

Métodos No-Perturbativos en Teoría Cuántica de Campos

Tesis entregada a la Universidad de Santiago de Chile en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física
(Marzo 2002)

Departamento de Física-Facultad de Ciencia

Samuel Lepe Santa Cruz

Director de Tesis: Dr. Jorge Gamboa R.

INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con
mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Samuel Lepe Santa Cruz

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como
requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con
mención en Física.

Director de Tesis: Dr. Jorge Gamboa R.

Comisión Informante de Tesis

Dr. Informante 1 José Luis Cortés (UNIZAR):.....
Dr. Informante 2 Marcelo Loewe (PUC):.....
Dr. Informante 3 Iván Schmidt (UTFSM):.....
Dr. Informante 4 Lautaro Vergara (USACH):.....

... a Eliana, Dany y Peny.

Agradecimientos

A mi padre y su sabiduría poco estándar, y a mi madre y su pura y eterna sonrisa. Y a ambos por creer en mi.

A mi familia por el apoyo, paciencia y comprensión dados para embarcarme en esta hermosa aventura.

A mi profesor guía Dr. Jorge Gamboa y al Dr. José Luis Cortés, profesor del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza. Físicos que han sido una fuente importante de conocimientos, discusión y trabajo académicos del todo relevantes para mi formación.

A mis compañeros de carrera Joel Saavedra y Víctor Cárdenas por darme su amistad. Con ellos pude sobrellevar los buenos y frecuentes malos momentos que se viven como estudiante de post-grado.

Al Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile y al Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza por la hospitalidad brindada durante mis estudios.

Finalmente agradezco a **DPPA-UCV**, a **VRID-USACH** y en especial a **CONICYT** a través del Proyecto **FONDECYT No. 2990037/1999**.

Resumen

Varios aspectos no-perturbativos de Teoría Cuántica de Campos (QFT) son considerados desde el punto de vista de la integral de camino. En particular, se estudian los siguientes problemas:

(*a*) Proponemos una derivación simple de la teoría efectiva de quarks pesados no-relativistas. El método permite encontrar todas las correcciones relativistas (a nivel de diagramas de árbol) del Lagrangeano efectivo.

(*b*) Estudiamos el problema de Landau, esto es, fermiones en un campo magnético constante, de acuerdo al método propuesto en (*a*). Calculamos el determinante fermiónico usando un procedimiento general que es compatible con todos los mecanismos razonables de regularización.

(*c*) Proponemos un nuevo tratamiento a QFT, a bajas energías, que es el análogo de las aproximaciones adiabática y de Born-Oppenheimer de la mecánica cuántica. Dicho enfoque permite calcular acciones efectivas incorporando muy naturalmente los aspectos geométricos de la teoría.

Nuestro formalismo permite encontrar representaciones simples para la integral de camino de fermiones en campos escalares y vectoriales y provee, además, de una representación directa para la fase de Berry en QFT.

Abstract

Several non-perturbative aspects of Quantum Field Theory (QFT) are considered following path integral methods. In particular we consider

(*a*) A simple derivation of the effective field theory of non-relativistic heavy quarks. This method permits to get all the relativistic corrections of the effective Lagrangean at the tree level.

(*b*) The Landau problem, i.e., non-relativistic fermions in a constant magnetic field is studied following the approach proposed in (*a*). We compute the fermionic determinant by using a general procedure that is compatible with all reasonable regularization procedures.

(*c*) We propose a new approach to extend the adiabatic and Born-Oppenheimer approximations for quantum mechanics to QFT. This approach permits to compute effective actions incorporating in a natural way the geometric aspects of the theory.

Our formalism permits to find simple path integral representations for fermions coupled to scalar and vectorial fields and, additionally, it provides a direct Berry phase representation in QFT.

Contents

Introducción	1
Referencias	5
1. Capítulo I	6
1.1. Introducción	6
1.2. Lagrangeano efectivo <i>off-shell</i> para HQET y NRQCD	7
Referencias	11
2. Capítulo II	12
2.1. Introducción	12
2.2. Acción efectiva a bajas energías	13
2.3. Fermiones térmicos no-relativistas en campos magnéticos	13
2.4. El gran potencial	16
2.5. Función de partición en 2+1-dimensiones	18
Referencias	20
3. Capítulo III	22
3.1. Introducción	22
3.2. El teorema adiabático, la aproximación de Born-Oppenheimer y la fase de Berry en mecánica cuántica.	22
3.3. La fase de Berry en teoría cuántica de campos.	26
3.3. Un tratamiento formal.	26
3.3. Representación integral de camino para un campo fermiónico en presencia de un campo vectorial externo.	31
3.3. Representación integral de camino para un campo escalar complejo.	37
3.4. Discusión.	42
3.4. Acción efectiva para un campo fermiónico acoplado a uno escalar.	43
Referencias	50
4. Conclusiones	52

Introducción

La teoría cuántica de campos (QFT) es el lenguaje que se usa actualmente para describir la dinámica de sistemas relativistas. Aunque esta teoría está matemáticamente bien establecida mediante rigurosos teoremas [1], aún subsisten problemas fundamentales relativos a las predicciones físicas en el sector no-perturbativo. Esta afirmación es particularmente relevante para dos situaciones, a saber: Cromodinámica Cuántica (QCD) y Gravedad Cuántica.

En QCD, la teoría de gauge no-Abeliana de las interacciones fuertes basada en el grupo de gauge $SU(3)$ de color, se espera que en el dominio infrarrojo (región de bajas energías) describa correctamente fenómenos como confinamiento, hadronización y ruptura de simetría quiral. Estos fenómenos no son posibles de tratar perturbativamente. El que la constante de acoplamiento de QCD disminuya al aumentar la energía y viceversa, hace inconsistente el tratamiento perturbativo en el límite de bajas energías. Surge entonces la necesidad de desarrollar técnicas no-perturbativas eficientes que permitan extraer información física para así poder saber si QCD describe correctamente la región de bajas energías de las interacciones fuertes.

En el caso de Gravedad Cuántica, la situación es similar aunque más delicada. Esta teoría, además de los problemas de interpretación, parece ser inherentemente no-perturbativa, careciendo entonces de un sector perturbativo que guíe nuestra intuición. Así, se hace evidente la necesidad de desarrollar nuevos métodos de cálculo.

Paralelamente a las situaciones presentadas, importantes avances en la comprensión de la dinámica de núcleos en física atómica y molecular se han alcanzado en los últimos años. La observación de Berry [2] de que en estos sistemas la aproximación de Born-Oppenheimer no implica un desacoplamiento completo entre coordenadas electrónicas y nucleares, ha surgido como un nuevo elemento de caracterización de la espectroscopía de sistemas complejos. De hecho, la observación de Berry ha sido verificada experimentalmente [3].

Estos resultados tienen una traducción natural en el contexto de teorías de campo efectivas. Los campos livianos y pesados en una teoría efectiva pueden ser vistos como el equivalente a las coordenadas electrónicas (rápidas) y nucleares (lentas) antes mencionadas. Tanto más natural parece esta traducción en el caso de QCD, en el sector no-perturbativo, si estamos pensando en quarks livianos y pesados. Se podría conjeturar entonces que la fase de Berry podría caracterizar la espectroscopía de los quarks pesados, y esta conjetura podría

ser sometida a prueba usando la abundante información existente [4].

En el caso de Gravedad cuántica se podría esperar algo similar de acuerdo con Zakharov [5], esto es, dado que gravedad (clásica) es una teoría de campos no-renormalizable, entonces puede ser vista como una teoría efectiva. Si esta aseveración fuese correcta, entonces en gravedad usual deberíamos esperar alguna manifestación de otros campos, aparte del gravitacional, a través de fases de Berry.

Ilustremos las ideas esbozadas arriba. Los ingredientes básicos son la acción S y la función de partición Z , y para fijar ideas consideremos el modelo dado por

$$S[\bar{\Psi}, \Psi; A] = \int d^4x \bar{\Psi}(i\mathcal{D} - m)\Psi,$$

con Ψ un campo fermiónico, $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ la derivada covariante y A_μ un campo de gauge. La función de partición es

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int D\bar{\Psi}D\Psi e^{-S[\bar{\Psi}, \Psi; A]}, \\ &= \det [(i\mathcal{D} - m)(i\mathcal{D} - m)^{-1}], \end{aligned}$$

luego de haber normalizado de modo que $Z[0] = 1$.

