados con un número preciso de excitaciones.

Preparación de estados de Dicke

Consideremos un estado inicial de la forma

$$|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_{\text{CM}}|g\dots g\rangle \equiv |0\rangle_{\text{CM}}|D_0\rangle. \quad (5.13)$$

Sintonizando el subespacio $\{|0\rangle_{\text{CM}}|D_0\rangle, |1\rangle_{\text{CM}}|D_1\rangle\}$ de la forma descrita en la sección anterior, la evolución del estado (5.13) estará dada por

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(|\Omega_{\text{eff}}|\sqrt{N}t)|0\rangle|D_0\rangle - ie^{i\phi} \sin(|\Omega_{\text{eff}}|\sqrt{N}t)|1\rangle|D_1\rangle, \quad (5.14)$$

donde $\Omega_{\text{eff}} = |\Omega_{\text{eff}}|e^{-i\phi}$.

El estado de Dicke de una excitación $|D_1\rangle$ es también conocido como estado W ($|W_N\rangle$), dado por

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|eg\dots g\rangle + |geg\dots g\rangle + \dots + |g\dots ge\rangle). \quad (5.15)$$

Este estado entrelazado de N partículas tiene una gran importancia en la teoría de la información cuántica. Más aún, este estado presenta lo que se denomina como entrelazamiento persistente, es decir, se necesita más esfuerzo operacional para desentrelazar este estado [82].

Si dejamos al sistema, gobernado por el Hamiltoniano (5.12), evolucionar durante un tiempo t_1 dado por

$$2|\Omega_{\text{eff}}|\sqrt{N}t_1 = \pi \quad (5.16)$$

y $\phi = \pi/2$, entonces el estado (5.14) se transformará en

$$|\Psi(t_1)\rangle = |1\rangle|D_1\rangle \equiv |1\rangle|W_N\rangle, \quad (5.17)$$

resultando en un estado $|W_N\rangle$ de N iones atrapados.

Por otro lado, si dejamos al sistema evolucionar un tiempo tal que

$$\cos(|\Omega_{\text{eff}}|\sqrt{N}t) = \frac{1}{\sqrt{N+1}}, \quad (5.18)$$

el estado al que se llega es

$$|\Psi(t)\rangle = |W_{N+1}\rangle, \quad (5.19)$$

donde, el $(N+1)$ -ésimo qubit corresponde al sistema bosónico efectivo de dos niveles.

En la ecuación (5.17) hemos preparado un estado de Dicke iónico de una excitación. A continuación mostraremos cómo, secuencialmente pueden prepararse estados iónicos de Dicke con un número creciente de excitaciones.

Una vez preparado el sistema en el estado (5.17), sintonizamos en el red-sideband (RSB) el subespacio $\{|1\rangle_{\text{CM}}|D_1\rangle, |0\rangle_{\text{CM}}|D_2\rangle\}$ y conectamos la interacción durante un tiempo t_2 :

$$2|\Omega_{\text{eff}}|\sqrt{N}t_2 = \pi. \quad (5.20)$$

Después de este tiempo, el estado estará dado por

$$|\Psi(t_2)\rangle = |0\rangle|D_2\rangle. \quad (5.21)$$

De esta manera, podemos deducir que la sucesiva aplicación de interacciones colectivas sintonizadas apropiadamente en el blue-sideband (BSB) y el RSB, puede producir de forma determinista y secuencial todos los estados simétricos de Dicke con de k excitaciones.

Discriminación de estados de Dicke

Otra aplicación de las interacciones selectivas de muchas partículas, es la posibilidad de discriminar entre estados iónicos con diferente número de excitaciones. Esto permite la producción no determinista de estados iónicos de Dicke con un número determinado de excitaciones a partir de una superposición, por ejemplo, de estados de Dicke de diferente número de excitaciones.

Veamos como funciona esto. Supongamos que inicialmente el estado de los iones corresponde a una superposición de estados de Dicke tal que

$$|\Psi_I\rangle = \sum_{k=0}^N c_k |D_k\rangle, \quad (5.22)$$

donde c_k es la amplitud de probabilidad de tener el sistema en un estado de Dicke con k excitaciones, y $\sum_{k=0}^N |c_k|^2 = 1$.

Este tipo de estados puede corresponder, por ejemplo, a un estado coherente atómico [83] dado por $\exp(i\theta\hat{J}_x)|g\dots g\rangle$ el cual puede ser generado en una trampa de iones aplicando los láseres en configuración Raman sintonizados a la transición carrier colectiva e inhomogéneamente sobre los N iones. Suponemos además que el modo de centro de masa está inicializado en un estado de Fock con N_0 excitaciones $|N_0\rangle_{\text{CM}}$. Adicionalmente consideramos un sistema auxiliar, que en este caso corresponde a un nuevo ión, inicializado en el estado $|g\rangle_A$. Esto es,

$$|\Psi_0\rangle = |\Psi_I\rangle |N_0\rangle_{\text{CM}} |g\rangle_A \quad (5.23)$$

Una vez preparado este estado, elegimos como subespacio resonante el subespacio $\{|N_0\rangle_{\text{CM}} |D_{k_0-1}\rangle, |N_0 + 1\rangle_{\text{CM}} |D_{k_0}\rangle\}$, donde $|D_{k_0}\rangle$ es el estado de Dicke con k_0 excitaciones que queremos discriminar.

Aplicando un pulso π colectivamente sobre los iones, obtenemos un estado

de la forma

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi_1\rangle = (c_{k_0-1}|N_0 + 1\rangle_{\text{CM}}|D_{k_0}\rangle + |N_0\rangle_{\text{CM}} \sum_{k \neq k_0-1}^N c_k |D_k\rangle) |g\rangle_A. \quad (5.24)$$

A continuación, se aplica otro pulso π sintonizado en el primer red-sideband pero esta vez sobre el ión auxiliar. Esto lleva a

$$|\Psi_1\rangle \rightarrow |\Psi_2\rangle = (c_{k_0-1}|D_{k_0}\rangle |e\rangle_A + \sum_{k \neq k_0-1}^N c_k |D_k\rangle |g\rangle_A) |N_0\rangle_{\text{CM}}. \quad (5.25)$$

De este estado podemos notar que, si al realizar una medición sobre el ión auxiliar, encontramos que se encuentra en el estado excitado $|e\rangle_A$, el estado colectivo de los iones inmediatamente colapsará al estado de Dicke $|D_{k_0}\rangle$ con k_0 excitaciones. Este proceso ocurre con probabilidad $|c_k|^2$. De esta manera, si sintonizamos el subespacio $\{|N_0\rangle_{\text{CM}}|D_{k_0-1}\rangle, |N_0 + 1\rangle_{\text{CM}}|D_{k_0}\rangle\}$, podemos producir un estado simétrico de Dicke de k_0 excitaciones.

Por otro lado, se ha demostrado que el uso de interacciones selectivas en un sólo ión atrapado puede ser usado para manipular de forma determinista y universal el estado del centro de masa [80]. Siguiendo aquellas ideas, una manipulación similar puede ser implementada acá para acceder estados arbitrarios dentro del subespacio simétrico de Dicke. En este caso, los estados de Fock del oscilador armónico Ref. [80], serían reemplazados por los estados simétricos de los grados de libertad internos de los iones con un número fijo de excitaciones.

