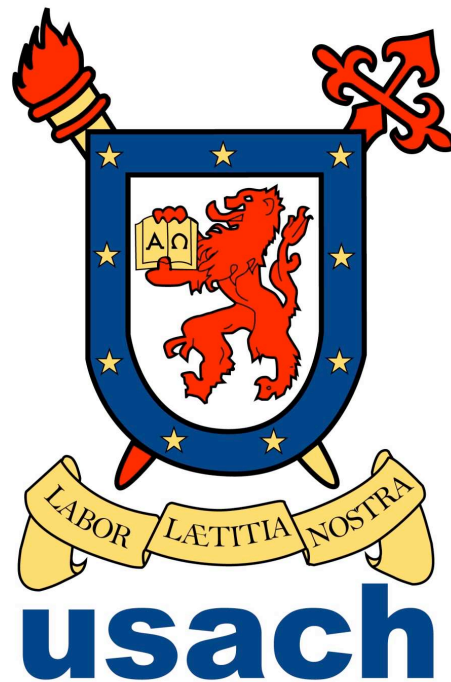

Propiedades magnéticas de nanoestructuras con simetría cilíndrica



Pedro Miguel Landeros Silva
Departamento de Física
Universidad de Santiago de Chile

*Tesis enviada para la obtención del grado de doctor en ciencias con
mención en Física*

USACH, Santiago, Febrero 2007

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi supervisora, la doctora Dora Altbir Drullinsky por iniciarme en la investigación científica, por sus útiles comentarios, sugerencias, su incondicional apoyo y soporte, sin el cual todo este trabajo no habría sido posible. Agradezco también a mi amigo y compañero de labores, Juan Escrig Murua, con el cual nos hemos formado y compartido nuestros conocimientos y aptitudes. Espero que esta colaboración no se acabe y dure por mucho tiempo más.

Es claro que todo este trabajo no habría sido posible sin las constantes discusiones, colaboración y apoyo de la Dra. Monica Bahiana, y del Dr. José d'Albuquerque e Castro, ambos de la Universidad Federal de Rio de Janeiro. También quiero agradecer por sus útiles discusiones y colaboración al Dr. Patricio Vargas de la Universidad Técnica Federico Santa María, al Dr. Eugenio Vogel de la Universidad de la Frontera, al Dr. José Mejía López de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y a los Drs. Juan Carlos Retamal y Juliano Denardin de la Universidad de Santiago de Chile. También quiero agradecer a David Laroze, Evy Salcedo y a Sebastián Allende.

Doy las gracias a toda la comunidad del Departamento de Física de la USACH, en especial a mis compañeros y amigos Carlos López, Guillermo Romero, Mauricio Valenzuela, Roberto Lavín, Paola Arias, Marco Olivares, José Villanueva, Luis Rosales, Freddy Lastra, Robert Guzmán, Fernando Méndez, Paul Soto, Fernando Cuturrufo, Myriam Baeza, Rodrigo Romero, Emiliano Galuppo y al nunca bien ponderado Justo López Sarrión. Gracias amigos por hacer más entretenidos y amenos todos estos años. Salud.

También agradezco a todos los profesores que me guiaron y enseñaron durante este largo recorrido, en especial a Jorge Gamboa, Enrique Cerda, Mónica Pacheco, Jorge Valdés, Iaroslav Ispolatov, Francisco Melo, Jaime Caballero y muchos otros. Agradezco también al personal del Departamento de Física y de la Facultad de Ciencias de la USACH, en especial a la Sra.

Susana, Emelina, Erika, Roxana, Leonor, Carlos, don César y don Pedro.

Quiero reconocer la vital labor de todas las instituciones dedicadas a fomentar e incentivar la investigación científica, sin las cuales todo este trabajo y el de muchos otros no sería posible. Agradezco a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por el soporte económico del programa de becas de postgrado. Agradezco también al proyecto MECE-SUP USA 0108, a la Dirección de Graduados de la Universidad de Santiago de Chile, al Núcleo Milenio Física de la Materia Condensada y a FONDECYT por el soporte parcial en la asistencia a eventos, congresos y estadías de investigación. Agradezco también a la Universidade Federal do Rio de Janeiro por su hospitalidad.

Quiero agradecer a mis padres, María Cristina y Jaime, por su confianza, constante apoyo, cariño y por darme la posibilidad de estudiar durante tantos años. El mejor regalo que un hijo puede tener es una profesión. Gracias.

Todo esto no hubiese sido posible sin la ayuda de mis tíos, Silvia y Conrado quienes me acogieron en su hogar, me alimentaron y orientaron como un hijo. Gracias por la paciencia y dedicación. Agradezco a mis amigos y hermanos Jaime, Paula, Javier y Pablo, y a sus respectivas familias, por creer en mí y por haberme dado una hermosa niñez.

Quiero dedicar todo mi trabajo a mis dos amores, Carla y Catalina, quienes siempre alimentaron mi corazón y me brindaron el amor y apoyo necesario para seguir este camino. Gracias por iluminar y construir una vida juntos. Agradezco también a Víctor y América (y compañía) por todo el cariño y amistad.

Resumen

En los últimos años, el estudio de arreglos regulares de nanopartículas ferromagnéticas ha recibido considerable atención debido a que exhiben potenciales aplicaciones en nanotecnología y en la producción de nuevos dispositivos magnéticos, como por ejemplo, medios de grabación de alta densidad [1, 2], memorias de acceso aleatorio magnetoresistivas (MRAM) [3, 4], lógica magnética [5, 6] y otras varias [6, 7] como también en biotecnología [8, 9]. Actualmente es posible fabricar arreglos de partículas con diversas geometrías, entre las que destacan hilos [10, 11], cilindros [12, 13], anillos [14, 15] y tubos [16, 17]. En ellos se ha observado, mediante diversas técnicas experimentales, que las partículas presentan configuraciones magnéticas bien definidas, dependiendo de su forma y tamaño. Por ejemplo, si las dimensiones características de la partícula son del orden de unos nanómetros, la magnetización es prácticamente uniforme [18], mientras que para dimensiones un poco mayores, cercanas a los 100 nm, aparecen estructuras magnéticas no uniformes, como los estados “flower” [19], “onion” [20] y vórtice [21], por ejemplo. Si el tamaño crece al orden de los μm , aparecen configuraciones magnéticas más complejas y se forman diversos dominios magnéticos.

Por otro lado, cuando la razón de aspecto (altura/radio) de la partícula es pequeña, la magnetización tiende a orientarse en el plano perpendicular al eje de simetría, mientras que cuando la razón de aspecto es grande, la magnetización se orienta paralela al eje. Un aspecto determinante del comportamiento magnético de estos sistemas es la región central de las partículas, cuya magnetización suele ser diferente a la de la estructura restante. Por ejemplo, los hilos y cilindros poseen material magnético en su eje y en el estado de vórtice presentan una región central, llamada core, en la cual la magnetización está orientada paralela al eje [21, 22]. Esto genera inestabilidad magnética, dificultando el tratamiento teórico y la reproducibilidad experimental. Sin embargo, anillos y tubos no presentan este core central, ya

que están libres de material magnético en su eje de simetría. De esta forma la geometría anular nos conduce a procesos de reversión más estables, manipulables y predecibles, garantizando reproducibilidad en los sistemas de lectura y grabación.

Está por consiguiente claro que para aplicaciones prácticas, la determinación del rango de valores de los parámetros geométricos dentro del cuál cada configuración es la de menor energía, es de gran relevancia. Sin embargo, las mediciones experimentales no siempre permiten una identificación clara de la estructura magnética interna de las partículas, lo que hace importante la realización del tratamiento teórico presentado en esta tesis.

En esta tesis nos enfocamos en las propiedades magnéticas fundamentales de partículas con simetría cilíndrica, en ausencia de campos magnéticos externos, y a temperatura cero. Basados en la teoría semiclásica del ferromagnetismo [23], estudiamos las configuraciones magnéticas de menor energía en sistemas con dimensiones desde unos nanómetros a los micrómetros. Veremos detalladamente cómo la forma y geometría de la partícula determinan la distribución interna de los momentos magnéticos atómicos. Consideramos sistemas aislados compuestos de materiales ferromagnéticos, como el cobalto, el níquel, el hierro y algunas aleaciones como el permalloy, aunque sin embargo, nuestros resultados son aplicables a cualquier material ferromagnético.

Esta tesis doctoral está organizada de la siguiente forma: en el capítulo introductorio presentamos las bases teóricas del magnetismo, y una breve descripción de la fabricación de las nanoestructuras magnéticas. En los capítulos 2 y 3 nos enfocaremos en las configuraciones magnéticas básicas para cilindros y anillos. En el capítulo 4 estudiamos las configuraciones magnéticas fundamentales y los modos de reversión en nanotubos magnéticos.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Conceptos básicos	10
1.2. Nanoestructuras magnéticas	12
1.3. Modelo continuo para la magnetización	13
1.4. Energías	14
1.4.1. Energía de intercambio	14
1.4.2. Energía dipolar	17
1.4.3. Energía de anisotropía	20
2. Cilindros magnéticos	22
2.1. Introducción	22
2.2. Configuraciones magnéticas en cilindros	24
2.2.1. Configuración ferromagnética en el plano ($F1$)	24
2.2.2. Configuración ferromagnética en el eje ($F2$)	25
2.2.3. Configuración de vórtice con core (V)	26
2.3. Resultados y discusión	29
2.3.1. Core Central	30
2.3.2. Diagrama de Fase, Punto Triple y Escalamiento	37
2.4. Conclusiones	42
3. Anillos magnéticos	43
3.1. Introducción	43
3.2. Modelo teórico	44
3.2.1. Configuración ferromagnética (F)	44
3.2.2. Configuración de vórtice (V)	45
3.2.3. Configuración onion (\mathcal{O})	47
3.3. Resultados y discusión	50

4. Nanotubos magnéticos	58
4.1. Introducción	58
4.2. Propiedades estáticas	59
4.2.1. Configuraciones magnéticas y energía total	59
4.2.2. Diagrama de fase	61
4.2.3. Vórtice con core en nanotubos	67
4.3. Modos de reversión	68
4.3.1. Modelo analítico	68
4.3.2. Rotación coherente (C)	69
4.3.3. Pared de dominio vórtice (V)	71
4.3.4. Pared de dominio transversal (T)	74
4.3.5. Resultados y discusión	76
4.4. Conclusiones	79
A. Energía para una partícula cilíndrica magnetizada uniformemente	81
B. Factor demagnetizante en una partícula con simetría cilíndrica	84
C. Energía de la configuración de vórtice con core	88
C.1. Energía dipolar	88
C.2. Energía de intercambio	90
C.3. Energías de anisotropía	92
D. Energía de la configuración onion	94
E. Energía de una pared de dominio de vórtice	97
E.1. Energía de intercambio	98
E.2. Energía Dipolar	99
E.2.1. Energía dipolar superficial	99
E.2.2. Energía dipolar volumétrica	102
F. Energía de una pared de dominio transversal	105
F.1. Energía de intercambio	106
F.2. Energía Dipolar	106
F.2.1. Energía dipolar superficial	107
F.2.2. Energía dipolar volumétrica	112

Índice de figuras

1.1. Dominios magnéticos y paredes de dominio.	10
2.1. Configuraciones magnéticas básicas en cilindros.	24
2.2. Simulación micromagnética para un cilindro en el estado de vórtice con core.	27
2.3. Componente z de la magnetización <i>vs</i> ρ/C para algunos valo- res de n	28
2.4. Componente z de la magnetización <i>vs</i> ρ para dos alturas dis- tintas.	31
2.5. Componente z de la magnetización <i>vs</i> ρ para los modelos co- nocidos del core.	32
2.6. Energía de la configuración de vórtice para los modelos cono- cidos del core magnético.	33
2.7. Dependencia del radio del core equivalente, R_{eq} , con la altura, H , de un cilindro.	35
2.8. Radio equivalente, R_{eq} , como función de la altura, H , para distintos materiales.	36
2.9. Radio equivalente del core, R_{eq} , como función de la separación entre cilindros vecinos en un arreglo.	37
2.10. Diagrama de fase para cilindros nanométricos.	40
3.1. Simulación micromagnética para la fase V en un anillo.	46
3.2. Simulación micromagnética para la fase “onion” en un anillo.	48
3.3. Diagramas de fase para anillos nanométricos con distintos fac- tores de forma.	51
3.4. Razón de aspecto crítica para la transición \mathcal{O} - F , como función de β	52

3.5. Posición del punto triple (r_t, h_t) como función del factor de forma β	53
3.6. Curvas de n constante para anillos con $\beta = 0.5$	54
3.7. Magnetización neta a lo largo del eje de simetría del estado onion.	56
4.1. Energía de las configuraciones ferromagnética y vórtice como función de β	61
4.2. Diagramas de fase para nanotubos magnéticos con anisotropía.	63
4.3. Diagrama de fase para nanotubos con distintos valores de β	65
4.4. Función $\alpha(\beta)$ que define las líneas de transición en el diagrama de fase.	66
4.5. Distribución de los momentos magnéticos en un plano perpendicular al eje de un tubo.	67
4.6. Modos de reversión de la magnetización en nanotubos.	69
4.7. E^C vs θ para tubos de cobalto con $R = 10$ nm y $\beta = 0.5$	70
4.8. Energía y ancho de una pared de dominio tipo vórtice como función de la posición a lo largo del tubo.	73
4.9. Energía y ancho de una pared de dominio transversal como función de la posición a lo largo del tubo.	75
4.10. Radio crítico como función de β para distintos materiales.	76
4.11. Imágenes simuladas del proceso de reversión en nanotubos.	77
4.12. Barreras de energía y ancho de las paredes de dominio V y T	79
A.1. Geometría para un anillo uniformemente magnetizado	82

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo entrega una visión general de las motivaciones y teorías detrás del estudio del nanomagnetismo. Si bien las propiedades magnéticas de sistemas macroscópicos son bien conocidas, cuando alguna de las dimensiones de una partícula ferromagnética es del orden de unos cientos de nanómetros, sus propiedades difieren notablemente de las observadas en un bulto. Esto debido a que las longitudes características de muchos fenómenos físicos son precisamente del orden de los nanómetros. Por ejemplo, una longitud característica en magnetismo es el ancho de una pared de dominio, es decir, la extensión de la región de transición entre dominios magnéticos (ver figura 1.1). Se sabe que los materiales magnéticos macroscópicos se ordenan formando estos dominios, los que corresponden a regiones del material donde todos los momentos magnéticos atómicos se orientan en una dirección particular. Cuando alguna de las dimensiones de una partícula es del orden del ancho de las paredes de dominio, no es posible acomodar estos dominios y las propiedades magnéticas dependen fuertemente de la forma y geometría del cuerpo. Por otro lado, cuando se reduce aun más el tamaño del cuerpo, la magnetización se torna cada vez más uniforme. Esto ocurre cuando las dimensiones del cuerpo son del orden de la longitud de intercambio (L_x), cantidad que es del orden de unos pocos nanómetros, según sea el material.

En este capítulo describiremos los aspectos más generales del magnetismo, presentando las unidades básicas utilizadas, los momentos magnéticos, y los distintos tipos de materiales magnéticos. Describiremos brevemente los métodos de fabricación de nanoestructuras magnéticas y algunas de sus aplicaciones. Presentaremos también los principios teóricos en los que están basados la mayor parte de los resultados presentados en esta tesis. Describiremos

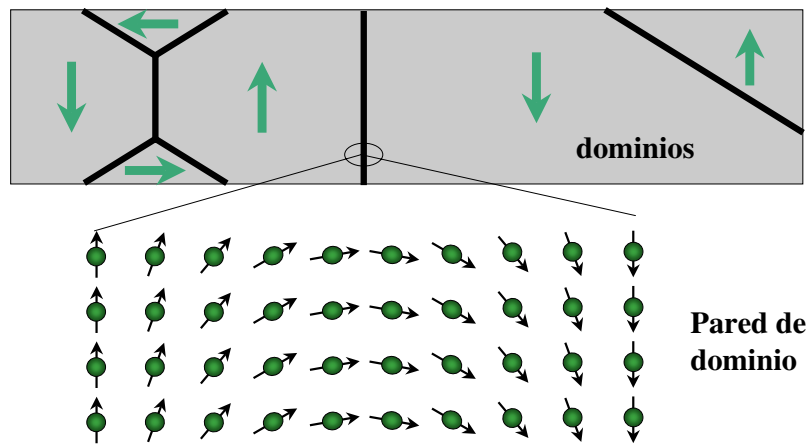


Figura 1.1: Dominios magnéticos y paredes de dominio.

el modelo de magnetización continua y el tratamiento de las interacciones magnéticas en esta aproximación.

1.1. Conceptos básicos

Las unidades básicas en el estudio de las propiedades magnéticas de los materiales son los **momentos magnéticos**. En un átomo, esta cantidad vectorial tiene dos contribuciones; la primera viene del momento angular orbital, es decir, del movimiento de una partícula cargada, como un electrón orbitando un núcleo atómico y produciendo un campo magnético semejante al generado por una espira de corriente. La segunda contribución viene del momento angular intrínseco o espín (spin). La explicación del espín requiere de un tratamiento cuántico relativista que considera las simetrías de las partículas.

Desde el punto de vista de las propiedades magnéticas, podemos pensar que los materiales están formados por pequeños imanes (los momentos magnéticos) los que interactúan debido a diversos procesos físicos. Según su respuesta a campos magnéticos externos diferenciamos tres clases principales de materiales; los diamagnéticos, los paramagnéticos y los ferromagnéticos. Los materiales **diamagnéticos** no presentan un momento magnético atómico en su estado fundamental, y por lo tanto no pueden presentar magnetización espontánea. Al aplicar un campo externo sobre un sistema diamagnético se

induce un campo magnético interno que se opone al campo externo y consecuentemente estos materiales son repelidos por los imanes. El diamagnetismo es un efecto muy débil, comparado con el paramagnetismo y el ferromagnetismo (descritos a continuación) y está inevitablemente presente en todas las sustancias, por lo que es difícil de medir en materiales que no son puramente diamagnéticos. Algunas ejemplos de sustancias puramente diamagnéticas son, el hidrógeno, bismuto, plata, oro y cobre. En general, el comportamiento diamagnético se presenta en sistemas que contengan todos sus electrones apareados y en sistemas atómicos o iónicos que contengan orbitales completamente llenos.

A diferencia de las sustancias puramente diamagnéticas, los materiales **paramagnéticos** presentan un momento magnético atómico distinto de cero, aunque sin embargo son incapaces de magnetizarse en forma espontánea. Estos materiales son atraídos por los imanes y se caracterizan por tener una susceptibilidad magnética positiva, es decir, al aplicar un campo externo, los momentos magnéticos atómicos se alinean con el campo, reforzando así al campo magnético aplicado. Algunas sustancias paramagnéticas son el aluminio, el magnesio, el paladio y el titanio.

Los materiales en los que estamos interesados en esta tesis son los llamados **ferromagnéticos**, como por ejemplo el hierro, cobalto y níquel. Estas sustancias presentan un momento magnético atómico no nulo, al igual que los paramagnetos, sin embargo, en los materiales ferromagnéticos los momentos magnéticos interactúan fuertemente entre sí vía una interacción de intercambio (o exchange), donde cada momento magnético trata de orientar a sus momentos magnéticos vecinos en su propia dirección. Esta interacción de corto alcance es muy intensa y se origina en propiedades cuánticas de los espines debido a la repulsión coulombiana entre electrones y al principio de exclusión de Pauli. Debido a esta interacción, los materiales ferromagnéticos son capaces de presentar magnetización espontánea, aún en ausencia de campos magnéticos externos, y por tiempos lo suficientemente prolongados, como para permitir almacenar información no volátil en bits magnéticos. Esta característica de los materiales ferromagnéticos es la que los hace tan importantes desde el punto de vista tecnológico.

Según sea el comportamiento de los electrones dentro de un sólido, se utilizan dos tipos de modelos para describir partículas ferromagnéticas; el magnetismo localizado y el magnetismo itinerante. En los modelos localizados, cada electrón se mantiene fijo en un átomo, y entonces en cada sitio de un sólido tenemos un momento magnético fijo. Los modelos itinerantes

consideran electrones de conducción que dan origen a bandas desplazadas que finalmente son las responsables de la magnetización. En nuestro trabajo consideramos problemas descritos por modelos localizados del magnetismo.

1.2. Nanoestructuras magnéticas

Una nanoestructura magnética es un agregado nanométrico de átomos o moléculas magnéticas con una estructura definida y con alguna dimensión en el orden de los nanómetros. Gracias a la dimensionalidad reducida, estos sistemas presentan una gran variedad de aplicaciones tecnológicas, como por ejemplo, almacenamiento magnético de ultra alta densidad [1, 2], memorias RAM magnéticas (MRAM) [3, 4], sensores de campo magnético, válvulas de espín, y diversas aplicaciones en el campo de la biotecnología y medicina, como por ejemplo, entrega controlada de fármacos, biosensores y separación química [8, 9].

En los últimos años se han desarrollado diversas técnicas litográficas (Electron-beam, X-Ray, interference), combinadas con deposición de material y transferencia de patrones. También se han desarrollado métodos de auto-ensamblaje, en las cuales las partículas magnéticas son sintetizadas químicamente. Sin embargo, aún no hay un consenso sobre el tamaño, geometría del arreglo, propiedades magnéticas y técnica experimental. Detalles y referencias sobre los métodos de fabricación de nanoestructuras magnéticas con simetría cilíndrica pueden encontrarse en los artículos de C. A. Ross [12], M. Kläui [15] y K. Nielsch [16, 17].

Diversas técnicas experimentales utilizadas en la fabricación de arreglos de nanoestructuras utilizan métodos litográficos, mediante los cuales es posible generar patrones geométricos por exposición de una lámina (resist layer) sensitiva a la radiación o a un haz de electrones. Este proceso crea patrones o máscaras donde se puede depositar material para formar arreglos de cilindros o anillos. Asimismo, diversos procesos químicos permiten generar matrices con simetría cilíndrica, la cual posteriormente es usada en la fabricación de nanohilos y nanotubos. De aquí que el estudio de nanoestructuras con simetría cilíndrica no es una opción arbitraria, ya que debido a su facilidad de fabricación y a las interesantes propiedades magnéticas que presentan, estas estructuras son fieles candidatos a revolucionar la tecnología basada en dispositivos magnéticos.

1.3. Modelo continuo para la magnetización

El ferromagnetismo es un fenómeno cuántico originado a nivel atómico. La descripción completamente cuántica de un sistema magnético, como los considerados en este trabajo, es prácticamente imposible, debido al gran número de átomos en una nanoestructura magnética ($\sim 10^6$ - 10^9). Un punto de partida más apropiado es dejar de lado la naturaleza discreta de la materia y considerar medios continuos semiclásicos.

En los cálculos que presentaremos en ésta tesis adoptamos una descripción simplificada de nuestros sistemas, en la cual reemplazamos la distribución discreta de momentos magnéticos por una distribución continua, definida por la función magnetización, $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, de tal manera que $\mathbf{M}(\mathbf{r})\delta\mathcal{V}$ corresponde al momento magnético dentro del elemento de volumen $\delta\mathcal{V}$ centrado en \mathbf{r} . En esta teoría, usualmente conocida como micromagnetismo [23], la energía interna, E , de una partícula ferromagnética de volumen \mathcal{V} y superficie \mathcal{S} , está dada por la suma de cuatro contribuciones: dipolar o magnetostática, E_d , dada por las ecuaciones (1.16) y (1.17); intercambio, E_{ex} , dada por la ecuación (1.6); algún tipo de anisotropía, E_K , (Ecs. 1.20 y 1.19) y la llamada energía de Zeeman, E_Z , que describe la interacción de los momentos magnéticos con un campo externo. La energía total es un funcional de la magnetización, la que a su vez es una función del espacio, es decir

$$E[\mathbf{m}(\mathbf{r})] = E_d + E_{ex} + E_K + E_Z, \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ es la magnetización normalizada a la magnetización de saturación M_0 ,

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{M_0}. \quad (1.2)$$

Para calcular la energía total de una partícula ferromagnética es necesario conocer su forma y la distribución de la magnetización dentro del volumen. También es posible calcular la magnetización requiriendo que la energía sea un mínimo, es decir minimizando el funcional $E[\mathbf{m}]$ con respecto a la magnetización:

$$\frac{\delta E}{\delta \mathbf{m}} = 0. \quad (1.3)$$

La solución de esta ecuación nos entrega todos los mínimos y máximos locales de la magnetización. Para asegurarse de que la configuración magnética obtenida del proceso de minimización sea realmente un mínimo hay que calcular la segunda derivada en torno a tal solución, la que debe ser positiva, es

decir, el mínimo debe cumplir la condición

$$\frac{\delta^2 E}{\delta \mathbf{m}^2} > 0. \quad (1.4)$$

Debido al carácter no local de la interacción dipolar, es muy difícil encontrar en forma exacta las configuraciones magnéticas de menor energía y sólo puede hacerse para algunas geometrías especiales, como por ejemplo en una partícula esférica. Una vía alternativa a este proceso de minimización es utilizar el método de Ritz, en el cual se asume *a priori* una cierta forma para la magnetización con algunos parámetros minimizables, que es lo que haremos en esta tesis, modelando diversos estados magnéticos fundamentales observados en cilindros, anillos y nanotubos. En esta última geometría estudiaremos también el proceso de reversión de la magnetización, el cual ocurre principalmente mediante nucleación y propagación de paredes de dominio.

1.4. Energías

En esta sección describiremos los distintos tipos de interacciones entre momentos magnéticos dentro de un sólido. Estas interacciones son consideradas primero en un sistema discreto y luego llevadas a un sistema continuo. La descripción de las interacciones magnéticas puede encontrarse en cualquier texto avanzado del tema, como por ejemplo, los libros de A. Aharoni [23], G. Bertotti [24], R. C. O'Handley [25] y S. Blundell [26].

1.4.1. Energía de intercambio

El origen del ferromagnetismo está en la interacción de intercambio (exchange), la que a su vez tiene su origen en la tendencia de los electrones a reducir la interacción coulombiana. El intercambio no tiene un análogo clásico y es causado por un solapamiento de funciones de onda vecinas. El carácter antisimétrico de los estados electrónicos da lugar a un acoplamiento entre el momento angular de espín y la función de onda espacial. En otras palabras, si dos electrones tienen espines paralelos (siendo entonces descritos por una función de onda de espín simétrica), ellos no pueden mantenerse demasiado cerca el uno del otro, lo cual es característico de una función de onda espacial antisimétrica. El hecho de que los electrones nunca se acercan demasiado reduce la energía promedio asociada a la interacción electrostática. Es esta

reducción la que favorece tanto el alineamiento paralelo de los espines, como la aparición de un momento magnético en átomos e iones.

La interacción de intercambio es frecuentemente descrita en términos del Hamiltoniano de Heisenberg,

$$H_{ex} = - \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (1.5)$$

donde \mathbf{S}_i es el momento angular de espín de un ion localizado en el i -ésimo sitio de una red, y J_{ij} es la integral de intercambio que entrega la intensidad del acoplamiento entre los espines i y j . Usualmente se considera $J_{ij} = J$ para vecinos cercanos (nn), mientras que $J_{ij} = 0$ en cualquier otro caso. La integral de intercambio es positiva en ferromagnetos, lo que favorece el alineamiento paralelo, y es negativa en otro tipo de materiales llamados antiferromagnetos.

Siempre que dos espines no estén paralelos en un ferromagneto, tendremos algún costo en energía de intercambio. A partir del Hamiltoniano de Heisenberg, y con el fin de llevar esta energía al continuo, podemos escribir de la siguiente forma la energía de intercambio de un ferromagneto

$$E_{ex} = -JS^2 \sum_{nn} \cos \phi_{ij},$$

donde ϕ_{ij} es el ángulo entre espines vecinos. Los ángulos entre nn son siempre pequeños, ya que las interacciones de intercambio son muy fuertes en rangos cortos, por lo que podemos usar la aproximación $|\phi_{ij}| \ll 1$, de tal manera que al expandir a primer orden obtenemos

$$E_{ex} = -JS^2 \sum_{nn} \left(1 - \frac{\phi_{ij}^2}{2} \right) = E_{ex}^0 + \frac{JS^2}{2} \sum_{nn} \phi_{ij}^2.$$

El primer término, E_{ex}^0 , es la energía de un sistema en el cual todos los espines apuntan en la misma dirección. Este término no influye en los cálculos que presentaremos en esta tesis y desde ahora en adelante será omitido, lo que significa redefinir el cero en energía. El segundo término es el que da cuenta de las variaciones de la magnetización en una partícula ferromagnética y es lo que llamaremos energía de intercambio, dada por

$$E_{ex} = \frac{JS^2}{2} \sum_{nn} \phi_{ij}^2.$$

Por otro lado, si \hat{m}_i y \hat{m}_j son vectores unitarios y forman un ángulo ϕ_{ij} pequeño, entonces

$$|\hat{m}_i - \hat{m}_j|^2 = |\hat{m}_i|^2 + |\hat{m}_j|^2 - 2|\hat{m}_i||\hat{m}_j|\cos\phi_{ij} = 2(1 - \cos\phi_{ij}) \approx \phi_{ij}^2,$$

de manera que $|\phi_{ij}| \approx |\hat{m}_i - \hat{m}_j|$, donde \hat{m} es un vector unitario paralelo a la dirección local de la magnetización \mathbf{M} , y está dado por

$$\hat{m}_i = \hat{m}(x, y, z),$$

mientras que el momento magnético vecino, lo escribimos en términos del vector (\mathbf{r}_i) que une los momentos magnéticos i y j , es decir

$$\hat{m}_j = \hat{m}(x + r_{ix}, y + r_{iy}, z + r_{iz}),$$

de manera que al expandir en serie de Taylor se obtiene

$$|\phi_{ij}| \approx |\hat{m}_i - \hat{m}_j| \approx \left| r_{ix} \frac{\partial \hat{m}}{\partial x} + r_{iy} \frac{\partial \hat{m}}{\partial y} + r_{iz} \frac{\partial \hat{m}}{\partial z} \right| \approx |(\mathbf{r}_i \cdot \nabla) \hat{m}|.$$

La energía de intercambio puede escribirse como

$$E_{ex} = \frac{JS^2}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{r}_i} |(\mathbf{r}_i \cdot \nabla) \hat{m}|^2.$$

La primera suma corre sobre todos los sitios de la red, mientras que la segunda sobre los sitios vecinos al sitio i . Para cristales con simetría cúbica, la suma sobre vecinos resulta

$$\sum_{\mathbf{r}_i} |(\mathbf{r}_i \cdot \nabla) \hat{m}|^2 = 2a_0^2 c [(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2]$$

donde c es el número de sitios atómicos en una celda cúbica de lado a_0 . Para una red cúbica simple, $c = 1$, mientras que para una bcc, $c = 2$, y para una red fcc, $c = 4$ [23]. De esta forma, al tomar el límite al continuo en la suma sobre la partícula, la energía de intercambio puede escribirse como [23],

$$E_{ex} = A \int_{\mathcal{V}} [(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2] dv, \quad (1.6)$$

donde $m_i = M_i/M_0$ para $i = x, y, z$. A es la llamada constante de stiffness del material ferromagnético y está definida por

$$A = \frac{JS^2}{a_0}c, \quad (1.7)$$

para materiales con estructura cristalina cúbica. Para cristales hexagonales, como el cobalto,

$$A = 4\sqrt{2}\frac{JS^2}{a_0}. \quad (1.8)$$

La energía de intercambio (Ec. 1.6) prefiere alinear todos los momentos magnéticos en una única dirección, sin importarle cual dirección sea ésta, y penaliza cualquier variación espacial de las componentes de la magnetización. En otras palabras, el mínimo de esta energía se obtiene cuando la magnetización es uniforme, es decir cuando $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ es constante y no varía en el espacio encerrado por el ferromagneto [23].