El determinante puede escribirse como

$$\det [1 - g\mathcal{A}(i\mathcal{D} - m)^{-1}],$$

el que a su vez puede expresarse en la forma

$$\exp [Tr \ln(1 - g\mathcal{A}(i\mathcal{D} - m)^{-1})],$$

donde Tr simboliza la operación de traza sobre un operador (suma sobre índices discretos e integración sobre variables continuas).

Entonces, la expansión de la expresión anterior en potencias de g tendrá un carácter perturbativo si cada término en la serie es menor que su antecesor. Caso contrario, la metodología para calcular cantidades físicas deberá ser otra.

Lo recién mostrado puede usarse sin cambios para la teoría de gauge más simple a saber, la electrodinámica cuántica (QED). QED es una teoría de campos exitosa en cuanto a predicciones físicas en el sector perturbativo, aquí la constante de acoplamiento es la constante de estructura fina de tamaño $\sim 1/137$. En QCD, por la libertad asintótica es también posible

la opción perturbativa a altas energías, sin embargo, en el sector de bajas energías debemos usar métodos no-perturbativos para extraer física.

Una idea de carácter no-perturbativo es el límite $N_c \rightarrow \infty$ [6], siendo N_c el número de grados de libertad de color de la teoría. La idea es que las principales propiedades de las teorías de gauge son independientes de dicho número. Lo mismo ocurre para el límite $N_c \rightarrow \infty$ con $g^2 N_c \rightarrow \lambda$, una cantidad fija (el parámetro g representa el acoplamiento entre el campo de gauge y el fermiónico).

Otro tratamiento no-perturbativo en teoría de campos es el método del Grupo de Renormalización (RG) implementado en la red. RG conforma un grupo de transformaciones cuyo rol es reconciliar la información experimental (respuestas finitas) con cálculos teóricos plagados de divergencias ultravioletas (respuestas infinitas). En este esquema se imponen *cut-off* (Λ) que llevan a respuestas finitas pero dependientes de Λ . La pregunta entonces es si es posible escoger, para cada escala de energía, un acoplamiento $\alpha(\Lambda)$ de modo que las cantidades físicas sean independientes de Λ . La respuesta no es obvia en QFT. No obstante, en cualquier teoría de campos renormalizable (QED, QCD, por ejemplo) es posible probar que a cualquier orden en teoría de perturbaciones se puede escoger un conjunto de parámetros dependientes de Λ de manera tal que la física, a momenta mucho menores que Λ , sea independiente de este *cut-off*.

Las teorías de gauge Abelianas y no-Abelianas conforman hoy por hoy un ingrediente importante en la descripción de las interacciones fundamentales. La electrodinámica cuántica y QCD son ejemplos exitosos de este tipo de teorías. No obstante, el paso de la descripción clásica a la cuántica de una teoría arrastra un cierto tipo de problema asociado a las simetrías presentes en la descripción clásica. Este problema es la así llamada **anomalía**. Una anomalía es una simetría clásica que no admite una realización cuántica [7]; un progreso importante en la comprensión de los aspectos no-perturbativos de una teoría de campos ha sido el estudio de las anomalías quirales [8]. En particular, la cancelación de anomalías ha llegado a ser un recurso importante a usar a la hora de construir modelos con capacidad predictiva. Por ejemplo, dicha cancelación ha jugado un rol importante en la identificación de ciertas teorías de cuerdas, en 10-dimensiones, como posibles candidatos a esquemas de Gran Unificación.

En esta senda, la aproximación adiabática surge como una poderosa técnica no-perturbativa para analizar teorías de campo, y en particular, para analizar las anomalías quirales ya que todos los modelos fenomenológicamente interesantes contienen fermiones de

Weyl. Así, la observación de Berry puede llegar a ser una estructura clave en la comprensión de las anomalías. La aproximación adiabática, vista desde la perspectiva de QFT, es una realización concreta de una teoría efectiva y, tal realización, podría proveernos de una metodología de cálculo más simple que las usuales encontradas en teorías efectivas convencionales.

Un problema diferente, aunque relacionado de algún modo con lo anterior, es el cálculo de determinantes de operadores diferenciales. Como es bien sabido, este tipo de cálculos involucra el manejo de muchos grados de libertad (infinitos en principio) y alguna prescripción de regularización debe ser impuesta a fin de darle sentido a los productos infinitos, y por ende obtener resultados físicamente razonables. No existe a priori una prescripción única. En principio, distintos resultados se obtendrán de acuerdo a las distintas regularizaciones usadas, y aquí nos puede servir de guía ya sea la intuición o la información experimental (recurso más lógico a usar) para discriminar entre todas las posibles (y razonables) opciones que se puedan implementar.

El propósito del presente trabajo es considerar tres problemas distintos aunque relacionados:

a) Proponemos un método de cálculo simple y sistemático para obtener el Lagrangeano efectivo off-shell, a nivel de diagramas de árbol, para HQET (teoría efectiva de quarks pesados) y para NRQCD (Cromodinámica cuántica no-relativista). Obtenemos dicha teoría efectiva diagonalizando el sector pesado del Lagrangeano de QCD.

b) Desarrollamos un approach basado en el formalismo de la integral de camino para la mecánica estadística de fermiones no-relativistas en un campo magnético constante (el problema de Landau) . Se calcula exactamente el determinante fermiónico usando un procedimiento general compatible con todos los mecanismos razonables de regularización.

c) Desarrollamos un formalismo nuevo para calcular acciones efectivas en QFT el cual incorpora muy naturalmente fases geométricas. La propuesta consiste en extender a QFT las aproximaciones adiabática y de Born-Oppenheimer mecánico-cuánticas. Construimos representaciones tipo-integral de camino para fermiones acoplados a campos de gauge y escalares, y para el caso de un campo escalar complejo. La relación entre la fase de Berry y la anomalía quiral es discutida en el contexto del acoplamiento de un campo fermiónico con uno vectorial.

Estos problemas ilustran aspectos no-perturbativos de QFT a través de la construcción

de acciones efectivas.

- [1] J. Glimm and R. Jaffe, *Quantum Physics; A Functional Point of view*, Springer Verlag, 1987.
- [2] C. A. Mead and D. G. Truhlar, *J. Chem. Phys.* **115**, 2285 (1979); M. V. Berry, *Proc. R. London A* **392**, 45 (1984).
- [3] Aplicaciones como también resultados experimentales para la fase de Berry se resumen en F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, Chap. 4, World Scientific, 1989.
- [4] W. Greiner and A. Schäfer, *Quantum Chromodynamics*, Springer, 1994.
- [5] A. D. Zakharov, *Sov. Phys. Dokl.*, **12**, 1040 (1968), reimpresso en *Sov. Phys. USP.* **34**, 394 (1991).
- [6] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **72**, 461 (1974); G. Veneziano, *Nucl. Phys. B* **117**, 519 (1976); E. Witten, *Nucl. Phys. B* **149**, 285 (1979).
- [7] En términos de la formulación de la integral de camino entendemos por anomalía la imposibilidad de construir una medida funcional regularizada que respete todas las simetrías de la acción. Una anomalía de gauge puede medirse, ya sea como la variación de la acción efectiva con respecto a una transformación de gauge, o como el valor esperado de la divergencia de la corriente de Noether asociada a la simetría de gauge.
- [8] La simetría quiral (simetría izquierda-derecha) es un concepto íntimamente relacionado a la masa de los fermiones en una teoría de gauge (como lo es QCD, por ejemplo). La simetría quiral es respetada si la masa de los fermiones es nula (salvo anomalías).

1. CAPÍTULO I

1.1. Introducción

Un progreso importante en la descripción de sistemas que consisten de un quark pesado, de masa m , ha sido la formulación de la expansión $1/m$ en QCD usando teoría de campos efectiva y expansión en producto de operadores. Un resultado a destacar ha sido la descripción de dichos sistemas basándose en el límite $m \rightarrow \infty$ en QCD. Este límite puede ser visto como el término dominante en una expansión $1/m$, y a partir de aquí una aproximación a la teoría completa puede ser construída usando métodos de teoría de campos efectiva para quarks pesados (HQET).