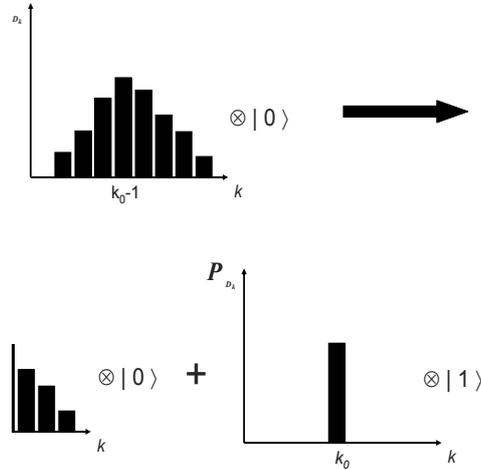


Figura 5.2: Esquema de discriminación de estados de Dicke.

5.4. Detección de estados de Dicke y lógica cuántica colectiva

En la sección anterior vimos que, mediante interacciones selectivas en muchas partículas es posible la preparación secuencial de estados de Dicke iónicos con un número arbitrario de excitaciones. En esta sección usaremos estas mismas interacciones selectivas para detectar estados de Dicke mediante mediciones sobre un sistema auxiliar.

A modo de ejemplo, nos concentraremos primero en el caso del estado de Dicke de N iones con una excitación, es decir, el estado W_N . El estado W_N definido en la Ec. (5.15) puede reescribirse como un producto de dos qubits efectivos de la siguiente manera

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}|e\rangle_1|D_0\rangle_2 + \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}|g\rangle_1|D_1\rangle_2 \quad (5.26)$$

donde,

$$|\bar{D}_0\rangle_2 = |gg\dots g\rangle \quad (5.27)$$

$$|\bar{D}_1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (|eg\dots g\rangle + |geg\dots g\rangle + \dots + |g\dots ge\rangle). \quad (5.28)$$

El primer qubit corresponde a un ion, y el segundo qubit (qubit efectivo)

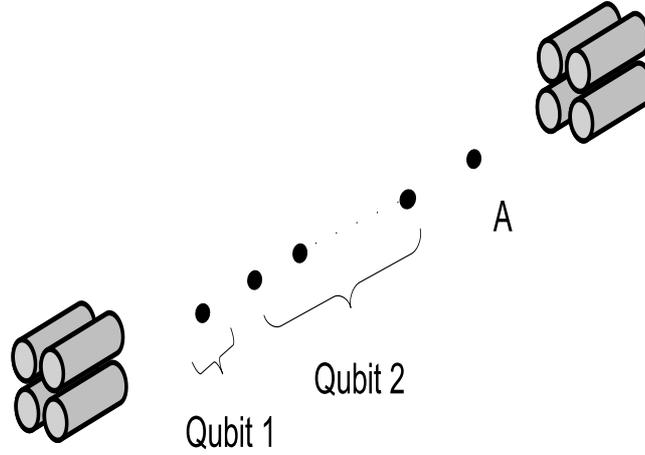


Figura 5.3: Esquema para la detección de estados de Dicke

corresponde a los estados colectivos $|\bar{D}_0\rangle_2$, $|\bar{D}_1\rangle_2$ de los restantes $N - 1$ iones con cero y una excitación respectivamente.

Para caracterizar el estado W_N , desarrollaremos un método para obtener experimentalmente la concurrencia [32, 33] entre los dos qubits efectivos. En este sentido mostraremos que, los estados de Dicke con diferente número de excitaciones escritos en términos de dos qubits efectivos poseen diferente entrelazamiento, por este motivo usamos la concurrencia entre estos dos qubits efectivos para caracterizar un estado de Dicke determinado.

Debido a que el estado global de los dos qubits efectivos es un estado puro, la concurrencia puede escribirse como $C = |\langle\Psi|\tilde{\Psi}\rangle|$ [32, 33], donde $|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle$. A partir de esto, podemos decir que la concurrencia medida entre los qubits efectivos 1 y 2 debe ser, si corresponde a un estado

W_N como en la Ec.(5.26), igual a

$$C = \frac{2}{N} \sqrt{N-1} \quad (5.29)$$

Empezaremos considerando el estado

$$|\Phi_1\rangle = |\Psi\rangle|g\rangle_A|0\rangle_{CM}, \quad (5.30)$$

donde,

$$|\Psi\rangle \equiv |W_N\rangle = \alpha|e\rangle_1|\bar{D}_0\rangle_2 + \beta|g\rangle_1|\bar{D}_1\rangle_2, \quad (5.31)$$

con $\alpha = 1/\sqrt{N}$, $\beta = \sqrt{(N-1)/N}$, $|g\rangle_A$ es un qubit (ión) auxiliar inicializado en el estado fundamental, y $|n\rangle_{CM}$ etiqueta el modo del centro de masa con n cuantos de excitación.

Aplicando una compuerta Hadamard sobre el ión auxiliar, el estado $|\Phi_1\rangle$ se transforma en

$$|\Phi_1\rangle \rightarrow |\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi\rangle|g\rangle_A + |\Psi\rangle|e\rangle_A) |0\rangle_{CM}. \quad (5.32)$$

Un pulso π sintonizado al primer RSB sobre el mismo ión auxiliar, transforma el estado $|\Phi_2\rangle$ en

$$|\Phi_2\rangle \rightarrow |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi\rangle|0\rangle_{CM} + |\Psi\rangle|1\rangle_{CM}) |g\rangle_A. \quad (5.33)$$

El siguiente paso es realizar operaciones condicionales a $|1\rangle_{CM}$.

Necesitamos realizar una operación de la forma

$$\begin{aligned} |\bar{D}_0\rangle_2 |0\rangle_{CM} &\rightarrow |\bar{D}_0\rangle_2 |0\rangle_{CM} \\ |\bar{D}_1\rangle_2 |0\rangle_{CM} &\rightarrow |\bar{D}_1\rangle_2 |0\rangle_{CM} \\ |\bar{D}_0\rangle_2 |1\rangle_{CM} &\rightarrow |\bar{D}_1\rangle_2 |1\rangle_{CM} \\ |\bar{D}_1\rangle_2 |1\rangle_{CM} &\rightarrow |\bar{D}_0\rangle_2 |1\rangle_{CM}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

esto es, que lleva el estado $|\bar{D}_0\rangle_2$ a $|\bar{D}_1\rangle_2$ y el estado $|\bar{D}_1\rangle_2$ a $|\bar{D}_0\rangle_2$ cuando el centro de masa se encuentra en el estado $|1\rangle_{CM}$, dejando al estado colectivo

de los iones intacto cuando el centro de masa está en el estado con cero excitaciones $|0\rangle_{CM}$, esto es, una compuerta CNOT colectiva.