Frecuentemente se usa como escala natural de longitud la llamada longitud de intercambio, L_x , la que se define por

$$L_x = \sqrt{\frac{2A}{\mu_0 M_0^2}}. \quad (1.9)$$

1.4.2. Energía dipolar

La energía dipolar o magnetostática se origina en las interacciones clásicas entre dipolos magnéticos dentro de un material. Consideremos una red compuesta de dipolos magnéticos localizados, con $\boldsymbol{\mu}_i$ el momento magnético en el sitio de red i , y \mathbf{h}_i el campo debido a todos los demás dipolos [23]. En ausencia de fluctuaciones térmicas, la energía potencial del sistema es

$$E_d = -\frac{\mu_0}{2} \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{h}_i, \quad (1.10)$$

donde el factor $1/2$ es introducido para evitar la doble cuenta de interacciones. Si dibujamos alrededor del sitio i una esfera “físicamente pequeña” de radio, R , grande comparada con la celda unitaria, y pequeña de manera que la magnetización dentro de la esfera sea uniforme, entonces todos los dipolos externos a esta esfera pueden ser considerados como un continuo para calcular el campo en el sitio i . Por lo tanto el campo \mathbf{h}_i puede ser evaluado tomando

el campo \mathbf{H} de todo el material como un continuo, sustrayendo el campo continuo dentro de la esfera ($-\mathbf{M}/3$), y sumando el campo \mathbf{h}'_i debido a los dipolos discretos dentro de la misma esfera. El campo \mathbf{h}_i (en unidades MKS) puede ser escrito de la siguiente forma

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M} + \mathbf{h}'_i, \quad (1.11)$$

donde el último término es una suma sobre campos debido a dipolos puntuales dentro de la esfera, es decir

$$\mathbf{h}'_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{|\mathbf{r}_{ij}| < R} \left[-\frac{\boldsymbol{\mu}_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} + \frac{3(\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^5} \right], \quad (1.12)$$

donde \mathbf{r}_{ij} es un vector que apunta del sitio i al sitio j . En la esfera físicamente pequeña, $\boldsymbol{\mu}_j$ es constante y no depende de j , de manera que es posible escribir la componente x del campo en coordenadas cartesianas como [23]

$$h'_{ix} = \frac{1}{4\pi} \sum_{|\mathbf{r}_{ij}| < R} \left[-\frac{\mu_x}{r_{ij}^3} + \frac{3x_{ij}(\mu_x x_{ij} + \mu_y y_{ij} + \mu_z z_{ij})}{r_{ij}^5} \right]. \quad (1.13)$$

Si el cristal tiene simetría cúbica, una suma sobre una esfera de términos cruzados del tipo $x_{ij}y_{ij}$ o $x_{ij}z_{ij}$ se anula, ya que hay contribuciones iguales de las partes positiva y negativa. Esto es cierto para casi cualquier otra simetría. También, en una simetría cúbica, x , y y z son intercambiables, y por lo tanto

$$\sum \frac{x_{ij}^2}{r_{ij}^5} = \sum \frac{y_{ij}^2}{r_{ij}^5} = \sum \frac{z_{ij}^2}{r_{ij}^5} = \frac{1}{3} \sum \frac{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}{r_{ij}^5} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{r_{ij}^3}.$$

Entonces, la suma en la ecuación (1.13) es cero, lo que ocurre para las otras componentes en la Ec. (1.12). En una simetría no cúbica la suma no es cero, aunque de la forma de la Ec. (1.13) es obvio que μ_x puede sacarse de la suma. Una situación equivalente ocurre en las otras componentes del campo. En conclusión, al asumir que \mathbf{M} puede aproximarse por una constante dentro de la esfera, \mathbf{h}'_i es una función lineal de las componentes de \mathbf{M} , con componentes que dependen solo de la simetría cristalina [23]. En otras palabras

$$\mathbf{h}'_i = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{M}, \quad (1.14)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es un tensor dependiente de la simetría cristalina, el cual se anula para simetría cúbica. Substituyendo las Ecs. (1.14) y (1.11) en (1.10), y reemplazando la suma por una integral, la energía magnetostática se puede escribir como

$$E_d = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{M} \cdot \left(\mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M} + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{M} \right) dv. \quad (1.15)$$

El segundo término de esta ecuación contiene $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$, el cual es el cuadrado de la magnetización de saturación, la constante M_0^2 , que depende sólo de la temperatura y no de la distribución espacial de \mathbf{M} . Por lo tanto puede ser omitido, lo que significa redefinir el cero en la energía magnetostática, sin efectos en minimizaciones de energía [23]. El último término $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{M}$ tiene la forma de una anisotropía (ver Ecs. 1.19 y 1.20), ya que $\mathbf{\Lambda}$ es un tensor dependiente sólo de la estructura cristalina y no de la posición. De esta manera $\mathbf{M} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{M}$ es una suma de términos que mezcla las componentes de la magnetización, como una anisotropía, por lo que es incluido en la energía de anisotropía y no en el término dipolar [23]. De esta forma, la energía magnetostática (en unidades MKS) la calcularemos a partir de

$$E_d = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) dv, \quad (1.16)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, con U el potencial magnetostático [23], dado por

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds'. \quad (1.17)$$

En los cálculos que presentaremos en esta tesis usaremos la siguiente expansión en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , para la función de Green $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ [27]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} dq J_p(q\rho) J_p(q\rho') e^{-q(z_>-z_<)}, \quad (1.18)$$

donde $z_>$ ($z_<$) es el mayor (menor) entre z y z' , y $J_p(w)$ es una función de Bessel de primera especie y orden p .

1.4.3. Energía de anisotropía

Las energías de anisotropía están asociadas a direcciones preferenciales para la orientación de la magnetización. Existen varios tipos de anisotropía, siendo la más común la anisotropía magnetocristalina debida a la interacción espín-órbita. Las órbitas electrónicas están ligadas a la red cristalina, y por su interacción, los espines prefieren alinearse en ciertas direcciones. Existen, por lo tanto, direcciones en las cuales es más fácil magnetizar un cristal. Esta diferencia es expresada como un término energético dependiente de la dirección [23].

Usualmente la energía magnetocristalina es pequeña comparada con la energía de intercambio. Sin embargo, como la energía de intercambio es completamente isotrópica, la dirección de la magnetización es determinada únicamente por la anisotropía y por la forma (energía dipolar) del ferromagneto.

Es posible evaluar cuantitativamente, a partir de principios básicos, la interacción espín-órbita, aunque la precisión no siempre es adecuada, como ocurre con las integrales de intercambio. Por lo tanto las energías de anisotropía son siempre escritas como expresiones fenomenológicas, las cuales son expansiones en series de potencias que toman en cuenta la simetría del cristal, y los coeficientes se obtienen a partir de ajustes a resultados experimentales. Expresiones específicas pueden ser escritas sólo para ciertas simetrías cristalinas, como ilustraremos a continuación.

Anisotropía uniaxial

La anisotropía de los cristales hexagonales es función sólo de un parámetro, el ángulo θ entre el eje c y la dirección de la magnetización. Es un hecho experimental que la energía es simétrica con respecto al plano ab de la red hexagonal, de modo que potencias impares de $\cos\theta$ pueden eliminarse de la expansión en serie para la energía, de manera que los dos primeros términos son

$$E_u = -K_1 \int_{\mathcal{V}} \cos^2 \theta \, dv + K_2 \int_{\mathcal{V}} \cos^4 \theta \, dv = -K_1 \int_{\mathcal{V}} m_z^2 \, dv + K_2 \int_{\mathcal{V}} m_z^4 \, dv ,$$

donde el eje z es paralelo al eje c cristalográfico. Los coeficientes K_1 y K_2 son constantes que dependen de la temperatura y sus valores son tomados de experimentos. En principio la expansión anterior puede llevarse a órdenes mayores, pero ninguno de los materiales ferromagnéticos conocidos parece

requerirlo. Incluso en muchos casos el término con K_2 es despreciable. En nuestro trabajo sólo consideraremos anisotropía uniaxial a primer orden, es decir

$$E_u = -K_u \int_{\nu} m_z^2 dv , \quad (1.19)$$

donde $K_1 \equiv K_u$. En muchos cristales hexagonales el eje c es un eje fácil, lo que significa que la energía es mínima cuando la magnetización apunta en el eje c . En estos casos $K_u > 0$.

Anisotropía cúbica

Para cristales cúbicos la expansión no debiera cambiar si x es reemplazado por y (y otras permutaciones equivalentes), cuando los ejes x , y , y z están definidos a lo largo de los ejes cristalográficos. Nuevamente potencias impares son eliminadas y la combinación de menor orden que se ajusta a la simetría cúbica es $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$, que es una constante. Por lo tanto la expansión comienza con el cuarto orden y está dada por

$$E_c = K_1 \int_{\nu} (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) dv + K_2 \int_{\nu} m_x^2 m_y^2 m_z^2 dv ,$$

donde nuevamente los valores de K_1 y K_2 son tomados de resultados experimentales y dependen de la temperatura. Esta expansión puede llevarse a órdenes mayores, sin embargo, esto no es necesario para ningún ferromagneto conocido. En nuestro trabajo sólo consideraremos expansiones al menor orden, es decir,

$$E_c = K_c \int_{\nu} (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) dv , \quad (1.20)$$

donde $K_1 \equiv K_c$. Cabe destacar que existen materiales cúbicos tanto con $K_c > 0$, como con $K_c < 0$. Por ejemplo, $K_c > 0$ en el hierro, de modo que los ejes fáciles son a lo largo de la dirección (100), mientras que para el níquel, $K_c < 0$, y los ejes fáciles son a lo largo de las diagonales, (111).

Capítulo 2

Cilindros magnéticos

En este capítulo estudiaremos las configuraciones magnéticas básicas que se presentan en partículas cilíndricas nanométricas. Analizaremos en detalle el llamado “core” magnético presente en una de las tres fases magnéticas, la configuración de vórtice (V). Parte del trabajo presentado en este capítulo se puede encontrar en la referencia [28].

2.1. Introducción

Un cilindro está caracterizado geoméricamente por dos parámetros, el radio R y la altura H , los que generan un variedad de formas, y por lo tanto de comportamientos físicos distintos. Por ejemplo, un cilindro ferromagnético con una altura mucho menor que su radio presenta propiedades y aplicaciones distintas a un cilindro con altura mucho mayor que su radio, al que llamaremos “nanohilo”.

En estas partículas se han identificado tres configuraciones magnéticas características. Estas son: ferromagnética con la magnetización paralela a la base ($F1$); ferromagnética con la magnetización paralela al eje del cilindro ($F2$); y un estado de vórtice (V), en el cual la mayor parte de los momentos magnéticos son paralelos a la base del cilindro [12, 19], y en la región central, usualmente llamada “core” (núcleo), los momentos magnéticos poseen una componente paralela al eje del cilindro [21, 29, 30]. La existencia de cada una de estas configuraciones depende de factores geométricos, como el radio y la altura del cilindro. Para el posible desarrollo de dispositivos magnéticos basados en estos arreglos, el conocimiento de la estructura magnética interna

es fundamental.

Experimentalmente se ha tratado de determinar, a partir del análisis de curvas de histéresis [13, 18, 31], el rango de valores de R y H para los cuales ocurre cada configuración magnética ($F1$, $F2$ o V). Sin embargo, debido a que la transición entre estas configuraciones no es abrupta, no ha sido posible trazar claramente el diagrama de fase de estas partículas. Por otro lado, la determinación numérica de la configuración magnética interna más estable, para partículas en el rango de tamaños investigados experimentalmente, está lejos de ser posible con las facilidades computacionales actuales. Esto, debido al gran número de momentos magnéticos que conforman dichas nanopartículas ($N \sim 10^9$). Recientemente se propuso una técnica de escalamiento [32] que permite construir un diagrama de fase que muestra la estabilidad relativa de las tres configuraciones magnéticas anteriores. En dicho trabajo se obtuvo el diagrama de fase a partir del generado para partículas mucho más pequeñas, reduciendo la interacción de intercambio, J , y escalando las dimensiones mediante un parámetro η . Es decir, se obtiene el diagrama de fase de una partícula definida por R , H y J , a partir del estudio de una partícula definida por $R' = \chi^n R$, $H' = \chi^n H$ y $J' = \chi J$, con $\chi < 1$. Sin embargo, en dicho trabajo numérico se determinó el valor del exponente del escalamiento, η , analizando sólo un cierto rango de radios y alturas del cilindro, y considerando un modelo muy simplificado para el core magnético, independiente de la geometría. Debido a esto, en dicho trabajo no fue posible concluir si el exponente del escalamiento, η , es una función de la geometría de la partícula.

En este capítulo modelaremos las tres configuraciones magnéticas observadas en experimentos y simulaciones [12, 13, 18, 19, 31, 32, 33] utilizando la descripción continua del ferromagnetismo presentada en el primer capítulo de esta tesis. La energía interna, E , de un cilindro está dada por la suma de tres contribuciones: dipolar, E_d ; intercambio, E_{ex} ; y algún tipo de anisotropía, E_k . Sin embargo, generalmente la anisotropía cristalina es mucho menor que las otras contribuciones [34], de modo que su inclusión tiene un efecto muy pequeño, y por lo tanto la consideraremos sólo en la evaluación del tamaño del core magnético. La energía total de cada configuración será entonces la suma de las contribuciones dipolares (Ec. 1.16) y de intercambio (Ec. 1.6). Buscaremos ahora las energías totales de las tres configuraciones consideradas ($F1$, $F2$ y V), a partir de las cuales podemos obtener el diagrama de fase magnético, analizar su comportamiento bajo escalamiento de la interacción de intercambio, y además estudiar la forma y dimensión del core magnético.

2.2. Configuraciones magnéticas en cilindros

En esta sección describiremos brevemente cuales son las configuraciones magnéticas básicas en cilindros nanométricos, y presentaremos el resultado de la energía total de cada configuración. El detalle de cada cálculo es presentado en los apéndices correspondientes.

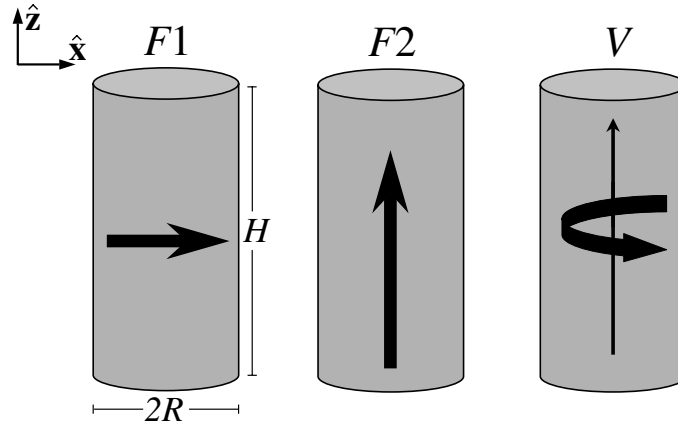


Figura 2.1: Configuraciones magnéticas básicas en cilindros. $F1$: ferromagnética en el plano; $F2$: ferromagnética en el eje, V : vórtice con core.

2.2.1. Configuración ferromagnética en el plano ($F1$)

En esta configuración los momentos magnéticos se orientan en el plano paralelo a la base del cilindro (ver figura 2.1). Veremos luego que tal configuración es la preferida por el sistema cuando la altura del cilindro es pequeña. Consideraremos este estado como uniforme, aunque se ha demostrado que cuando aumenta el radio del cilindro, la magnetización se aleja de la uniformidad y aparece el llamado estado “leaf” (hoja), en el cual la magnetización se desvía de su dirección preferencial cerca de los bordes del cilindro [35, 36, 37]. Este efecto es menor y para nuestros propósitos no es necesario considerarlo. Modelaremos este estado de la siguiente forma

$$\mathbf{M}^{F1} = M_0 \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.1)$$

de manera que la energía total de la configuración $F1$ está dada sólo por la contribución dipolar, es decir, $E^{F1} = E_d^{F1}$, ya que $E_{ex}^{F1} = 0$, para to-

das las configuraciones con magnetización uniforme. El cálculo general de la energía de un anillo magnetizado uniformemente en una dirección que forma un ángulo θ con el eje z es presentado en el Apéndice A. La expresión general está dada por

$$E(\theta) = \frac{\mu_0 M_0^2}{4} \pi H R^2 (1 - \beta^2) [\sin^2 \theta + (3 \cos^2 \theta - 1) N_z(\beta, \tau)] , \quad (2.2)$$

donde $\beta = a/R$ con a el radio interno de un anillo y R el radio externo, donde además $\tau = H/R$ es la razón de aspecto (ver figura A.1). Como estamos considerando cilindros, el radio interno es cero y $\beta = 0$. En la configuración $F1$ la magnetización está en el eje $\hat{\mathbf{x}}$, y por consiguiente $\theta = \pi/2$. De esta forma la energía total (a partir de la Ec. 2.2) resulta

$$E^{F1} = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \pi H R^2 \frac{1 - N_z(0, \tau)}{2} . \quad (2.3)$$

El factor demagnetizante, N_z , puede obtenerse de la ecuación (B.13) cuya derivación se presenta en el Apéndice B. Para cilindros, con $\beta = 0$,

$$N_z(0, \tau) = 1 + \frac{8}{3\pi\tau} - F_{21} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -\frac{4}{\tau^2} \right] , \quad (2.4)$$

con $F_{21}[a, b, c, x]$ una función hipergeométrica.

2.2.2. Configuración ferromagnética en el eje ($F2$)

En esta configuración los momentos magnéticos se orientan paralelos al eje del cilindro. Veremos que tal configuración es la preferida por el sistema cuando la altura es mucho mayor que el radio, como ocurre en el caso de los llamados nanohilos (nanowires). El estado real de una partícula magnetizada en el eje es el llamado “flower state” (estado flor), en el cual la magnetización se aleja levemente de la uniformidad desviándose en la dirección radial cerca de las tapas del cilindro [19, 38, 39, 40]. Esta desviación se genera para evitar la formación de cargas superficiales, curvándose entonces la magnetización cerca de las tapas del cilindro. Para nuestros propósitos no es necesario considerar el estado flor y basta con considerar la magnetización uniforme en la dirección del eje z , es decir

$$\mathbf{M}^{F2} = M_0 \hat{\mathbf{z}} . \quad (2.5)$$

Dada esta magnetización, al igual que en la configuración $F1$, la energía de intercambio es nula, es decir $E_{ex}^{F2} = 0$, y la energía total está dada sólo por la contribución dipolar. De la ecuación (2.2), con $\beta = 0$, y $\theta = 0$, obtenemos la siguiente expresión,

$$E^{F2} = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \pi H R^2 N_z(0, \tau), \quad (2.6)$$

donde $N_z(0, \tau)$ es dado por la ecuación (2.4) (ver Apéndice B).

2.2.3. Configuración de vórtice con core (V)

En esta configuración los momentos magnéticos se orientan siguiendo la superficie del cilindro, cerrando líneas de campo magnético y reduciendo así el flujo magnético hacia la superficie. La magnetización se orienta mayoritariamente en el plano paralelo a la base del cilindro, excepto en la región central, en la cual la magnetización presenta una componente paralela al eje del cilindro [21, 29, 30], que recibe el nombre de “core” (núcleo) y que se forma a modo de reducir el gran costo en energía de intercambio de un vórtice sin core. En la figura (2.2) se presenta una simulación micromagnética típica de la configuración de vórtice con core, realizada con el software OOMMF [41].

Basados en mediciones experimentales [21, 29, 30], simulaciones numéricas [32, 33] y en trabajos teóricos previos [42, 43], asumiremos que la magnetización de la configuración de vórtice con core tiene la siguiente forma funcional

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = m_z(\rho)\hat{\mathbf{z}} + m_\phi(\rho)\hat{\phi}, \quad (2.7)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\phi}$ son vectores unitarios en coordenadas cilíndricas, y las componentes m_z y m_ϕ satisfacen la relación $m_z^2 + m_\phi^2 = 1$. De esta forma, el perfil del core queda totalmente especificado por la función $m_z(\rho)$. La forma funcional en la ecuación (2.7) no considera la posibilidad de una dependencia de la forma del core en la coordenada z . Utilizando esta forma funcional (2.7) y las ecuaciones (1.16) y (1.17) obtenemos la siguiente expresión general para la energía dipolar de la configuración de vórtice con core,

$$E_d^V = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty dq (1 - e^{-Hq}) \left(\int_0^R \rho J_0(q\rho) m_z(\rho) d\rho \right)^2, \quad (2.8)$$

donde $J_0(x)$ es una función de Bessel de primera especie y orden cero.

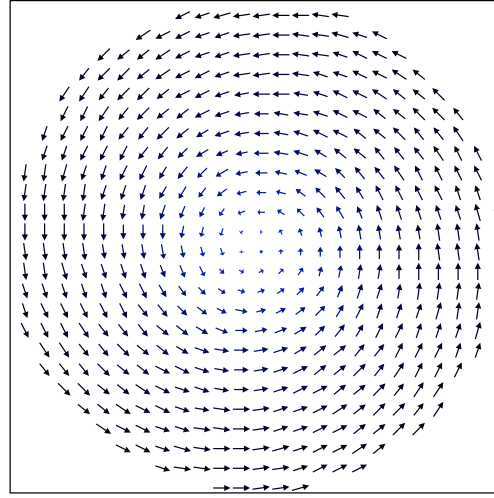


Figura 2.2: Simulación micromagnética para un cilindro en el estado de vórtice con core. En el eje central del cilindro (core) la magnetización se alinea con el eje z .

Utilizando la expresión (2.7) para la magnetización en la energía de intercambio (1.6) obtenemos la siguiente expresión general,

$$E_{ex}^V = 2\pi HA \int_0^R f(\rho) \rho d\rho, \quad (2.9)$$

donde la función $f(\rho)$ es dada por

$$f(\rho) = \frac{1 - m_z^2}{\rho^2} + \frac{1}{1 - m_z^2} \left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho} \right)^2. \quad (2.10)$$

Detalles de estos cálculos se encuentran en el Apéndice C.

Para proseguir es necesario en esta etapa especificar la forma del core magnético, es decir, la función $m_z(\rho)$. Existen algunos modelos en la literatura que describen la magnetización del core [44, 45, 46, 47, 48]. Algunos de estos modelos presentan discontinuidades en la magnetización y no son fácilmente integrables. Otros consideran aproximaciones que no siempre son precisas, aunque capturan la fenomenología del problema. Para evitar discontinuidades en la magnetización, y para poder describir adecuadamente el core

magnético, propusimos nuestro propio modelo [28], en el cual la componente z de la magnetización está definida por la siguiente expresión

$$m_z(\rho) = \left(1 - \frac{\rho^2}{C^2}\right)^n, \quad \text{para } 0 \leq \rho \leq C, \quad (2.11)$$

y

$$m_z(\rho) = 0, \quad \text{para } C \leq \rho \leq R, \quad (2.12)$$

con C un parámetro que determina el radio efectivo del core. El parámetro n es una constante positiva, que define el perfil de la componente z de la magnetización dentro del core ($\rho < C$), como se muestra en la figura (2.3), donde se grafica m_z para varios valores de n .

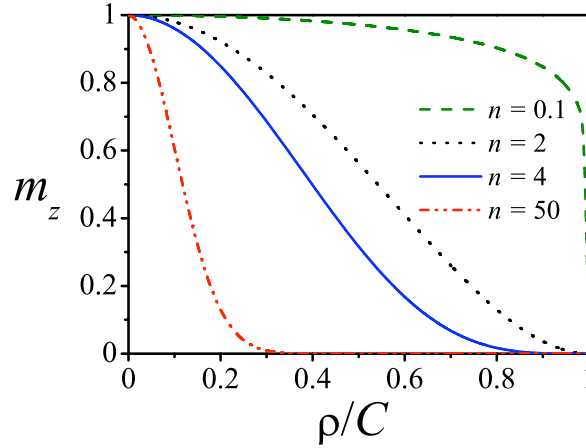


Figura 2.3: Componente z de la magnetización *vs* ρ/C para algunos valores de n .

Es importante notar que para $n > 4$, C no representa bien el tamaño del core, ya que la magnetización en el eje se va a cero rápidamente para valores de ρ menores que C , es decir, $m_z \approx 0$ para $\rho/C < 1$. Además para $n < 1$, la curva para m_z cambia abruptamente en $\rho = C$, por lo que valores de $n < 1$ no serán considerados. Nuestro modelo para $m_z(\rho)$ permite obtener la magnetización analíticamente, minimizando la energía total del cilindro. El valor de C se obtiene a partir de un proceso de minimización, como mostraremos más adelante. Se debe notar que nuestro modelo permite considerar un espectro continuo de perfiles para el core (ver figura 2.3) variando n . Entre sus

ventajas podemos mencionar que permite obtener expresiones analíticas simples para la energía total sin realizar aproximaciones. Además, para valores adecuados de n ($n > 1$), no presenta problemas de discontinuidad en $\rho = C$.

Reemplazando nuestro modelo para $m_z(\rho)$ (Ec. 2.11) en las expresiones generales para la energía (Ecs. 2.8 y 2.9), podemos evaluar analíticamente la energía total de la configuración de vórtice con core como función de n , es decir, de una forma general sin especificar totalmente el perfil de la magnetización. Esta energía se obtiene en el Apéndice C y está dada por

$$E^V = \pi\mu_0 M_0^2 C^3 \left(\alpha_n - \frac{C}{4H} \beta_n F \left[n, \frac{C}{H} \right] \right) + 2\pi H A \left(\ln \frac{R}{C} + \gamma_n \right), \quad (2.13)$$

donde $F[n, w]$ es una función hipergeométrica generalizada dada por

$$F[n, w] = {}_pF_Q \left[\left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} + n \right\}, \{n + 2, 2n + 3\}, -4w^2 \right]. \quad (2.14)$$

En la expresión anterior para la energía, α_n , β_n y γ_n son factores que dependen sólo de n y están definidos por

$$\alpha_n = \frac{2^{2n-1} \Gamma(n+1)^3}{\Gamma(\frac{3}{2} + n) \Gamma(\frac{5}{2} + 2n)}, \quad (2.15)$$

$$\beta_n = \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(n+2)^2}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \mathcal{H}[2n] - n \mathcal{H} \left[-\frac{1}{2n} \right], \quad (2.17)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma y $\mathcal{H}[z]$ es la función Número Armónico generalizada [49] de la variable compleja z definida por

$$\mathcal{H}[z] = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+z} \right). \quad (2.18)$$

2.3. Resultados y discusión

Habiendo evaluado la energía total de las tres configuraciones magnéticas, estamos en posición de investigar los temas propuestos. A partir de la energía total del estado de vórtice (Ec. 2.13) podemos ahora estudiar la

forma de la magnetización del core magnético y como éste cambia con los parámetros geométricos. Adicionalmente, con las energías de las configuraciones con magnetización uniforme en el plano y en el eje del cilindro (Ecs. 2.3 y 2.6 respectivamente), podemos obtener el diagrama de fase para cilindros nanométricos. Luego estudiaremos el comportamiento del punto triple bajo escalamiento de la constante de intercambio del material.

2.3.1. Core Central

La información acerca del core magnético la extraemos calculando el valor del parámetro C . Para esto minimizaremos la energía total (Ec. 2.13) con respecto al valor de C , es decir,

$$\frac{\partial E^V}{\partial C} = 0, \quad (2.19)$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación,

$$3\alpha_n \frac{C}{H} - \beta_n \frac{C^2}{H^2} F\left(n, \frac{C}{H}\right) + \frac{\beta_n}{2(n+2)} \frac{C^4}{H^4} G\left(n, \frac{C}{H}\right) - \frac{L_x^2}{C^2} = 0, \quad (2.20)$$

con G una función hipergeométrica dada por

$$G\left[n, \frac{C}{H}\right] = {}_pF_Q\left[\left\{\frac{3}{2}, 2, n + \frac{5}{2}\right\}, \{n + 3, 2n + 4\}, -\frac{4C^2}{H^2}\right], \quad (2.21)$$

y L_x es la longitud de intercambio (Ec. 1.9) que caracteriza al material ferromagnético. De la ecuación (2.20) se ve claramente que el radio del cilindro (R) no determina la magnetización del core, en la cual sólo aparecen el parámetro n , la longitud de intercambio L_x y la altura del cilindro, H . Esto es consistente con los resultados experimentales de Shinjo *et al.* [21], quienes observan el core con técnicas de microscopía de fuerza magnética. En una de las imágenes (Fig. 3 en Ref. [21]), se observa un arreglo de cilindros, todos con la misma altura y con distintos radios. Se ve claramente que el tamaño del core no depende del radio del cilindro. Físicamente esto se debe a que la región externa al core (que es un vórtice perfecto, y por consiguiente produce un campo magnético externo nulo), no interactúa con éste. De esta forma, crecer esta región no tiene impacto en la magnetización del core.