Un tratamiento vía teoría efectiva es conveniente si el problema bajo estudio contiene escalas de masa muy diferentes, de modo que la física a describir ocurre a energías mucho más pequeñas que la escala proporcionada por alguna partícula pesada en la teoría. En este caso resulta útil una teoría efectiva en la que los grados de libertad pesados se manifiestan al final sólo como operadores de alta dimensión. Por ejemplo, en HQET los sistemas bajo consideración consisten de un quark pesado cuya masa $m \gg \Lambda$ (Λ es la escala hadrónica), más grados de libertad livianos cuya masa es $\lesssim \Lambda$.

Distintas formulaciones para describir el límite $m \rightarrow \infty$ en QCD existen vía HQET. En particular, la formulación basada en la integración de los grados de libertad pesados para luego desarrollar una expansión de la acción remanente en potencias de $1/m$, y la transformación de Foldy-Wouthuysen (que también conduce a una expansión del mismo tipo) [1]. Estas formulaciones conducen a Lagrangeanos que al ser comparados resultan ser diferentes en los correspondientes ordenes superiores a $1/m$.

En este capítulo desarrollamos un método [2] para obtener el lagrangiano efectivo off-shell (a nivel de diagramas de árbol) para la NRQCD y para la HQET, en el cual, bajo un mismo esquema, las formulaciones antes mencionadas están contenidas. El método se basa principalmente en un esquema de diagonalización del sector pesado del Lagrangeano de QCD. Como resultado de esta diagonalización, se obtiene un operador no-local cuya expansión binomial contiene toda la información dada por la transformación de Foldy-Wouthuysen, es decir, todas las correcciones al orden $1/m$.

1.2. Lagrangeano efectivo *off-shell* para HQET y NRQCD

HQET [3] y NRQCD [4] son dos teorías efectivas que describen las interacciones de quarks pesados que están casi *on-shell*.

HQET describe las interacciones de quarks, de masa m , en las cuales el momentum transferido p es mucho menor que m . Un ejemplo típico de aplicación de esta teoría es en hadrones que contienen un quark pesado, como el mesón B , en el cual $p \sim \Lambda$. El Lagrangeano para HQET admite una expansión en potencias de p/m , de modo que si $p \sim \Lambda$, entonces la expansión puede expresarse en potencias de Λ/m .

NRQCD describe las interacciones de quarks no-relativistas y es típicamente aplicada a estados ligados quark-antiquark tal como los mesones Υ . El Lagrangeano para esta teoría, al igual que para HQET, también admite una expansión en potencias de $1/m$. El momentum transferido aquí es del orden de mv , de modo que el parámetro de expansión es la velocidad v del hadrón.

La diferencia entre ambas teorías se manifiesta en la estructura de los propagadores de los quarks. Para ver esto consideremos el Lagrangeano efectivo al orden $1/m$

$$\mathcal{L} = \varphi^\dagger (iD_0) \varphi + \varphi^\dagger \left(\frac{\mathbf{D}^2}{2m} \right) \varphi.$$

En HQET, el primer término es de orden Λ y el segundo de orden Λ^2/m , mientras que en NRQCD ambos son de orden mv^2 . Como resultado de esto, en NRQCD el propagador es

$$\frac{1}{k_0 - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + i\epsilon}, \quad (1)$$

mientras que en HQET es

$$\frac{1}{k_0 + i\epsilon}. \quad (2)$$

No obstante estas diferencias físicas, ambas teorías pueden escribirse en términos de un Lagrangeano efectivo construido a partir de QCD en el límite no-relativista. Dicho Lagrangeano ha sido derivado antes usando argumentos de simetría [5] y los coeficientes de los operadores contenidos en la expansión han sido obtenidos usando condiciones de *matching* [6].

Proponemos a continuación un nuevo método para calcular el Lagrangeano efectivo para NRQCD. Este método permite (y esta es su ventaja) una derivación de todas las correcciones relativistas (a nivel de diagramas de árbol) del Lagrangeano efectivo, y además es válido sin

hacer uso de las ecuaciones de movimiento [7]. Con el fin de discutir el método propuesto y sus resultados, consideramos el Lagrangeano de QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_H, \quad (3)$$

donde \mathcal{L}_G es el Lagrangeano para el campo gluónico y $\mathcal{L}_{L,H}$ es la parte fermiónica para los quarks livianos y pesados, respectivamente, esto es,

$$\mathcal{L}_{L,H} = \bar{\psi}_{L,H}[i\mathcal{D} - m_{L,H}]\psi_{L,H}, \quad (4)$$

donde $\mathcal{D} = \not{\partial} + ig\mathcal{A}$.

Con el fin de definir ahora la masa del quark pesado despreciamos las contribuciones provenientes de los gluones duros presentes en diagramas de renormalización de masa, y aquellas provenientes de los gluones suaves están, por definición, contenidas en la masa del quark pesado. Esta suposición es válida cuando la masa del quark pesado es mucho mayor que la escala de QCD, y bajo estas condiciones los quarks pesados pueden ser considerados como partículas no-relativistas. Enfocamos la atención entonces en el sector asociado a los modos pesados de la función de partición

$$Z_H[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_H \mathcal{D}\psi_H e^{iS_H}. \quad (5)$$

Los quarks pesados interactúan con los modos livianos a través del campo gluónico y este es un efecto débil si es medido desde la escala de la masa del fermión pesado (omitimos desde ahora el subscrito H). En este caso el biespinor original ψ puede ser escrito en términos de un biespinor ϕ

$$\psi(x) = e^{-imt} \phi(x). \quad (6)$$

donde ϕ , en la aproximación más significativa, no contiene información acerca de la masa del quark pesado [8]. La única contribución proveniente de la masa de estos quarks aparece en las correcciones en potencias de $1/m$.

Usando (6) se encuentra para el Lagrangeano de quarks pesados

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}(i\mathcal{D} - m(1 - \gamma_0))\phi. \quad (7)$$

Este Lagrangeano puede ser escrito en términos de las componentes φ (grande) y χ (pequeña) de ϕ como

$$\mathcal{L} = \varphi^\dagger iD_0 \varphi + \chi^\dagger [iD_0 + 2m] \chi + \varphi^\dagger i\sigma \cdot \mathbf{D} \chi + \chi^\dagger i\sigma \cdot \mathbf{D} \varphi, \quad (8)$$

donde se ha usado la representación estándar de Dirac para las matrices gamma. Entonces, la función de partición para los quarks pesados, en términos de φ , y χ , es

$$Z_H[A] = \int \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\chi^\dagger \mathcal{D}\chi e^{iS_H}. \quad (9)$$

La diagonalización de este Lagrangeano es directa. Si hacemos el cambio de variables (con Jacobiano uno)

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi, \\ \varphi'^\dagger &= \varphi^\dagger, \\ \chi' &= \chi + [iD_0 + 2m]^{-1} i\sigma \cdot \mathbf{D} \varphi, \\ \chi'^\dagger &= \chi^\dagger + \varphi^\dagger i\sigma \cdot \mathbf{D} [iD_0 + 2m]^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

en(5), el nuevo Lagrangeano resulta (omitiendo las primas)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \varphi^\dagger [iD_0 + \sigma \cdot \mathbf{D} (iD_0 + 2m)^{-1} \sigma \cdot \mathbf{D}] \varphi, \\ &+ \chi^\dagger [iD_0 + 2m] \chi. \end{aligned} \quad (11)$$

Este Lagrangeano describe la dinámica (no-local) de quarks pesados relativistas en términos de espinores de dos componentes. Notemos que φ y χ aparecen desacoplados y la integración funcional en χ contribuye con un factor de normalización a la función de partición (luego de escoger un apropiado gauge en este marco).