Para realizar esta operación, primero los láseres en configuración Raman son sintonizados al BSB y al subespacio $\{|\bar{D}_0\rangle_2|1\rangle_{CM}, |\bar{D}_1\rangle_2|2\rangle_{CM}\}$. Aplicando un pulso π sobre el qubit 2 tenemos

$$|\Psi\rangle|1\rangle_{CM} \rightarrow |\phi\rangle = \alpha|e\rangle_1|\bar{D}_1\rangle_2|2\rangle_{CM} + \beta|g\rangle_1|\bar{D}_0\rangle_2|1\rangle_{CM}, \quad (5.35)$$

ahora, un pulso π en el RSB resonante a la transición $\{|\bar{D}_1\rangle_2|1\rangle_{CM}, |\bar{D}_0\rangle_2|2\rangle_{CM}\}$, aplicado al qubit 2 transforma $|\phi\rangle$ en

$$|\phi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle|2\rangle_{CM} = (\alpha|e\rangle_1|\bar{D}_1\rangle_2 + \beta|g\rangle_1|\bar{D}_0\rangle_2)|2\rangle_{CM}. \quad (5.36)$$

Ahora, aplicando un pulso π sintonizado en el RSB y resonante en el subespacio $\{|g\rangle_1|2\rangle_{CM}, |e\rangle_1|1\rangle_{CM}\}$ y luego un pulso π sintonizado en el BSB resonante a la transición $\{|e\rangle_1|2\rangle_{CM}, |g\rangle_1|1\rangle_{CM}\}$ el estado $|\Psi'\rangle|2\rangle_{CM}$ va a

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle|2\rangle_{CM} \rightarrow |\tilde{\Psi}\rangle|1\rangle_{CM} &= \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi'\rangle|1\rangle_{CM} \\ &= (\alpha|g\rangle_1|\bar{D}_1\rangle_2 + \beta|e\rangle_1|\bar{D}_0\rangle_2)|1\rangle_{CM}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Es importante recalcar que, debido a que las transiciones resonantes sintonizadas para obtener las expresiones (5.35) a (5.37) no han involucrado al estado del centro de masa sin excitaciones $|0\rangle_{CM}$, el estado $|\Psi\rangle|0\rangle_{CM}$ en la expresión (5.33) no ha sido afectado.

De esta forma, hemos transformado el estado $|\Phi_3\rangle$ (5.33) en

$$|\Phi_3\rangle \rightarrow |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi\rangle|0\rangle_{CM} + |\tilde{\Psi}\rangle|1\rangle_{CM})|g\rangle_A. \quad (5.38)$$

Este estado, puede verse como el resultado de aplicar compuerta CNOT sobre el qubit 1 y una compuerta CNOT colectiva (5.34) sobre el qubit 2.

A continuación, aplicamos sobre el sistema auxiliar un pulso π en el RSB para entrelazar nuevamente el ión auxiliar con los demás iones. Esto nos lleva

a

$$|\Phi_4\rangle \rightarrow |\Phi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi\rangle|g\rangle_A + |\tilde{\Psi}\rangle|e\rangle_A)|0\rangle_{\text{CM}}. \quad (5.39)$$

Ahora, una compuerta Hadamard aplicada sobre el ión auxiliar transforma el estado $|\Phi_5\rangle$ en

$$|\Phi_5\rangle \rightarrow |\Phi_6\rangle = \frac{1}{2}(|\Psi\rangle + |\tilde{\Psi}\rangle)|g\rangle_A + (|\Psi\rangle - |\tilde{\Psi}\rangle)|e\rangle_A)|0\rangle_{\text{CM}} \quad (5.40)$$

A partir de este estado podemos observar que si realizamos una medición sobre el ión auxiliar, es posible observar que el entrelazamiento existente entre los qubits efectivos puede escribirse en términos de las poblaciones del sistema auxiliar tal que

$$C = |\langle\Psi|\tilde{\Psi}\rangle| = |P_{|g\rangle_A} - P_{|e\rangle_A}| \quad (5.41)$$

donde $P_{|g\rangle_A(|e\rangle_A)}$ es la probabilidad de encontrar el ion auxiliar en el estado $|g\rangle_A(|e\rangle_A)$.

Un punto importante que debemos remarcar, es que este protocolo no sólo puede ser usado para caracterizar el estado W_N , sino que también puede ser usado para caracterizar un estado de Dicke con un número arbitrario de excitaciones escribiendo el estado correspondiente como un producto de dos qubits efectivos.

Estos qubits efectivos, se escriben como

$$\begin{aligned} |D_k\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_k}}(\sqrt{(N-1)_{k-1}}|e\rangle_1|\bar{D}_{k-1}\rangle_2 \\ &\quad + \sqrt{(N-1)_k}|g\rangle_1|\bar{D}_k\rangle_2), \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde $|D_k\rangle$ y $|\bar{D}_k\rangle$ son estados simétricos de Dicke de N y $N-1$ iones con k excitaciones respectivamente y $N_k = N!/(k!(N-k)!)$.

En este caso, para ir de la Ec. (5.33) a la Ec. (5.35) el subespacio seleccionado debe ser $\{|\bar{D}_{k-1}\rangle_2|1\rangle_{\text{CM}}, |\bar{D}_k\rangle_2|2\rangle_{\text{CM}}\}$ y $\{|\bar{D}_k\rangle_2|1\rangle_{\text{CM}}, |\bar{D}_{k-1}\rangle_2|2\rangle_{\text{CM}}\}$.

La concurrencia en los qubits efectivos 1 y 2 en el estado (5.42) es

$$C_N^k = 2 \frac{\sqrt{(N-1)_k (N-1)_{k-1}}}{N_k}. \quad (5.43)$$

Por lo tanto, si el estado está dado por la Ec. (5.42), el protocolo recién descrito, debe llevar a un valor para la concurrencia igual al dado por la Ec. (5.43).

5.5. Selectividad inhomogénea

Hasta ahora, hemos descrito un método para manipular el espacio de Hilbert de forma selectiva aplicándolo a la producción y detección de estados de Dicke, considerando un acoplamiento homogéneo entre iones y los láseres.

En el caso más general de los iones interactuando inhomogéneamente con los láseres, no podemos discriminar ni producir determinados estados de Dicke. Sin embargo, la selectividad en muchas partículas aún permite manipular estados número de iones, es decir, estados iónicos con un número fijo de excitaciones aunque no necesariamente simétricos.

Asumamos por ejemplo que hacemos interactuar N iones, todos inicialmente en el estado fundamental, inhomogéneamente con láseres en una configuración Raman sintonizado en la transición carrier de la forma

$$U = \exp(-i\theta \hat{J}_x), \quad (5.44)$$

donde

$$\hat{J}_x = \hat{J}^+ + \hat{J}^-. \quad (5.45)$$

Esta interacción no lleva a una superposición de estados de Dicke de la forma (5.22), sino que a una superposición de estados colectivos no simétricos provenientes de la acción de los operadores \hat{J}^+ y \hat{J}^- sobre los estados iónicos colectivos. El estudio de la dinámica de este tipo de sistemas ya lo hemos