Magnetización del core

Dada la altura H del cilindro, y los parámetros del material magnético que definen L_x , la ecuación (2.20) puede resolverse numéricamente para encontrar el parámetro C y luego el perfil de la magnetización.

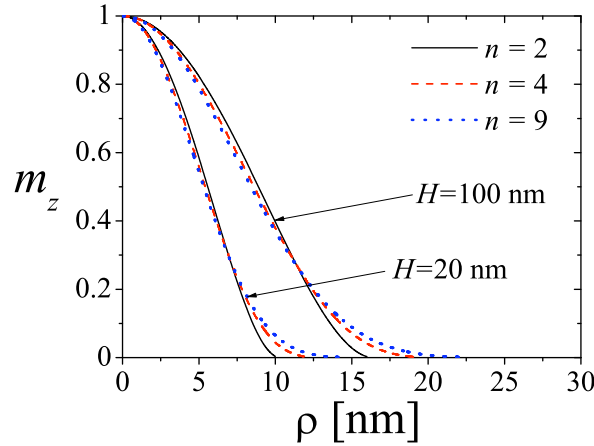


Figura 2.4: Componente z de la magnetización como función de la coordenada radial ρ para algunos valores de n y dos alturas distintas. $n = 2$ (línea sólida), $n = 4$ (línea cortada) y $n = 9$ (línea punteada).

En la figura (2.4) se muestra el perfil de la magnetización del core para un cilindro de cobalto ($L_x = 2.85$ nm) con dos alturas distintas, $H = 20$ nm y $H = 100$ nm, para tres valores de n . Por ejemplo, para $H = 20$ nm y $n = 2$, $C = 10.31$ nm, para $n = 4$, $C = 13.58$ nm, mientras que para $n = 9$, $C = 19.50$ nm. A pesar de los distintos valores del parámetro C para cada n , los perfiles son muy similares para $n \geq 4$ y muestran un core de tamaño ≈ 12 nm (para $H = 20$ nm). Esta diferencia entre C y el core efectivo permite entender porque C no puede ser considerado como el radio del core, excepto para $n \leq 4$, cuando si nos da una buena estimación. En vista de estos resultados, en nuestros cálculos posteriores utilizaremos $n = 4$. Es importante notar de esta figura que la altura H es el parámetro fundamental en la determinación del tamaño del core.

En la figura (2.5) se muestra el perfil de la magnetización del core para los modelos conocidos [28, 44, 46, 47, 48]. Los parámetros usados corresponden

a cobalto con $M_0 = 1424$ kA/m, $A = 3 \times 10^{-11}$ J/m y $L_x = 4.85$ nm [45]. El radio del cilindro corresponde a 200 nm y la altura a 5 nm.

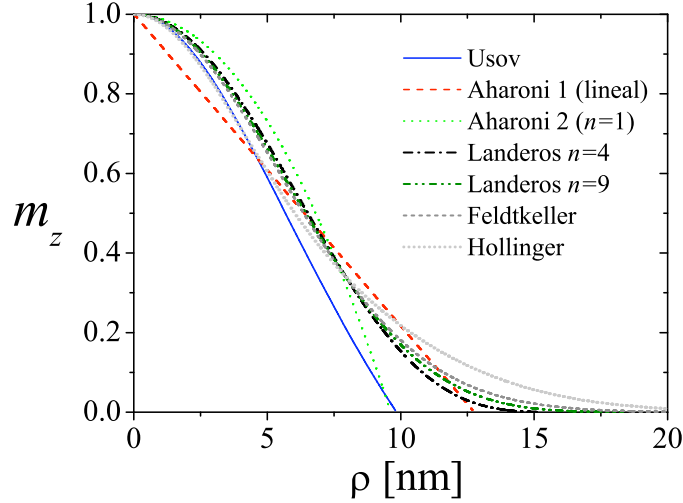


Figura 2.5: Componente z de la magnetización *vs* ρ para los modelos de Usov, Aharoni, Feldtkeller y Höllinger, incluyendo nuestras curvas para $n = 4$ y $n = 9$. El material es cobalto, el radio es de 200 nm y la altura es 5 nm.

Observamos que todos los modelos describen cualitativamente el core. Sin embargo debemos notar que algunos presentan una discontinuidad en el radio del core. Por ejemplo, el modelo de Usov (línea azul), y los de Aharoni, (líneas roja y verde) presentan tal discontinuidad, que se refleja en problemas numéricos en las evaluaciones de la energía. Nuestro modelo con $n = 1$ coincide con uno de los modelos de Aharoni (línea verde). En la figura (2.5) se muestra además nuestro modelo para $n = 4$ (línea negra) y $n = 9$ (línea verde oscuro), curvas que son muy similares a los modelos exponenciales de Feldtkeller (línea gris) y Höllinger (línea gris clara).

La figura (2.6) muestra las energías de la configuración de vórtice en función de la altura. Vemos que los modelos de Usov (línea azul) y Aharoni (línea roja) se alejan del comportamiento general, y son precisamente los que presentan más dificultades en los cálculos. El modelo 2 de Aharoni (línea verde) no presenta problemas numéricos y coincide con nuestras ecuaciones

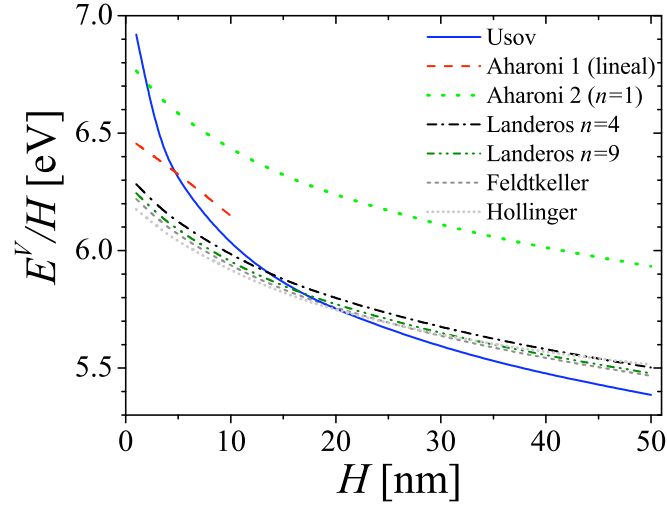


Figura 2.6: Energía de la configuración de vórtice por unidad de longitud H vs la altura H , de un cilindro de cobalto de radio $R = 200$ nm. Las distintas curvas corresponden a los modelos conocidos del core, Usov, Aharoni, Feldtkeller y Höllinger, incluyendo nuestras curvas para $n = 4$ y $n = 9$. Los parámetros del material fueron extraídos del trabajo de Jubert [45].

para $n = 1$, sin embargo, la energía es mayor en todo el rango de alturas. Los modelos de menor energía son los exponenciales y el nuestro con $n = 9$. Si hacemos los cálculos para $n > 10$ la energía sigue bajando, aunque no considerablemente, por lo que usar $n = 4$ permite estudiar adecuadamente las propiedades del core.

Radio del core equivalente

Experimentalmente es muy difícil determinar precisamente el tamaño del core, y lo que usualmente se mide es la componente del momento magnético total en la dirección del eje del cilindro, μ_z . Este valor se traduce al radio (R_{eq}) de un cilindro equivalente de la misma altura y cuyo momento magnético neto coincide con el que produce el core. El momento magnético de nuestro

cilindro equivalente, puede escribirse como

$$\mu_z = M_0 \pi H R_{eq}^2, \quad (2.22)$$

valor que puede calcularse de nuestro modelo de la siguiente forma,

$$\mu_z = \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^R M_z(\rho) \rho \, d\rho \, dz \, d\phi. \quad (2.23)$$

Al reemplazar m_z (Ec. 2.11) obtenemos

$$\mu_z = 2\pi H M_0 \int_0^C \left(1 - \left(\frac{\rho}{C}\right)^2\right)^n \rho \, d\rho, \quad (2.24)$$

y al integrar,

$$\mu_z = \pi H M_0 \frac{C^2}{n+1}. \quad (2.25)$$

Igualando las expresiones (Ecs. 2.22 y 2.25) para el momento magnético total del core, podemos obtener una ecuación para calcular el radio del core equivalente, la que está dada por

$$R_{eq} = \frac{C}{\sqrt{n+1}}. \quad (2.26)$$

Podemos ahora calcular R_{eq} en función de la altura, para lo cual usaremos $n = 4$. Las dimensiones en la ecuación para calcular C (Ec. 2.20) pueden ser normalizadas a la longitud de intercambio, de tal manera que dado H/L_x podemos obtener C/L_x y luego evaluar R_{eq}/L_x a partir de la ecuación (2.26). En la figura (2.7) se muestra el radio equivalente normalizado, en función de la altura H , también normalizada.

Efecto de la anisotropía en el core.

La inclusión de anisotropías magnetocristalina o uniaxial modifica la estructura del core. Podemos cuantificar este efecto calculando, a partir de nuestro modelo (Ec. 2.11), las energías correspondientes. La energía de anisotropía cristalina (Ec. 1.20) para el estado de vórtice con core resulta

$$E_c = K_c \frac{\pi H}{8} (\delta_n C^2 + R^2), \quad (2.27)$$

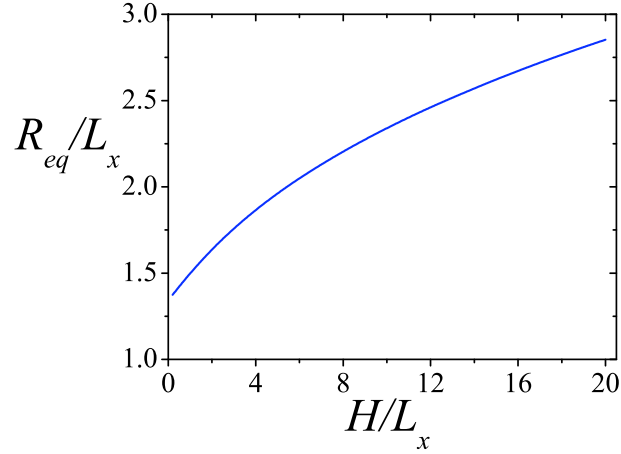


Figura 2.7: Dependencia del radio del core equivalente, R_{eq} , con la altura, H , de un cilindro. Las dimensiones han sido normalizadas a la longitud de intercambio del material, L_x .

donde

$$\delta_n = \frac{10n - 1}{(2n + 1)(4n + 1)} .$$

La anisotropía uniaxial está dada por

$$E_u = -\pi H K_u \frac{C^2}{2n + 1} . \quad (2.28)$$

Estos cálculos son sencillos y se presentan en el Apéndice C.

En la figura (2.8) se presentan los resultados para el radio equivalente considerando la anisotropía de cada material. Se observa que una anisotropía uniaxial, como la del cobalto hcp, hace crecer considerablemente el tamaño del core, mientras que la anisotropía cristalina modifica levemente su tamaño.

Cilindros en un arreglo

Otro aspecto importante en el estudio del core central, es la influencia de las interacciones entre cilindros en un arreglo. Para esto es necesario calcular la energía de interacción magnetostática entre todos los cilindros del arreglo. En el caso de cilindros en el estado V , la interacción se debe sólo al core, por

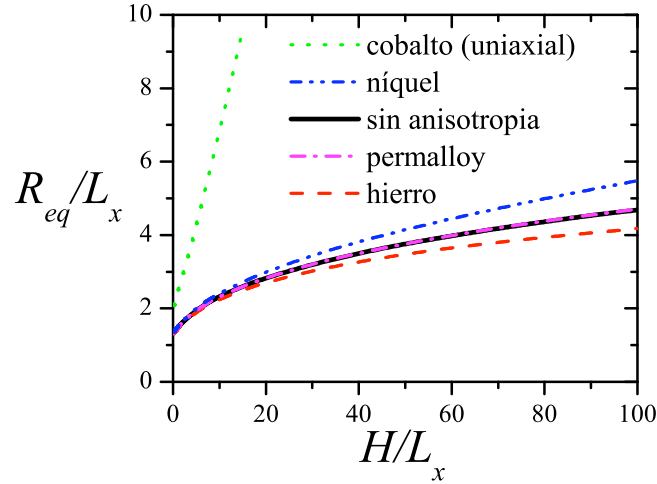


Figura 2.8: Radio equivalente, R_{eq} , como función de la altura, H , del cilindro. Las dimensiones han sido normalizadas a la longitud de intercambio del material, L_x . Las diferentes curvas corresponden a distintos materiales.

lo que es importante el tipo de ordenamiento magnético relativo dentro del arreglo. Este problema es estudiado mediante simulaciones de Monte Carlo y en forma teórica y los resultados se presentan en el artículo [50].

En este trabajo [50] se estudian arreglos cuadrados de cilindros en el estado de vórtice con core. Se consideran dos tipos de ordenamiento; **paralelo** (P), en el cual todos los núcleos magnéticos apuntan en la dirección z , y **antiparalelo** (AP), donde cilindros vecinos presentan polarización opuesta del core, formando un arreglo tipo antiferromagneto. En la figura (2.9) se muestra R_{eq} como función de la distancia centro a centro, D , entre cilindros vecinos del arreglo. La altura de los cilindros es $H = 8L_x$, mientras que el radio es $R = 6L_x$, por lo que $D > 12L_x$. Debido al efecto de las interacciones dipolares entre cilindros, el tamaño del core (que se asume el mismo para todos los cilindros del arreglo) se ve influenciado por el tipo de ordenamiento en el arreglo, de tal manera que en un arreglo P , el core disminuye su tamaño, mientras que en un arreglo AP , el core crece. En la figura (2.9) se observa que las curvas para R_{eq} convergen rápidamente con la separación D

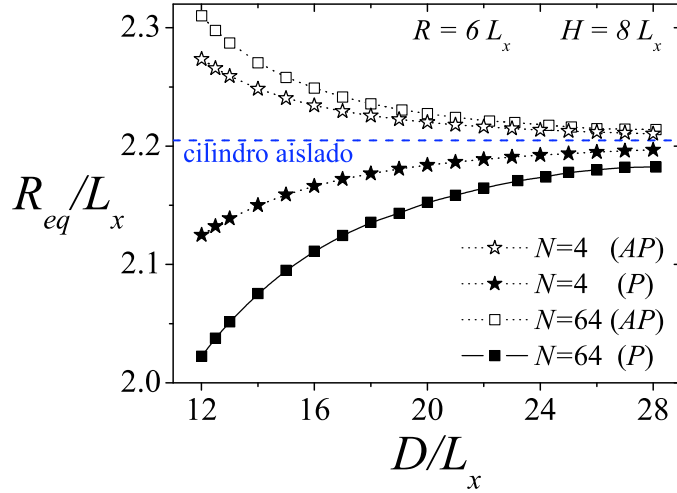


Figura 2.9: Radio equivalente del core, R_{eq} , como función de la separación entre cilindros vecinos en un arreglo. Las dimensiones han sido normalizadas a la longitud de intercambio. Los símbolos llenos (vacíos) denotan un ordenamiento paralelo (antiparalelo) de los núcleos magnéticos en el arreglo. Las estrellas representan resultados para un arreglo de $N = 2 \times 2$, mientras que los cuadrados corresponden a un arreglo de $N = 8 \times 8$.

al régimen no interactuante (cilindro aislado), ya que el efecto de la interacción es considerable sólo cuando los cilindros están muy próximos. Para más detalles ver Ref. [50].

2.3.2. Diagrama de Fase, Punto Triple y Escalamiento

Habiendo evaluado la energía total de las tres configuraciones magnéticas, estamos en posición de obtener el diagrama de fase en el plano R - H , el cual nos entrega la configuración magnética de menor energía en función de la geometría del cilindro. Dicho diagrama estará compuesto por tres líneas de transición a lo largo de las cuales la energía de dos configuraciones es la misma. De esta forma, tendremos una línea de transición que separa las configuraciones $F1$ y $F2$, otra línea que separa las fases $F1$ y V , y otra que separa las fases $F2$ y V . Estas tres líneas se juntan en un punto, el punto

triple (R_t, H_t) , en el cual las tres configuraciones tienen la misma energía.

Para obtener el diagrama, compararemos las energías de nuestras tres configuraciones básicas descritas anteriormente. La configuración V requiere un trato especial, ya que es la única fase con un parámetro minimizable (C).

Línea de transición $F1-F2$

Esta línea la obtenemos igualando las energías de ambas fases, dadas por las ecuaciones (2.3) y (2.6), es decir $E^{F1} = E^{F2}$, a partir de donde obtenemos

$$N_z(0, \tau) = \frac{1}{3}, \quad (2.29)$$

donde $N_z(0, \tau)$ es el factor demagnetizante para un cilindro (definido por $\beta = 0$) de razón de aspecto τ , dado por la ecuación (2.4). La solución de la ecuación (2.29) es obtenida numéricamente y su resultado, la llamada razón de aspecto crítica, τ_c , define la línea de transición entre las configuraciones $F1-F2$ en el plano $R-H$,

$$\tau_c = \frac{H}{R} = 1.81295. \quad (2.30)$$

Este resultado, siguiendo una línea muy similar de cálculo, ya había sido presentado por A. Aharoni [46].

Línea de transición $F1-V$

Esta línea la obtenemos igualando las energías de las fases ferromagnética en el plano y vórtice, dadas por las ecuaciones (2.3) y (2.13), es decir tenemos que resolver $E^{F1} = E^V$, lo cual puede escribirse como

$$\pi h r^2 \frac{1 - N_z(0, \tau)}{4} = \pi c^3 \left(\alpha_n - \frac{c}{4h} \beta_n F \left[n, \frac{c}{h} \right] \right) + \pi h \left(\ln \frac{r}{c} + \gamma_n \right) \quad (2.31)$$

donde hemos definido las siguientes cantidades adimensionales,

$$r \equiv \frac{R}{L_x}, \quad h \equiv \frac{H}{L_x}, \quad c \equiv \frac{C}{L_x} \quad (2.32)$$

La ecuación (2.31) se resuelve numéricamente, calculando antes el parámetro C (de la Ec. 2.20).

Línea de transición $F2-V$

Esta se obtiene de forma similar a la línea de transición $F1-V$. Al igualar ambas energías (Ecs. 2.6 y 2.13) tenemos $E^{F2} = E^V$, lo cual puede escribirse como

$$\pi h r^2 \frac{N_z(0, \tau)}{2} = \pi c^3 \left(\alpha_n - \frac{c}{4h} \beta_n F \left[n, \frac{c}{h} \right] \right) + \pi h \left(\ln \frac{r}{c} + \gamma_n \right), \quad (2.33)$$

donde hemos usado los parámetros definidos en la ecuación (2.32). La ecuación (2.33) la resolvemos numéricamente, calculando antes el parámetro C de la configuración de vórtice.

Diagrama de fase

Estamos en posición de obtener el diagrama de fase para cilindros ferromagnéticos. Este se obtiene resolviendo numéricamente las ecuaciones (2.31) y (2.33), junto con la condición (2.30). Nuestros resultados se muestran en la figura (2.10), donde se observa que para cilindros de baja altura, la fase de menor energía es la configuración $F1$. Por el contrario, en cilindros alargados, la fase más favorable energéticamente presenta la magnetización orientada a lo largo del eje del cilindro, es decir la configuración $F2$. Cuando el cilindro tiene el volumen suficiente, la intensidad de la interacción dipolar permite que la magnetización se oriente cerrando las líneas de campo magnético, y aparece entonces la configuración magnética de vórtice (V).

Las tres líneas de transición convergen en el punto triple, cuya posición en el plano $R-H$ está dada por R_t y H_t . Si fabricamos un cilindro con tales dimensiones (R_t, H_t) , éste será magnéticamente inestable, al igual que si fabricamos un cilindro con radio y altura a lo largo de la línea que separa ambas fases ferromagnéticas $F1$ y $F2$ ($H/R = 1.81$). En este caso la magnetización del cilindro será inestable y éste se comportará como una esfera, es decir, la configuración de mínima energía será degenerada, correspondiendo a un estado ferromagnético con la magnetización a lo largo de cualquier dirección. Es decir, para $H/R = 1.81$ (y $R < R_t$) no existe ninguna dirección preferencial para la magnetización.

Punto triple

El punto triple del diagrama en el plano $R-H$ está dado por la solución de la siguiente ecuación

$$E^{F1} = E^{F2} = E^V. \quad (2.34)$$

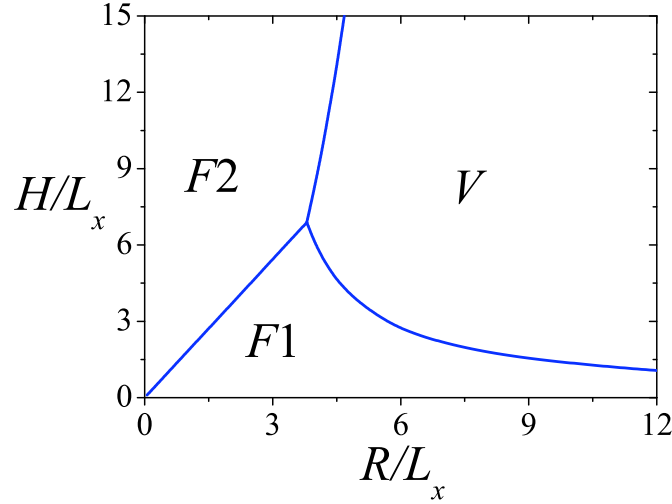


Figura 2.10: Diagrama de fase para cilindros nanométricos. Las dimensiones han sido normalizadas a la longitud de intercambio L_x que caracteriza al material magnético.

Para resolver esta ecuación utilizamos las expresiones (2.3), (2.6) y (2.13) ya encontradas para la energía de cada configuración. De la primera igualdad, $E^{F1} = E^{F2}$, se obtiene que $N_z = 1/3$ y $\tau = h/r = 1.81$, valores que se utilizan para resolver la segunda igualdad, $E^{F2} = E^V$, la que resulta

$$\frac{1}{h^2} \left(\ln \frac{h}{c\tau_c} + \gamma_n \right) + \frac{c^3}{h^3} \left(\alpha_n - \frac{c}{4h} \beta_n F \left[n, \frac{c}{h} \right] \right) = \frac{1}{6\tau_c^2}. \quad (2.35)$$

Definiendo $p \equiv c/h$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\ln \frac{1}{p\tau_c} + \gamma_n} \left[\frac{1}{6\tau_c^2} - p^3 \left(\alpha_n - \frac{p}{4} \beta_n F [n, p] \right) \right]. \quad (2.36)$$

Por otro lado, usando la misma notación, la ecuación para el parámetro C (Ec. 2.20) puede reescribirse como

$$\frac{1}{h^2} = 3\alpha_n p^3 - \beta_n p^4 F(n, p) + \frac{\beta_n}{2(n+2)} p^6 G(n, p), \quad (2.37)$$

de tal manera que al unir las ecuaciones (2.36) y (2.37), tenemos

$$\frac{\frac{1}{6\tau_c^2} - p^3 \left(\alpha_n - \frac{p}{4}\beta_n F[n, p] \right)}{3\alpha_n p^3 - \beta_n p^4 F(n, p) + \frac{\beta_n}{2(n+2)} p^6 G(n, p)} - \ln \frac{1}{p\tau_c} - \gamma_n = 0. \quad (2.38)$$

La solución de esta ecuación nos permite obtener $p = 0.6886$. Este valor se utiliza para calcular h en las ecuaciones (2.36) o (2.37), encontrando la altura del punto triple, $h_t = 6.89$. En unidades no normalizadas,

$$H_t = 6.89L_x. \quad (2.39)$$

El radio del punto triple lo obtenemos de la línea de transición $F1-F2$, a lo largo de la cual se cumple que $H/R = 1.81$ y por lo tanto

$$R_t = 3.8L_x, \quad (2.40)$$

donde $L_x = (2A/\mu_0 M_0^2)^{1/2}$ es la longitud de intercambio que caracteriza al material magnético.

Podemos ahora analizar las propiedades del punto triple cuando escalamos la constante de intercambio J . El escalamiento es una técnica propuesta por J. d'Albuquerque *et al.* [32] que consiste en reducir la constante de intercambio J a un valor menor dado por $J' = \chi J$ con $\chi < 1$ con el propósito de extraer las propiedades de un sistema magnético real (con dimensiones R y H) a partir del estudio de un sistema menor con dimensiones R' y H' , tales que

$$R' = \chi^n R, \quad H' = \chi^n H. \quad (2.41)$$

Podemos ver fácilmente como escala el punto triple (Ecs. 2.39 y 2.40) cuando cambiamos J . En el capítulo introductorio vimos que la constante de intercambio J se relaciona con la constante de Stiffnes de la siguiente manera,

$$A = \frac{JS^2}{a_0} c. \quad (2.42)$$

Al escalar, es decir al cambiar J por $J' = \chi J$, obtenemos $A' = \chi A$, de manera que la longitud de intercambio (Ec. 1.9) escalada resulta

$$L'_x = \chi^{1/2} L_x.$$

Podemos decir entonces que al escalar la constante de intercambio J , la altura y radio del punto triple (Ecs. 2.39 y 2.40) escalan de la siguiente forma

$$H'_t = 6.89L'_x = \chi^{1/2} H_t, \quad (2.43)$$

$$R'_t = 3.8L'_x = \chi^{1/2} R_t. \quad (2.44)$$

De esta ecuación se desprende que la altura del punto triple escala con $\chi^{1/2}$, siendo entonces $\eta = 1/2$ el valor del parámetro de escalamiento buscado.

2.4. Conclusiones

En conclusión, hemos investigado las configuraciones magnéticas presentes en cilindros nanoestructurados. Basados en un modelo continuo hemos obtenido expresiones analíticas para las energías dipolar y de intercambio en las tres configuraciones de interés, ferromagnéticas ($F1$ y $F2$) y de vórtice V . En esta última configuración hemos modelado satisfactoriamente el core, hemos estimado y discutido su tamaño y magnetización, como también el efecto de la anisotropía del material ferromagnético, y el cambio en las dimensiones del core cuando tenemos un arreglo de cilindros. Luego hemos obtenido el diagrama de fase universal y calculado el punto triple para luego discutir que ocurre con el escalamiento en un modelo continuo.

Capítulo 3

Anillos magnéticos

En este capítulo estudiaremos las configuraciones magnéticas básicas que se presentan en nanoestructuras ferromagnéticas con forma de anillo. Consideraremos tres configuraciones magnéticas ideales; ferromagnética en el eje (F), estado “onion” (\mathcal{O}) y una fase vórtice (V). Analizaremos detalladamente como la magnetización se desvía de la uniformidad cuando crece el tamaño de la partícula. Parte del trabajo presentado en este capítulo se puede encontrar en la referencia [51].

3.1. Introducción

Los anillos son caracterizados geoméricamente por sus radios interno y externo, a y R , respectivamente, y su altura, H (ver figura A.1). Diferentes técnicas experimentales [14, 15, 20, 52, 53], así como simulaciones computacionales [15, 54, 55], han identificado dos estados magnéticos en el plano del anillo; el estado de vórtice (V), y el estado “onion” (\mathcal{O}), llamado así por su semejanza con una cebolla cortada de arriba hacia abajo. Usualmente, esta fase es accesible desde la saturación y se caracteriza por la presencia de dos paredes de dominio de 180° [14, 15, 20, 52, 53], aunque para anillos mas pequeños, estas paredes de dominio son menos distinguibles y el ángulo de la pared es menor que 180° . Además, para ciertas alturas, la ocurrencia de un ordenamiento ferromagnético (F) a lo largo del eje del anillo, también es posible. A continuación presentaremos resultados obtenidos mediante cálculos de energías totales para anillos magnéticos, los que nos han permitido estudiar la estabilidad relativa de las tres configuraciones magnéticas básicas, F ,

V y \mathcal{O} . Tales resultados son obtenidos dentro del marco de la bien conocida teoría continua del ferromagnetismo, descrita en el capítulo introductorio.

3.2. Modelo teórico

Para proceder con nuestros cálculos, es necesario especificar la función magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ correspondiente a cada una de las tres configuraciones magnéticas bajo consideración. Una vez especificada la forma funcional de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ en las tres configuraciones de interés, estaremos en posición de evaluar la energía total para cada una de ellas, y luego determinar el diagrama de fase magnético. Presentaremos nuestros resultados en unidades adimensionales, donde las energías están normalizadas de acuerdo a

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{\mu_0 M_0^2 L_{ex}^3}. \quad (3.1)$$

Usaremos como escala natural para las dimensiones lineales, la longitud de intercambio, L_x definida en la Ec. (1.9). De esta manera las variables adimensionales del anillo serán el radio externo reducido (r) y la altura reducida (h), dados por

$$r = \frac{R}{L_{ex}} \quad h = \frac{H}{L_{ex}}. \quad (3.2)$$

También es conveniente definir los parámetros $\tau = H/R$ y $\beta = a/R$, donde β es la razón entre los radios interno y externo del anillo, tal que $\beta = 0$ representa un cilindro, mientras que $\beta \rightarrow 1$ representa el caso límite de un anillo ultra delgado, digamos de una capa atómica (ver figura A.1).

3.2.1. Configuración ferromagnética (F)

Para la fase F , el vector magnetización puede aproximarse como

$$\mathbf{M}^F(\mathbf{r}) = M_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.3)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es un vector unitario paralelo al eje del anillo. Esta configuración es idealmente considerada como uniforme, de manera que la energía de intercambio es nula, y la energía total está dada sólo por la contribución dipolar. Podemos usar nuestro resultado general presentado en el Apéndice A (Ec. A.6), para la energía dipolar de un anillo uniformemente magnetizado en un

ángulo θ con el eje del anillo (ver figura A.1). En el caso de magnetización uniforme en el eje z , el ángulo corresponde a $\theta = 0$, de manera que la energía (Ec. A.6) resulta

$$E_d^F = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \pi H R^2 (1 - \beta^2) N_z, \quad (3.4)$$

y normalizando,

$$\tilde{E}_{tot}^F = \frac{\pi}{2} h r^2 (1 - \beta^2) N_z, \quad (3.5)$$

donde el factor demagnetizante $N_z(\beta, \tau)$ está dado por la Ec. (A.4) del Apéndice A. La ecuación (3.5) ha sido obtenida previamente por Beleggia *et al.* (ver Ec. 15, Ref. [56]) considerando un método basado en transformadas de Fourier de la magnetización.