El límite no-relativista de (11) resulta directo de obtener luego de expandir el operador $(iD_0 + 2m)^{-1}$ en potencias de $1/m$, esto es ,

$$(iD_0 + 2m)^{-1} = \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{i}{2m} D_0 + \frac{i^2}{4m^2} (D_0)^2 - \dots \right). \quad (12)$$

Entonces, el Lagrangeano efectivo para los quarks pesados de acuerdo a (11) resulta ser

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \dots \quad (13)$$

El primer término en (13), luego de usar $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma^k$, es

$$\mathcal{L}^{(0)} = \varphi^\dagger \left[iD_0 + \frac{1}{2m} \mathbf{D}^2 + \frac{g}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B} \right] \varphi, \quad (14)$$

el cual es el Lagrangeano para un quark no-relativista en un campo (cromo)magnético e incluye el término de Pauli .

Notemos que aún escrito de esta manera, el Lagrangeano no tiene la forma, $\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$, de donde se puede leer directamente el Hamiltoniano. Para obtener las contribuciones a órdenes superiores es necesario usar las ecuaciones de movimiento tanto para φ^\dagger como para φ .

Las contribuciones de orden superior son mas laboriosas de obtener pero su cálculo es directo. Así, la corrección al orden $1/m^2$ es

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{g}{8m^2} \varphi^\dagger [[\mathbf{D}, \mathbf{E}] + i\sigma \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{D})] \varphi, \quad (15)$$

donde en el miembro derecho están presentes los bien conocidos términos de Darwin (no-Abeliano) y de spin-órbita, y en el conmutador $[\mathbf{D}, \mathbf{E}]$ debe entenderse un producto interno.

El próximo orden ($1/m^3$) puede ser calculado siguiendo el mismo procedimiento. Se obtiene para $\mathcal{L}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & \frac{1}{8m^3} \varphi^\dagger [\mathbf{D}^4 + g\{\mathbf{D}^2, \sigma \cdot \mathbf{B}\} + g^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \\ & + i g^2 \sigma \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times \mathbf{E})] \varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

donde en la segunda línea vemos una genuina contribución no-Abeliana.

El Lagrangeano (13) incluyendo correcciones $1/m^3$ fué obtenido (usando argumentos dimensionales y de plausibilidad) por Lepage *et. al.* en [5]. La derivación que aquí se ha realizado muestra un método de cálculo sistemático donde términos de contacto, spin y de color simplemente no existen en el límite no-relativista. Estos últimos términos son descartados en el análisis de Lepage *et. al.*[5] por consideraciones energéticas y, como consecuencia de esto, el método propuesto aquí podría ser considerado como un cálculo de primeros principios.

La ecuación (13) es el Lagrangeano para NRQCD en el marco en reposo del hadrón, y en un marco arbitrario (13) lo es para HQET. Ver detalles en [6].

Terminamos esta sección haciendo algunos comentarios respecto al cambio de variables (10). Las nuevas variables diagonalizan (8) generando un término no-local en (11). Aunque este término no-local retiene toda la información concerniente a las correcciones relativistas, podemos ver correcciones tales como Darwin, spin-órbita, etc. sólo orden a orden. Así podríamos conjeturar que el operador $(iD_0 + 2m)^{-1}$ contiene toda la información dada por la transformación de Foldy-Wouthuysen [9]. De hecho, esta transformación es aplicada a la

ecuación de movimiento y luego una condición extra debe ser impuesta con el fin de separar las componentes pequeñas de las grandes del espinor. En el caso presente se han hecho las cosas en sentido inverso, es decir, se hace una transformación que separa dichas componentes y luego las ecuaciones de movimiento son impuestas.

-
- [1] T. Mannel, W. Roberts and Z. Ryzak, *Nucl. Phys.* **B368**, 204 (1992)
- [2] J. Gamboa, S. Lepe and L. Vergara, *Mod. Phys. Lett. A*, Vol.16, No. 23 (2001) 1525-1529.
- [3] N. Isgur and M. B. Wise, *Phys. Lett.* **B232**, 113 (1989), *ibid*, *Phys. Lett.* **B237**, 527 (1990); E. Eichten and B. Hill, *Phys. Lett.* **B234**, 551 (1990); B. Grinstein, *Nucl. Phys.* **B339**, 253 (1990); H. Georgi, *Phys. Lett.* **B240**, 447 (1990). For reviews see, H. Georgi, in *Perspectives in the Standard Model*, Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute, Boulder, Colorado (1991); T. Mannel, *Heavy Quark Mass Expansions in QCD*, Proc. of the Workshop QCD-20 Years Later, Ed. P. M. Zerwas and H. A. Kastrup, World Scientific 1991; B. Grinstein, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **42**, 101 (1992); I. Bigi, M. Shifman and N. Uraltsev, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci* **47**, 591 (1997) .
- [4] W. E. Caswell and G. P. Lepage, *Phys. Lett.* **B167**, 437 (1986); M. E. Luke, A. Manohar and I. Z. Rothstein, *Phys. Rev.* **D61**, 074025 (2000).
- [5] G.P. Lepage, L. Magnea, C. Nakhleh, U. Magnea, and K. Hornbostel, *Phys. Rev.* **D46**, 4052 (1992).
- [6] A. Manohar, *Phys. Rev.* **D56**, 230 (1997).
- [7] El método que propondremos aquí ha sido usado previamente para derivar acciones de segundo orden para fermiones $4D$ y aniones, ver; J. L. Cortés, J. Gamboa and L. Velázquez, *Phys. Lett.* **B313**, 108; *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 953 (1994).
- [8] Note que esta reparametrización de los campos puede ser vista como un cambio en el origen desde donde la energía E es medida.
- [9] S. Balk, J.G. Körner and D. Pirjol, *Nucl.Phys.* **B428**, 499 (1994).

2. CAPÍTULO II

2.1. Introducción

El movimiento de fermiones en campos magnéticos es un antiguo problema de la mecánica cuántica que cubre una gran variedad de problemas desde estrellas neutrónicas [1], por ejemplo, hasta el efecto Hall cuántico [2]. Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, bastantes estudios se han hecho relacionados con la anomalía quiral [3], acciones efectivas [4–6] y aplicaciones a sistemas aniónicos [7].

Estudiamos aquí otro aspecto del problema, esto es, de acuerdo a [8], discutimos la mecánica estadística de fermiones no-relativistas en presencia de un campo magnético constante desde el punto de vista de la integral funcional [9]. El método involucra el cálculo de determinantes en los cuales, como es bien sabido, aparecen divergencias debidas al número infinito de grados de libertad que se está manejando. Manejar dichas divergencias significa dar alguna prescripción que le dé sentido al producto infinito en cuestión (regularización). A modo de ejemplo, una prescripción bastante usada para regularizar determinantes es la regularización función- ζ generalizada. Esta técnica consiste básicamente en lo siguiente: dado un operador diferencial A el cual tiene un conjunto discreto de auto-valores λ . Entonces, el determinante de este operador puede escribirse en la forma

$$\det A = \prod \lambda_n \equiv \exp \left[-\frac{d}{ds} \zeta_A(s) \right]_{s=0},$$

donde $\zeta_A(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}$ es la extensión de la función zeta de Riemann definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in C, \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Si los autovalores de A son conocidos, entonces se puede desarrollar un cálculo directo de la función ζ_A y por ende darle sentido al determinante.

Nuestro punto de vista requiere del cálculo explícito de un determinante fermiónico el cual se evalúa usando un procedimiento general compatible con todos los mecanismos razonables de regularización, en particular compatible con el mecanismo antes indicado. Dicho determinante lo expresamos en términos de funciones polilogarítmicas y de Dedekind. Adicionalmente, en un caso particular (en 2+1 dimensiones), nuestro método permite estudiar fácilmente los límites de campo débil y fuerte debido a la invariancia modular de la función de Dedekind .