visto en el capítulo 3 [103, 104]. Siguiendo las ideas de ese capítulo, en vez de escribir el Hamiltoniano (5.2) en la base de los estados de Dicke como en la Ec. (5.11), deberíamos escribirlo en términos de estos estados colectivos no simétricos para poder así encontrar las condiciones necesarias para dejar resonante sólo un subespacio determinado. Denotaremos $|\tilde{D}_k^\nu\rangle$ al ν -ésimo estado colectivo no simétrico con k excitaciones. El índice ν da cuenta del hecho que, dependiendo del número de excitaciones iónicas, puede existir más de un solo estado colectivo no simétrico con un determinado número de excitaciones. Entonces, podemos escribir el Hamiltoniano para este caso tal como lo hicimos en la Ec. (5.2) pero en términos de los estados colectivos iónicos no simétricos tal como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}}^I &= -\hbar \sum_{k,\nu} \langle \tilde{D}_k^\nu | \hat{\Delta}_n | \tilde{D}_k^\nu \rangle | \tilde{D}_k^\nu \rangle \langle \tilde{D}_k^\nu | \\ &\quad + \hat{a}^\dagger \sum_{k,\nu} \tilde{\Omega}_{\text{eff}}^{k,\nu} | \tilde{D}_{k+1}^\nu \rangle \langle \tilde{D}_k^\nu | + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde hemos denotado $\tilde{\Omega}_{\text{eff}}^{\nu,k}$ a la nueva constante de acoplamiento, la cual, en el caso homogéneo corresponde a Ω_{eff} . Tal como en el caso homogéneo, si se cumple que $\tilde{\Omega}_{\text{eff}}^{\nu,k} \ll \Omega_0$, podemos sintonizar en resonancia un determinado subespacio, por ejemplo, $\{|N_0\rangle_{\text{CM}} | \tilde{D}_{k_0}^\nu \rangle, |N_0 + 1\rangle_{\text{CM}} | \tilde{D}_{k_0+1}^\nu \rangle\}$, en este caso, si miramos el Hamiltoniano (5.46) en el cuadro de interacción, podremos observar que la condición de resonancia para este subespacio es

$$\langle \tilde{D}_{k_0+1}^\nu | \hat{\Delta}_{N_0+1} | \tilde{D}_{k_0+1}^\nu \rangle - \langle \tilde{D}_{k_0}^\nu | \hat{\Delta}_{N_0} | \tilde{D}_{k_0}^\nu \rangle = 0. \quad (5.47)$$

Esta condición puede satisfacerse compensando la desintonía $\hat{\Delta}_n$ cambiando las frecuencias de los láseres para valores fijos de δ_0^j dependiendo del subespacio que se requiere sintonizar. Este procedimiento es similar al del caso homogéneo, pero ahora δ_0^j estará inhomogéneamente distribuido, es decir, será diferente para cada ión.

5.6. Conclusión

En este capítulo hemos introducido una técnica selectiva que permite una manipulación colectiva dentro del espacio simétrico de Dicke de un sistema de N iones atrapados. En el caso de acoplamiento homogéneo entre los láseres y los iones, hemos estudiado aplicaciones de este método relacionadas a la generación y al control de estados iónicos simétricos de Dicke. También hemos propuesto un método para medir experimentalmente la concurrencia entre dos qubits efectivos con el propósito de caracterizar estados de Dicke con un número determinado de excitaciones. En el caso de acoplamiento inhomogéneo, hemos discutido la discriminación de estados número.

Capítulo 6

Propiedades de entrelazamiento en el modelo de Tavis-Cummings in-homogéneo

En el capítulo 3, desarrollamos un método para encontrar la dinámica cuántica efectiva para sistemas con acoplamiento in-homogéneo. Vimos a modo de ejemplo, la aplicación de este método para encontrar la dinámica de una colección de átomos acoplados in-homogéneamente a un modo del campo electromagnético cuántico, en una versión in-homogénea del modelo de Tavis-Cummings. En éste capítulo, estudiaremos las propiedades de entrelazamiento atómico en el espectro de autoestados del modelo de Tavis-Cummings in-homogéneo. Calcularemos expresiones analíticas para la concurrencia bipartita, mostrando que esta exhibe una fuerte dependencia de la in-homogeneidad [104].

6.1. Introducción

Como ya hemos discutido, el entrelazamiento juega un rol fundamental desde el comienzo de la mecánica cuántica y actualmente es un recurso clave en la información y computación cuántica [1, 84, 85]. La disponibilidad de estados entrelazados y su caracterización son de los más importantes dilemas en la información cuántica. En este sentido, una cantidad considerable de trabajos teóricos han permitido la caracterización del entrelazamiento cuántico [86].

Las propiedades de entrelazamiento del estado base del modelo de Dicke han sido recientemente estudiadas [100, 101]. En tal caso, cuando los acoplamientos entre los átomos y el campo cuántico es homogéneo, la concurrencia entre un par de átomos es independiente del par considerado debido a la simetría de los estados de Dicke. Una situación similar es la que se espera para el modelo de Tavis Cummings.

Desde el punto de vista de las propiedades del modelo, resulta interesante el estudio de las correlaciones cuánticas entre los átomos bajo condiciones más generales, como por ejemplo considerar el caso de acoplamiento in-homogéneo.

A continuación, describiremos las propiedades de entrelazamiento en el espectro de autoestados del modelo de Tavis-Cummings, considerando un acoplamiento in-homogéneo entre los átomos y el campo electromagnético. Específicamente, analizaremos la concurrencia atómica bipartita trazando sobre $N - 2$ partículas.

6.2. El Modelo

En el capítulo 3, vimos que el Hamiltoniano que describe la interacción inhomogénea de N átomos con un modo del campo electromagnético cuántico está dado por $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ con ($\hbar = 1$)

$$\hat{H}_0 = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{S}_z, \quad (6.1)$$

$$\hat{H}_I = \hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-,$$

donde, $\hat{S}_z = \sum_{j=1}^N \sigma_z^j / 2$ y $\hat{J}_\pm = \sum_{j=1}^N \kappa_j \sigma_\pm^j$ son operadores colectivos atómicos y donde hemos introducido la constante (in-homogénea) de acoplamiento $\kappa_j = g_j / w$ entre los átomos y el campo. Consideraremos aquí, que la forma de esta constante está dada por $\kappa_j = \kappa \sin(\pi x_j / L)$.

Como ha sido mencionado en el capítulo 3, un acoplamiento in-homogéneo hace que los operadores atómicos no satisfagan un álgebra cerrada de Lie $su(2)$ como en el caso homogéneo, resultando en un espacio de Hilbert efectivo de mayor dimensión para la dinámica. Sin embargo, ya hemos visto que a pesar de la pérdida de la simetría de traslación del subsistema atómico, aún es posible obtener la dinámica del sistema. Ahora bien, el objetivo de este capítulo no es monitorear la evolución del sistema sino que estudiar el espectro de autoestados del Hamiltoniano (6.1).

Para lograr este objetivo, primero es necesario verificar que el método del capítulo 3 basado en el seguimiento del espacio de Hilbert que ocupa el sistema es apropiado para obtener el espectro de autoestados. Para esto, recordemos que los estados colectivos de N átomos de la primera fila de la Fig. (2.1) se escriben en general como

$$|\bar{\mathbf{n}}\rangle = \frac{1}{N_n} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} n! \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \dots \kappa_{i_n} |\bar{\mathbf{n}}_{i_1 i_2 \dots i_n}\rangle, \quad (6.2)$$

con

$$N_n^2 = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} (n!)^2 \kappa_{i_1}^2 \kappa_{i_2}^2 \dots \kappa_{i_n}^2. \quad (6.3)$$

Por otro lado, los estados de la segunda fila de la Fig. (3.1) estan dados por

$$|\bar{\mathbf{n}}_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle - |\langle \bar{\mathbf{n}} | \Phi_n \rangle|^2}} [|\Phi_n\rangle - \langle \bar{\mathbf{n}} | \Phi_n \rangle |\bar{\mathbf{n}}\rangle], \quad (6.4)$$

donde los estados $|\Phi_n\rangle$ se escriben como

$$|\Phi_n\rangle = (n-1)! \sum_{i_1 < \dots < i_n} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_n} \bar{b}_{i_1 \dots i_n} |\bar{\mathbf{n}}_{i_1 \dots i_n}\rangle, \quad (6.5)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{b}_{i_1 \dots i_n} &= \sum_{\alpha_1 \neq i_1} \kappa_{\alpha_1}^2 + \dots + \sum_{\alpha_n \neq i_n} \kappa_{\alpha_n}^2 \\ &= (N-1) \sum_{j=1}^N \kappa_j^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Una descripción precisa del modelo debería considerar todos los estados que se encuentran asociados con la in-homogeneidad. Sin embargo, basados en cálculos numéricos se puede apreciar que el espectro del Hamiltoniano no es sensible a estados más allá de la segunda fila.