3.2.2. Configuración de vórtice (V)

Para el estado V , la magnetización está definida por

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_0 \hat{\phi},$$

donde $\hat{\phi}$ es un vector unitario azimutal en el plano xy del anillo. Como ya se mencionó, el estado de vórtice no presenta un core magnético, debido a que la geometría anular carece de material magnético a lo largo del eje z , donde se localiza el core. Sin embargo, si el radio interno del anillo es lo suficientemente pequeño, puede aparecer una componente z no nula en la magnetización. En un trabajo reciente [57] se considera esta posibilidad para anillos con alturas pequeñas, donde se muestra que existe core para radios internos menores que $0.4L_x$. Sin embargo, para anillos con alturas mayores (tubos), el valor del radio interno crítico para la aparición de core magnético crece considerablemente, dando lugar a configuraciones más complejas. Este problema es discutido brevemente en el capítulo siguiente, y es objeto de investigación actual. Por ahora consideraremos anillos con configuraciones de vórtice sin core magnético.

En la fase vórtice sin core no hay formación de cargas volumétricas, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, y tampoco existe flujo magnético hacia la superficie, es decir en la configuración V , el flujo magnético está confinado dentro del anillo, por lo que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M} = 0$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal a la superficie. De la expresión para el potencial magnetostático (Ec. 1.17), resulta claro que la energía dipolar es nula ($E_d^V = 0$).

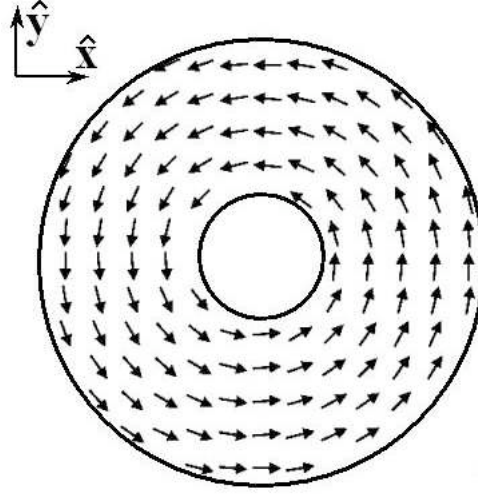


Figura 3.1: Simulación micromagnética para la fase V en un anillo.

La contribución de la energía de intercambio puede evaluarse de la expresión semiclásica (Ec. 1.6), a partir de la magnetización en componentes cartesianas, es decir

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi,$$

de manera que las componentes cartesianas están dadas por

$$\begin{aligned} m_x &= -\sin \phi \\ m_y &= \cos \phi \\ m_z &= 0. \end{aligned}$$

Al reemplazar tales componentes en la energía de intercambio (Ec. 1.6), tendremos que

$$E_{ex}^V = A \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R [(\nabla \sin \phi)^2 + (\nabla \cos \phi)^2] \rho d\rho d\phi dz. \quad (3.6)$$

El operador gradiente en coordenadas cilíndricas es dado por

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

de forma que

$$E_{ex}^V = A \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \frac{1}{\rho} d\rho d\phi dz, \quad (3.7)$$

y por lo tanto

$$E_{ex}^V = 2\pi H A \log \frac{R}{a}. \quad (3.8)$$

En unidades adimensionales, el resultado final para la energía de la configuración de vórtice es

$$\tilde{E}_{tot}^V \equiv \frac{E_{ex}^V}{\mu_0 M_0^2 L_{ex}^3} = -\pi h \ln \beta. \quad (3.9)$$

3.2.3. Configuración onion (\mathcal{O})

El caso más interesante en esta geometría es el estado onion (\mathcal{O}), cuyo perfil de magnetización típico se ilustra en la Fig. (3.2). Hasta ahora, ningún modelo analítico ha sido presentado en la literatura para describir tal configuración. Sin embargo, en trabajos recientes [56, 57] se ha investigado el diagrama de fase magnético para anillos, considerando, en lugar de la configuración onion, una configuración uniforme en el plano.

El modelo que adoptaremos para la fase onion considera la siguiente forma funcional para la magnetización

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_\rho(\phi) \hat{\boldsymbol{\rho}} + M_\phi(\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (3.10)$$

donde la posible dependencia de M_ρ y de M_ϕ en la coordenada radial ρ se ha despreciado. El punto importante aquí es la dependencia implícita de las dos componentes del vector magnetización en la geometría del anillo, más precisamente, en los valores de r , h y β . Para ser realista, cualquier modelo para la configuración onion tiene que permitir que la magnetización se aproxime a la uniformidad y/o se desvíe de tal, dependiendo de los valores de los parámetros geométricos. Aclararemos este punto en detalle a lo largo de este capítulo.

Teniendo en cuenta la simetría espacial de \mathbf{M} , como se muestra en la figura (3.2), las componentes reducidas $m_\rho = M_\rho/M_0$ y $m_\phi = M_\phi/M_0$ de la

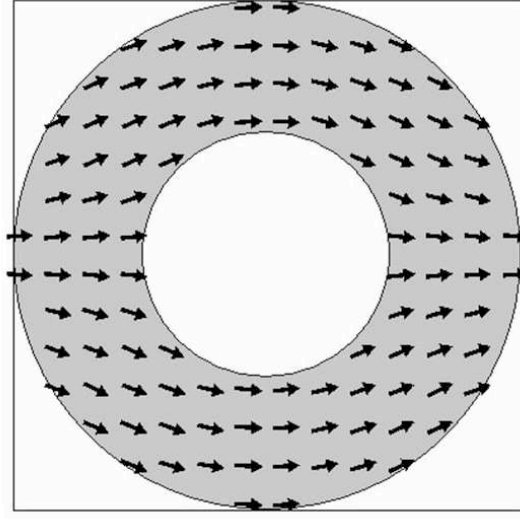


Figura 3.2: Simulación micromagnética para la fase “onion” en un anillo de cobalto con $h = 2.1$, $r = 7$ y $\beta = 0.5$.

magnetización pueden escribirse de la siguiente manera

$$m_\rho(\phi) = \begin{cases} f(\phi), & 0 < \phi < \pi/2 \\ -f(\pi - \phi), & \pi/2 < \phi < \pi \\ -f(\phi - \pi), & \pi < \phi < 3\pi/2 \\ f(2\pi - \phi), & 3\pi/2 < \phi < 2\pi, \end{cases} \quad (3.11)$$

y

$$m_\phi(\phi) = \begin{cases} -\sqrt{1 - f^2(\phi)}, & 0 < \phi < \pi/2 \\ -\sqrt{1 - f^2(\pi - \phi)}, & \pi/2 < \phi < \pi \\ \sqrt{1 - f^2(\phi - \pi)}, & \pi < \phi < 3\pi/2 \\ \sqrt{1 - f^2(2\pi - \phi)}, & 3\pi/2 < \phi < 2\pi, \end{cases} \quad (3.12)$$

donde $f(\phi)$ es una función acotada en el intervalo $[0, \pi/2]$, cuyos valores límites están dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(\pi/2) &= 0, \end{aligned}$$

de forma que $0 \leq f(\phi) \leq 1$. Una expresión conveniente para la función f es

$$f(n, \phi) = \cos^n(\phi), \quad (3.13)$$

donde n es una variable continua tal que $n \geq 1$, obtenida como resultado de un proceso de minimización de la energía total para cada valor de r , h y β . Este modelo permite una transición continua del estado uniforme en el plano ($n = 1$) al estado onion ($n > 1$). La desviación de la configuración uniforme se vuelve más pronunciada cuando aumenta el valor del parámetro n , lo que naturalmente ocurre cuando aumenta el tamaño del anillo. La figura (3.2) muestra una posible configuración onion con $n > 1$.

En las dos configuraciones anteriores, la función magnetización satisface la condición $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, que significa ausencia de cargas volumétricas. En la configuración onion, sin embargo, y debido a la presencia de regiones en las que $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$, la energía dipolar tiene dos contribuciones, $E_{dS}^{\mathcal{O}}$ y $E_{dV}^{\mathcal{O}}$, las que provienen de contribuciones superficiales y volumétricas al potencial (Ec. 1.17). Los cálculos de estos dos términos se detallan en el Apéndice D y nos permiten escribir

$$\tilde{E}_{dS}^{\mathcal{O}} = r^3 \sum_{p=1}^{\infty} b_p (b_p Q_1 + d_p Q_2) , \quad (3.14)$$

$$\tilde{E}_{dV}^{\mathcal{O}} = r^3 \sum_{p=1}^{\infty} (d_p - b_p) (b_p Q_3 + d_p Q_4) , \quad (3.15)$$

donde

$$b_p(n) = \int_0^{\pi/2} f(n, \phi) \cos(p\phi) d\phi , \quad (3.16)$$

$$d_p(n) = p \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - f^2(n, \phi)} \sin(p\phi) d\phi , \quad (3.17)$$

y las funciones $Q_i = Q_i(\beta, \tau)$ están dadas por

$$Q_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\beta}^1 x dx \int_0^{\infty} dy [J_p(y) - \beta J_p(\beta y)] [J_{p-1}(xy) - J_{p+1}(xy)] \frac{e^{-\tau y} + \tau y - 1}{y} ,$$

$$Q_2 = \frac{8}{\pi} \int_{\beta}^1 dx \int_0^{\infty} dy [J_p(y) - \beta J_p(\beta y)] J_p(xy) \frac{e^{-\tau y} + \tau y - 1}{y^2} ,$$

$$Q_3 = \frac{4}{\pi} \int_{\beta}^1 dw \int_{\beta}^1 x dx \int_0^{\infty} dy [J_{p-1}(xy) - J_{p+1}(xy)] J_p(wy) \frac{e^{-\tau y} + \tau y - 1}{y},$$

$$Q_4 = \frac{8}{\pi} \int_{\beta}^1 dw \int_{\beta}^1 dx \int_0^{\infty} dy J_p(wy) J_p(xy) \frac{e^{-\tau y} + \tau y - 1}{y^2}.$$

Es importante notar que las sumas en las ecuaciones (3.14) y (3.15) corren sobre valores impares del índice p y convergen rápidamente, por lo que en la práctica sólo basta considerar algunos valores de p (alrededor de 5 o 6).

La energía de intercambio también puede obtenerse en forma analítica, como se muestra en el Apéndice D, y está dada por

$$\tilde{E}_{ex}^{\mathcal{O}} = -\pi h [I(n) - 1] \ln \beta, \quad (3.18)$$

donde

$$I(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - f^2(n, \phi)} \left[\frac{\partial f(n, \phi)}{\partial \phi} \right]^2 d\phi. \quad (3.19)$$

Como ya se señaló, el valor de n en las expresiones anteriores se escoge de forma que minimice la energía total, proceso que naturalmente depende de los parámetros geométricos del anillo. En otras palabras, el valor de n que minimiza la energía se obtiene resolviendo la ecuación $\partial \tilde{E}_{tot}^{\mathcal{O}} / \partial n = 0$, donde

$$\tilde{E}_{tot}^{\mathcal{O}} = \tilde{E}_{dS}^{\mathcal{O}} + \tilde{E}_{dV}^{\mathcal{O}} + \tilde{E}_{ex}^{\mathcal{O}}.$$

Notemos que la dependencia de $\tilde{E}_{tot}^{\mathcal{O}}$ en n aparece sólo a través de las funciones $b_p(n)$, $d_p(n)$ e $I(n)$. La primera de éstas puede expresarse en términos de funciones Gamma, mientras que las dos restantes pueden evaluarse fácilmente en forma numérica. Por otro lado, las funciones Q_p las calculamos sólo una vez para valores dados de β y τ , y luego variamos n para encontrar el valor que minimiza la energía total $\tilde{E}_{tot}^{\mathcal{O}}$.

3.3. Resultados y discusión

Las expresiones anteriores para la energía total nos permiten investigar la estabilidad relativa de las tres configuraciones magnéticas de interés en partículas ferromagnéticas con forma de anillo. Podemos determinar, para

cada factor de forma, β , los rangos de valores del radio y altura para los cuales una de las tres configuraciones es de menor energía. La línea de transición entre dos regiones puede ser obtenida igualando las expresiones para las energías totales correspondientes.

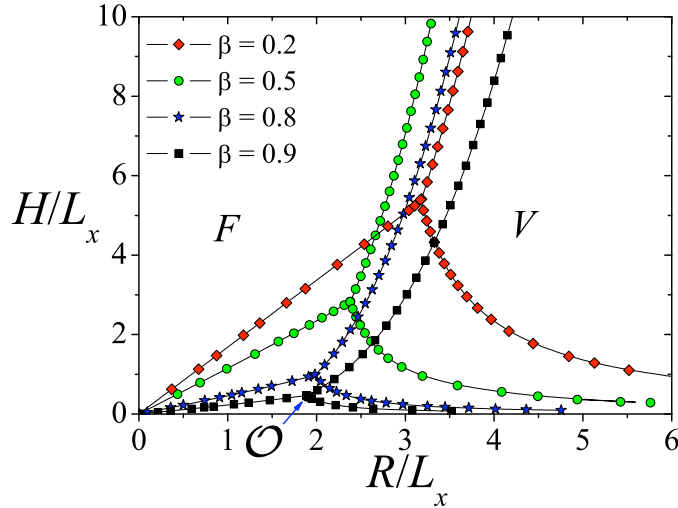


Figura 3.3: Diagramas de fase para anillos con $\beta = a/R = 0.2$ (diamantes), 0.5 (círculos), 0.8 (estrellas), y 0.9 (cuadrados). F , V y \mathcal{O} indican regiones donde las configuraciones ferromagnética en el eje, vórtice y onion, son más estables. L_{ex} es la longitud de intercambio del material.

La figura (3.3) ilustra los diagramas de fase para algunos valores de β , donde se indican las regiones de estabilidad que corresponden a cada configuración en el diagrama. La transición entre las configuraciones \mathcal{O} y F está determinada por el equilibrio entre las energías de ambas configuraciones magnéticas. Una comprensión cualitativa de tal transición puede ser lograda examinando la intensidad de los campos demagnetizantes a lo largo de los ejes x y z . Para β y r dados, alturas grandes resultan en campos demagnetizantes reducidos a lo largo de la dirección z , favoreciendo la configuración F . Este es el caso, por ejemplo, de anillos con $r = 1$ y $\beta = 0.2$, cuando h aumenta de 1 a 3. Por otro lado, para r y h fijos, una disminución en β es equivalente a una reducción del radio interno, lo que produce un mayor

campo demagnetizante en el plano. Así, un anillo con $r = 1$ y $h = 1$ exhibe un orden magnético en el plano para $\beta = 0.2$, y un orden fuera del plano para $\beta = 0.8$. Notemos que la transición \mathcal{O} - F en la figura (3.3) es prácticamente una línea recta, por lo que podemos calcular el valor de la razón crítica para tal transición, es decir $\tau_c = H/R$, la cual claramente es función del factor de forma β , y se ilustra en la figura (3.4).

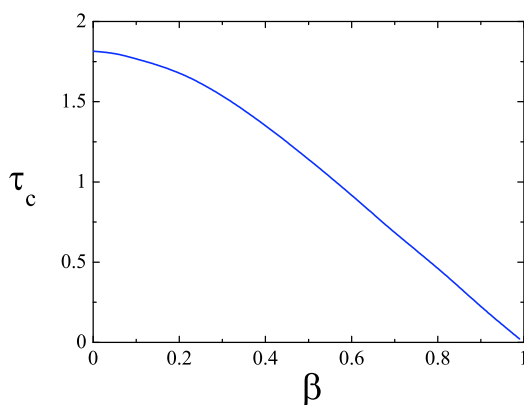


Figura 3.4: Razón de aspecto crítica para la transición \mathcal{O} - F , como función de β .

Con respecto a las dos configuraciones en el plano, a saber \mathcal{O} y V , la transición entre ellas depende de la intensidad del campo demagnetizante a lo largo de la dirección x en la configuración onion, y de la energía de intercambio de la configuración de vórtice. Cuanto mayor sea el espesor del anillo ($w = R - a$), más pequeño es el campo demagnetizante y se favorece el estado onion. Así, un anillo con $r = 3$ y $h = 1$ exhibirá la fase de V para $\beta = 0.8$, y la configuración \mathcal{O} para $\beta = 0.2$.

El mecanismo responsable de la transición entre las configuraciones V y F es algo sutil. Notemos en la figura (3.3) que para $\beta = 0.5$, la línea que separa las regiones V y F aparece más a la izquierda. Como una consecuencia, anillos con $r = 3$, $h = 6$ y radios internos que corresponden a $\beta = 0.2$, 0.5 , y 0.8 , exhiben las configuraciones F , V , y F , respectivamente. Tal comportamiento puede ser entendido considerando la magnitud relativa de las energías de intercambio y dipolar en los dos estados [58]. Este punto es discutido en más

detalle en el capítulo siguiente (ver figura 4.4).

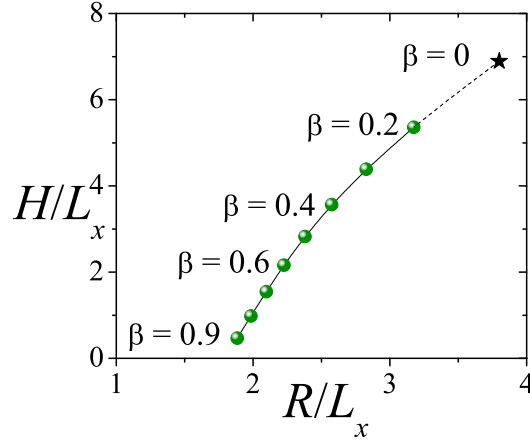


Figura 3.5: Posición del punto triple (r_t, h_t) como función del factor de forma β . El resultado para cilindros ($\beta = 0$) es representado por una estrella y tomado de la Ref. [28].

Todos los diagramas de la figura (3.3) muestran un punto triple, cuya trayectoria en función de β , $(r_t(\beta), h_t(\beta))$, se muestra en la figura (3.5). Notemos que la curva extrapola correctamente al resultado para cilindros que ha sido obtenido numéricamente por d'Albuquerque e Castro *et al.* [32] usando una técnica de escalamiento, y analíticamente, por Landeros *et al.* [28].

Es interesante mirar la dependencia del exponente n , que determina el perfil de la magnetización en la configuración onion, con la geometría del anillo. La figura (3.6) presenta un conjunto de líneas en el plano rh que corresponden a valores constantes de n , para $\beta = 0.5$. Los puntos en tales líneas que caen fuera de la región \mathcal{O} (símbolos abiertos) corresponden a estados metaestables o inestables. Vemos claramente que para anillos pequeños, la fase \mathcal{O} resulta ser una configuración prácticamente uniforme en el plano ($n \rightarrow 1$). A medida que crecen las dimensiones del anillo, el valor de n crece, lo que significa que la magnetización se desvía de la uniformidad.

Otro punto interesante es la dependencia de la magnetización neta de la configuración onion como una función de n . La magnetización neta \bar{m}_x , en unidades de la magnetización de saturación M_0 , puede ser obtenida integran-

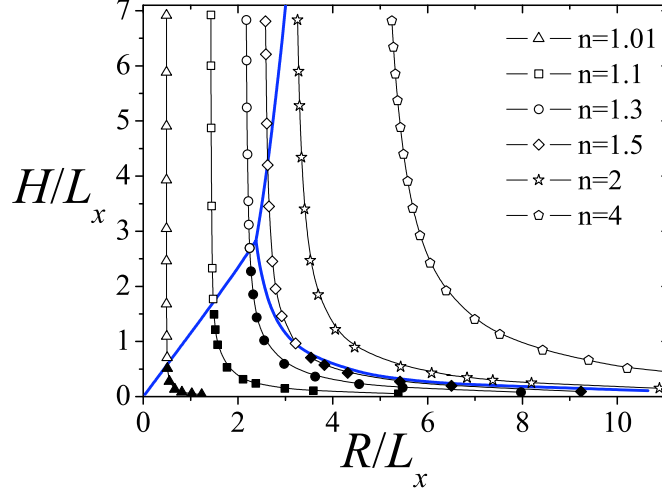


Figura 3.6: Curvas de n constante para anillos con $\beta = 0.5$. Los símbolos llenos denotan estados onion estables, y los símbolos vacíos, estados metaestables o inestables. Las líneas sólidas gruesas demarcan los límites entre las regiones de estabilidad (diagrama de fase) y las líneas delgadas son guías para el ojo. Se presentan resultados para $n = 1.01$ (triángulos), $n = 1.1$ (cuadrados), $n = 1.3$ (círculos), $n = 1.5$ (diamantes), $n = 2$ (estrellas), y $n = 4$ (pentágonos).

do m_x dentro del volumen del anillo es decir,

$$\bar{m}_x = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R m_x(\phi) \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_x(\phi) \, d\phi,$$

donde $\mathcal{V} = \pi(R^2 - a^2)H$ es el volumen del anillo. La componente x de la magnetización puede escribirse como

$$m_x(\phi) = m_\rho(\phi) \cos \phi - m_\phi(\phi) \sin \phi,$$

de manera que

$$\bar{m}_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (m_\rho(\phi) \cos \phi - m_\phi(\phi) \sin \phi) \, d\phi.$$

La expresión anterior puede reescribirse como

$$\bar{m}_x = \frac{2}{\pi} [b_1(n) + d_1(n)] , \quad (3.20)$$

ya que

$$\int_0^{2\pi} m_\rho(\phi) \cos(p\phi) d\phi = 4b_p ,$$

$$p \int_0^{2\pi} m_\phi(\phi) \sin(p\phi) d\phi = -4d_p ,$$

donde $b_1(n)$ y $d_1(n)$ están dados por las ecuaciones (3.16) y (3.17). Es fácil mostrar que para $n = 1$, se tiene que $\bar{m}_x = 1$, es decir, magnetización uniforme en la dirección del eje x . A medida que n crece la magnetización se comienza a curvar y consecuentemente \bar{m}_x comienza a disminuir. En la figura (3.7) se muestra la dependencia de la magnetización a lo largo del eje de simetría del estado onion, como función del parámetro n , lo que ilustra bien todo lo discutido anteriormente.

Un resultado interesante es la aparición de configuraciones onion metaestables. Castaño *et al.* [52] han llevado a cabo un estudio experimental detallado de la conducta magnética de nanoanillos de cobalto con altura $H = 10$ nm y radios externos e internos que varían de 90 a 260 nm y de 20 a 140 nm, respectivamente. En particular, para anillos con $R = 180$ nm y $a = 20$ nm, y $R = 180$ nm y $a = 70$ nm, ellos encontraron mediante el análisis de curvas de histéresis y mediciones de magnetorresistencia, la presencia de configuraciones onion metaestables. Tales estados pueden ser alcanzados reduciendo el campo magnético aplicado desde la saturación hasta campo cero. Cuando el campo magnético se aumenta en la dirección opuesta y la energía magnética es lo suficientemente alta, como para superar la barrera de energía entre los estados \mathcal{O} y V , los sistemas sufren una transición al último estado. Tal comportamiento es completamente consistente con nuestros resultados. De hecho, teniendo en cuenta que para el cobalto, la longitud de intercambio está dada por $L_{ex} = 2.85$ nm, los anillos examinados por Castaño *et al.* [52] tienen dimensiones reducidas $r = 63.2$, y $h = 3.5$ y corresponden a $\beta = 0.11$ y 0.39 . Examinando la figura (3.3), vemos que anillos con tales dimensiones presentan como estado fundamental el estado de vórtice, encontrándose

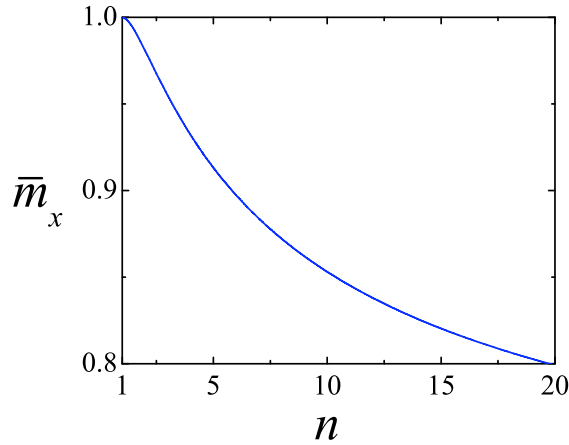


Figura 3.7: Magnetización neta a lo largo del eje de simetría del estado onion, el eje x . Cuando $n = 1$ tenemos magnetización uniforme en x mientras que cuando n crece, \bar{m}_x disminuye.

sus parámetros geométricos lejos de las líneas de transición. Si observamos la figura (3.5), el límite superior para la posición del punto triple cuando $\beta \rightarrow 0$, es $r_{max} = 3.8$, valor que es mucho menor que el radio correspondiente a las muestras de Castaño *et al.* [52]. Como consecuencia, las configuraciones onion observadas en tales sistemas representan necesariamente estados metaestables. La ocurrencia de estados metaestables en anillos con parámetros geométricos dentro de la región del vórtice también se ha observado por medio de simulaciones micromagnéticas. Usando el software OOMMF [41] hemos llevado a cabo simulaciones para un anillo de cobalto con dimensiones reducidas $h = 2.1$, $r = 7$, y $\beta = 0.5$. Estas simulaciones muestran que, cuando se considera como configuración inicial el estado de magnetización uniforme en el plano, el sistema queda atrapado en una configuración metaestable de tipo onion. Una muestra de estos resultados se presentó en la figura (3.2), en la cual la magnetización neta es $\bar{m}_x = 0.915$. Para el mismo sistema, al minimizar la energía total, se encuentra que $n = 4.6$, del cual se desprende, a partir de la ecuación (3.20), una magnetización neta $\bar{m}_x = 0.92$, totalmente consistente con las simulaciones vía OOMMF.

En conclusión, hemos investigado teóricamente la dependencia de la estructura magnética interna de nanoanillos con su geometría. Se han considerado tres configuraciones típicas; el estado ferromagnético, o uniforme en el eje, la configuración de vórtice, y la configuración onion. Para la última, hemos propuesto un modelo analítico simple que permite una transición continua entre el estado onion ($n > 1$) y la fase uniforme en el plano ($n = 1$). Nuestros resultados se resumen en diagramas de fase que dan la estabilidad relativa de las tres configuraciones. La posibilidad de que tales sistemas asuman configuraciones inestables o metaestables, también ha sido analizada.

Capítulo 4

Nanotubos magnéticos

En este capítulo estudiaremos las propiedades magnéticas de nanotubos aislados. Veremos cómo la geometría determina la ocurrencia de las dos fases magnéticas usuales en nanotubos, estas son: ferromagnética en el eje del tubo (F) y vórtice (V). Analizaremos el efecto de la anisotropía en tales sistemas, y las condiciones para la desaparición del core magnético en la fase V , cuando pasamos de un nanohilo ($\beta = 0$) a un nanotubo ($\beta > 0$). Finalmente estudiaremos los procesos de reversión de la magnetización, los que ocurren mediante nucleación y propagación de paredes de dominio. Los temas presentados en este capítulo pueden encontrarse en los artículos [58, 59, 60, 61].

4.1. Introducción

Recientemente se ha iniciado la fabricación de nanotubos magnéticos [8, 9, 16, 17, 62, 63, 66], abriéndose un nuevo campo de investigación en pro de utilizar sus interesantes propiedades. Trabajos experimentales [62, 63] y simulaciones numéricas [63, 64] han identificado en estas partículas dos estados principales: un vórtice (V) en el plano transversal del tubo, y un estado con magnetización uniforme (F) en el eje del tubo. La presencia de tales configuraciones depende de factores geométricos y del material magnético del tubo, y será discutida en la primera parte de este capítulo.

En uno de los primeros trabajos experimentales en estas partículas, realizado por Nielsch *et al.* [17] se consideran tres arreglos de tubos con razones de aspecto ($\tau = H/R$) diferentes, las que muestran conductas distintas, mo-

tivando un estudio completo sobre las posibles fases magnéticas y procesos de reversión de la magnetización en nanotubos. Debido a que las curvas de histéresis son muy estrechas [17], las fases no son fácilmente identificables a partir de estas curvas, y entonces un análisis teórico o numérico puede aportar información elemental en el estudio de las propiedades magnéticas de tales sistemas.

En la segunda parte de este capítulo describiremos la reversión de la magnetización, proceso que aunque es bien conocido en hilos magnéticos [67, 68, 69, 70, 71], ha sido poco explorado en nanotubos. Esto a pesar de las ventajas potenciales de los tubos por encima de cilindros sólidos o hilos. La diferencia fundamental es que en tubos no tenemos material magnético en el eje central, generándose configuraciones magnéticas libres de core, lo que lleva a procesos más estables, garantizando reproducibilidad [58, 63] y eficiencia. También, debido a su menor volumen, los tubos pueden flotar en soluciones, los que los hace útiles en diversas aplicaciones biotecnológicas [8, 9].

4.2. Propiedades estáticas

Las configuraciones principales en tubos magnéticos son las mismas que se presentan en cilindros y anillos, sólo que se excluyen las configuraciones uniformes en el plano perpendicular al eje del tubo. Tenemos entonces dos configuraciones básicas; magnetización uniforme en el eje z , o estado ferromagnético (F), y un vórtice sin core (V). La aparición del core en la fase de vórtice ocurre cuando el agujero interno del tubo es lo suficientemente pequeño, del orden de unos nanómetros y es discutida brevemente en este capítulo. También se estudia el efecto de la anisotropía en el diagrama de fase.