2.2. Acción efectiva a bajas energías

En [8], fué propuesto un método para calcular acciones efectivas a bajas energías basado en una derivación, vía integral de camino, de la transformación de Foldy-Wouthuysen. Para el caso presente, esto es, fermiones no-relativistas, seguimos la misma idea y escribimos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \varphi^\dagger [iD_0 + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{D} (iD_0 + 2m)^{-1} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{D}] \varphi, \\ & + \chi^\dagger [iD_0 + 2m] \chi.\end{aligned}\quad (17)$$

Recordemos que, de acuerdo a lo visto anteriormente, este Lagrangeano describe la dinámica no-local de los fermiones en términos de espinores de dos componentes. Notemos que φ y χ están desacoplados de modo que luego de expandir $(iD_0 + 2m)^{-1}$ en potencias de $1/m$, la función de partición resulta ser

$$Z = \int \mathcal{D}\chi^\dagger \mathcal{D}\chi e^{iS_\chi} \int \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi e^{iS_\varphi}, \quad (18)$$

donde

$$\begin{aligned}S_\chi &= \int d^4x \chi^\dagger [iD_0 + 2m] \chi, \\ S_\varphi &= \int d^4x \varphi^\dagger [iD_0 + \frac{1}{2m} \mathbf{D}^2 + \frac{g}{2m} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{B}] \varphi + O(1/m^2).\end{aligned}\quad (19)$$

S_φ es la acción no-relativista para fermiones interactuando con un campo magnético. S_χ es la acción asociada a la contribución mas baja del espinor y su contribución a la función de partición puede ser absorbida como una constante de normalización.

2.3. Fermiones térmicos no-relativistas en campos magnéticos

Usando (18) y (19), se puede estudiar ahora explícitamente la teoría cuántica de campos para fermiones no-relativistas a temperatura finita.

La función de partición asociada a este problema es

$$\begin{aligned}Z_\varphi &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^\dagger e^{iS_\varphi}, \\ &= \det [iD_0 + \frac{1}{2m} \mathbf{D}^2 + \frac{g}{2m} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{B} + \mu],\end{aligned}\quad (20)$$

$$= \prod_n \lambda_n, \quad (21)$$

donde g denota la carga eléctrica de los fermiones, μ es el potencial químico, y el producto (infinito) cubre todos los autovalores λ_n del operador en (20),

$$[iD_0 + \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2 + \frac{g}{2m}\vec{\sigma} \cdot \mathbf{B} + \mu]\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad (22)$$

sujeto a una condición de borde anti-periódica en la dirección de tiempo imaginario.

Para un campo magnético constante hacemos la elección de gauge

$$\mathbf{A} = (-B_0y, 0, 0),$$

$$A_0 = 0,$$

tal que el determinante fermiónico puede ser calculado a partir de

$$[i\partial_t + \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2 \pm \frac{g}{2m}B_0 + \mu]\phi_n^\pm = \lambda_n^\pm\phi_n^\pm, \quad (23)$$

de modo que la función de partición (20) resulta ser

$$Z_\varphi = \det[i\partial_t - H^+ + \mu]\det[i\partial_t - H^- + \mu], \quad (24)$$

$$= \prod_n \lambda_n^+ \prod_n \lambda_n^-, \quad (25)$$

donde H^\pm puede leerse de (23).

Cada determinante en (24) se evalúa resolviendo explícitamente la ecuación de autovalores (23) por medio del *Ansatz* $\phi_n^\pm(\mathbf{x}, t) = f_n^\pm(\mathbf{x})T(t)$, lo que conduce a

$$[-\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2 \mp \frac{g}{2m}B_0 - \mu]f_n^\pm = (\Omega - \lambda_n^\pm)f_n^\pm, \quad (26)$$

$$i\dot{T}(t) - \Omega T(t) = 0, \quad (27)$$

ya que el operador $\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2 \pm \frac{g}{2m}B_0$ es independiente del tiempo. La ecuación (26) es la ecuación de Schrödinger para el problema de Landau, cuyos autovalores son conocidos, esto es,

$$E_n^\pm = \Omega - \lambda_n^\pm = (n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})\omega + \frac{p_z^2}{2m} - \mu, \quad (28)$$

con $\omega = gB_0/m$. La ecuación para $T(t)$ tiene una solución sólo si

$$\Omega = \Omega_m = \frac{\pi}{\mathcal{T}}(2m + 1), \quad (29)$$

donde \mathcal{T} es el período y m un entero, en virtud de la condición de borde anti-periódica impuesta sobre $T(t)$.

Así, los autovalores en (25) están dados por

$$\lambda_{m,n}^{\pm} = \frac{\pi}{\mathcal{T}}(2m+1) - E_n^{\pm}. \quad (30)$$

La mecánica estadística del sistema fermiónico bajo estudio es descrita por el gran potencial, de hecho el logaritmo de la función de partición luego de hacer la rotación al espacio Euclídeo, es decir, reemplazando \mathcal{T} por $i\beta$, donde $\beta = 1/T$ es el inverso de la temperatura. El logaritmo de la función de partición es

$$\begin{aligned} \log Z_{\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dp_z [\log(\lambda_{m,n}^+) + \log(\lambda_{m,n}^-)], \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \int dp_z [L_n^+ + L_n^-], \end{aligned} \quad (31)$$

donde L_n^{\pm} son sumas infinitas definidas por

$$L_n^{\pm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log(\lambda_{m,n}^{\pm}). \quad (32)$$

Aunque las series en (32) son divergentes, ellas pueden ser computadas luego de usar alguna prescripción de regularización.

Comenzamos considerando la serie divergente

$$L(a, b) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log(am + b). \quad (33)$$

donde a y b son constantes.

La segunda derivada de $L(a, b)$ es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L(a, b)}{db^2} &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(am + b)^2}, \\ &= - \frac{\pi^2 \csc^2(b\pi/a)}{a^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

tal que luego de integrar se encuentra

$$L(a, b) = \log \left(e^{c_1 + bc_2} \sin \left(\frac{\pi b}{a} \right) \right), \quad (35)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes de integración arbitrarias.

En el caso presente, a y b pueden leerse de (30) y (32). Entonces

$$L_n^{\pm} = \log \left[e^{c_1^{\pm} + c_2^{\pm} [-i\frac{\pi}{\beta} - E_n^{\pm}]} \cosh \left(\beta \frac{E_n^{\pm}}{2} \right) \right] \quad (36)$$

$$\sim c_1^{\pm} - i \frac{c_2^{\pm} \pi}{\beta} + (-c_2^{\pm} + \frac{\beta}{2}) E_n^{\pm} + \log(1 + e^{-\beta E_n^{\pm}}). \quad (37)$$

Es claro que las constantes c_1^\pm y c_2^\pm parametrizan la arbitrariedad de la regularización. Ya que la acción efectiva en el Euclídeo debe ser real, elegimos $c_{1,2}^\pm$ de modo tal que (37) no tenga parte imaginaria.

Comparamos ahora el resultado (37) con el límite no-relativista del resultado general dado en [4] para la acción efectiva. La contribución

$$c_1^\pm - i \frac{c_2^\pm \pi}{\beta} + (-c_2^\pm + \frac{\beta}{2}) E_n^\pm$$

corresponde así – luego de agregar la contribución positrónica – al primer término, $\text{Tr}|\mathcal{E}|$, en la ecuación (18) de la referencia [4], y la dependencia en las constantes arbitrarias $c_{1,2}^\pm$ muestra la regularización que debe hacerse a fin de definir la traza. Por ejemplo, la elección $c_1^\pm = 0 = c_2^\pm$ es consistente con la regularización función- ζ [10], y la elección $c_1^\pm = i\pi/2$, $c_2^\pm = \beta/2$ es consistente con la regularización función- ζ de Hurwitz.

La segunda contribución, $\log(1 + e^{-\beta E_n^\pm})$, la cual es finita e independiente de las constantes $c_{1,2}^\pm$, coincide (salvo factores) con el gran potencial de la mecánica estadística no-relativista.

2.4. El gran potencial

Calculamos ahora directamente el gran potencial no-relativista, Ω , a partir de su definición termodinámica, en vez de hacerlo a partir de la función de partición Z .

El gran potencial no-relativista está dado por

$$\Omega(\beta, \mu) = -\frac{\tilde{g}}{\beta} \sum_{\ell=+,-} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + e^{-\beta E_n^\ell}), \quad (38)$$

$$= \Omega^+(\beta, \mu) + \Omega^-(\beta, \mu), \quad (39)$$

que en nuestro caso corresponde a la elección $c_1^\pm = i\pi/2$, $c_2^\pm = \beta/2$. Aquí \tilde{g} es el factor de degeneración dado por $\tilde{g} = (gB_0/4\pi^2)V$.