Esto puede verse en la Fig. (6.1), donde se muestran los efectos de la segunda fila sobre las energías obtenidas de la primera fila. En esta figura, vemos que la contribución de la segunda fila de la Fig. (2.1) es menor al 1%. También puede verse en la figura que aunque la contribución de la segunda fila de la Fig. (2.1) es mayor cuando el número de excitaciones atómicas aumenta, esta decrece cuando el número de átomos aumenta, tal como puede verse en la Fig. (6.1). En otras palabras, la contribución de la segunda fila a la energía

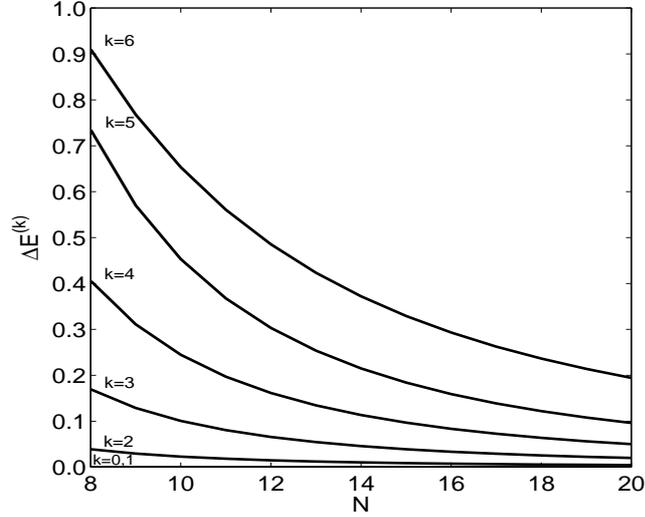


Figura 6.1: Contribución (%) de la segunda fila de la Fig. (3.1) a la energía como función del número de átomos N . $\Delta E^{(k)} = 100(|(E_1^{(k)} - E_2^{(k)})/E_1^{(k)}|)$, donde $E_{1,2}^{(k)}$ son las energías para k excitaciones usando 1 o 2 filas de la Fig. (2.1).

aumentará sólo cuando k/N aumenta, donde k es el número de excitaciones. Por lo tanto, podemos concluir de la Fig. (6.1) que, para los parámetros que usaremos en este capítulo sólo la primera fila de la Fig. (2.1) es necesaria para caracterizar el espectro del modelo de Tavis-Cummings in-homogéneo.

6.3. Propiedades del espectro de autoestados

A partir de las conclusiones anteriores, estudiaremos las propiedades de los autoestados del sistema, mostrando algunos cálculos analíticos que nos permitirán caracterizar el comportamiento del entrelazamiento entre un par de átomos.

El espectro y la concurrencia bipartita atómica [32,33], pueden calcularse analíticamente en el caso in-homogéneo para 0, 1 y 2 excitaciones respectiva-

mente.

Las energías para estos casos están dadas por:

$$E^{(0)} = -\frac{N}{2},$$

$$E^{(1)} = 1 - \frac{N}{2} - N_1, \quad (6.7)$$

$$E^{(2)} = 2 - \frac{N}{2} - \sqrt{2N_1^2 + (N_2/N_1)^2},$$

donde $(N_1)^2 = \sum_{i=1}^N \kappa_i^2$ y $(N_2)^2 = 4 \sum_{i<j}^N \kappa_i^2 \kappa_j^2$, corresponde a la normalización de los estados con una y dos excitaciones de la Ec. (6.2) respectivamente. Estas energías están asociadas con los autoestados

$$\begin{aligned} |\psi^{(0)}\rangle &= |0\rangle |\bar{\mathbf{0}}\rangle, \\ |\psi^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle |\bar{\mathbf{0}}\rangle - |0\rangle |\bar{\mathbf{1}}\rangle \}, \\ |\psi^{(2)}\rangle &= \alpha |2\rangle |\bar{\mathbf{0}}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |\bar{\mathbf{1}}\rangle + \beta |0\rangle |\bar{\mathbf{2}}\rangle, \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} \frac{N_1^2}{\sqrt{4N_1^4 + 2N_2^2}}, \\ \beta &= \frac{N_2}{\sqrt{4N_1^4 + 2N_2^2}}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

A partir de las expresiones para los autoestados de la Ec. (6.8), podemos calcular una expresión analítica para la concurrencia bipartita de un par de átomos i, j trazando los demás $N - 2$ átomos.

Para estos casos, la concurrencia esta dada por:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(0)} &= 0, \\ C_{ij}^{(1)} &= \frac{|\kappa_i \kappa_j|}{\sum_{i=1}^N \kappa_i^2}, \\ C_{ij}^{(2)} &= 2 |\kappa_i \kappa_j| \left[\frac{1}{2N_1^2} + \frac{\beta^2}{N_2^2} M_1^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{N_2} \left(\alpha^2 + \frac{1}{2N_1^2} M_1^2 + \frac{\beta^2}{N_2^2} M_2^2 \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (6.10)$$

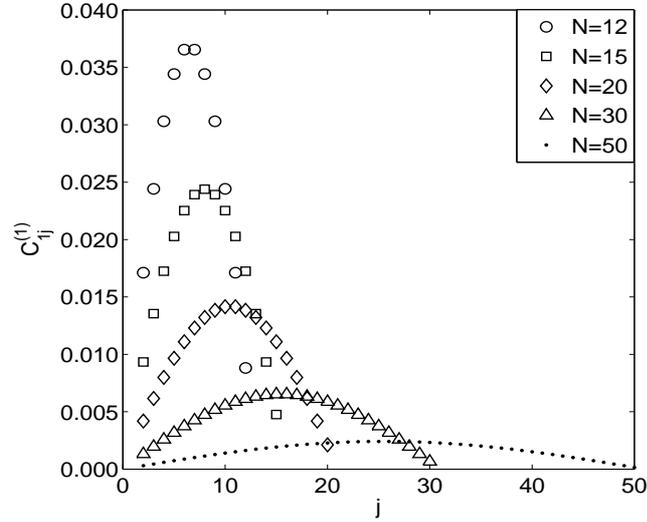


Figura 6.2: Concurrencia bipartita $C_{1,j}$ entre el primero y el j -ésimo átomo con $k = 1$ excitación para distintos números de átomos.

con $M_1^2 = \sum_{k \neq i,j}^N \kappa_k^2$, y $M_2^2 = \sum_{m < n \neq i,j}^N \kappa_m^2 \kappa_n^2$.

Es importante notar en estas expresiones para la concurrencia lo siguiente: para el caso homogéneo la concurrencia entre un par de átomos es independiente del par de átomos elegido, sin embargo, la aparición de in-homogeneidad en el acoplamiento entre los átomos y el campo electromagnético provoca que la concurrencia dependa del par de átomos elegido. Como puede verse a partir de las expresiones para la concurrencia, el entrelazamiento entre un par de átomos es proporcional a las constantes de acoplamiento de los respectivos átomos con el campo cuántico. Entonces, dos átomos ubicados en una región de fuerte acoplamiento con el campo estarán más entrelazados.