4.2.1. Configuraciones magnéticas y energía total

Para la configuración F , que ha sido ya presentada en el capítulo 3, la magnetización puede escribirse como, $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_0 \hat{\mathbf{z}}$, donde $\hat{\mathbf{z}}$ es un vector unitario paralelo al eje del tubo. En esta configuración la energía de intercambio (Ec. 1.6) es nula, y la energía total está dada por la contribución dipolar y

la anisotropía. El resultado para la energía dipolar (Ec. 3.4) es

$$E_d^F = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \pi H R^2 (1 - \beta^2) N_z(\beta, \tau), \quad (4.1)$$

donde el factor demagnetizante $N_z(\beta, \tau)$ está dado por la Ec. (B.13) del Apéndice B. La razón de aspecto del tubo es $\tau = H/R$, mientras que $\beta = a/R$ es el factor de forma. En esta configuración $m_x = m_y = 0$, y $m_z = 1$, de forma que la anisotropía cristalina es nula, como se ve de la Ec. (1.20), mientras que la anisotropía uniaxial (Ec. 1.19) está dada por

$$E_u^F = -K_u \int_V m_z^2 dv = -K_u \pi H R^2 (1 - \beta^2),$$

y la energía total de la configuración F , resulta

$$E^F = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \pi H R^2 (1 - \beta^2) N_z(\beta, \tau) - K_u \pi H R^2 (1 - \beta^2). \quad (4.2)$$

Para la configuración de vórtice, la magnetización puede ser aproximada por $M_0 \hat{\phi}$. En tal caso, la contribución de la interacción dipolar es nula, como se ve de la ecuación (Ec. 1.16). La anisotropía uniaxial (Ec. 1.19) tampoco contribuye a la energía, ya que $m_z = 0$, y por lo tanto la energía total de la configuración V resulta

$$E^V = 2\pi H A \ln \frac{1}{\beta} + \frac{K_c}{8} \pi H R^2 (1 - \beta^2), \quad (4.3)$$

donde el primer término es la energía de intercambio, y el segundo es la anisotropía cristalina. El cálculo del primero se presenta en el capítulo 3 (Ec. 3.8), mientras que la anisotropía se calcula a partir de la expresión general (Ec. 1.20), reemplazando las componentes cartesianas de la magnetización, dadas por $m_x = -\sin \phi$, $m_y = \cos \phi$ y $m_z = 0$. De esta forma, la energía de anisotropía cristalina resulta

$$E_c = K_c \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R (\sin \phi \cos \phi)^2 \rho d\rho d\phi dz = \frac{K_c}{8} \pi H R^2 (1 - \beta^2), \quad (4.4)$$

el segundo término en la energía total de la fase V (Ec. 4.3).

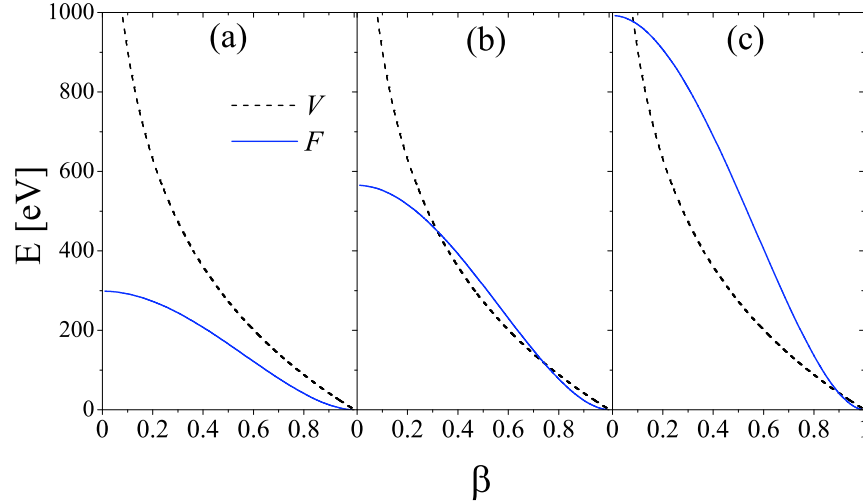


Figura 4.1: Energía de las configuraciones ferromagnética (línea sólida) y vórtice (línea cortada), como función de β , para un tubo de níquel de altura $H = 1 \mu\text{m}$. En (a) $R = 50$ nm, en (b) $R = 62$ nm, mientras que en (c) $R = 70$ nm.

En la figura (4.1) ilustramos la energía (sin ningún tipo de anisotropía) de ambas configuraciones (Ecs. 4.2 y 4.3) como función de β , para tubos de níquel, de altura $H = 1 \mu\text{m}$, y tres radios distintos; (a) $R = 50$ nm, (b) $R = 62$ nm, y (c) $R = 75$ nm. Observamos claramente que en (a) la energía de la configuración F es menor, independiente del valor de β , mientras que en (b) la dependencia con tal parámetro es más complicada. Por ejemplo, para $\beta < 0.3$, la configuración F es la de mínima energía, mientras que para $0.3 < \beta < 0.75$ el vórtice es favorecido. Para $\beta > 0.75$, nuevamente aparece la fase F como favorable. Para radios mayores, (c) la energía de la fase V es menor.

4.2.2. Diagrama de fase

Utilizando las energías totales (Ecs. 4.2 y 4.3) de las dos configuraciones de interés, podemos analizar el rango de valores de los parámetros geométricos para los cuales una de estas dos configuraciones es la de menor energía, y

es por tanto la presente en partículas de dicha geometría. Al igualar ambas energías podemos obtener curvas en el plano R - H que separan las regiones con distintas fases. Tal curva representa el diagrama de fase del tubo, caracterizado por su factor de forma β , y está dada por la siguiente ecuación

$$\frac{H}{L_x} = \frac{\tau(1 - \beta^2)N_z/2}{\ln(1/\beta) + \frac{R^2}{L_x^2}(1 - \beta^2)\left(\frac{\kappa_c}{16} + \frac{\kappa_u}{2}\right)} \frac{R^3}{L_x^3}, \quad (4.5)$$

donde

$$\kappa_c \equiv \frac{2K_c}{\mu_0 M_0^2}, \quad \kappa_u \equiv \frac{2K_u}{\mu_0 M_0^2},$$

y N_z es el factor demagnetizante del tubo, dado por la Ec. (B.13),

$$N_z = \frac{2}{\tau(1 - \beta^2)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\tau q}}{q^2} [J_1(q) - \beta J_1(q\beta)]^2 dq. \quad (4.6)$$

Para los tubos investigados experimentalmente [16, 17, 62], la altura es siempre mucho mayor que el radio, de manera que podemos tomar el límite $\tau = H/R \gg 1$. Como el argumento de la integral en N_z tiende a cero cuando $q \rightarrow 0$, entonces podemos despreciar el término $e^{-\tau q}$ en el numerador, ya que este es importante sólo cerca de $q = 0$. Esto se refuerza sobre todo para los grandes valores de τ bajo consideración. El factor demagnetizante (Ec. 4.6) se reduce entonces a

$$N_z = \frac{2}{\tau(1 - \beta^2)} \left(\frac{4}{3\pi} (1 + \beta^3) - \beta^2 F_{21}[\beta] \right). \quad (4.7)$$

donde $F_{21}[\beta] = F_{21}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \beta^2]$ es una función hipergeométrica. Reemplazando la ecuación anterior para N_z en la ecuación (4.5) obtenemos una expresión analítica aproximada para la transición entre los estados F y V , en términos del factor de forma del tubo y de los parámetros del material. Esta ecuación define el diagrama de fase para tubos con razones de aspecto grandes, como los fabricados experimentalmente [16, 17, 62, 63], y está dada por

$$\frac{H}{L_x} = \frac{\frac{4}{3\pi} (1 + \beta^3) - \beta^2 F_{21}[\beta]}{\ln(1/\beta) + \frac{R^2}{L_x^2}(1 - \beta^2)\left(\frac{\kappa_c}{16} + \frac{\kappa_u}{2}\right)} \frac{R^3}{L_x^3}. \quad (4.8)$$

En la figura (4.2) se muestra la estabilidad relativa de las configuraciones F y V , para dos valores de β apropiados para tubos delgados, a saber, (a) $\beta = 0.7$

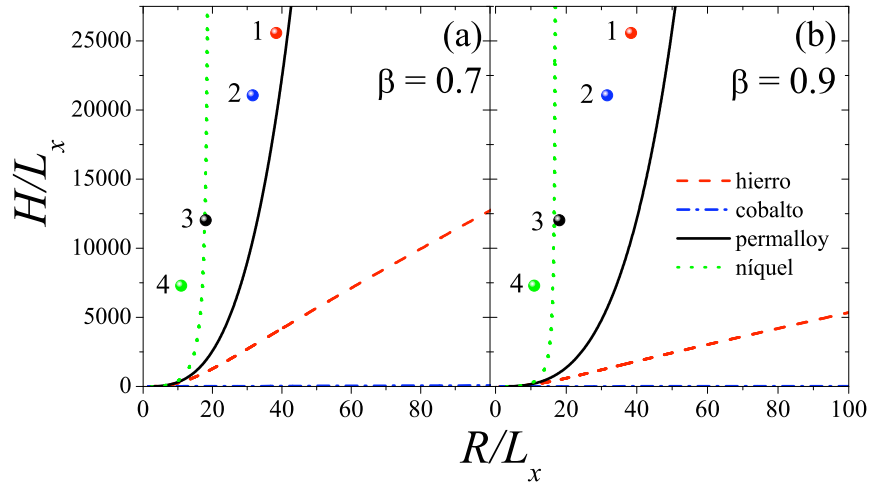


Figura 4.2: Diagramas de fase para nanotubos magnéticos con anisotropía. La fase F es la de menor energía en la región a la izquierda (o arriba) de cada curva, mientras que la fase V tiene menor energía a la derecha (o abajo) de cada línea. Los puntos corresponden a $R = 90$ nm y $H = 60$ μm [17] y son discutidos en el texto.

y (b) $\beta = 0.9$. Se consideran las anisotropías de cuatro materiales diferentes, de acuerdo a la tabla (4.1). Cada línea separa la configuración F (la izquierda superior) de la configuración V (abajo y a la derecha). Notemos que para el caso del cobalto (línea azul) la línea de transición está muy cercana al eje de la abscisa y entonces la fase F está presente en casi todo el rango estudiado. Esto se debe a su fuerte anisotropía uniaxial, la que favorece que el sistema se oriente a lo largo del eje z . En contraste, debido a su pequeña anisotropía cristalina, los resultados para el Permalloy ($\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$) describen bastante bien a un material sin anisotropía, como el considerado en la Ref. [58].

Como ilustración específica realizamos cálculos para nanotubos magnéticos de radio $R = 90$ nm y altura $H = 60$ μm [17], considerando los 4 materiales antes mencionados caracterizados por su longitud de intercambio L_x . Estos resultados se presentan como puntos en la figura (4.2) y corresponden a: 1: hierro; 2: cobalto; 3: permalloy; 4: níquel. Este último es el más cercano a su línea de la transición (línea punteada), lo que es una indicación

de la existencia de campos coercitivos menores en las curvas de histéresis. Al contrario, los otros casos (1, 2 y 3) están bien dentro de la fase F y deben presentar campos coercitivos mayores, ya que para tubos con dimensiones cercanas a la línea de transición, la formación de una estructura magnética tipo vórtice es más favorable energéticamente. Además, como veremos más adelante, para tales dimensiones el modo de reversión de la magnetización es precisamente vía propagación de una pared de dominio tipo vórtice.

Sistemas sin anisotropía

Para estudiar sistemas sin anisotropía, como por ejemplo materiales crecidos de tal manera que su estructura resulta ser policristalina, basta con fijar $\kappa_c = \kappa_u = 0$, en la expresión para el diagrama de fase (Ec. 4.8), la que se reduce a

$$\frac{H}{L_x} = \alpha(\beta) \frac{R^3}{L_x^3}, \quad (4.9)$$

donde la función $\alpha(\beta)$ está dada por

$$\alpha(\beta) \equiv \frac{1}{\ln(1/\beta)} \left[\frac{4}{3\pi} (1 + \beta^3) - \beta^2 F_{21}[\beta] \right]. \quad (4.10)$$

En la figura (4.3) presentamos las líneas de transición para distintos valores de β , a partir de la Ec. (4.9), resultado que coincide perfectamente con el mismo diagrama obtenido vía integración numérica de la forma general (Ec. 4.5) sin la aproximación $\tau \gg 1$. A la izquierda de cada línea, el estado F prevalece, mientras que a la derecha de la misma, el vórtice es más estable. Los puntos etiquetados con las letras a, b y c en la figura (4.3) corresponden a los tres

Cuadro 4.1: Parametros para los distintos materiales, tomados del libro de R. O’Handley [25]. Para todos estos materiales $A \sim 10^{-11}$ J/m, y la anisotropía (K_c) es cúbica, exepcto el cobalto uniaxial (K_u) denotado con un asterisco.

Material	M_0 (A/m)	L_x (nm)	K (J/m ³)	κ
hierro	1.7×10^6	2.346	4.8×10^4	0.0264
cobalto*	1.4×10^6	2.849	4.1×10^5	0.3329
permalloy	8.0×10^5	4.986	-3.0×10^2	-0.0007
níquel	4.85×10^5	8.225	-4.5×10^3	-0.0304

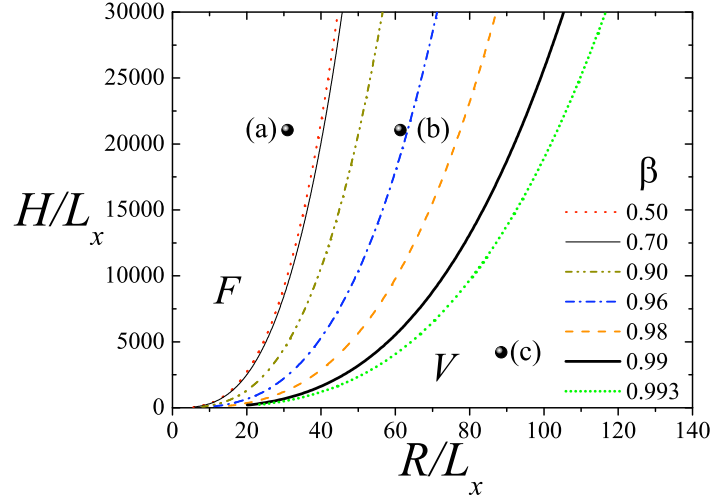


Figura 4.3: Diagrama de fase para nanotubos con distintos valores de β dentro del rango $[0.50, 0.993]$. Las dimensiones, H y R , han sido normalizadas a la longitud de intercambio L_x . Los puntos experimentales (a), (b) y (c) son discutidos en el texto.

arreglos de tubos investigados experimentalmente por Nielsch *et al.* [17], los que están definidos por (a) $R = 90$ nm, $H = 60$ μ m; (b) $R = 180$ nm, $H = 60$ μ m; (c) $R = 260$ nm, $H = 12$ μ m, todos tubos de cobalto con $L_x = 2.85$ nm. Estos radios deben ser corregidos debido a la oxidación del manto externo de los tubos de cobalto. Puesto que el CoO es antiferromagnético, el óxido que cubre los tubos no contribuye a la magnetización total. Después de tener en cuenta los datos de tal oxidación presentados en el artículo experimental [17], los valores correspondientes de β para las muestras (a), (b) y (c) son 0.983, 0.994 y 0.993 respectivamente. Este último caso (línea punteada verde) corresponde al tubo con mayor diámetro, el cual está dentro de la fase V y debe tener una coercividad menor. Al contrario (a) está bien dentro de la fase F y debe tener un campo coercitivo mayor. Estas observaciones cualitativas están en buen acuerdo con las medidas realizadas por Nielsch y colaboradores [17].

Debemos notar en nuestro diagrama (Fig. 4.3) que las líneas de transición, dependen en forma cúbica con el radio del tubo, es decir, $H/L_x \propto R^3/L_x^3$. La

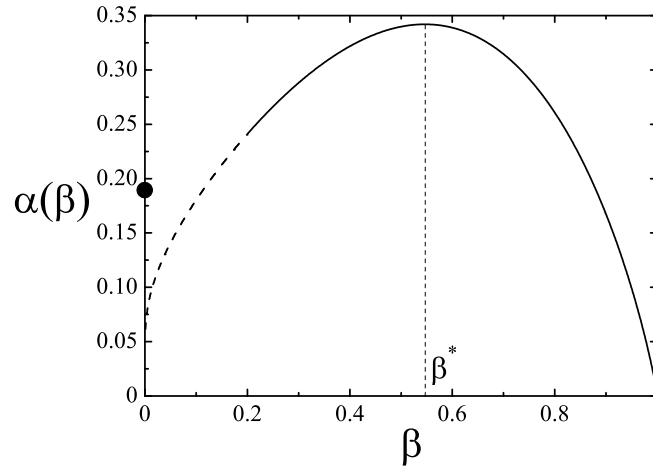


Figura 4.4: Función $\alpha(\beta)$ que define las líneas de transición en el diagrama de fase. El punto negro en el eje de la ordenada representa la solución para cilindros ($\beta = 0$) considerando el core. La porción punteada representa la región donde las desviaciones debido el efecto del core tiene un efecto progresivo hacia $\beta = 0$.

función $\alpha(\beta)$ (Ec. 4.10) es precisamente la constante de proporcionalidad en tales curvas, y es una característica topológica, ya que depende sólo del factor de forma β . Tal función se presenta en la figura (4.4) y se debe tener cuidado en interpretar los valores límite de β . En particular, cuando $\beta \rightarrow 1$, estamos tratando nanotubos sumamente delgados, donde una eventual rugosidad en la superficie y/o irregularidades de espesor son cruciales. Por otro lado, cuando $\beta \rightarrow 0$, estamos acercándonos al límite de un cilindro sólido, donde aparece una componente z en la magnetización de la configuración V ; el llamado “core” (ver Cap. 2) es importante y debe ser considerado para obtener el valor correcto de la función $\alpha(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow 0$. Afortunadamente un estudio reciente consideró el efecto del core en el caso de cilindros magnéticos ($\beta = 0$) en el estado V [28]. Usando la aproximación $\tau \gg 1$, podemos estimar el valor $\alpha(0) = 0,179$, el cual es mostrado como un punto en la ordenada de la figura (4.4). Claramente la curva $\alpha(\beta)$ no describe en forma correcta el estado magnético en este límite, ya que no se consideró el core, y por lo tanto la curva

real parte del punto negro en la figura (4.4). La aparición de core en tubos con valores pequeños de β es discutida en la sección siguiente. Por otro lado, el máximo en la curva $\alpha(\beta)$ está dado por $\alpha(\beta^* = 0.546) = 0.342$ y representa al factor de forma para el cual la fase de vórtice está más favorecida. A partir de $\beta = 0.546$, para tubos más gruesos ($\beta < 0.546$) y para tubos más delgados ($\beta > 0.546$), la línea de transición se mueve hacia la derecha incrementando la región F (ver figura 4.3). Sin embargo la curva es asimétrica, e incluso lo será más aún cuando se considera el core.

4.2.3. Vórtice con core en nanotubos

Nuestro modelo previo no considera la existencia de un core central en el tubo. Sin embargo, es importante verificar esta suposición. Para esto hemos realizado simulaciones micromagnéticas del estado de mínima energía por medio del software OOMMF [41]. Para contrastar con resultados experimentales [17] usamos los siguientes parámetros para el cobalto hcp [65]: $M_0 = 1.4 \times 10^6$ A/m, $A = 1 \times 10^{-11}$ J/m y consideramos celdas cúbicas de $4 \times 4 \times 10$ nm³. En las simulaciones hemos considerado dos valores diferentes de β y encontrado que para β pequeño, el core central desaparece.

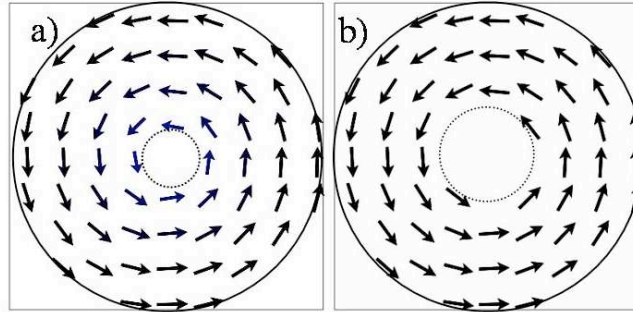


Figura 4.5: Distribución de los momentos magnéticos en un plano perpendicular al eje del tubo. El tamaño de las flechas es una medida de la magnitud de la componente de la magnetización en el plano. El tubo es definido por $R = 52$ nm, $H = 700$ nm y a) $\beta = 0.1$ ($M_z/M_0 = 0.11$), y b) $\beta = 0.3$ ($M_z/M_0 \approx 10^{-6}$).

En la figura (4.5) presentamos los resultados de dos simulaciones: a) para $\beta = 0.1$, y b) para $\beta = 0.3$. Las flechas representan la componente de la magnetización en el plano perpendicular al eje del tubo. Es decir, una flecha

pequeña significa que hay una componente importante de la magnetización a lo largo del eje z produciendo el core. Para $\beta = 0.1$ se obtiene una magnetización $M_z/M_0 = 0.11$, mientras que para $\beta = 0.3$, $M_z/M_0 \approx 10^{-6}$. A partir de estos resultados podemos concluir que, en términos generales, para $\beta > 0.3$ no existe core. Este problema es estudiado en el artículo de Kravchuk *et al.* [57] donde se concluye, mediante cálculos analíticos y simulaciones numéricas, que el core desaparece completamente para radios internos de alrededor de $0.4L_x$. Sin embargo estos resultados preliminares son objeto de investigación actual y aún falta mucho por estudiar en estos sistemas.

4.3. Modos de reversión

Consideraremos un tubo magnético en un estado con magnetización (\mathbf{M}) a lo largo del eje del tubo. Si aplicamos un campo magnético constante y uniforme en la dirección antiparalela a \mathbf{M} , luego de un cierto tiempo se iniciará la reversión de la magnetización (MR) en cualquiera de los extremos del tubo. Este proceso ocurrirá mediante diferentes mecanismos, dependiendo de los parámetros geométricos del tubo. En el artículo [61] nos enfocamos en el proceso de reversión, estudiándolo por medio de dos acercamientos diferentes pero complementarios: simulaciones numéricas y cálculos analíticos. Este último será analizado en esta sección.

4.3.1. Modelo analítico

Resultados de nuestras simulaciones [61] y estudios previos en nanohilos [67, 68, 70, 71] muestran tres tipos principales de mecanismos de reversión de la magnetización. En ellos \mathbf{M} cambia de uno de sus dos mínimos ($\mathbf{M} = M_0\hat{\mathbf{z}}$, con energía E^F) al otro ($\mathbf{M} = -M_0\hat{\mathbf{z}}$, con energía E^F) a través de un camino tal que la barrera de energía es la diferencia entre el máximo ($E_{\text{máx}}$) y el mínimo de energía. Estos mecanismos se ilustran en la figura (4.6) y se conocen como: **rotación coherente** (C), en el cual todos los espines (momentos magnéticos locales) giran simultáneamente; **pared de dominio tipo vórtice** (vortex domain wall) (V), donde los espines rotan progresivamente vía nucleación y propagación de una pared de dominio tipo vórtice; **pared de dominio transversal** (transverse domain wall) (T), donde los espines rotan progresivamente vía nucleación y propagación de una pared de dominio transversal.

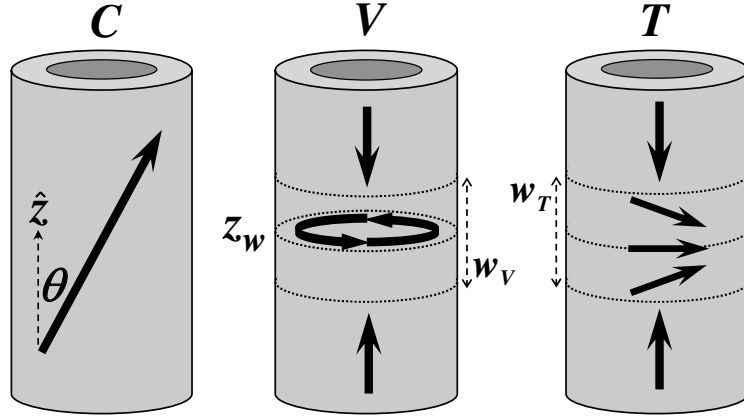


Figura 4.6: Modos de reversión de la magnetización en nanotubos. *C*: rotación coherente, *V*: pared de dominio tipo vórtice, y *T*: pared de dominio transversal.

Para determinar el tipo de reversión de la magnetización para una geometría dada, calculamos las energías para los modos *C*, *T* y *V*, para luego encontrar las barreras de energía correspondientes. La energía total para cada modo está dada por la suma de las contribuciones dipolar y de intercambio, las que son calculadas dentro del marco de la teoría semiclásica del ferromagnetismo [23] descrita en el capítulo introductorio. La anisotropía no es considerada por ahora y su efecto en los modos de reversión es objeto de investigación actual, así como el efecto de un campo magnético externo. Procederemos a describir la magnetización \mathbf{m}^k y a evaluar la energía total E^k (intercambio más dipolar) para cada uno de los tres modos de reversión definidos anteriormente, con $k = C, T$ o V .

4.3.2. Rotación coherente (*C*)

Para un tubo uniformemente magnetizado podemos escribir

$$m_z^C = \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre el eje (z) del tubo y el vector magnetización. En este modo, la energía de intercambio es cero, y la energía total corresponde al término dipolar y está dada por

$$E^C(\theta) = \frac{\pi\mu_0 M_0^2}{4} H R^2 (1 - \beta^2) [\sin^2 \theta + (3 \cos^2 \theta - 1) N_z]. \quad (4.11)$$

Este resultado se obtiene en el Apéndice A (Ec. A.6) donde el factor demagnetizante está dado por [58]

$$N_z(\beta, \tau) = \frac{2R}{H(1 - \beta^2)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\tau q}}{q^2} [J_1(q) - \beta J_1(q\beta)]^2 dq. \quad (4.12)$$

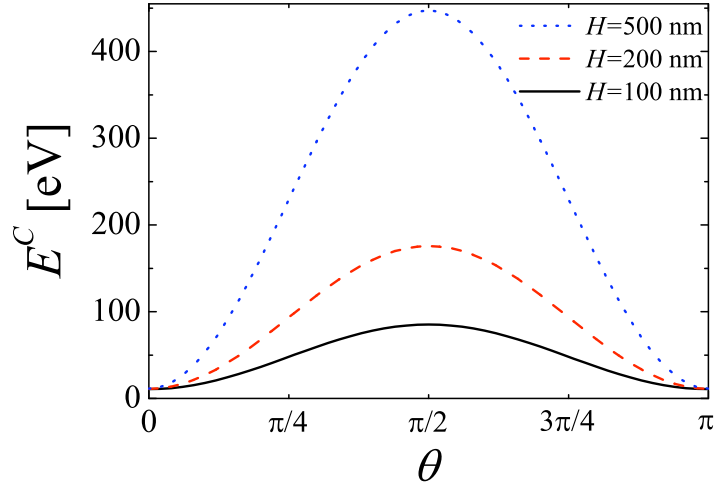


Figura 4.7: E^C vs θ para tubos de cobalto con $R = 10$ nm y $\beta = 0.5$.

La energía $E^C(\theta)$ varía bastante con los parámetros geométricos, lo que puede ser visto en la figura (4.7) donde se ilustra E^C para tubos de cobalto de radio $R = 10$ nm y $\beta = 0.5$, para tres alturas distintas, $H = 100, 200$ y 500 nm. Para encontrar estos mínimos y máximos en la energía del modo C , basta con derivar con respecto al ángulo θ , es decir, hay que resolver $\partial E^C / \partial \theta = 0$ y ver si las soluciones son máximos o mínimos, lo que ocurre cuando $\partial^2 E^C / \partial \theta^2 < 0$ y $\partial^2 E^C / \partial \theta^2 > 0$ respectivamente. La condición para máximos y mínimos ($\partial E^C / \partial \theta = 0$) se reduce a

$$\sin \theta \cos \theta (1 - 3N_z(\beta, \tau)) = 0 \quad (4.13)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \sin \theta = 0 &\Rightarrow \theta = 0, \pi \\ \cos \theta = 0 &\Rightarrow \theta = \pi/2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

junto con $N_z(\beta, \tau) = 1/3$, ecuación que para cilindros ($\beta = 0$) tiene como solución $\tau_c = 1.81$, mientras que para $\beta > 0$, $\tau_c < 1.81$. Es interesante notar que cuando los parámetros geométricos son tales que $N_z = 1/3$, entonces el sistema se comporta magnéticamente como una esfera, es decir su energía (Ec. 4.11) no depende de la dirección de la magnetización (ángulo θ). Como estamos considerando nanotubos con razones de aspectos bastante mayores que 1.81, entonces tendremos siempre $\tau > 2$ y por tanto el factor demagnetizante será siempre menor que $1/3$, lo que implica que

$$1 - 3N_z(\beta, \tau) > 0. \quad (4.15)$$

Para saber si las soluciones (Ec. 4.14) son mínimos o máximos debemos evaluar la segunda derivada de la energía, la que resulta

$$\frac{\partial^2 E^C}{\partial^2 \theta} = \frac{\pi \mu_0 M_0^2}{2} H R^2 (1 - \beta^2) (1 - 3N_z) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (4.16)$$

Por ejemplo para la solución $\sin \theta = 0$ tendremos que $\partial^2 E^C / \partial^2 \theta > 0$ por lo que $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ serán los mínimos. Para la otra solución, $\cos \theta = 0$ tendremos que $\partial^2 E^C / \partial^2 \theta < 0$ y $\theta = \pi/2$ será un máximo. Es decir $E^C(0) = E^C(\pi) \equiv E^F$ corresponde a la energía de una configuración uniforme a lo largo del eje del tubo, mientras que $E^C(\pi/2) \equiv E_{\text{máx}}^C$ es el máximo en la energía. Podemos concluir entonces que la barrera de energía que debe superar el sistema para revertir su magnetización de un mínimo al otro es $\Delta E^C = E^C(\pi/2) - E^C(0)$, y al usar la Ec. (4.11) se obtiene

$$\Delta E^C = \frac{\pi \mu_0 M_0^2}{4} H R^2 (1 - \beta^2) (1 - 3N_z). \quad (4.17)$$

4.3.3. Pared de dominio vórtice (V)

En este modo (ver Fig. 4.6) asumiremos que la pared de dominio está siempre dentro del tubo, y es caracterizada con dos parámetros. El primero es la posición (z_w) del centro de la pared del dominio, en la cual la magnetización está totalmente en el plano xy , describiendo un vórtice perfecto. El otro parámetro importante es el ancho de la pared (w), el cual será nuestro parámetro minimizable. De esta forma la magnetización puede ser escrita como

$$\mathbf{m}^V(z) = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}}, & 0 \leq z \leq z_w - w/2 \\ m_\phi(z) \hat{\phi} + m_z(z) \hat{\mathbf{z}}, & z_w - w/2 \leq z \leq z_w + w/2 \\ -\hat{\mathbf{z}}, & z_w + w/2 \leq z \leq H. \end{cases} \quad (4.18)$$

La estructura interna de la pared la modelaremos con la siguiente forma funcional

$$m_z(z) = \cos \Theta(z) ,$$

donde la función

$$\Theta(z) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{z - z_w}{w/2} + 1 \right) \quad (4.19)$$

describe correctamente la forma instantánea de la pared V observada en nuestras simulaciones numéricas (ver figura 4.11).