Entonces, necesitamos considerar el siguiente objeto

$$S(A, b) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + Ae^{-bn}). \quad (40)$$

En términos de S , se tiene

$$\Omega^\pm(T, \mu) = -\frac{\tilde{g}}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z S(A^\pm, \beta\omega) \quad (41)$$

con

$$A^+ = e^{-\beta(\omega-\mu)} e^{-\beta p_z^2/2m}, \quad A^- = e^{\beta\mu} e^{-\beta p_z^2/2m}, \quad (42)$$

La función $S(A, b)$ tiene la siguiente serie de Taylor en la variable A :

$$S(A, b) = \log(1 + A) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(e^{nb} - 1)} A^n, \quad (43)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(1 - e^{-nb})} A^n. \quad (44)$$

Dado que A^n tiene la forma $a^n e^{-n\gamma p_z^2}$, la integral en p_z puede ser hecha explícitamente, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_z S(A^\pm, b) = \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}(1 - e^{-nb})} (a^\pm)^n. \quad (45)$$

Haciendo la expansión

$$(1 - e^{-nb})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-nb})^k,$$

se encuentra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_z S(A^\pm, b) = -\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \text{Li}_{3/2}(-a^\pm e^{-kb}), \quad (46)$$

donde hemos introducido la función polilogaritmo, definida como la continuación analítica al plano complejo - z de la serie [11]

$$\text{Li}_s(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad (47)$$

definida para $|z| < 1$ y $s \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\Omega^+(T, \mu) = V \frac{gB_0}{4\pi^2} \frac{\sqrt{2\pi m}}{\beta^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \text{Li}_{3/2}(-e^{\beta\mu} e^{-(k+1)\beta\omega}), \quad (48)$$

y

$$\Omega^-(T, \mu) = V \frac{gB_0}{4\pi^2} \frac{\sqrt{2\pi m}}{\beta^{3/2}} \text{Li}_{3/2}(-e^{\beta\mu}) + \Omega^+(T, \mu). \quad (49)$$

Estas dos últimas fórmulas pueden ser escritas en forma combinada a fin de obtener una expresión simplificada para el gran potencial,

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &= \Omega^+(T, \mu) + \Omega^-(T, \mu) \\ &= V \frac{gB_0}{4\pi^2} \frac{\sqrt{2\pi m}}{\beta^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Li}_{3/2}(-e^{\beta(\mu-|n|\omega)}). \end{aligned} \quad (50)$$

Es fácil ver que el resultado para $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$ se reduce al correcto resultado en el límite de temperatura cero ($\beta \rightarrow \infty$). Dependiendo del signo de $\mu - |n|\omega$, el argumento de la función polilogarítmica irá a cero (y en este caso $\text{Li}_{3/2}(0) = 0$ y no hay contribución) o a infinito. Para obtener la correspondiente contribución en este último caso, necesitamos el comportamiento asintótico $\text{Li}_{3/2}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$. Esto se puede obtener a partir de la relación de Joncquière [12], pág.(31),

$$\text{Li}_s(z) + e^{is\pi} \text{Li}_s(1/z) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} e^{is\pi/2} \zeta(1-s, \frac{\log z}{2\pi i}). \quad (51)$$

En particular, para $x > 0$ se tiene, tanto como $\beta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{Li}_{3/2}(-e^{\beta x}) &\longrightarrow \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(3/2)} e^{3i\pi/4} \zeta(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\beta x}{2\pi i}) \\ &\longrightarrow -\frac{2}{3} \frac{\beta^{3/2}}{\Gamma(3/2)} x^{3/2}, \end{aligned} \quad (52)$$

debido al comportamiento asintótico $\zeta(-\frac{1}{2}, q) \rightarrow -\frac{2}{3} q^{3/2}$ de la función zeta de Hurwitz. Con $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, se obtiene el correcto resultado no-relativista [13]

$$\frac{1}{V} \Omega(T=0, \mu) = -\frac{gB_0}{3\pi^2} \sqrt{2m} \sum_{n=-\lfloor \mu/\omega \rfloor}^{\lfloor \mu/\omega \rfloor} (\mu - |n|\omega)^{3/2}. \quad (53)$$

Aquí $\lfloor x \rfloor$ es el *piso* del número real x .

Un cálculo similar puede ser hecho en 2+1-dimensiones, pero el resultado que se obtiene no es nada mas que la expresión de partida (39), con el correspondiente factor de degeneración (en 2+1 dimensiones) $\tilde{g}_2 = (gB_0/2\pi)L^2$, siendo L^2 el área de la caja de cuantización bi-dimensional:

$$\Omega_{2+1}(T, \mu) = -\frac{\tilde{g}_2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(1 + e^{-\beta(\mu - |n|\omega)}) \quad (54)$$

2.5. Función de partición en 2+1-dimensiones

Ahora calculamos la función de partición en 2+1-dimensiones. Con el fin de hacer esto, procedemos como sigue: el producto (25) lo escribimos como

$$Z_\varphi = (Z_0)^{\tilde{g}_2}, \quad (55)$$

en virtud de la degeneración \tilde{g}_2 de cada autovalor de Landau. Usando la regularización función- ζ , la función de partición reducida Z_0 puede ser escrita en la forma

$$Z_0 = \prod_{n=0}^{\infty} \cosh \left[\frac{E_n^+ \beta}{2} \right] \cosh \left[\frac{E_n^- \beta}{2} \right]. \quad (56)$$

Usando la forma explícita de los autovalores del problema de Landau en 2+1 dimensiones ($p_z = 0$) de (28), (56) puede ser escrita en la forma

$$Z_0 = \prod_{n=0}^{\infty} \cosh(\theta n + \delta^+) \cosh(\theta n + \delta^-). \quad (57)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\beta\omega}{2}, \\ \delta^+ &= \frac{\beta}{2}(\omega - \mu), \\ \delta^- &= -\frac{\beta\mu}{2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Definiendo $q = e^{-2\theta}$, $z = e^{-2\delta^+}$ y $\tilde{z} = e^{-2\delta^-}$, luego (57) resulta ser

$$Z_0 = \prod_{n=0}^{\infty} e^{2n\theta} e^{\delta^+ + \delta^-} (1 + zq^n) (1 + \tilde{z}q^n). \quad (59)$$

Esta es la expresión más general para la función de partición (reducida) en 2+1-dimensiones.

Una situación particular interesante se origina cuando el potencial químico es cero. En este caso (59) resulta ser

$$Z_0 = \left[\frac{\eta(2i\theta/\pi)}{\eta(i\theta/\pi)} \right]^2, \quad (60)$$

donde

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad (61)$$

es la función *eta* de Dedekind [14], con $q = e^{2i\pi\tau}$.

No es difícil ver que la fórmula (60) reproduce (54) en el caso de potencial químico nulo. Así, de la definición de la función *eta* y escribiendo $1 - q^{2n} = (1 - q^n)(1 + q^n)$ se encuentra

$$Z_0 = q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^2, \quad (62)$$

desde la cual, con $q = e^{-\beta\omega}$ se obtiene

$$\log Z_0 = -\frac{1}{12}\beta\omega + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + e^{-n\beta\omega}). \quad (63)$$

Esta expresión coincide con el resultado para $-\beta\Omega_{2+1}$ de (54) a $\mu = 0$, módulo términos debidos a la regularización usada. El límite de altas temperaturas (o equivalentemente el límite de campo magnético débil) corresponde a $q \rightarrow 1$, donde la función de Dedekind puede ser aproximada por [15]

$$\eta(\tau) \sim q^{1/24}(1-q)^{-1/2}e^{-\frac{\pi^2}{6(1-q)}}, \quad (64)$$

y entonces, la función de partición en dicho límite resulta ser

$$Z_0|_{\beta\omega \ll 1} \sim \frac{e^{\frac{5}{12}\beta\omega + \frac{2\pi^2}{3\sinh\beta\omega}}}{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}. \quad (65)$$

Mas aún, dado que la función de Dedekind satisface la propiedad modular

$$\eta(\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{1/2} \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad (66)$$

se puede calcular la función de partición en el límite de campo magnético fuerte (o límite de temperaturas bajas) directamente de (65). Así, luego de usar (65) y (66) se encuentra

$$Z_0|_{\beta\omega \gg 1} \sim e^{-\frac{5\pi^2}{12\beta\omega} - \frac{2\pi^2}{3\sinh\frac{2\pi^2}{\beta\omega}}} \cosh\left(\frac{\pi^2}{\beta\omega}\right). \quad (67)$$

Hemos estudiado el movimiento de fermiones no-relativistas en un campo magnético constante, en el marco de la teoría cuántica de campos. El punto central fue el cálculo del determinante fermiónico usando un método general compatible con todos los procedimientos razonables de regularización.