La Figura (6.2) muestra la concurrencia $C_{1,j}$, es decir, la concurrencia entre el primer y el j -ésimo átomo para distintos números totales de átomos N . Para cada caso, los átomos están igualmente espaciados. En esta figura se

pueden observar los efectos de la in-homogeneidad en el acoplamiento. La concurrencia muestra una reminiscencia del perfil del modo del campo electromagnético. Por ende, el máximo entrelazamiento ocurre con el átomo más fuertemente acoplado con el campo cuántico. Comparando el entrelazamiento del primer átomo con el átomo ubicado cerca del centro de la cavidad, vemos que cuando el número de átomos N dentro de la cavidad aumenta, el entrelazamiento disminuye, lo cual también ocurre cuando se considera el caso de acoplamiento homogéneo.

En el caso más general, el autoestado con k excitaciones puede escribirse como

$$|\Psi^{(k)}\rangle = \sum_{s=0}^k A_s |\bar{\mathbf{s}}\rangle_A |k-s\rangle_F, \quad (6.11)$$

donde $|\bar{\mathbf{s}}\rangle_A$ es el estado atómico colectivo con s excitaciones definido en (6.2) y A_s es un coeficiente que proviene del problema de autovalores. Trazando sobre el campo, la matriz densidad reducida para el subsistema atómico está dada por

$$\rho^{(k)} = \sum_{s=0}^k |A_s|^2 |\bar{\mathbf{s}}\rangle_A \langle \bar{\mathbf{s}}|. \quad (6.12)$$

Ahora, trazando sobre $N-2$ átomos, la concurrencia entre los átomos i, j estará dada por

$$C_{i,j}^{(k)} = 2 |\kappa_i \kappa_j| \left\{ \sum_{s=0}^k \frac{|A_s|^2}{N_s^2} M_{s-1}^2 - \left[\sum_{s,s'=0}^k \frac{|A_s|^2 |A_{s'}|^2}{N_s^2 N_{s'}^2} M_{s-2}^2 M_{s'}^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (6.13)$$

donde hemos definido

$$N_p = \sqrt{\sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_p} (n!)^2 \kappa_{n_1}^2 \kappa_{n_2}^2 \dots \kappa_{n_p}^2}, \quad (6.14)$$

$$M_p = \sqrt{\sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_p \neq i, j} (n!)^2 \kappa_{n_1}^2 \kappa_{n_2}^2 \dots \kappa_{n_p}^2}.$$

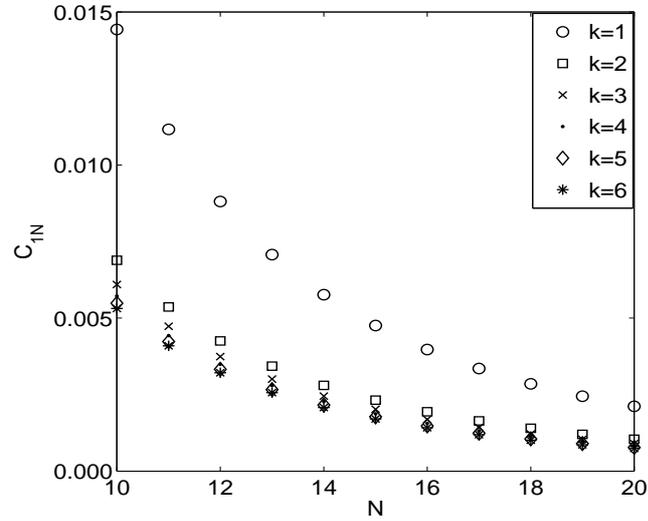


Figura 6.3: Concurrencia C_{1N} entre el primer y los último átomo para $k = 1, 2, \dots, 6$ excitaciones como función del número de átomos N .

Como podemos ver de las expresiones generales para la concurrencia (6.13), el entrelazamiento entre dos de estos átomos aún depende directamente de las constantes de acoplamiento. Este resultado es una importante característica del entrelazamiento que muestra el modelo de Tavis-Cummings en el caso inhomogéneo. Esto hace la diferencia con la situación para el caso homogéneo donde la concurrencia entre dos átomos depende sólo del número de átomos del subsistema atómico con k excitaciones [100].

Por otro lado, la Fig. (6.3) muestra la concurrencia entre el primer y último átomo como función del número de átomos dentro de la cavidad. Se puede ver en esta figura cómo la concurrencia decrece cuando el número total de excitaciones k aumenta. Sin embargo, cuando $N \gg 1$ la concurrencia se

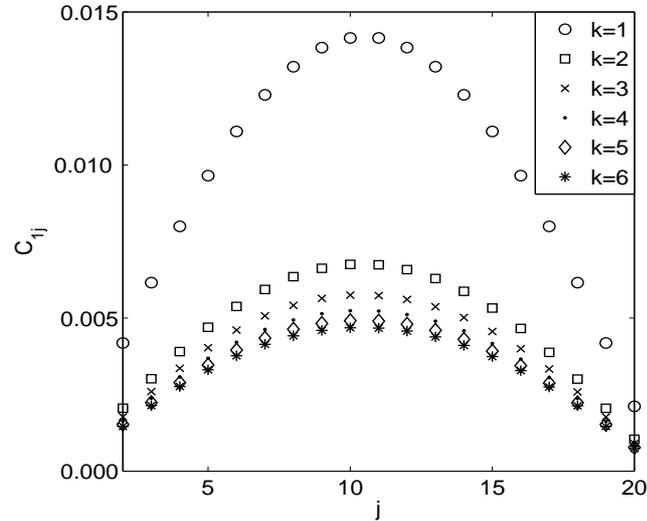


Figura 6.4: Concurrencia $C_{1,j}$ entre el primer y el j -ésimo átomo para $k = 1, 2, \dots, 6$ excitaciones con $N = 20$ átomos.

vuelve menos dependiente del número de excitaciones, tendiendo a un valor fijo.

La Figura (6.4), al igual que la Fig. (6.2) muestra la concurrencia $C_{1,j}$ entre el primer y el j -ésimo átomo en la cavidad, donde pueden verse con claridad los efectos del acoplamiento in-homogéneo y la pérdida de entrelazamiento cuando el número de excitaciones aumenta.

6.4. Conclusión

En este capítulo hemos analizado las propiedades de entrelazamiento del espectro de autoestados del modelo de Tavis-Cummings con acoplamiento in-homogéneo. En particular, la concurrencia entre un par de átomos en un ensamble de N átomos exhibe una dependencia explícita de la in-homogeneidad, además de la dependencia del número de átomos y el número de excitaciones del sistema.

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos querido resaltar el creciente interés que ha generado la relativamente nueva área de investigación científica llamada Información cuántica [1]. Hemos mencionado algunas de las notables ventajas comparativas de esta con respecto a su contraparte clásica [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

También hemos querido dejar claro el importante rol que cumple una de las propiedades más intrigantes de la mecánica cuántica en la Información cuántica: el entrelazamiento. Por ejemplo, el entrelazamiento es vital a la hora de hablar de Computación cuántica [5, 10], teleportación [17] o criptografía cuántica [18], entre muchas de las aplicaciones del entrelazamiento dentro de la Información cuántica.