Podemos ahora evaluar la energía total de la pared V . En la expresión para la magnetización dentro de la pared (Ec. 4.18), las componentes cartesianas pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} m_x &= -m_\phi(z) \sin \phi \\ m_y &= m_\phi(z) \cos \phi , \end{aligned}$$

donde $m_\phi^2 + m_z^2 = 1$, de forma que la energía de intercambio (Ec. 1.6) resulta

$$E_{ex}^V = \pi A w \ln(1/\beta) + \pi^3 A R^2 (1 - \beta^2)/w , \quad (4.20)$$

expresión que es independiente de la posición de la pared, z_w . El cálculo de esta energía junto con la energía dipolar se presentan en el Apéndice E. La contribución dipolar resulta

$$E_d^V = \pi \mu_0 M_0^2 R^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} [J_1(qR) - \beta J_1(\beta qR)]^2 (f_S + f_V) , \quad (4.21)$$

donde, $f_S = f_S(w, z_w)$ y $f_V = f_V(w, z_w)$ se asocian a la energía dipolar superficial y volumétrica, respectivamente, y están dadas por

$$f_S \equiv 1 + e^{-qH} - \frac{e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} \cosh\left[\frac{qw}{2}\right] , \quad (4.22)$$

y

$$f_V \equiv \frac{qw/2 - (e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}) \cosh[qw/2]}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} + \frac{1 + e^{-qw}}{(1 + q^2 w^2 / \pi^2)^2} . \quad (4.23)$$

Tenemos entonces la energía total de la pared de dominio V , la que está dada por la suma de las contribuciones de intercambio (Ec. 4.20) y dipolar (Ec. 4.21), es decir

$$E^V = E_{ex}^V + E_d^V . \quad (4.24)$$

Dado el material magnético (A y M_0) y las dimensiones del tubo (R , H y β), podemos analizar la estructura interna de la pared, minimizando el ancho de esta, w . Por ejemplo, la figura (4.8) muestra en (a) la energía minimizada con respecto a w , como función de la posición de la pared, mientras que en (b) se ilustran los valores de w obtenidos en el proceso de minimización. Es decir, para cada valor de z_w , se minimiza la energía con respecto a w y se obtienen los valores de E^V y w que ajustan la energía. El comportamiento de estas cantidades es cualitativamente similar cuando variamos los parámetros geométricos, aunque sin embargo hay cambios cuantitativos considerables, lo que puede ser observado en la figura (4.8) cuando cambiamos levemente el radio del tubo (ver cambio de escala). Notemos además que la energía es

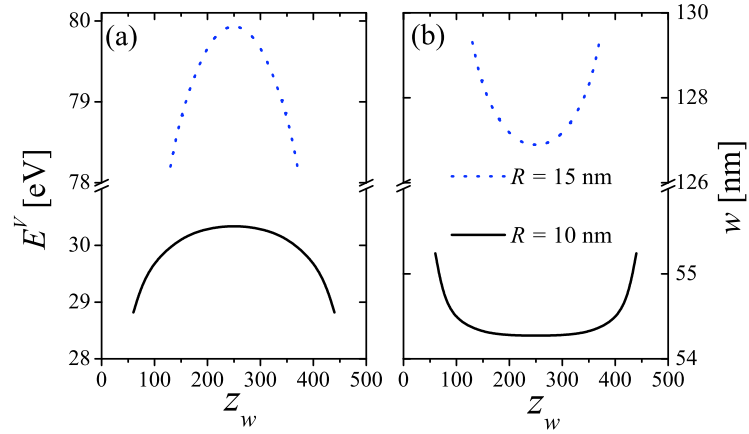


Figura 4.8: Energía y ancho de una pared de dominio tipo vórtice como función de la posición a lo largo de un tubo de cobalto con factor de forma $\beta = 0.5$, altura 500 nm y radios $R = 10$ (línea sólida) y a $R = 15$ (línea punteada).

máxima cuando la pared está localizada en el centro del tubo ($z_w = H/2$), lo que ocurre también cuando cambiamos los parámetros geométricos (siempre que $H > w$). Entonces, para calcular la barrera de energía necesaria para revertir la magnetización vía propagación de una pared V , basta con evaluar la energía en $z_w = H/2$, de manera que la barrera resulta

$$\Delta E^V = E^V(z_w = H/2) - E^F, \quad (4.25)$$

donde $E^V(z_w)$ está dado por la Ec. (4.24), mientras que E^F (Ec. 4.11) está dado por

$$E^F = E^C(0) = \frac{\pi\mu_0 M_0^2}{2} H R^2 (1 - \beta^2) N_z. \quad (4.26)$$

4.3.4. Pared de dominio transversal (T)

Esta pared de dominio es modelada en forma análoga a la pared V . La diferencia está en la magnetización dentro de la pared, donde en el modo V la componente en el plano es m_ϕ , mientras que en el modo T la componente en el plano (m_x) está fija a lo largo de la dirección transversal, orientada a lo largo del eje $\hat{\mathbf{x}}$. Nuevamente asumiremos que la pared está localizada dentro del tubo. La magnetización dentro de la pared (ver Fig. 4.6) puede ser escrita de la siguiente forma,

$$\mathbf{m}^T(z) = m_x(z)\hat{\mathbf{x}} + m_z(z)\hat{\mathbf{z}}, \quad z_w - w/2 \leq z \leq z_w + w/2, \quad (4.27)$$

donde hemos usado la misma notación que en el modo V , pero con w el ancho de la pared transversal. La componente axial es modelada de la misma forma que en la pared V , es decir $m_z(z) = \cos \Theta(z)$, con la función $\Theta(z)$ dada por la Ec. (4.19). Los cálculos de las energías de intercambio y dipolar se presentan en el Apéndice F. La energía de intercambio resulta

$$E_{ex}^T = \pi^3 A R^2 (1 - \beta^2) / w, \quad (4.28)$$

mientras que la contribución dipolar está dada por

$$E_d^T = \pi\mu_0 M_0^2 R^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} [J_1(qR) - \beta J_1(\beta qR)]^2 (g_S + g_V), \quad (4.29)$$

donde

$$g_S = \frac{q^2 w^2 / 2\pi^2}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} \left(\frac{qw}{2} + \frac{1 + e^{-qw}}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} \right) + f_S,$$

y $g_V(w, z_w) = f_V(w, z_w)$. Notemos que las contribuciones dipolar volumétrica de las paredes V y T tienen la misma forma funcional, aunque no necesariamente el mismo valor debido a los distintos anchos de pared de cada modo, ambos denotados por w . La energía total de una pared transversal confinada dentro de un nanotubo es entonces

$$E^T = E_{ex}^T + E_d^T, \quad (4.30)$$

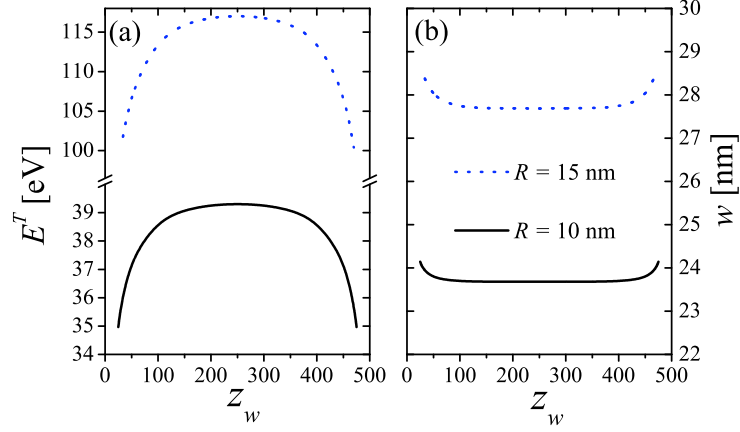


Figura 4.9: Energía y ancho de una pared de dominio transversal como función de la posición a lo largo de un tubo de cobalto de altura 500 nm, $\beta = 0.5$ y radios $R = 10$ (línea sólida) y $R = 15$ (línea punteada).

donde E_{ex}^T y E_d^T están dados en las Ecs. (4.28) y (4.29) respectivamente.

En la figura (4.9) se ilustra la dependencia de la energía y el ancho de la pared transversal como función de la posición z_w del centro de la pared. Para cada valor de z_w se ha minimizado la energía con respecto a w , como se explicó en la sección anterior. Observamos nuevamente que el máximo en la energía ocurre cuando la pared está localizada en el centro del tubo, $z_w = H/2$, lo que sigue ocurriendo cuando cambiamos los parámetros R , H y β . La barrera de energía que debe superar el sistema para revertir su magnetización vía propagación de un pared de dominio transversal es entonces

$$\Delta E^T = E^T(z_w = H/2) - E^F \quad (4.31)$$

donde $E^T(z_w)$ está dado por la Ec. (4.30), mientras que E^F se presenta en la expresión (4.26).

Con las expresiones anteriores para las energías de los diferentes procesos de reversión, es posible analizar que modo se presenta como función de la geometría de los tubos. Para esto, simplemente buscaremos el modo de reversión que cuesta menos energía, para una geometría dada.

4.3.5. Resultados y discusión

Al obtener la barrera de energía más baja entre los tres modos, encontramos que la rotación coherente C sólo está presente en tubos muy cortos, es decir, cuando $H \approx w$ o menos. Puesto que estamos principalmente interesados en tubos largos, como aquellos usados en experimentos y aplicaciones [16, 17, 62, 63], enfocaremos nuestra atención en los modos de reversión vía nucleación y propagación de paredes de dominio (V y T).

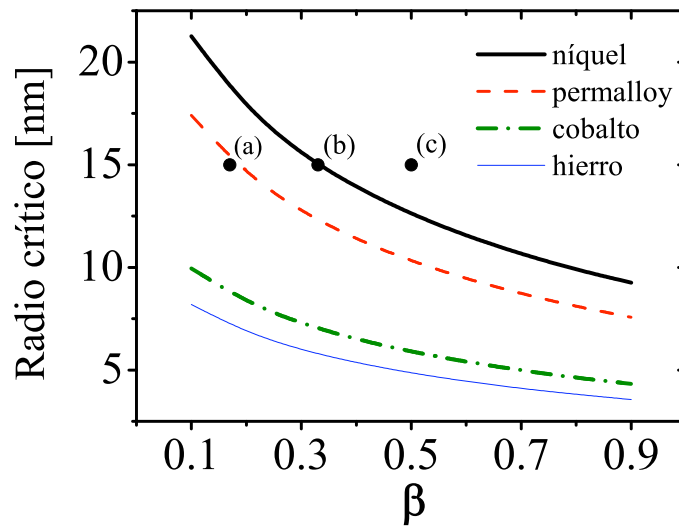


Figura 4.10: Radio crítico como función de β para distintos materiales magnéticos. Para $R < R_c$ el modo T es favorable, mientras que para $R > R_c$, domina el modo V .

Como la energía de la pared de dominio es la que determina el modo de reversión, si $H > w$, la altura del tubo no tiene efecto en determinar cual es el proceso de reversión. En este caso, nuestros resultados muestran que el modo de reversión depende de los radios interno y externo, y del material (A y M_0). Para cada β existe un radio crítico, $R_c(\beta)$, para el cual ambas barreras de energía (V y T) son iguales. Por ejemplo, para $R < R_c(\beta)$ el tubo revierte su magnetización creando una pared transversal ($\Delta E^T < \Delta E^V$), mientras que para $R > R_c(\beta)$ aparece una pared tipo vórtice ($\Delta E^V < \Delta E^T$). Al igualar ambas barreras de energía (Ecs. 4.25 y 4.31) es posible obtener $R_c(\beta)$, el cual

es ilustrado en la figura (4.10) como función de β . Las curvas presentadas corresponden a níquel (línea negra), permalloy (línea roja), cobalto (línea verde) y hierro (línea azul). Los parámetros para los tres últimos han sido tomados del libro de O'Handley [25], mientras que los parámetros para el níquel ($L_x = 6.09$ nm), son los utilizados en las simulaciones numéricas de nuestro artículo [61]. Estas simulaciones fueron realizadas usando el método de escalamiento [32] junto con simulaciones de Monte Carlo, y se presentan en la figura (4.11) donde se consideraron tubos de altura $H = 500$ nm, radio $R = 15$ nm y distintos factores de forma β .

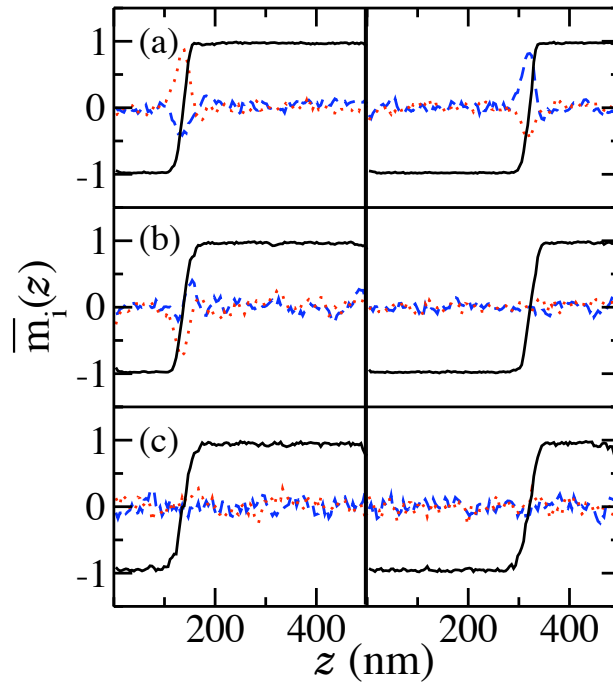


Figura 4.11: Imágenes simuladas del proceso de reversión en nanotubos definidos por $\beta = 0.17$ (a), 0.33 (b) y 0.5 (c) en dos instantes distintos del proceso. La abscisa representa la coordenada axial, z , a lo largo del tubo, mientras que la ordenada nos da las componentes promedio de la magnetización. \bar{m}_x : línea cortada (azul), \bar{m}_y : línea punteada (rojo), y \bar{m}_z : línea sólida (negra).

En esta figura (4.11) presentamos las simulaciones en dos instantes del proceso de reversión, mostrando la propagación de la pared a lo largo del tubo para $\beta = 0.17$ (a), 0.33 (b) y 0.5 (c). La línea negra representa la componente

axial promedio de la magnetización (\bar{m}_z) mientras que las componentes \bar{m}_x y \bar{m}_y están representadas por las líneas azul y roja respectivamente. Cuando m_x y m_y promedian a cero, obtenemos un mecanismo de reversión V , mientras que cuando una o ambas de estas componentes son distintas de cero, la magnetización se revierte mediante la propagación de una pared transversal. El caso (a) muestra claramente un comportamiento T con una rotación helicoidal de la magnetización a lo largo del tubo, aunque localmente la mayor parte de la pared de dominio T apunta en una dirección particular. El caso (b) muestra un modo T en el instante t_1 , el cual luego cambia a V como se muestra en el instante t_2 . El último caso (c), ilustra la propagación de una pared V a lo largo del tubo. Estos resultados pueden entenderse fácilmente a partir de nuestro modelo teórico, si observamos la curva del níquel en la figura para el radio crítico (4.10). Los resultados de las simulaciones (a), (b) y (c) son presentados como puntos en tal figura, donde se ve claramente que el punto (a) está bajo la curva $R_c(\beta)$ para el níquel, lo que indica que el modo T es de menor energía. En la simulación (b) el punto cae encima de la curva $R_c(\beta)$, lo que significa que las barreras de energía para ambos modos son aproximadamente iguales, explicando así la ocurrencia del comportamiento mixto observado en la simulación (b) (ver Fig. 4.11). Finalmente, el punto (c) aparece por encima de la curva correspondiente, lo que indica que el modo V es de menor energía.

En la figura (4.12) ilustramos nuestros resultados analíticos para los tubos de Ni usados en las simulaciones. En la figura (4.12a) se muestran las barreras de energía como función de β , para los modos de reversión V y T . Observamos que para $\beta = 0.33$, el modo de la reversión cambia de T a V , en acuerdo con nuestras simulaciones numéricas anteriores. La figura (4.12b) ilustra los anchos de las paredes correspondientes para los modos V y T . En este caso, las paredes son del orden de los 60 nm, sin embargo, al considerar radios mayores, (~ 40 nm) el ancho de la pared V puede llegar incluso a 500 nm o mucho más. Cuando R crece lo suficiente, la configuración magnética de menor energía es el estado de vórtice visto en la sección anterior. Este puede ser considerado como si fuese una pared de dominio V de ancho infinito. Por otro lado, para tubos muy cortos ($H \approx w$) no es posible acomodar estas paredes de dominio, dando lugar a un modo coherente de inversión.

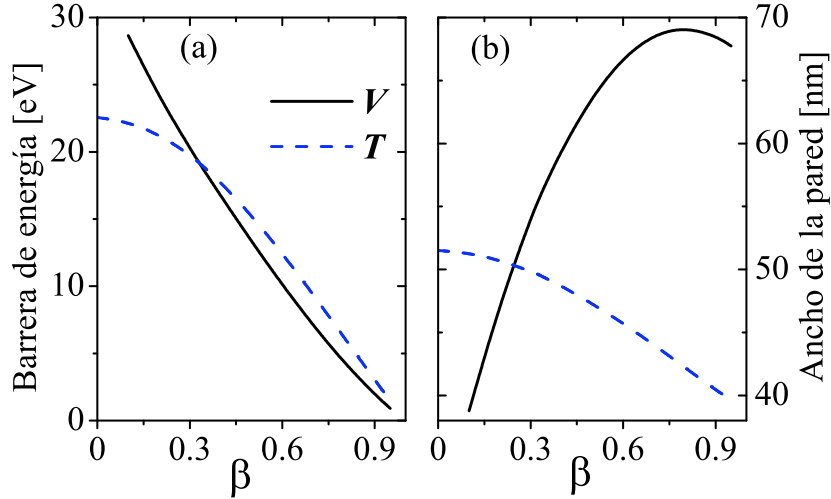


Figura 4.12: Líneas solidas (negro) ilustran (a) las barreras de energía y (b) el ancho de la pared de dominio para el modo V y las líneas cortadas (azul) corresponden al modo T .

4.4. Conclusiones

De las tres posibles configuraciones magnéticas en partículas con simetría tubular, la con magnetización uniforme (o cuasi-uniforme) en el plano queda fuera de consideración debido a las dimensiones de los tubos considerados. Existe una competencia entre un estado uniforme con magnetización a lo largo del eje z y un estado de vórtice con los momentos magnéticos perpendiculares al eje. La condición de equilibrio para estas dos fases se estudia en función de la geometría de la partícula. El resultado es una línea que crece más rápido con el radio que con la altura, dependiendo del factor de forma β , y del material magnético. La ley que reproduce este comportamiento está dada por la Ec. (4.8) y en el caso de materiales sin anisotropía es simplemente $H/L_x = \alpha(\beta)R^3/L_x^3$, donde la función $\alpha(\beta)$ está dada por la ecuación (4.10). Podemos concluir que existe un valor óptimo del factor de forma β para la existencia del estado de vórtice, es decir, el valor máximo de $\alpha(\beta)$ que ocurre para $\beta = 0,546$. Este representa una situación óptima cuando se buscan campos coercitivos pequeños. Cuando β se aleja de 0,546 la fase vórtice

se debilita y los campos coercitivos crecen.

Con respecto a los modos de reversión de la magnetización, podemos decir que existen dos procesos dominantes en tubos ferromagnéticos largos, dependiendo de los radios del tubo. El mecanismo transversal se presenta en tubos con $R < R_c(\beta)$ mientras que para tubos con $R > R_c(\beta)$ es la propagación de una pared de dominio tipo vórtice la que controla la reversión de la magnetización. Para valores de R y β cerca de las curvas que separan ambos mecanismos, aparecen inestabilidades y pueden presentarse ambos modos en distintas etapas de la reversión. Ya que nanotubos con radios menores que 20 nm son difíciles de fabricar en el presente [16, 17, 62], podemos concluir que el mecanismo de reversión mediante propagación de una pared de dominio tipo vórtice es el más observado.

Apéndice A

Energía para una partícula cilíndrica magnetizada uniformemente

En este apéndice se muestra el cálculo de la energía de una partícula de simetría cilíndrica con magnetización uniforme. La magnetización total de la partícula es M_0 , y sus componentes cartesianas son M_x , M_y y M_z , tales que $M_0^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$.

Este cálculo general entrega resultados válidos para tubos, anillos y cilindros, en función del factor de forma $\beta = a/R$, definido como la razón entre los radios interno (a) y externo (R) de la partícula. Por ejemplo un cilindro está definido por $\beta = 0$. Para sistemas con magnetización uniforme podemos escribir

$$\mathbf{m} = m_x \hat{\mathbf{x}} + m_y \hat{\mathbf{y}} + m_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{A.1})$$

con $m_i = M_i/M_0$ las componentes cartesianas normalizadas de la magnetización. En este caso, la energía de intercambio (Ec. 1.6) es nula, ya que las componentes de la magnetización son constantes. La energía dipolar puede escribirse como [23]

$$E_d = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \mathcal{V} (m_x^2 N_x + m_y^2 N_y + m_z^2 N_z), \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\mathcal{V} = \pi H R^2 (1 - \beta^2)$$

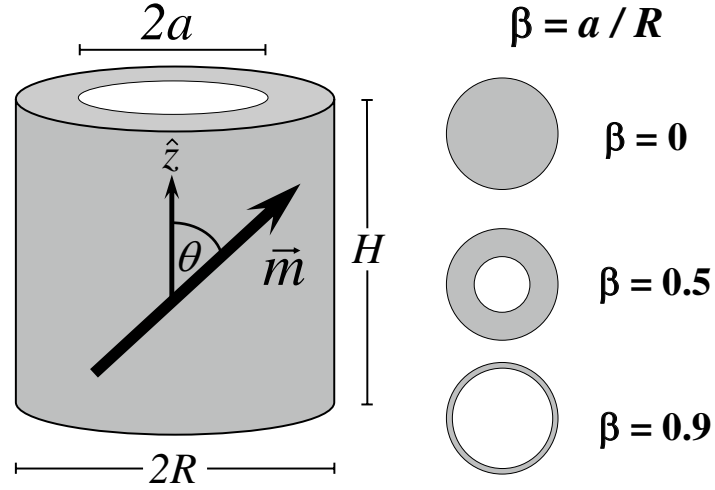


Figura A.1: Geometría para una partícula con simetría cilíndrica uniformemente magnetizada.

es el volumen de la partícula y N_i son los factores demagnetizantes, los que cumplen con la condición

$$N_x + N_y + N_z = 1.$$

Además, debido a la simetría cilíndrica del problema, se tiene que $N_x = N_y$, y por lo tanto,

$$N_x = N_y = \frac{1 - N_z}{2}, \quad (\text{A.3})$$

donde el factor demagnetizante N_z está dado por [56, 58]

$$N_z(\beta, \tau) = \frac{2}{\tau(1 - \beta^2)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\tau q}}{q^2} [J_1(q) - \beta J_1(q\beta)]^2 dq, \quad (\text{A.4})$$

y es evaluado en el Apéndice B. Usando el hecho que $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$, es posible escribir la ecuación (A.2) como

$$E_d(m_z) = \frac{\mu_0 M_0^2}{4} \mathcal{V} (1 - m_z^2 + (3m_z^2 - 1) N_z). \quad (\text{A.5})$$

Utilizando $m_z = \cos \theta$, donde θ es el ángulo que forma la magnetización con el eje z , la energía resulta (ver Fig. A.1)

$$E_d(\theta) = \frac{\mu_0 M_0^2}{4} \mathcal{V} [\sin^2 \theta + (3 \cos^2 \theta - 1) N_z] , \quad (\text{A.6})$$

donde N_z está dado por la ecuación (A.4).

Apéndice B

Factor demagnetizante en una partícula con simetría cilíndrica

En este apéndice calcularemos el factor demagnetizante N_z en una partícula con simetría cilíndrica (cilindro, anillo o tubo). Para ello debemos calcular la energía dipolar de una partícula de altura H magnetizada en la dirección z , es decir con vector magnetización $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{z}}$. La relación general [23] entre la energía dipolar y los factores demagnetizantes N_j es la siguiente

$$E_d = \frac{\mu_0 M_0^2}{2} \mathcal{V} (m_x^2 N_x + m_y^2 N_y + m_z^2 N_z), \quad (\text{B.1})$$

donde \mathcal{V} es el volumen. Como consideraremos $m_x = m_y = 0$, y $m_z = 1$, entonces

$$N_z = \frac{2}{\mathcal{V} \mu_0 M_0^2} E_d. \quad (\text{B.2})$$

Calcularemos ahora la energía dipolar, la que es usualmente obtenida a partir de (Ec. 1.16)

$$E_d = \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \nabla U(\mathbf{r}) \, dv,$$

de manera que en coordenadas cilíndricas tenemos

$$E_d = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \left(M_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} M_\phi \frac{\partial U}{\partial \phi} + M_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \rho \, d\rho \, d\phi \, dz, \quad (\text{B.3})$$

y como la magnetización está orientada en el eje z , entonces

$$\begin{aligned} M_\rho &= 0 \\ M_\phi &= 0 \\ M_z &= M_0, \end{aligned}$$

y la energía se reduce a calcular la siguiente expresión

$$E_d = \frac{\mu_0 M_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \frac{\partial U}{\partial z} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz. \quad (\text{B.4})$$

El potencial magnetostático está dado por [23]

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, ds'. \quad (\text{B.5})$$

Las cuatro superficies (\mathcal{S}_i) del anillo están caracterizadas por su vector normal $\hat{\mathbf{n}}_i$ y su elemento de superficie ds_i , definidos en la tabla B.1. En nuestro caso la magnetización es uniforme en el eje z , de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0,$$

y la integración es sobre las tapas superior e inferior del tubo, \mathcal{S}_3 y \mathcal{S}_4 , ya que los mantos cilíndricos no contribuyen,

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{M} = \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{M} = 0.$$

De esta manera el potencial (Ec. B.5) se reduce a

$$U(\mathbf{r}) = \frac{M_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_3} \frac{ds'_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=H}} - \frac{M_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_4} \frac{ds'_4}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=0}}. \quad (\text{B.6})$$

\mathcal{S}_1 manto cilíndrico interno ($\rho = a$)	$\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$	$ds_1 = a \, d\phi \, dz$
\mathcal{S}_2 manto cilíndrico externo ($\rho = R$)	$\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\boldsymbol{\rho}}$	$ds_2 = R \, d\phi \, dz$
\mathcal{S}_3 tapa superior ($z = H$)	$\hat{\mathbf{n}}_3 = \hat{\mathbf{z}}$	$ds_3 = \rho \, d\phi \, d\rho$
\mathcal{S}_4 tapa inferior ($z = 0$)	$\hat{\mathbf{n}}_4 = -\hat{\mathbf{z}}$	$ds_4 = \rho \, d\phi \, d\rho.$

Cuadro B.1: Superficies en un anillo.

Usando la siguiente expansión en coordenadas cilíndricas [27]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} dk J_p(k\rho) J_p(k\rho') e^{-k(z_>-z_<)} \quad (\text{B.7})$$

donde $z_>$ ($z_<$) es el mayor (menor) entre z y z' , y $J_p(w)$ es una función de Bessel de primera especie y orden p . Al reemplazar la expansión anterior en el potencial (Ec. B.6) obtenemos

$$U(\mathbf{r}) = \frac{M_0}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} d\phi' \int_a^R \rho' d\rho' \int_0^{\infty} dk J_p(k\rho) J_p(k\rho') \{e^{-k(H-z)} - e^{-kz}\}.$$

La integral angular en la expresión anterior resulta

$$\int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} d\phi' = 2\pi e^{ip\phi} \delta_{p,0}, \quad (\text{B.8})$$

lo que elimina la suma y el potencial se reduce a

$$U(\mathbf{r}) = \frac{M_0}{2} \int_a^R \rho' d\rho' \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) J_0(k\rho') \{e^{-k(H-z)} - e^{-kz}\}. \quad (\text{B.9})$$

En la energía (Ec. B.4) aparece la derivada con respecto a z del potencial, la que resulta

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{M_0}{2} \int_a^R \rho' d\rho' \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) J_0(k\rho') k \{e^{-k(H-z)} + e^{-kz}\},$$

y al reemplazar en la energía (Ec. B.4) obtenemos

$$E_d = \frac{\mu_0 M_0^2}{4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} k dk \left(\int_a^R \rho d\rho J_0(k\rho) \right)^2 \int_0^H dz \{e^{-k(H-z)} + e^{-kz}\}.$$

Podemos integrar directamente en la coordenada angular ϕ , lo que nos arroja un factor 2π . Además, las integrales en las coordenadas z y ρ resultan

$$\int_0^H dz \{e^{-k(H-z)} + e^{-kz}\} = 2 \frac{1 - e^{-Hk}}{k},$$

$$\int_a^R \rho J_0(k\rho) d\rho = \frac{RJ_1(kR) - aJ_1(ka)}{k}, \quad (\text{B.10})$$

con lo que la energía se reduce a

$$E_d = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-Hk}}{k^2} [RJ_1(kR) - aJ_1(ka)]^2 dk. \quad (\text{B.11})$$

Haciendo el cambio de variable $q = kR$ obtenemos

$$E_d = \pi\mu_0 M_0^2 R^3 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\tau q}}{q^2} [J_1(q) - \beta J_1(\beta q)]^2 dq, \quad (\text{B.12})$$

de tal manera que el factor demagnetizante (Ec. B.2) puede ser escrito como

$$N_z(\beta, \tau) = \frac{2}{\tau(1 - \beta^2)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\tau q}}{q^2} [J_1(q) - \beta J_1(q\beta)]^2 dq, \quad (\text{B.13})$$

resultado que es usado tanto en el estudio de cilindros ($\beta = 0$), como de anillos y tubos.