Se obtuvieron expresiones explícitas para el gran potencial no-relativista en términos de funciones polilogarítmicas. Para la función de partición en 2+1 dimensiones con potencial químico cero, se obtuvieron expresiones en términos de la función *eta* Dedekind. En el último caso, las propiedades modulares de la función de Dedekind nos permitió relacionar los límites de campo magnético débil y fuerte. Esta relación podría ser de utilidad en la dinámica del efecto Hall cuántico.

[1] J. Shapiro and S. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, J. Wiley (1983).

- [2] R. B. Laughlin in *The Quantum Hall Effect*, R. R. Prange and S. M. Girvin (Eds.).
- [3] K. Ishikawa, N. Maeda, *cond-mat/ 0102347*.
- [4] D. Cangemi and G. Dunne, *Ann. Phys.* **249**, 582 (1996).
- [5] S. K. Blau, M. Visser and A. Wipf, *Int. J. Mod. Phys.* **A6**, 5409 (1991).
- [6] G. Dunne and T. M. Hall, *Phys. Lett.* **B419**, 322 (1998).
- [7] See *e.g.* F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific (1987).
- [8] J. Gamboa, S. Lepe and L. Vergara. *Mod. Phys. Lett.* **A**, Vol.16, No.23 (2001) 1525-1529.
- [9] O. Espinosa, J. Gamboa, S. Lepe and F. Méndez, *Phys. Lett.* **B521**, 343 (2001).
- [10] J. L. Cortés, J. Gamboa, I. Schmidt and J. Zanelli, *Phys. Lett.* **B444**, 451 (1998); J. L. Cortés and J. Gamboa, *Phys. Rev.* **D59**, 105016 (1999).
- [11] Alertamos al lector que otras definiciones diferentes de la función polilogaritmo pueden verse en la literatura. Véase por ejemplo J.Spanier and K.B.Oldham, *An Atlas of Functions*. Hemisphere Publishing Corp.(1987).
- [12] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Higher transcendental functions*, Vol.1, McGraw-Hill, 1953.
- [13] C. Dib and O. Espinosa, *The magnetized electron gas in terms of Hurwitz zeta functions*, math-ph/0012010, *Nucl. Phys.* **B612**, 492-518(2001).
- [14] M. Abramowitz and I. Stegun Editors, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, 1970.
- [15] See for example J. Polchinski, *String Theory*, Vol 1, Cambridge University Press, 1998 or M. Green, J. Schwartz and E. Witten, *Superstring Theory* , Vol 1, Cambridge University Press, 1987.

3. CAPÍTULO III

3.1. Introducción

La fase de Berry surge en sistemas que experimentan evolución adiabática, y como consecuencia de esto, cuando el sistema regresa a su estado inicial adquiere una fase no-integrable que no puede ser eliminada por una transformación de gauge. La fase de Berry nos entrega una notable conexión entre las aproximaciones adiabática y de Born-Oppenheimer en mecánica cuántica. Esta conexión sugiere que un tratamiento no-perturbativo para teoría cuántica de campos podría ser construido en cercana analogía con dicha conexión. Esta metodología podría ser muy útil en QCD, por ejemplo, donde el sector de bajas energías (no-perturbativo) no tiene aún una explicación satisfactoria, y también (como ya se dijo) en la comprensión de las anomalías.

En este capítulo desarrollamos un formalismo, basado en la integral de camino, para calcular acciones efectivas en teoría de campos. Este formalismo incorpora muy naturalmente fases geométricas y puede ser una vía alternativa, no-perturbativa, para obtener información acerca del espectro a bajas energías en teoría de campos.

3.2. El teorema adiabático, la aproximación de Born-Oppenheimer y la fase de Berry en mecánica cuántica.

El teorema adiabático establece lo siguiente: si un sistema tiene un Hamiltoniano $H(q, p; B(t))$ dependiente no sólo de coordenadas y momenta sino también de un conjunto de parámetros externos $B(t)$ los cuales varían lentamente (adiabáticamente), y si el sistema está en un estado estacionario Ψ_n de $H(q, p; B(t))$, con energía $E_n(t)$, entonces en un instante posterior (t') el sistema estará en el correspondiente autoestado del Hamiltoniano instantáneo $H(q, p; B(t'))$. En particular, si los parámetros $B(t)$ son ajustados luego de un tiempo T a sus valores iniciales $B(0)$, el sistema regresa a su estado original Ψ_n habiendo adquirido un factor de fase, de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, dado por

$$\exp \left[-i \int_0^T dt E_n(t) \right],$$

el cual tiene un origen puramente dinámico. En lenguaje geométrico, el sistema realizó un circuito cerrado en el espacio de los parámetros B .

Berry [1] encontró que para algunos Hamiltonianos la fase dinámica no es la única que emerge luego de una evolución adiabática, esto es, hay una fase extra $\gamma_n(C)$ que depende sólo de la geometría del circuito C recorrido por el sistema en el espacio B . Así, luego de un tiempo T la fase total adquirida resulta ser

$$\exp \left[i\gamma_n(C) - i \int_0^T dt E_n(t) \right].$$

La evolución temporal de esta fase geométrica la podemos obtener de la ecuación de Schrödinger recordando que $\Psi_n(t)$ es un autoestado de $H(B(t))$ con autoenergía $E_n(t)$:

$$\frac{d}{dt}\gamma_n(t) = i \langle n(B) | \partial_{\mathbf{B}} n(B) \rangle \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{B},$$

siendo

$$\langle q | n(B) \rangle = \Psi_n(q; B),$$

y

$$\partial_{\mathbf{B}} = (\partial_{B_1}, \partial_{B_2}, \dots, \partial_{B_m}),$$

con m el número de parámetros de $B(t)$.

Integrando a lo largo del circuito C , obtenemos

$$\gamma_n(C) = i \oint d\mathbf{B} \cdot \langle n(B) | \partial_{\mathbf{B}} n(B) \rangle,$$

y la no-trivialidad de esta fase reside en el hecho que para algunos sistemas, la cantidad

$$\mathbf{A} = \langle n(B) | \partial_{\mathbf{B}} n(B) \rangle$$

tiene rotacional no nulo de modo que la circulación anterior es no nula. Esta es la razón de identificar esta fase geométrica (fase de Berry) con una holonomía. \mathbf{A} juega el rol de una conexión en el espacio B , esto es, hace el transporte paralelo del vector $|n(B)\rangle$ en dicho espacio.

Usando el teorema de Stokes podemos escribir para $\gamma_n(C)$

$$\gamma_n(C) = -\text{Im} \int d\mathbf{S} \cdot \partial_{\mathbf{B}} \times \mathbf{A}$$

de donde resulta que \mathbf{A} transforma como un campo de gauge

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{i}\partial_{\mathbf{B}}\alpha,$$

de modo que $\gamma_n(C)$ es invariante bajo esta transformación e independiente de la superficie encerrada por el contorno C .

La fase de Berry ha sido de utilidad en la discusión, por ejemplo, del efecto Hall cuántico [2], en la teoría cuántica de campos para Hamiltonianos que presentan anomalías y en la discusión de la aproximación de Born-Oppenheimer en física molecular (que en general es aplicada a sistemas que presentan dos escalas de energías muy diferentes). Esta última situación la discutimos a continuación siguiendo la referencia [3].

De acuerdo al método de Born-Oppenheimer(B-O), las autofunciones del Hamiltoniano

$$H(R, r) = -\frac{1}{2M}\partial_{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{2m}\partial_{\mathbf{r}}^2 + U(R, r)$$

son expresadas en componentes nucleares y electrónicas en la forma

$$\Psi(R, r) = \sum_m \phi_m(R)\varphi_m(R, r),$$

siendo R y r las coordenadas nucleares y electrónicas, respectivamente.