En el desarrollo de esta tesis, además del entrelazamiento nos hemos enfocado también al análisis de sistemas cuánticos de una o más partículas, hemos estudiado su dinámica, la evolución del entrelazamiento y la manipulación colectiva de estos sistemas.

En particular, en el capítulo 3 hemos desarrollado una técnica que permite encontrar la evolución cuántica efectiva de sistemas interactuantes basada

en la inspección y la truncación del espacio de Hilbert asociado. A modo de ejemplo, hemos ilustrado este método estudiando la dinámica de una colección de átomos acoplados in-homogéneamente a un modo del campo electromagnético, es decir, una versión in-homogénea del modelo de Tavis-Cummings [50].

En el modelo in-homogéneo de Tavis-Cummings pudimos ver cómo propiedades estadísticas pueden cambiar apreciablemente dependiendo de la distribución espacial de los acoplamientos. Además, notamos que usando la técnica desarrollada en el capítulo 3, es posible abordar situaciones que resultarían muy difíciles de estudiar incluso numéricamente, como por ejemplo un número grande de átomos ($N > 10$) debido a que la dimensión del espacio de Hilbert hace el problema poco tratable usando métodos estándar de diagonalización.

Otro punto importante a la hora de hablar de recursos físicos para la Información cuántica, es la necesidad de dispositivos aptos para el almacenaje de información cuántica.

En el capítulo 4, estudiamos la dinámica de un espín electrónico interactuando in-homogéneamente con un sistema de espines nucleares polarizados en un quantum dot. Este sistema ha sido previamente considerado como apto para almacenar información cuántica [63, 64]. Usando la técnica para encontrar la evolución cuántica desarrollada en el capítulo 3, demostramos que la viabilidad del proceso de almacenaje de información cuántica depende fuertemente de la presencia y la posición de defectos en el estado polarizado de los espines nucleares.

En el capítulo 5, estudiamos un sistema de iones atrapados en una trampa de Paul. Para este sistema físico, introdujimos una técnica selectiva que permite una manipulación colectiva dentro del espacio simétrico de Dicke. Usando esta técnica, hemos estudiado aplicaciones relacionadas a la gen-

eración y al control de estados iónicos simétricos de Dicke. También hemos propuesto un método para medir experimentalmente la concurrencia entre dos qubits efectivos con el propósito de caracterizar estados de Dicke con un número determinado de excitaciones.

Finalmente, en el capítulo 6 hemos analizado las propiedades de entrelazamiento del espectro de autoestados del modelo de Tavis-Cummings con acoplamiento in-homogéneo. A diferencia del modelo de Tavis-Cummings con acoplamiento homogéneo, hemos observado que la concurrencia entre un par de átomos en un ensamble de N átomos depende del par de átomos que se estudie. Esto, debido a que la concurrencia exhibe una dependencia explícita de la in-homogeneidad, además de la dependencia del número de átomos y el número de excitaciones del sistema.

No quisiera dejar de mencionar que, paralelamente a esta tesis hemos trabajado en temas también ligados a la Información cuántica, específicamente al entrelazamiento. Hemos estudiado las propiedades de entrelazamiento de un sistema de dos qubits bajo los efectos de ruido clásico interactuando a través de una interacción de intercambio [106]. También hemos estudiado la evolución temporal de una medida de entrelazamiento para sistemas de dimensiones superiores (> 2) [107]. Por último, hemos propuesto una forma para medir experimentalmente el entrelazamiento para sistemas atómicos de dos qubits en un estado puro, tanto en iones atrapados como en un sistema de átomos de Rydberg cruzando cavidades tridimensionales de microondas [108].

Bibliografía

- [1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* Cambridge University Press (2000).
- [2] P. Benoiff, *J. Stat. Phys.***22**, 563 (1980).
- [3] P. Benoiff, *J. Stat. Phys.***29**, 515 (1982).
- [4] P. Benoiff, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1581 (1982).
- [5] R. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [6] R. Feynman, *Optics News*, págs. 11-12, Febrero (1985).
- [7] R. Feynman, *Engineering and Science* (California Institute of Technology), 23(5):22-36 (1960).
- [8] R. Feynman, *Feynman lectures on computation*. Addison-Wesley, Menlo Park, California (1996).
- [9] Y. Manin, *Computable and uncomputable* (en Ruso). Sovetskoye Radio, Moscú (1980).
- [10] D. Deutsch, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **400**, 97 (1985).
- [11] D. Deutsch and R. Jozsa, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **439**, 553 (1992).

-
- [12] A. Bernstein and U. Vazirani. Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computation, 11-20 (1993).
- [13] D. Simon, Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, 116-123, Los Alamitos, California (1994), IEEE Computer Society.
- [14] P.W. Shor, Algorithm Number Theory, First International Symposium, ANTS-I Proceedings 289 (1994).
- [15] L. Grover, Annual ACM Symposium on the Theory of Computation, 212-219. ACM Press (1996).
- [16] L. Grover, Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [17] C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [18] C. H. Bennet, G. Brassard, Proceeding of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing 175 (1984).
- [19] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland, and C. Monroe, Nature **404**, 256 (2000).
- [20] Q. A. Turchette, C. S. Wood, B. E. King, C. J. Myatt, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **81**, 3631 (1998).
- [21] C. F. Roos, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, J. B. Elm, G. P. T. Lancaster, C. Becher, F. Schmidt-Kaler and R. Blatt, Science **304**, 1478 (2004).

-
- [22] C. F. Roos, G. P. T. Lancaster, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, S. Gulde, C. Becher, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler and R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 220402 (2004).
- [23] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Nature* **425**, 937 (2003).
- [24] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. D. H. Weinfurter and A. Zeilinger, *Nature* **403**, 515 (2000).
- [25] J.-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4435 (2001).
- [26] Z. Zhao, Y.-A. Chen, A.-N. Zhang, T. Yang, H. J. Briegel and J.-W. Pan, *Nature* **430**, 54 (2004).
- [27] A. J. Berkley, H. Xu, R. C. Ramos, M. A. Gubrud, F. W. Strauch, P. R. Johnson, J. R. Anderson, A. J. Dragt, C. J. Lobb and F. C. Wellstood.
- [28] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. -M. Raimond and S. Haroche, *Science* **288**, 2024 (2000).
- [29] D. P. DiVincenzo, *Fortschr. Phys.* **48**, 771 (2000).
- [30] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [31] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J. Smolin, W.K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824
- [32] S. Hill and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
- [33] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).

-
- [34] P. Rungta, V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery, and G.J. Milburn, *Phys. Rev. A* **64**, 042315 (2003).
- [35] D. D. Awschalom, D. Loss and N. Samarth, *Semiconductor Spintronics and Quantum Computation*, Berlin, Springer (2002).
- [36] J. M. Kikkawa and D. D. Awschalom, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4313 (1998).
- [37] J. M. Kikkawa and D. D. Awschalom, *Nature* **397**, 139 (1999).
- [38] D. Paget, G. Lampel, B. Sapiroval and V. I. Safarov, *Phys. Rev. B* **15**, 5780 (1997).
- [39] R. G. Shulman and B. J. Wyluda, *Phys. Rev.* **103** 1127 (1956).
- [40] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett* **74**, 4091 (1995).
- [41] F. M. Penning, *Physica (Amsterdam)* **3**, 873 (1936).
- [42] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
- [43] C. D Monroe, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4011 (1995).
- [44] C. D Monroe, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995).
- [45] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [46] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [47] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [48] B. W. Shore and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993).
- [49] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).