Apéndice C

Energía de la configuración de vórtice con core

En este apéndice calculamos la energía de la configuración de vórtice con core, considerando las contribuciones dipolar, de intercambio y anisotropía. La magnetización reducida de esta configuración puede ser descrita idealmente mediante la siguiente forma funcional

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = m_\phi(\rho)\hat{\phi} + m_z(\rho)\hat{\mathbf{z}}, \quad 0 \leq \rho \leq C \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \hat{\phi}, \quad C \leq \rho \leq R, \quad (\text{C.2})$$

donde modelamos el core con la función

$$m_z(\rho) = \left(1 - \left(\frac{\rho}{C}\right)^2\right)^n, \quad 0 \leq \rho \leq C. \quad (\text{C.3})$$

C.1. Energía dipolar

Para la magnetización de la configuración V , la energía dipolar (Ec. 1.16) puede escribirse de la siguiente forma

$$E_d = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^R \left(\frac{M_\phi(\rho)}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} + M_z(\rho) \frac{\partial U}{\partial z} \right) \rho \, d\rho \, dz \, d\phi, \quad (\text{C.4})$$

donde el potencial magnetostático (Ec. 1.17), que en este caso no presenta cargas volumétricas ($\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$), está dado por

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, ds'.$$

Podemos separar la integral anterior en tres contribuciones debidas a las tres superficies del cilindro (\mathcal{S}_1 tapa inferior, \mathcal{S}_2 tapa superior y \mathcal{S}_3 es el manto cilíndrico) con vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_3 = \hat{\mathbf{r}}$, (ver tabla B.1) con lo que obtenemos

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^C \frac{M_z(\rho') ds'_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=H}} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^C \frac{M_z(\rho') ds'_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=0}} .$$

Usando la expansión de la función de Green (Ec. B.7) en coordenadas cilíndricas, es posible obtener

$$U(\rho, z) = \frac{1}{2} \int_0^C \rho' d\rho' M_z(\rho') \int_0^\infty dq J_0(q\rho) J_0(q\rho') (e^{-q(H-z)} - e^{-qz}) . \quad (\text{C.5})$$

Este potencial no depende de ϕ , por lo que la energía magnetostática (Ec. C.4) resulta

$$E_d = \pi\mu_0 \int_0^C \rho M_z(\rho) d\rho \int_0^H \frac{\partial U(\rho, z)}{\partial z} dz ,$$

y al reemplazar el potencial e integrar en z obtenemos la siguiente expresión

$$E_d = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty dq \left(\int_0^C \rho J_0(q\rho) m_z(\rho) d\rho \right)^2 (1 - e^{-Hq}) . \quad (\text{C.6})$$

Esta es una forma completamente general de escribir la energía dipolar para un cilindro en la configuración de vórtice con core. La energía depende del perfil de la magnetización en el core, $m_z(\rho)$, y es independiente del radio del cilindro. En nuestro modelo para $m_z(\rho)$ (Ec. C.3), la energía dipolar resulta

$$E_d = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty dq (1 - e^{-Hq}) \left(\int_0^C \rho J_0(q\rho) \left(1 - \frac{\rho^2}{C^2}\right)^n d\rho \right)^2 ,$$

y al integrar se obtiene

$$E_d = \pi\mu_0 M_0^2 C^3 \left(\alpha_n - \frac{C}{4H} \beta_n F \left[n, \frac{C}{H} \right] \right) ,$$

donde $F[n, w]$ es una función hipergeométrica generalizada dada por

$$F[n, w] = {}_pF_Q \left[\left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} + n \right\}, \{n + 2, 2n + 3\}, -4w^2 \right]. \quad (\text{C.7})$$

En la expresión anterior para la energía, α_n y β_n son factores que dependen sólo de n y están definidos por

$$\alpha_n = \frac{2^{2n-1} \Gamma(n+1)^3}{\Gamma(\frac{3}{2} + n) \Gamma(\frac{5}{2} + 2n)}, \quad (\text{C.8})$$

$$\beta_n = \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(n+2)^2}, \quad (\text{C.9})$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma.

C.2. Energía de intercambio

En la teoría semiclásica del magnetismo [23], la energía de intercambio (Ec. 1.6) para cilindros, se escribe de la siguiente forma

$$E_{ex} = A \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^R f(\rho, \phi, z) \rho \, d\rho \, dz \, d\phi, \quad (\text{C.10})$$

donde

$$f(\rho, \phi, z) = (\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2.$$

Para la configuración de vórtice con core, las componentes cartesianas de la magnetización pueden escribirse como

$$\begin{aligned} m_x &= -m_\phi(\rho) \sin \phi \\ m_y &= m_\phi(\rho) \cos \phi \\ m_z &= m_z(\rho), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

donde $m_\phi^2(\rho) = 1 - m_z^2(\rho)$. Después de calcular los gradientes, la expresión anterior para $f(\rho, \phi, z)$ puede reescribirse como

$$f(\rho, \phi, z) = f(\rho) = \frac{1 - m_z^2(\rho)}{\rho^2} + \frac{1}{1 - m_z^2(\rho)} \left(\frac{\partial m_z(\rho)}{\partial \rho} \right)^2, \quad (\text{C.12})$$

de manera que podemos integrar la energía (Ec. C.10) en ϕ y z , resultando

$$E_{ex} = 2\pi HA \int_0^R f(\rho) \rho \, d\rho. \quad (\text{C.13})$$

Al reemplazar nuestro modelo para $m_z(\rho)$ (Ec. C.3), debemos distinguir dos regiones; la primera dentro del core, es decir $\rho < C$ donde $m_z(\rho) = [1 - (\rho/C)^2]^n$, de manera que la función f resulta

$$f_{in} = \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{C^2} \right)^{2n} + \frac{4n^2 \rho^4}{C^4} \frac{\left(1 - \frac{\rho^2}{C^2} \right)^{2n-2}}{1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{C^2} \right)^{2n}} \right).$$

Para la región externa al core, $m_z(\rho) = 0$ y la función $f(\rho)$ está dada simplemente por

$$f_{out} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Por lo tanto, la energía de intercambio es

$$E_x = 2\pi HA \int_0^C f_{in}(\rho) \rho \, d\rho + 2\pi HA \ln \frac{R}{C}.$$

Haciendo el cambio $\rho = C \sin \theta$, la integral en la ecuación anterior puede escribirse como

$$\gamma_n \equiv \int_0^C f_{in}(\rho) \rho \, d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(1 - (\cos \theta)^{4n} + 4n^2 \frac{\sin^4 \theta (\cos \theta)^{4n-4}}{1 - (\cos \theta)^{2n}} \right) d\theta,$$

lo que finalmente es expresable en términos de las llamadas “funciones número armónico”, $\mathcal{H}[z]$ [49], es decir

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \mathcal{H}[2n] - n \mathcal{H}[-1/2n],$$

donde $\mathcal{H}[z]$ es definida por

$$\mathcal{H}[z] = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+z} \right). \quad (\text{C.14})$$

Finalmente obtenemos el resultado analítico para la energía de intercambio de la configuración de vórtice con core

$$E_x = 2\pi H A \left(\ln \frac{R}{C} + \gamma_n \right) .$$

Es interesante notar que la función γ_n tiene un mínimo para $n \approx 1.49$, lo que significa que si la interacción de intercambio es la única presente, entonces el perfil de la magnetización estaría definido por la Ec. (C.3) con $n \approx 1.49$. Este perfil para m_z es muy parecido al propuesto por Usov y Peschany [47], en el que se obtiene la forma de la magnetización usando métodos variacionales, minimizando sólo la energía de intercambio, sin considerar la contribución de la energía dipolar.

C.3. Energías de anisotropía

Consideraremos anisotropías cristalina de tipo cúbico, E_c , y uniaxial, E_u , las que están definidas por [23]

$$E_c = K_c \int_{\mathcal{V}} (m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) dv , \quad (\text{C.15})$$

y

$$E_u = -K_u \int_{\mathcal{V}} m_z^2 dv . \quad (\text{C.16})$$

Las componentes cartesianas de la magnetización de la configuración de vórtice con core están dadas por

$$\begin{aligned} m_x &= -m_\phi(\rho) \sin \phi \\ m_y &= m_\phi(\rho) \cos \phi \\ m_z &= m_z(\rho) , \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

y al reemplazar en la anisotropía cristalina obtenemos

$$E_c = K_c \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^R [m_\phi^4(\rho) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + m_\phi^2(\rho) m_z^2(\rho)] \rho d\rho dz d\phi .$$

Al integrar en ϕ y en z y reemplazar $m_\phi^2 = 1 - m_z^2$, la energía resulta

$$E_c = 2\pi H K_c \int_0^R \left[\frac{1}{8} + \frac{3}{4} m_z^2(\rho) - \frac{7}{8} m_z^4(\rho) \right] \rho d\rho .$$

Debemos separar la integral, ya que entre C y R , $m_z = 0$, es decir

$$E_c = 2\pi H K_c \left[\int_0^C \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} m_z^2(\rho) - \frac{7}{8} m_z^4(\rho) \right) \rho d\rho + \int_C^R \frac{1}{8} \rho d\rho \right] .$$

y al integrar obtenemos finalmente

$$E_c = \frac{\pi H K_c}{8} (\delta_n C^2 + R^2) , \quad (\text{C.18})$$

donde

$$\delta_n = \frac{10n - 1}{(2n + 1)(4n + 1)} .$$

La anisotropía uniaxial está dada por

$$E_u = -K_u \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^R m_z^2(\rho) \rho d\rho dz d\phi , \quad (\text{C.19})$$

expresión que se puede ser escrita como

$$E_u = -2\pi H K_u \int_0^C m_z^2(\rho) \rho d\rho . \quad (\text{C.20})$$

Al reemplazar nuestro modelo para $m_z(\rho)$ obtenemos

$$E_u = -\pi H K_u \frac{C^2}{2n + 1} . \quad (\text{C.21})$$

Apéndice D

Energía de la configuración onion

En este apéndice calculamos las distintas contribuciones a la energía de un anillo en el estado onion. El cálculo de la energía dipolar de esta configuración descrita en el capítulo 3 comienza reemplazando la forma funcional (Ec. 3.10) en la energía (1.16), de manera que la energía dipolar se escribe

$$E_d^{\mathcal{O}} = \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \left[M_\rho(\phi) \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{M_\phi(\phi)}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right] dv. \quad (\text{D.1})$$

Para el cálculo del potencial magnetostático (Ec. 1.17) usaremos la expresión (3.10) y la siguiente expansión [27] en coordenadas cilíndricas ρ , ϕ y z

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} J_p(q\rho) J_p(q\rho') e^{q(z<-z>)} dq, \quad (\text{D.2})$$

donde J_p son las funciones de Bessel de primera especie y orden p . De esta manera la contribución de la superficie al potencial (segundo término en Eq. 1.17), resulta

$$U_S = \frac{M_0}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\phi} \int_0^{2\pi} m_\rho(\phi') e^{-ip\phi'} d\phi' \int_0^{\infty} dq J_p(q\rho) [R J_p(qR) - a J_p(qa)] \int_0^H e^{q(z<-z>)} dz'.$$

Usando $m_\rho(\phi)$ definido por la Ec. (3.11), no es difícil obtener la expresión

$$\int_0^{2\pi} m_\rho(\phi) e^{-ip\phi} d\phi = 2(1 - e^{-ip\pi}) b_p, \quad (\text{D.3})$$

donde b_p es dado por la Ec. (3.16). Esta relación nos lleva a considerar sólo valores impares del índice p en la suma del potencial U_S . Integrando en la variable z' , y después de algunas manipulaciones, obtenemos

$$U_S = \frac{2M_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} b_p \cos(p\phi) \int_0^{\infty} dq J_p(q\rho) [RJ_p(qR) - aJ_p(qa)] \frac{2 - e^{-qz} - e^{-q(H-z)}}{q}.$$

Introduciendo este potencial en la Ec. (D.1), podemos escribir la energía como

$$\begin{aligned} E_{dS}^{\mathcal{O}} &= \frac{\mu_0 M_0^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} b_p \int_0^{\infty} \frac{dq}{q} \int_0^H dz [2 - e^{-qz} - e^{-q(H-z)}] \\ &\times \int_a^R d\rho [RJ_p(qR) - aJ_p(qa)] \left\{ \frac{q\rho}{2} [J_{p-1}(q\rho) - J_{p+1}(q\rho)] \right. \\ &\times \left. \int_0^{2\pi} m_\rho(\phi) \cos(p\phi) d\phi - J_p(q\rho) p \int_0^{2\pi} m_\phi(\phi) \sin(p\phi) d\phi \right\}. \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones definidas en el capítulo 3 (Ecs. 3.16 y 3.17)

$$\int_0^{2\pi} m_\rho(\phi) \cos(p\phi) d\phi = 4b_p$$

y

$$p \int_0^{2\pi} m_\phi(\phi) \sin(p\phi) d\phi = -4d_p,$$

en la Ec. (D.4) se obtiene

$$E_{dS}^{\mathcal{O}} = \mu_0 M_0^2 R^3 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} dy [J_p(y) - \beta J_p(\beta y)] \frac{e^{-\tau y} + \tau y - 1}{y^2} \\ \int_{\beta}^1 dx \left\{ b_p d_p J_p(xy) + b_p^2 \frac{xy}{2} [J_{p-1}(xy) - J_{p+1}(xy)] \right\} .$$

Así, la contribución superficial a la energía dipolar (Ec. 3.14) puede ser escrita como

$$\tilde{E}_{dS}^{\mathcal{O}} \equiv \frac{E_{dS}^{\mathcal{O}}}{\mu_0 M_0^2 L_{ex}^3} = r^3 \sum_{p=1}^{\infty} b_p (b_p Q_1 + d_p Q_2) .$$

El cálculo de la contribución volumétrica a la energía de la fase onion (Ec. 3.15) sigue el mismo procedimiento descrito más arriba.

La energía de intercambio de la configuración onion viene de sustituir las componentes cartesianas de la magnetización

$$m_x(\phi) = m_\rho(\phi) \cos \phi - m_\phi(\phi) \sin \phi \\ m_y(\phi) = m_\rho(\phi) \sin \phi + m_\phi(\phi) \cos \phi,$$

en la expresión semiclásica, Ec. (1.6), desde donde obtenemos que

$$\tilde{E}_{ex}^{\mathcal{O}} = \frac{h}{2} \log \frac{1}{\beta} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial \phi} - m_\phi \right)^2 + \left(\frac{\partial m_\phi}{\partial \phi} + m_\rho \right)^2 \right] d\phi .$$

Utilizando en esta ecuación el perfil de la magnetización presentado en el capítulo 3, (Ecs. 3.11 y 3.12), encontramos la energía de intercambio de la configuración onion (Eq. 3.18),

$$\tilde{E}_{ex}^{\mathcal{O}} = -\pi h [I(n) - 1] \ln \beta , \quad (\text{D.5})$$

con

$$I(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - f^2(n, \phi)} \left[\frac{\partial f(n, \phi)}{\partial \phi} \right]^2 d\phi . \quad (\text{D.6})$$

Apéndice E

Energía de una pared de dominio de vórtice

En este apéndice calculamos la energía de una pared de dominio tipo vórtice confinada dentro de un nanotubo magnético. Como estudio preliminar no consideramos los efectos de la anisotropía ni del campo magnético externo, de manera que la energía está dada por las contribuciones de intercambio y dipolar. La magnetización de tal configuración magnética es escrita de la siguiente forma

$$\mathbf{m}^V(z) = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}}, & 0 \leq z \leq z_w - w/2 \\ m_\phi(z)\hat{\phi} + m_z(z)\hat{\mathbf{z}}, & z_w - w/2 \leq z \leq z_w + w/2 \\ -\hat{\mathbf{z}}, & z_w + w/2 \leq z \leq H. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

donde la estructura interna de la pared la modelamos con la siguiente forma funcional

$$m_z(z) = \cos \Theta(z), \quad (\text{E.2})$$

donde la función $\Theta(z)$ está dada por

$$\Theta(z) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{z - z_w}{w/2} + 1 \right). \quad (\text{E.3})$$

La magnetización dentro de la pared puede ser escrita en términos de sus componentes cartesianas, es decir,

$$\mathbf{m} = - (m_\phi(z) \sin \phi) \hat{\mathbf{x}} + (m_\phi(z) \cos \phi) \hat{\mathbf{y}} + m_z(z) \hat{\mathbf{z}},$$

de manera que

$$\begin{aligned} m_x &= -m_\phi(z) \sin \phi \\ m_y &= m_\phi(z) \cos \phi \\ m_z &= m_z(z) , \end{aligned}$$

donde

$$m_\phi(z) = \sqrt{1 - m_z^2(z)} .$$

E.1. Energía de intercambio

Como la magnetización varía espacialmente sólo dentro de la pared de dominio, la energía de intercambio (Ec. 1.6) está dada por

$$E_x = A \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^R \rho d\rho \int_{wall} dz \left((\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2 \right) ,$$

donde $\int_{wall} = \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2}$. Calculando los gradientes de las componentes de la magnetización obtenemos

$$(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2 = \frac{m_\phi^2(z)}{\rho^2} + \left(\frac{\partial m_\phi(z)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial m_z(z)}{\partial z} \right)^2 ,$$

de manera que integrando en ϕ la energía de intercambio se escribe

$$E_x = 2\pi A \int_a^R \rho d\rho \int_{wall} dz \left(\frac{m_\phi^2(z)}{\rho^2} + \left(\frac{\partial m_\phi(z)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial m_z(z)}{\partial z} \right)^2 \right) .$$

Como $m_z(z) = \cos \Theta(z)$, entonces $m_\phi(z) = \sin \Theta(z)$ y la energía resulta

$$E_x = 2\pi A \int_{wall} dz \left(\sin^2 \Theta \int_a^R \frac{d\rho}{\rho} + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \int_a^R \rho d\rho \right) ,$$

y al integrar en ρ obtenemos

$$E_x = 2\pi A \ln \frac{R}{a} \int_{wall} \sin^2 \Theta dz + \pi A (R^2 - a^2) \int_{wall} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 dz .$$

Introduciendo nuestro modelo para $\Theta(z)$ (Ec. E.3) la energía de intercambio se reduce finalmente a

$$E_x = \pi Aw \ln \frac{R}{a} + \frac{\pi^3}{w} A (R^2 - a^2) .$$

E.2. Energía Dipolar

La energía dipolar (Ec. 1.16) en coordenadas cilíndricas se obtiene a partir de

$$E = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \left(\frac{1}{\rho} M_\phi(z) \frac{\partial U}{\partial \phi} + M_z(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) \rho d\rho d\phi dz , \quad (\text{E.4})$$

donde el potencial magnetostático está dado por la siguiente expresión

$$U = \frac{1}{4\pi} \left(- \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' + \int_{\mathcal{S}} \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' \right) . \quad (\text{E.5})$$

Debido a la pared de dominio en el tubo, la parte volumétrica del potencial es no nula, es decir $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$, y como $\mathbf{M} = \mathbf{M}(z)$, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial z} .$$

Separaremos entonces las partes volumétrica y superficial del potencial, es decir $U = U_{\mathcal{V}} + U_{\mathcal{S}}$, de manera que la energía tendrá dos componentes, una volumétrica y otra superficial, es decir

$$E = E_{\mathcal{V}} + E_{\mathcal{S}} .$$

E.2.1. Energía dipolar superficial

La energía dipolar superficial de la pared de dominio tipo vórtice, está dada por

$$E_{\mathcal{S}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \left(\frac{1}{\rho} M_\phi(z) \frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial \phi} + M_z(z) \frac{\partial U_{\mathcal{S}}}{\partial z} \right) \rho d\rho d\phi dz , \quad (\text{E.6})$$

donde la parte superficial del potencial está dada por

$$U_S = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' .$$

Como no existe componente radial en la magnetización, los mantos cilíndricos no contribuyen al potencial, y al separar la integral en las 4 superficies (ver tabla B.1) se obtiene

$$U_S = -\frac{M_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_3} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=H}} - \frac{M_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_4} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=0}} ,$$

ya que en la tapa superior (\mathcal{S}_3) $M_z(H) = -M_0$, mientras que en la tapa inferior (\mathcal{S}_4) $M_z(0) = M_0$. Al expandir la función de Green en la forma usual [27] dada por la ecuación (1.18), y reemplazando en el potencial anterior obtenemos

$$U_S = -\frac{M_0}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} d\phi' \int_0^{\infty} dq \int_a^R \rho' d\rho' J_p(q\rho) J_p(q\rho') [e^{-q(H-z)} + e^{-qz}] .$$

La integral angular (Ec. B.8) elimina la suma en la expresión anterior y el potencial se reduce a

$$U_S = -\frac{M_0}{2} \int_0^{\infty} dq \int_a^R \rho' d\rho' J_0(q\rho) J_0(q\rho') [e^{-q(H-z)} + e^{-qz}] . \quad (\text{E.7})$$

Claramente $U_S = U_S(\rho, z)$ y por lo tanto, $\partial_\phi U_S = 0$ en la energía (Ec. E.6). Además el integrando es independiente de la coordenada axial ϕ , por lo que la parte superficial de la energía (Ec. E.6) resulta

$$E_S = \pi\mu_0 \int_0^H \int_a^R M_z(z) \frac{\partial U_S(\rho, z)}{\partial z} \rho d\rho dz . \quad (\text{E.8})$$

La derivada del potencial resulta

$$\frac{\partial U_S}{\partial z} = -\frac{M_0}{2} \int_0^{\infty} q dq \int_a^R \rho' d\rho' J_0(q\rho) J_0(q\rho') [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] , \quad (\text{E.9})$$

y al reemplazar en la energía se obtiene

$$E_S = -\frac{\pi\mu_0 M_0^2}{2} \int_0^\infty q \, dq \left(\int_a^R J_0(q\rho) \rho \, d\rho \right)^2 \int_0^H m_z(z) [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] \, dz .$$

La integral radial resulta

$$\int_a^R J_0(q\rho) \rho \, d\rho = \frac{1}{q} [RJ_1(qR) - aJ_1(qa)] , \quad (\text{E.10})$$

y entonces podemos escribir la energía de la siguiente forma

$$E_S = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q} [RJ_1(qR) - aJ_1(qa)]^2 \Psi(q) , \quad (\text{E.11})$$

donde hemos definido la función,

$$\Psi(q) \equiv -\frac{1}{2} \int_0^H m_z(z) [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] \, dz . \quad (\text{E.12})$$

Para integrar en la coordenada z separamos la integral de acuerdo a la Ec. (E.1) para la magnetización. La función anterior se escribe entonces

$$\begin{aligned} \Psi(q) \equiv & -\frac{1}{2} \int_0^{z_w-w/2} [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] \, dz - \frac{1}{2} \int_{z_w-w/2}^{z_w+w/2} m_z(z) [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] \, dz \\ & + \frac{1}{2} \int_{z_w+w/2}^H [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] \, dz . \end{aligned}$$

La componente z de la magnetización de nuestro modelo (Ec. E.2) puede escribirse como

$$m_z(z) = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{z - z_w}{w/2} + 1 \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{w} (z - z_w) \right) ,$$

de forma que después de un poco de cálculo obtenemos

$$\Psi(q) = \frac{e^{-Hq} + 1}{q} - \pi^2 \frac{e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}}{q(\pi^2 + q^2 w^2)} \cosh\left[\frac{wq}{2}\right]. \quad (\text{E.13})$$

Finalmente, la energía dipolar superficial (Ec. E.11) puede escribirse como

$$E_S = \pi\mu_0 M_0^2 R^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} [J_1(qR) - \beta J_1(\beta qR)]^2 f_S, \quad (\text{E.14})$$

donde

$$f_S \equiv e^{-Hq} + 1 - \pi^2 \frac{e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}}{\pi^2 + q^2 w^2} \cosh\left[\frac{wq}{2}\right]. \quad (\text{E.15})$$

E.2.2. Energía dipolar volumétrica

La contribución volumétrica al potencial magnetostático está dada por

$$U_V = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv',$$

y la divergencia de la magnetización ($\mathbf{M} = M_\phi(z)\hat{\phi} + M_z(z)\hat{z}$) es

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho M_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial z}.$$

Reemplazando la ecuación anterior y expandiendo la función de Green (Ec. 1.18) obtenemos

$$U_V = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} d\phi' \int_0^\infty dq J_p(q\rho) \int_a^R \rho' J_p(q\rho') d\rho' \int_0^H \frac{\partial M_z}{\partial z'} e^{-q(z_>-z_<)} dz'.$$

La integral angular (Ec. B.8) elimina la suma y el potencial se reduce a

$$U_V(\rho, z) = -\frac{M_0}{2} \int_0^\infty dq J_0(q\rho) \int_a^R \rho' J_0(q\rho') d\rho' \Pi(z, q), \quad (\text{E.16})$$

donde por simplicidad hemos definido la siguiente función,

$$\Pi(z, q) \equiv \int_0^H \frac{\partial m_z(z')}{\partial z'} e^{-q(z > -z <)} dz' = \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \frac{\partial m_z}{\partial z'} e^{-q(z > -z <)} dz'. \quad (\text{E.17})$$

Es importante notar que la integración de la función anterior se reduce al intervalo donde varía la componente z de la magnetización, lo que ocurre dentro de la pared de dominio ($z_w - w/2 \leq z \leq z_w + w/2$), ya que fuera de tal región, la magnetización es constante ($m_z = \pm 1$). La energía dipolar (Ec. E.4) asociada al potencial volumétrico es

$$E_V = \pi\mu_0 \int_0^H \int_a^R M_z(z) \frac{\partial U_V}{\partial z} \rho d\rho dz, \quad (\text{E.18})$$

donde la derivada del potencial resulta

$$\frac{\partial U_V}{\partial z} = -\frac{M_0}{2} \int_0^\infty dq J_0(q\rho) \int_a^R \rho' J_0(q\rho') d\rho' \frac{\partial \Pi(z, q)}{\partial z}.$$

Reemplazando en la energía, e integrando los términos radiales (Ec. E.10) se obtiene

$$E_V = -\frac{\pi\mu_0 M_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} [RJ_1(qR) - aJ_1(qa)]^2 \Phi(q), \quad (\text{E.19})$$

donde hemos definido

$$\Phi(q) \equiv \int_0^H m_z(z) \frac{\partial \Pi(z, q)}{\partial z} dz.$$

Al integrar por partes la expresión anterior, esta se reduce a

$$\Phi(q) \equiv -\Pi(H, q) - \Pi(0, q) - \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \Pi(z, q) \frac{\partial m_z}{\partial z} dz. \quad (\text{E.20})$$

Calcularemos ahora la función $\Pi(z, q)$ (Ec. E.17). Comenzaremos evaluando $\Pi(0, q)$ y $\Pi(H, q)$, los que resultan

$$\begin{aligned}\Pi(0, q) &\equiv \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \frac{\partial m_z(z')}{\partial z'} e^{-qz'} dz' = -\frac{2\pi^2 e^{-qz_w}}{\pi^2 + q^2 w^2} \cosh\left[\frac{qw}{2}\right], \\ \Pi(H, q) &\equiv e^{-qH} \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \frac{\partial m_z}{\partial z'} e^{qz'} dz' = -\frac{2\pi^2 e^{-q(H-z_w)}}{\pi^2 + q^2 w^2} \cosh\left[\frac{qw}{2}\right].\end{aligned}$$

Al evaluar $\Pi(z, q)$ para z dentro de la pared de dominio obtenemos

$$\Pi(z, q) \equiv e^{-qz} \int_{z_w - w/2}^z \frac{\partial m_z}{\partial z'} e^{qz'} dz' + e^{qz} \int_z^{z_w + w/2} \frac{\partial m_z}{\partial z'} e^{-qz'} dz'.$$

Reemplazando la magnetización e integrando en z' se obtiene

$$\Pi(z, q) \equiv \frac{-2\pi^2}{\pi^2 + q^2 w^2} \left[e^{-qw/2} \cosh[q(z_w - z)] + \frac{qw}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{w}(z_w - z)\right] \right].$$

Podemos ahora escribir la función Φ (Ec. E.20) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Phi &\equiv \frac{2\pi^2 (e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w})}{\pi^2 + q^2 w^2} \cosh\left[\frac{qw}{2}\right] + \frac{2\pi^2}{\pi^2 + q^2 w^2} \\ &\quad \times \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \left(e^{-qw/2} \cosh[q(z_w - z)] + \frac{qw}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{w}(z_w - z)\right] \right) \frac{\partial m_z}{\partial z} dz,\end{aligned}$$

y al integrar obtenemos

$$\frac{\Phi}{2} \equiv -\frac{qw/2 - (e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}) \cosh[qw/2]}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} - \frac{1 + e^{-qw}}{(1 + q^2 w^2 / \pi^2)^2}.$$

Reemplazando en la energía (Ec. E.19) obtenemos finalmente

$$E_V = \pi \mu_0 M_0^2 R^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} [J_1(qR) - \beta J_1(\beta qR)]^2 f_V, \quad (\text{E.21})$$

donde

$$f_V \equiv \frac{qw/2 - (e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}) \cosh[qw/2]}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} + \frac{1 + e^{-qw}}{(1 + q^2 w^2 / \pi^2)^2}. \quad (\text{E.22})$$

Apéndice F

Energía de una pared de dominio transversal

En este apéndice calculamos la energía magnética de un nanotubo con una pared de dominio transversal confinada dentro de él. Consideramos sólo las contribuciones de intercambio y dipolar. Los efectos de la anisotropía y del campo externo en la estructura de la pared de dominio son objeto de investigación actual. La magnetización de esta configuración magnética es escrita de la siguiente forma

$$\mathbf{m}^T(z) = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}}, & 0 \leq z \leq z_w - w/2 \\ m_x(z)\hat{\mathbf{x}} + m_z(z)\hat{\mathbf{z}}, & z_w - w/2 \leq z \leq z_w + w/2 \\ -\hat{\mathbf{z}}, & z_w + w/2 \leq z \leq H, \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

donde la componente z de la magnetización de la pared la modelamos con la misma forma funcional utilizada en el estudio del modo V , es decir con la función

$$m_z(z) = \cos \Theta(z), \quad (\text{F.2})$$

de manera que la componente transversal es

$$m_x^2(z) = 1 - m_z^2(z).$$

Notar diferencias con la ecuación (E.1) que describe la magnetización en una pared de dominio tipo vórtice. Para algunos cálculos posteriores es conveniente escribir la magnetización en componentes cilíndricas, es decir, usando $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi$. De esta forma la magnetización dentro de la pared se puede escribir como

$$\mathbf{m} = (m_x(z) \cos \phi) \hat{\boldsymbol{\rho}} - (m_x(z) \sin \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} + m_z(z) \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{F.3})$$

F.1. Energía de intercambio

Como la magnetización no tiene componente en la dirección y , la energía de intercambio se reduce a

$$E_x = A \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^R \rho d\rho \int_0^H dz \left((\nabla m_x)^2 + (\nabla m_z)^2 \right). \quad (\text{F.4})$$