-
- [50] M. Tavis and F.W. Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379 (1968).
- [51] M. Orzag, R. Ramírez, J.C. Retamal, and C. Saavedra, *Phys Rev. A* **49**, 2933 (1994).
- [52] C. Saavedra, A.B. Klimov, S.M. Chumakov and J.C. Retamal, *Phys. Rev. A* **58**, 4078 (1998).
- [53] J.C. Retamal, C. Saavedra, A.B. Klimov and S.M. Chumakov, *Phys. Rev. A* **55**, 2413 (1997).
- [54] V. Cerletti, W. A Coish, O. Gywatt, and D. Loss, *Nanotechnology* **16**, R27 (2005).
- [55] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [56] S.A. Wolf, D.D. Awschalom, R.A. Buhrman, J.M. Daughton, S. von Molnár, M.L. Roukes, A.Y. Chtchelkanova, and D.M. Treger, *Science* **294**, 1488 (2001).
- [57] D. Loss and D.P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
- [58] B. Kane, *Nature (London)* **393**, 133 (1998).
- [59] J. M. Taylor, G. Giedke, H. Christ, B. Paredes, J. I. Cirac, P. Zoller, M. D. Lukin, and A. Imamoglu, *cond-mat/0407640* (2004).
- [60] V. Privman, I. D. Vagner, and G. Kventsel, *Phys. Lett. A* **239**, 141 (1998).
- [61] J. Levy, *Phys. Rev. A* **64**, 052306 (2001).
- [62] T.D. Ladd, J.R. Goldman, F. Yamaguchi, Y. Yamamoto, E. Abe, and K.M. Itoh, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 017901 (2002).

- [63] J.M. Taylor, M.C. Marcus, and M.D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **90**, 206803 (2003);
- [64] J.M. Taylor, A. Imamoglu, and M.D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **91**, 246802 (2003).
- [65] R. Mani, W. Johnson, V. Narayanamurti, Superlatt. & Microstructures, **32**, 261 (2002); R. Mani, W. Johnson, V. Narayanamurti, V. Privman, and Y-M. Zhang, Physica E, **12**, 152 (2002).
- [66] J. Schliemann, A.V. Khaetskii, and D. Loss, J. Phys.: Condens. Matter **15**, R1809 (2003); J. Schliemann, A.V. Khaetskii, and D. Loss, Phys. Rev. B **66**, 245303 (2002).
- [67] W.A. Coish and D. Loss, Phys. Rev. B **70**, 195340 (2004).
- [68] A. Imamoglu, E. Knill, L. Tian, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **91**, 017402 (2003).
- [69] H. Christ, J. I. Cirac, and G. Giedke, cond-mat/0611438 (2006).
- [70] C. Deng, and X. Hu, Phys. Rev. B **71**, 033307 (2005), cond-mat/0402428.
- [71] C. W. Lai, P. Maletinsky, A. Badolato, A. Imamoglu, Phys. Rev. Lett. **96**, 167403 (2006); A. S. Bracker, E. A. Stinaff, D. Gammon, M. E. Ware, J. G. Tischler, A. Shabaev, Al. L. Efros, D. Park, D. Gershoni, V. L. Korenev, and I. A. Merkulov, Phys. Rev. Lett **94**, 047402 (2005); P.-F. Braun, B. Urbaszek, T. Amand, X. Marie, O. Krebs, B. Eble, A. Lemaitre, P. Voisin, cond-mat/0607728 (2006).

- [72] D. Leibfried, M. D. Barrett, T. Schätz, J. Britton, J. Chiaverini, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, and D. J. Wineland, *Science* **304**, 1476 (2004).
- [73] C. Schön, E. Solano, F. Verstraete, J. I. Cirac, and M. M. Wolf, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 110503 (2005).
- [74] A. Retzker, E. Solano, and B. Reznik, *Phys. Rev. A* **75**, 022312 (2007).
- [75] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Korber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür, and R. Blatt, *Nature* **438**, 643 (2005).
- [76] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle and D. J. Wineland, *Nature* **438**, 639 (2005).
- [77] M. França Santos, E. Solano, and R. L. de Matos Filho, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 093601 (2001).
- [78] E. Solano, P. Milman, R. L. de Matos Filho, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **62**, 021401(R) (2000).
- [79] E. Solano, *Phys. Rev. A* **71**, 013813 (2005).
- [80] M. França Santos, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010504 (2005).
- [81] M. França Santos, G. Giedke, and E. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 020401 (2007).
- [82] H. J. Briegel, R. Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 000910 (2001).
- [83] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev. A* **6**, 2211 (1972).

-
- [84] M. Genovese, *Physics Rep.* **413**, 319 (2005).
- [85] M. Keyl, *Physics Rep.* **413**, 369 (2002).
- [86] F. Mintert, A. Carvalho, M. Kus, and A. Buchleitner, *Phys. Rep.* **415**, 207 (2005); **419**, 143 (2005).
- [87] R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [88] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [89] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996).
- [90] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, W. K. Wootters *Phys.Rev.Lett.* **76**,722-725 (1996); C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys.Rev. A*, **54** 3824-3851(1996)
- [91] C. P. Sun, S. Yi and L. You, *Phys. Rev. A* **67**, 063815 (2003).
- [92] A. Kuzmich and T. A. B. Kennedy, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 030407 (2004).
- [93] Xiong-Jun Liu *et al*, *Phys. Rev. A* **73**, 013825 (2006).
- [94] T. E. Tessier, I. H. Deutsch, A. Delgado and I. Fuentes-Guridi, *Phys. Rev. A* **68**, 062316 (2003).
- [95] M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn and P. L. Knight, *Phys.Rev.A* **65**, 040101(R) (2002).
- [96] B. W. Shore and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993).
- [97] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato and Y. Wada, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, 502 (2004).

-
- [98] M. Frasca J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 1273 (2004).
- [99] J. F. Cai and H. P. Liu, Commun. Theor. Phys. **43**, 427 (2003).
- [100] V. Bužec, M. Orszag, and M. Roško, Phys. Rev. Lett. **94**, 163601 (2005).
- [101] Ru-Fen Liu, and Chia-Chu Chen, quant-ph/0510071.
- [102] D. J. Hienzen and D. J. Wineland, Phys. Rev A **42**, 2977 (1990).
- [103] C. E. López, H. Christ, J. C. Retamal, and E. Solano, Phys. Rev. A **75**, 033818 (2007).
- [104] C. E. López, F. Lastra, G. Romero and J. C. Retamal, Phys. Rev. A **75**, 022107(2007).
- [105] C. E. López, J. C. Retamal, and E. Solano, arXiv:0705.0375 [quant-ph] (2007).
- [106] F. Lastra, G. Romero, C. E. López and J. C. Retamal, Int. Journal. of Quantum Information, *in press* (Agosto 2007 issue).
- [107] F. Lastra, G. Romero, C. E. López, M. França Santos and J. C. Retamal, Phys. Rev. A **75**, 062324(2007).
- [108] G. Romero, C. E. López, F. Lastra, E. Solano and J. C. Retamal, Phys. Rev. A **75**, 032303(2007).