Debido a que m_x y m_z solo dependen de la coordenada z , entonces podemos escribir

$$(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_z)^2 = \left(\frac{\partial m_x(z)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial m_z(z)}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z} \right)^2.$$

Además, como la magnetización varía sólo dentro de la pared de dominio, la integración en z es entre $z = z_w - w/2$ y $z = z_w + w/2$, es decir, la energía de intercambio puede ser escrita de la siguiente forma

$$E_x = \pi A (R^2 - a^2) \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \left(\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z} \right)^2 dz.$$

La derivada de la función $\Theta(z)$ (Ec. E.3) resulta

$$\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z} = \frac{\pi}{w},$$

y por lo tanto la energía de intercambio del modo transversal resulta

$$E_x = \frac{\pi^3 A}{w} R^2 (1 - \beta^2).$$

F.2. Energía Dipolar

La energía dipolar (Ec. 1.16) para la magnetización (Ec. F.1) de la pared de dominio transversal puede escribirse como

$$E = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \left(M_x \cos \phi \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{M_x}{\rho} \sin \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} + M_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \rho d\rho d\phi dz. \quad (\text{F.5})$$

El potencial magnetostático (Ec. 1.17) tiene dos contribuciones, la volumétrica y la superficial, es decir, $U = U_V + U_S$, de manera que la energía es

$$E = E_V + E_S.$$

F.2.1. Energía dipolar superficial

La contribución superficial del potencial está dada por

$$U_S = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds'. \quad (\text{F.6})$$

Al separar la integral en la superficie total del tubo (ver tabla B.1) obtenemos

$$\begin{aligned} 4\pi U_S = & - \int_{S_1} \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\rho'=a}} ds' + \int_{S_2} \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\rho'=R}} ds' \\ & + \int_{S_3} \frac{\hat{\mathbf{z}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=H}} ds' - \int_{S_4} \frac{\hat{\mathbf{z}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=0}} ds', \end{aligned}$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') = M_x(z') \cos \phi'$$

y

$$\hat{\mathbf{z}}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') = M_z(z'),$$

de manera que el potencial resulta

$$\begin{aligned} \frac{4\pi U_S}{M_0} = & -a \int_{S_1} \frac{m_x(z') \cos \phi' d\phi' dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\rho'=a}} + R \int_{S_2} \frac{m_x(z') \cos \phi' d\phi' dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{\rho'=R}} \\ & - \int_{S_3} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=H}} - \int_{S_4} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=0}}, \end{aligned}$$

ya que $M_z(H) = -M_0$, y $M_z(0) = M_0$. Al expandir la función de Green $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en coordenadas cilíndricas (Ec. 1.18), el potencial se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{4\pi U_S}{M_0} = & \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq J_p(q\rho) \left[\{R J_p(qR) - a J_p(qa)\} \int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} \cos \phi' d\phi' \right. \\ & \left. \times \int_0^H m_x e^{-q(z>-z<)} dz' - \{e^{-q(H-z)} + e^{-qz}\} \int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} d\phi' \int_a^R J_p(q\rho') \rho' d\rho' \right]. \end{aligned}$$

Las integrales angulares están dadas por

$$\int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} \cos \phi' d\phi' = \pi e^{ip\phi} \delta_{p,\pm 1}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ip(\phi-\phi')} d\phi' = 2\pi e^{ip\phi} \delta_{p,0},$$

con lo que obtenemos la siguiente expresión para el potencial superficial,

$$U_S = \frac{M_0}{2} \cos \phi \int_0^{\infty} \psi(q) J_1(q\rho) \Upsilon(z, q) dq \quad (\text{F.7})$$

$$- \frac{M_0}{2} \int_0^{\infty} \psi(q) J_0(q\rho) \{e^{-q(H-z)} + e^{-qz}\} \frac{dq}{q}, \quad (\text{F.8})$$

donde hemos definido

$$\psi(q) \equiv RJ_1(qR) - aJ_1(qa) \quad (\text{F.9})$$

y

$$\Upsilon(z, q) \equiv \int_0^H m_x e^{-q(z > -z <)} dz'. \quad (\text{F.10})$$

La energía dipolar (Ec. F.5) asociada al potencial superficial está dada por

$$E_S = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \left(M_x \cos \phi \frac{\partial U_S}{\partial \rho} - \frac{M_x}{\rho} \sin \phi \frac{\partial U_S}{\partial \phi} + M_z \frac{\partial U_S}{\partial z} \right) \rho d\rho d\phi dz. \quad (\text{F.11})$$

Debemos calcular las derivadas del potencial (Ec. F.7). La parte radial está dada por

$$\frac{\partial U_S}{\partial \rho} = \frac{M_0}{2} \cos \phi \int_0^{\infty} \psi(q) \frac{\partial J_1(q\rho)}{\partial \rho} \Upsilon(z, q) dq$$

$$- \frac{M_0}{2} \int_0^{\infty} \psi(q) \frac{\partial J_0(q\rho)}{\partial \rho} \{e^{-q(H-z)} + e^{-qz}\} \frac{dq}{q},$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1(q\rho)}{\partial \rho} &= \left(qJ_0(q\rho) - \frac{J_1(q\rho)}{\rho} \right) \\ \frac{\partial J_0(q\rho)}{\partial \rho} &= -qJ_1(q\rho),\end{aligned}$$

de manera que la derivada radial del potencial resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_S}{\partial \rho} &= \frac{M_0}{2} \cos \phi \int_0^\infty q\psi(q) \left(J_0(q\rho) - \frac{J_1(q\rho)}{q\rho} \right) \Upsilon(z, q) dq \\ &+ \frac{M_0}{2} \int_0^\infty \psi(q) J_1(q\rho) \{e^{-q(H-z)} + e^{-qz}\} dq.\end{aligned}$$

La derivada angular del potencial (Ec. F.7) resulta

$$\frac{\partial U_S}{\partial \phi} = -\frac{M_0}{2} \sin \phi \int_0^\infty f(q) J_1(q\rho) \Upsilon(z, q) dq,$$

mientras que la derivada con respecto a z resulta

$$\frac{\partial U_S}{\partial z} = \frac{M_0}{2} \cos \phi \int_0^\infty f(q) J_1(q\rho) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} dq - \frac{M_0}{2} \int_0^\infty f(q) J_0(q\rho) \{e^{-q(H-z)} - e^{-qz}\} dq.$$

Reemplazando las derivadas anteriores en la energía (Ec. F.11) obtenemos

$$\begin{aligned}E_S &= \frac{M_0 \mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \rho d\rho d\phi dz \int_0^\infty \psi(q) dq \left[M_x \cos^2 \phi \left(qJ_0(q\rho) - \frac{J_1(q\rho)}{\rho} \right) \Upsilon \right. \\ &+ M_x \cos \phi J_1(q\rho) \{e^{-q(H-z)} + e^{-qz}\} + M_x \sin^2 \phi \frac{J_1(q\rho)}{\rho} \Upsilon \\ &\left. + M_z \cos \phi J_1(q\rho) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} - M_z J_0(q\rho) \{e^{-q(H-z)} - e^{-qz}\} \right].\end{aligned}$$

Los términos que contienen $\cos \phi$ no contribuyen a la integral, ya que $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$ y además $\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi$, con lo que la energía dipolar

superficial se reduce a

$$E_S = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty \psi(q) dq \int_a^R J_0(q\rho)\rho d\rho \int_0^H dz \left(\frac{q}{4} m_x \Upsilon - \frac{1}{2} m_z [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] \right).$$

Al integrar la parte radial (ver Ec. B.10) obtenemos

$$E_S = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q} \psi^2(q) \int_0^H dz \left[\frac{q}{4} m_x \Upsilon - \frac{1}{2} m_z \{e^{-q(H-z)} - e^{-qz}\} \right], \quad (\text{F.12})$$

donde $\psi(q)$ está dado por la ecuación (F.9). La expresión anterior puede ser escrita de la siguiente forma

$$E_S = \pi\mu_0 M_0^2 \int_0^\infty \psi^2(q) G(q) \frac{dq}{q}, \quad (\text{F.13})$$

donde hemos definido

$$G(q) = \frac{q}{4} \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} m_x(z) \Upsilon(z, q) dz - \frac{1}{2} \int_0^H m_z \{e^{-q(H-z)} - e^{-qz}\} dz. \quad (\text{F.14})$$

El segundo término aparece en el cálculo de la pared tipo vórtice (Ecs. E.12 y E.13) y está dado por

$$\begin{aligned} \Psi(q) &\equiv -\frac{1}{2} \int_0^H m_z [e^{-q(H-z)} - e^{-qz}] dz \\ &= \frac{e^{-Hq} + 1}{q} - \frac{\pi^2 (e^{-q(H-z_w)} + e^{-z_w q})}{q(\pi^2 + w^2 q^2)} \cosh[wq/2]. \end{aligned}$$

Para calcular el primer término en $G(q)$ tenemos que evaluar $\Upsilon(z, q)$ (Ec. F.10), expresión que puede ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Upsilon(z) &\equiv e^{-qz} \int_{z_w - w/2}^z \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z' - z_w}{w/2} + 1 \right) \right] e^{qz'} dz' \\ &\quad + e^{qz} \int_z^{z_w + w/2} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z' - z_w}{w/2} + 1 \right) \right] e^{-qz'} dz'. \end{aligned}$$

Al integrar obtenemos

$$\Upsilon(z) \equiv \frac{\pi w [e^{-q(z_w - z)} + e^{-q(-z_w + z)}] e^{-qw/2} + 2w^2 q \cos\left[\frac{\pi}{w}(z - z_w)\right]}{\pi^2 + w^2 q^2}. \quad (\text{F.15})$$

Podemos ahora calcular la función $G(q)$ evaluando el primer término en la Ec. (F.14), el que está dado por

$$\frac{q}{4} \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} m_x(z) \Upsilon(z) dz = \frac{q}{4} \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} \sin\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{z - z_w}{w/2} + 1\right)\right] \Upsilon(z) dz.$$

Al reemplazar la expresión anterior para $\Upsilon(z)$ e integrar, se obtiene

$$\frac{q}{4} \int_{z_w - w/2}^{z_w + w/2} m_x(z) \Upsilon(z) dz = \frac{w^2 q/2}{\pi^2 + w^2 q^2} \left(\frac{qw}{2} + \pi^2 \frac{1 + e^{-wq}}{\pi^2 + w^2 q^2} \right).$$

Por lo tanto la función G está dada por

$$G(q) = \frac{qw^2/2}{\pi^2 + q^2 w^2} \left(\frac{qw}{2} + \pi^2 \frac{1 + e^{-wq}}{\pi^2 + q^2 w^2} \right) + \frac{e^{-Hq} + 1}{q} - \frac{\pi^2 (e^{-q(H-z_w)} + e^{-z_w q})}{q(\pi^2 + q^2 w^2)} \cosh\left[\frac{wq}{2}\right],$$

de manera que la energía dipolar superficial (Ec. F.13) la escribimos ahora como

$$E_S = \pi \mu_0 M_0^2 R^2 \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} [J_1(qR) - \beta J_1(\beta qR)]^2 g_S, \quad (\text{F.16})$$

donde $g_S \equiv qG(q)$ está dado por

$$g_S = \frac{q^2 w^2/2}{\pi^2 + q^2 w^2} \left(\frac{qw}{2} + \pi^2 \frac{1 + e^{-qw}}{\pi^2 + q^2 w^2} \right) + f_S,$$

con f_S definido en la expresión (E.15).

F.2.2. Energía dipolar volumétrica

La energía dipolar volumétrica está dada por

$$E_{\mathcal{V}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_a^R \left(M_x \cos \phi \frac{\partial U_{\mathcal{V}}}{\partial \rho} - \frac{M_x}{\rho} \sin \phi \frac{\partial U_{\mathcal{V}}}{\partial \phi} + M_z \frac{\partial U_{\mathcal{V}}}{\partial z} \right) \rho \, d\rho \, d\phi \, dz, \quad (\text{F.17})$$

donde el potencial asociado está dado por

$$U_{\mathcal{V}} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dv'. \quad (\text{F.18})$$

Debido a la pared de dominio en el tubo, la parte volumétrica del potencial es no nula, es decir $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$. Como

$$\mathbf{M} = \cos \phi M_x(z) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin \phi M_x(z) \hat{\boldsymbol{\phi}} + M_z(z) \hat{\mathbf{z}},$$

entonces la divergencia de la magnetización es

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{M} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cos \phi M_x(z)) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi M_x(z)) + \frac{\partial M_z}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{M} &= \frac{1}{\rho} \cos \phi M_x(z) - \frac{1}{\rho} \cos \phi M_x(z) + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

El potencial es dado por

$$U_{\mathcal{V}} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial M_z}{\partial z} \, dv', \quad (\text{F.19})$$

resultado que es idéntico al potencial volumétrico de la pared de dominio tipo vórtice, ya que la componente axial de la magnetización (M_z) es la misma en ambos modos de reversión. Este potencial (Ec. E.16) resulta independiente de la coordenada angular ϕ , es decir, $U_{\mathcal{V}} = U_{\mathcal{V}}(\rho, z)$ por lo que podemos escribir la energía (Ec. F.17) de la siguiente forma

$$E_{\mathcal{V}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^H \int_a^R \left(M_x(z) \frac{\partial U_{\mathcal{V}}}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi + M_z(z) \frac{\partial U_{\mathcal{V}}}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\phi \right) \rho \, d\rho \, dz. \quad (\text{F.20})$$

Afortunadamente, $\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = 0$, de manera que la energía se reduce a

$$E_{\mathcal{V}} = \pi\mu_0 \int_0^H \int_a^R M_z(z) \frac{\partial U_{\mathcal{V}}}{\partial z} \rho \, d\rho \, dz. \quad (\text{F.21})$$

Esta expresión coincide con la energía dipolar volumétrica del modo V , visto en el apéndice anterior (Ec. E.18). Debido a que los potenciales volumétricos de ambos modos (V y T) coinciden, al igual que M_z , entonces podemos concluir que la forma funcional de la energía dipolar volumétrica del modo T es igual a la correspondiente del modo V . El resultado (Ec. E.21) está dado por

$$E_{\mathcal{V}} = \pi\mu_0 M_0^2 R^2 \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2} [J_1(qR) - \beta J_1(\beta qR)]^2 g_{\mathcal{V}}, \quad (\text{F.22})$$

donde

$$g_{\mathcal{V}} = \frac{qw/2 - (e^{-q(H-z_w)} + e^{-qz_w}) \cosh[qw/2]}{1 + q^2 w^2 / \pi^2} + \frac{1 + e^{-qw}}{(1 + q^2 w^2 / \pi^2)^2}. \quad (\text{F.23})$$

Si bien las expresiones para las energías dipolares volumétricas de ambos modos son idénticas, estas no necesariamente son iguales numéricamente, ya que cada modo tiene su propio ancho de pared (w), el que depende de la energía total de cada modo.

Bibliografía

- [1] S. Y Chou, “*Patterned magnetic nanostructures and quantized magnetic disks*”, Proc. IEEE **85**, 652 (1997).
- [2] G. Prinz, “*Magnetoelectronics*”, Science **282**, 1660 (1998).
- [3] J-G. Zhu, Y. Zheng, Gary A. Prinz, “*Ultrahigh density vertical magnetoresistive random access memory (invited)*”, J. Appl. Phys. **87**, 6668 (2000).
- [4] Yimin Guo, P. Wang, M.-M. Chen, C. Horng, T. Min, L. Hong, O. Voegeli, R. Tong, P. Chen, S. Le, J. Chen, T. Zhong, L. Yang, G. Liu, Y. Chen, S. Shi, K. Yang, D. Tsang, “*MRAM array with coupled soft-adjacent magnetic layer*”, J. Appl. Phys. **97**, 10P506 (2005).
- [5] D. A. Allwood, G. Xiong, C. C. Faulkner, D. Atkinson, D. Petit, R. P. Cowburn, “*Magnetic Domain-Wall Logic*”, Science **309**, 1688 (2005).
- [6] R. P. Cowburn, M. E. Welland, “*Room temperature magnetic quantum cellular automata*”, Science **287**, 1466 (2000).
- [7] J. M. Daughton, A. V. Pohm, R. T. Fayfield, C. H. Smith, “*Applications of spin dependent transport materials*”, J. Phys. D **32**, R169 (1999).
- [8] Sang Jun Son, Jonathan Reichel, Bo He, Mattan Schuchman, Sang Bok Lee, “*Magnetic Nanotubes for Magnetic-Field-Assisted Bioseparation, Biointeraction, and Drug Delivery*”, J. Am. Chem. Soc. **127**, 7316-7317 (2005).
- [9] Daeyeon Lee, Robert E. Cohen, Michael F. Rubner, “*Heterostructured Magnetic Nanotubes*”, Langmuir **23**, 123 (2007).

- [10] M. Vázquez, “*Soft magnetic wires (review)*”, *Physica B* **299**, 302-313 (2001).
- [11] K. Nielsch, R. Hertel, R. B. Wehrspohn, J. Barthel, J. Kirschner, U. Gösele, S. F. Fischer, H. Kronmüller, “*Switching Behavior of Single Nanowires Inside Dense Nickel Nanowire Arrays*”, *IEEE Trans. Magn.* **38**, 2571 (2002).
- [12] C. A. Ross, “*Patterned Magnetic Media*”, *Annual Review of Materials Science* **31**, 203-235 (2001).
- [13] R. P. Cowburn, D. K. Kolstov, A. O. Adeyeye, M. E. Welland, D. M. Tricker, “*Single-Domain Circular Nanomagnets*”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1042 (1999).
- [14] F. J. Castaño, C. A. Ross, A. Eilez, W. Jung, C. Frandsen, “*Magnetic configurations in 160-520-nm-diameter ferromagnetic rings*”, *Phys. Rev. B* **69**, 144421 (2004).
- [15] M. Kläui, C. A. F. Vaz, L. Lopez-Diaz, J. A. C. Bland, “*Vortex formation in narrow ferromagnetic rings (topical review)*”, *J. Phys.: Condens. Matter.* **15**, R985 (2003).
- [16] K. Nielsch, F. J. Castaño, C. A. Ross, R. Krishnan, “*Magnetic properties of template-synthesized cobalt/polymer composite nanotubes*”, *J. Appl. Phys.* **98**, 034318 (2005).
- [17] Kornelius Nielsch, Fernando J. Castaño, Sven Matthias, Woo Lee, Caroline A. Ross, “*Synthesis of cobalt/polymer multilayer nanotubes*”, *Adv. Eng. Mat.* **7**, 217-221 (2005)..
- [18] A. Yamasaki, W. Wulfhekel, R. Hertel, S. Suga, J. Kirschner, “*Direct Observation of the Single-Domain Limit of Fe Nanomagnets by Spin-Polarized Scanning Tunneling Spectroscopy*”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 127201 (2003).
- [19] C. A. Ross, M. Hwang, M. Shina, J. Y. Cheng, M. Farhoud, T. A. Savas, Henry I. Smith, W. Schwarzacher, F. M. Ross, M. Redjdal, F. B. Humphrey, “*Micromagnetic behavior of electrodeposited cylinder arrays*”, *Phys. Rev. B* **65**, 144417 (2002).

- [20] J. Rothman, M. Kläui, L. Lopez-Diaz, C. A. F. Vaz, A. Bleloch, J. A. C. Bland, Z. Cui, R. Speaks, “*Observation of a Bi-Domain State and Nucleation Free Switching in Mesoscopic Ring Magnets*”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1098 (2001).
- [21] T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf, K. Shigeto, T. Ono, “*Magnetic vortex core observation in circular dots of permalloy*”, *Science* **289**, 930 (2000).
- [22] Riccardo Hertel, Jürgen Kirschner, “*Magnetic drops in a soft-magnetic cylinder*”, *J. Magn. Magn. Mater.* **278**, L291–L297 (2004).
- [23] A. Aharoni, “*Introduction to the Theory of Ferromagnetism*” (Clarendon Press, Oxford, 1996).
- [24] G. Bertotti, “*Hysteresis in Magnetism*”, (Academic Press, San Diego, 1998).
- [25] R. C. O’Handley, “*Modern Magnetic Materials*” (John Wiley & Sons, Inc; USA, 2000).
- [26] S. Blundell, “*Magnetism in Condensed Matter*” (Oxford University Press, New York, 2001).
- [27] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, 2nd Edition (John Wiley & Sons, 1975).
- [28] P. Landeros, J. Escrig, D. Altbir, D. Laroze, J. d’ Albuquerque e Castro, P. Vargas, “*Scaling relations for magnetic nanoparticles*”, *Phys. Rev. B* **71**, 094435 (2005).
- [29] L. D. Buda, I. L. Prejbeanu, M. Demand, U. Ebels, K. Ounadjela, “*Vortex states stability in circular Co(0001) dots*”, *IEEE Trans. Magn.* **37**, 2061 (2001).
- [30] A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode, O. Pietzsch, M. Morgenstern, R. Wiesendanger, “*Direct observation of internal spin structure of magnetic vortex cores*”, *Science* **298**, 577 (2002).
- [31] A. Lebib, S. P. Li, M. Natali, Y. Chen, “*Size and thickness dependencies of magnetization reversal in Co dot arrays*”, *J. Appl. Phys.* **89**, 3892 (2001)

- [32] J. d' Albuquerque e Castro, D. Altbir, J. C. Retamal, P. Vargas, “*Scaling Approach to the Magnetic Phase Diagram of Nanosized Systems*”, Phys. Rev. Lett. **88**, 237202 (2002).
- [33] F. Porrati, M. Huth, “*Diagram of the states in arrays of iron nanocylinders*”, Appl. Phys. Lett. **85**, 3157 (2004).
- [34] C. A. Ross, Henry I. Smith, T. Savas, M. Schattenburg, M. Farhoud, M. Hwang, M. Walsh, M. C. Abraham, R. J. Ram, “*Fabrication of Patterned Media for High Density Magnetic Storage*”, J. Vac. Sci. Technol. B **17**, 3168 (1999).
- [35] K. L. Metlov, “*Two-dimensional topological solitons in soft ferromagnetic cylinders*” cond-mat/0102311 (2001).
- [36] Konstantin L. Metlov, Konstantin Yu. Guslienko, “*Quasiuniform magnetization state in soft ferromagnetic nanocylinders*”, Phys. Rev. B **70**, 052406 (2004).
- [37] Konstantin L. Metlov, “*Quasiuniform In-Plane Magnetization State of Thin Cylindrical Dots in a Square Array and Related Anisotropy*”, Phys. Rev. Lett. **97**, 127205 (2006).
- [38] C. A. Ross, M. Hwang, M. Shima, Henry I. Smith, M. Farhoud, T. A. Savas, W. Schwarzacher, J. Parrochon, W. Escoffier, H. Neal Bertram, F. B. Humphrey, M. Redjald, “*Magnetic properties of arrays of electro-deposited nanowires*”, J. Magn. Magn. Mater. **249**, 200-207 (2002).
- [39] N. A. Usov, L. G. Kurkina, J. W. Tucker, “*Effective single-domain diameter of a fine non-ellipsoidal particle*”, J. Phys. D **35**, 2081 (2002).
- [40] D. Goll, G. Schütz, H. Kronmüller. “*Critical thickness for high-remanent single-domain configurations in square ferromagnetic thin platelets*”, Phys. Rev. B **67**, 094414 (2003).
- [41] Una versión pública del software OOMMF (Object Oriented MicroMagnetic Framework) está disponible en la pagina web <http://math.nist.gov/oommf>.
- [42] Konstantin L. Metlov, Konstantin Yu. Guslienko, “*Stability of magnetic vortex in soft magnetic nano-sized circular cylinder*”, J. Magn. Magn. Mater. **242**, 1015 (2002).

- [43] K. Yu. Guslienko, V. Novosad, “*Vortex state stability in soft magnetic cylindrical nanodots*”, J. Appl. Phys. **96**, 4451 (2004).
- [44] E. Feldtkeller, H. Thomas, “*Struktur und Energie von Blochlinien in dünnen ferromagnetischen Schichten*”, Phys. Kondens. Mater. **4**, 8 (1965).
- [45] P. O. Jubert, R. Allenspach, “*Analytical approach to the single-domain-to-vortex transition in small magnetic disks*”, Phys. Rev. B **70**, 144402 (2004).
- [46] Amikam Aharoni, “*Upper bound to a single-domain behavior of a ferromagnetic cylinder*”, J. Appl. Phys. **68**, 2892-2900 (1990).
- [47] N. A. Usov, S. E. Peschany, “*Magnetization curling in a fine cylindrical particle*”, J. Magn. Magn. Mater. **118**, L290 (1993).
- [48] R. Höllinger, A. Killinger, U. Krey, “*Statics and fast dynamics of nanomagnets with vortex structure*”, J. Magn. Magn. Mater. **261**, 178-189 (2003).
- [49] O. Espinosa, and V. H. Moll, “*A Generalized Polygamma Function*”, Integral Transforms Spec. Funct. **15**, 101-115 (2004).
- [50] D. Altbir, J. Escrig, P. Landeros, F. S. Amaral, M. Bahiana, “*Vortex core size in interacting cylindrical nanodots arrays*”, enviado a Phys. Rev. B (2007).
- [51] P. Landeros, J. Escrig, D. Altbir, M. Bahiana, J. d’Albuquerque e Castro, “*Stability of magnetic configurations in nanorings*”, J. Appl. Phys **100**, 044311 (2006).
- [52] F. J. Castaño, C. A. Ross, C. Frandsen, A. Eilez, D. Gil, Henry I. Smith, M. Redjdal, F. B. Humphrey, “*Metastable states in magnetic nanorings*”, Phys. Rev. B **67**, 184425 (2003).
- [53] M. Kläui, C. A. F. Vaz, J. A. C. Bland, T. L. Monchesky, J. Unguris, E. Bauer, S. Cherifi, S. Heun, A. Locatelli, L. J. Heyderman, Z. Cui, “*Direct observation of spin configurations and classification of switching processes in mesoscopic ferromagnetic rings*”, Phys. Rev. B **68**, 134426 (2003).

- [54] M. H. Park, Y. K. Hong, B. C. Choi, M. J. Donahue, H. Han, S. H. Gee, “*Vortex head-to-head domain walls and their formation in onion-state ring elements*”, Phys. Rev. B **73**, 094424 (2006).
- [55] Mei-Feng Lai, Ching-Ray Chang, J. C. Wu, Zung-Hang Wei, J. H. Kuo, and Jun-Yang Lai, “*Magnetization Reversal in Nanostructured Permalloy Rings*”, IEEE Trans. Magn. **38**, 2550 (2002).
- [56] M. Beleggia, J. W. Lau, M. A. Schofield, Y. Zhu, S. Tandon, M. De Graef, “*Phase diagram for magnetic nano-rings*”, J. Magn. Magn. Mat. **301**, 131 (2006).
- [57] Volodymyr P. Kravchuk, Denis D. Sheka, Yuri B. Gaididei, “*Equilibrium magnetisation structures in ferromagnetic nanorings*”, J. Magn. Magn. Mater. **310**, 116–125 (2007).
- [58] J. Escrig, P. Landeros, D. Altbir, E. E. Vogel, P. Vargas, “*Phase diagrams of magnetic nanotubes*”, J. Magn. Magn. Mater. **308**, 233–237 (2007).
- [59] J. Escrig, P. Landeros, D. Altbir, E. E. Vogel, “*Effect of anisotropy in magnetic nanotubes*”, J. Magn. Magn. Mater. **310/2P3**, 2448-2450 (2007).
- [60] J. Escrig, P. Landeros, D. Altbir, E. E. Vogel, “*Vortex core presence in ring shaped nanoparticles*”, unpublished (2006).
- [61] P. Landeros, S. Allende, J. Escrig, E. Salcedo, D. Altbir, E. E. Vogel, “*Reversal modes in magnetic nanotubes*”, Appl. Phys. Lett. **90**, 102501 (2007). cond-mat/0611234.
- [62] M. Daub, M. Knez, U. Gösele and K. Nielsch, unpublished (2006).
- [63] Z. K. Wang, H. S. Lim, H. Y. Liu, S. C. Ng, M. H. Kuok, L. L. Tay, D. J. Lockwood, M. G. Cottam, K. L. Hobbs, P. R. Larson, J. C. Keay, G.D. Lian, M. B. Johnson, “*Spin Waves in Nickel Nanorings of Large Aspect Ratio*”, Phys. Rev. Lett. **94**, 137208 (2005).
- [64] Jehyun Lee, Dieter Suess, Thomas Schrefl, Kyu Hwan Oh, Josef Fidler “*Magnetic characteristics of ferromagnetic nanotube*”, J. Magn. Magn. Mater. (2006), doi:10.1016/j.jmmm.2006.10.1137.

-
- [65] D. Weller, A. Moser, L. Folks, M. E. Best, Lee Wen, M. F. Toney, M. Schwickert, J.-U. Thiele, M. F. Doerner, “*High K_u materials approach to 100 Gbits/in²*”, IEEE Trans. Magn. **36**, 10 (2000).
- [66] Y. C. Sui, R. Skomski, K. D. Sorge, D. J. Sellmyer, “*Nanotube Magnetism*”, Appl. Phys. Lett. **84**, 1525 (2004).
- [67] D. Hinzke, U. Nowak, “*Magnetization switching in nanowires: Monte Carlo study with fast Fourier transformation for dipolar fields*”, J. Magn. Magn. Mater. **221** 365-372 (2000).
- [68] H. Forster, T. Schrefl, D. Suess, W. Scholz, V. Tsiantos, R. Dittrich, J. Fidler, “*Domain wall motion in nanowires using moving grids*”, J. Appl. Phys. **91**, 6914 (2002).
- [69] R. Varga, K. L. Garcia, M. Vázquez P. Vojtanik, “*Single-Domain Wall Propagation and Damping Mechanism during Magnetic Switching of Bistable Amorphous Microwires*”, Phys. Rev. Lett. **94**, 017201 (2005).
- [70] R. Wieser, U. Nowak, K. D. Usadel, “*Domain wall mobility in nanowires: Transverse versus vortex walls*”, Phys. Rev. B **69**, 064401 (2004).
- [71] K. Nielsch, R. Hertel, R. B. Wehrspohn, J. Barthel, J. Kirschner, U. Gösele, S. F. Fischer, H. Kronmüller, “*Switching Behavior of Single Nanowires Inside Dense Nickel Nanowire Arrays*”, IEEE Trans. Magn. **38**, 2571 (2002).