Los estados $\varphi_m(R, r)$ forman una base de autofunciones de H cuando la energía cinética nuclear es ignorada. Denotando por $\epsilon_m(R)$ a la energía del estado $\varphi_m(R, r)$, el elemento de matriz

$$H_{mn} = -\frac{1}{2M} \sum_l [\delta_{ml}\partial_{\mathbf{R}} + \langle m(R) | \partial_{\mathbf{R}} l(R) \rangle] [\delta_{nl}\partial_{\mathbf{R}} + \langle l(R) | \partial_{\mathbf{R}} n(R) \rangle] + \epsilon_n(R)\delta_{mn},$$

que resulta de hacer el sandwich

$$\langle \Psi(R, r) | H | \Psi(R, r) \rangle,$$

es el objeto central para la discusión de la aproximación de B-O.

La cantidad $\epsilon_n(R)$ es una energía potencial efectiva para el movimiento nuclear y $\langle m | \partial_{\mathbf{R}} | n \rangle$ es un potencial de gauge efectivo que da cuenta de la transición entre diferentes estados electrónicos. En el límite adiabático podemos suponer que los electrones se mantienen en el n -ésimo nivel, es decir, ignoramos las transiciones. Más específicamente, despreciamos los elementos de matriz fuera de la diagonal de modo que el Hamiltoniano efectivo resulta ser en este caso

$$H_{nn}^{ef} \simeq -\frac{1}{2M} [\partial_{\mathbf{R}} - i\mathbf{A}]^2 + U'(R),$$

siendo

$$\mathbf{A} = i \langle n(R) | \partial_{\mathbf{R}} | n(R) \rangle,$$

objeto que transforma (como ya vimos) como un potencial de gauge bajo el grupo $U(1)$. Si el estado $|n\rangle$ pertenece a un nivel N -veces degenerado, entonces A es una matriz $N \times N$ que transforma como un potencial de gauge bajo $U(N)$.

La aproximación de B-O usual considera reales los estados electrónicos $|n(R)\rangle$ de modo que en este caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. En otras palabras, la aproximación de B-O no implica un desacoplamiento completo entre las coordenadas nucleares y electrónicas de modo que la fase de Berry (principal corrección no-perturbativa a la usual de B-O), es de algún modo, un vestigio de un desacoplamiento incompleto.

La última afirmación nos recuerda un resultado de teoría cuántica de campos: el teorema de Appelquist-Carazzone. En líneas generales, este teorema establece que a bajas energías los campos livianos y pesados están desacoplados de modo que se puede entender el sector infrarrojo de la teoría olvidando los efectos de altas energías. ¿Implica la fase de Berry una violación de este teorema ?. En la Sección II abordaremos este punto.

Finalizamos esta sección haciendo un breve comentario acerca de la versión clásica de la fase de Berry. Una modificación similar a la encontrada por Berry al teorema adiabático, fue encontrada por Hannay [4] al teorema adiabático clásico, siendo esta modificación también de naturaleza geométrica (ángulo de Hannay).

El teorema adiabático clásico, que opera sólo para sistemas Hamiltonianos integrables (sistemas que pueden ser expresados en términos de variables de acción-ángulo (I_i, θ_i)), nos dice que en una evolución adiabática las variables de acción $I(t; B)$ son invariantes adiabáticos mientras que los ángulos θ_i se pueden calcular a partir de las frecuencias instantáneas del sistema

$$\omega_i(t; B) = \frac{\partial}{\partial I_i} H(q(I, \theta; B), p(I, \theta; B); B).$$

Estas frecuencias, instantáneamente constantes, cambian con $B(t)$ de modo que el ángulo barrido en un período T es

$$\theta_i(T; B) = \int_0^T dt \omega_i(t; B).$$

Hannay probó que para algunos Hamiltonianos existe una contribución adicional como resultado de la circulación del sistema a lo largo de un circuito cerrado C en el espacio de parámetros, B . Así, el ángulo total barrido resulta ser

$$\theta_i(T) = \int_0^T dt \omega_i(t, B) + \Delta\theta_i(I; C),$$

y al igual que en su análogo cuántico, $\Delta\theta_i$ depende sólo de la geometría del circuito C . Esta contribución adicional es el ángulo de Hannay.

Finalmente, si un Hamiltoniano clásico tiene ángulo de Hannay no nulo, entonces su versión cuántica tiene fase de Berry. El inverso no es cierto necesariamente (excepto para Hamiltonianos cuadráticos), esto es, si un sistema cuántico tiene fase de Berry no necesariamente su límite clásico tiene un ángulo de Hannay. Específicamente, de acuerdo con [5]

$$\frac{\partial}{\partial n_j} \gamma_n \simeq \Delta\theta_j + O(\hbar),$$

siendo n_j un entero proveniente de la regla de cuantización semiclásica para la variable de acción

$$I_j = (n_j + r)\hbar \quad (r = \text{constante}).$$

Para Hamiltonianos cuadráticos, las correcciones $O(\hbar)$ son nulas dado que para estos sistemas el resultado semiclásico es exacto.

3.3. La fase de Berry en teoría cuántica de campos.

3.3.1. Un tratamiento formal.

Consideremos una teoría para un campo fermiónico acoplado a uno bosónico descrita por la acción [13]

$$S = \int_0^T dt \int d^{D-1}x \psi^\dagger (i\partial_t - H)\psi + S', \quad (68)$$

donde D es la dimensión del espacio-tiempo, ψ el campo fermiónico, H un Hamiltoniano tipo-Dirac y S' una acción general asociada a los campos bosónicos cuya forma explícita no será necesaria considerar. La teoría efectiva para los grados de libertad bosónicos la obtenemos luego de integrar funcionalmente los fermiones. Así obtenemos el determinante del operador $(i\partial_t - H)$, el cual no es nada más que el producto (infinito) de los autovalores de la ecuación

$$(i\partial_t - H)\varphi_n = \tilde{\lambda}_n\varphi_n, \quad (69)$$

con φ_n las correspondientes autofunciones. Sin embargo, no es fácil resolver (69) debido a que H es un operador que contiene, en general, derivadas espaciales y acoplamientos arbitrarios y, como en cualquier teoría de campos, se puede evaluar el determinante fermiónico sólo en forma perturbativa (si la constante de acoplamiento es pequeña). Aún cuando la constante de acoplamiento sea grande, el determinante en cuestión puede calcularse usando la aproximación de B-O. Dado que, en principio, no es obvia esta afirmación, debemos dar argumentos que la hagan plausible. Supongamos que H satisface, instantáneamente, la siguiente ecuación de autovalores:

$$H\phi_n = \lambda_n(t)\phi_n, \quad (70)$$

donde ϕ_n son autofunciones del Hamiltoniano de Dirac que satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int d^{D-1}x \phi_n^\dagger(x)\phi_m(x) = \delta_{nm}, \quad (71)$$

y suponemos de momento que el espectro no es degenerado. Notemos que (71) está definida para variables espaciales y que en el miembro derecho deberíamos poner la función $f_{nm}(t) = \exp\left[i\int_0^t dt'(\lambda_n(t') - \lambda_m(t'))\right]$. Pero (70) y (71) están definidas para estados instantáneos, y como sabemos, en la aproximación de B-O se desprecian los elementos de matriz fuera de la diagonal de modo que $f_{nm} \rightarrow 1$.

El próximo paso en el argumento es proponer el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_n a_n(t)\phi_n(x, t), \\ \psi^\dagger(x, t) &= \sum_n a_n^\dagger(t)\phi_n^\dagger(x, t). \end{aligned} \quad (72)$$

Estas ecuaciones son un *Ansatz* donde hemos supuesto una elección especial para los coeficientes a_n . Así el esquema (72), podría ser considerado como una leve modificación al cambio de variables del método de Fujikawa [6], aunque nuestro método es diferente.

El cambio de variables anterior implica que

$$Z = \int \prod_{n,m} \mathcal{D}a_n^\dagger \mathcal{D}a_m \exp \left[i \int_0^T dt a_n^\dagger \{ \delta_{nm} (i\partial_t - \lambda_n(t)) + A_{nm}(t) \} a_m \right], \quad (73)$$

donde hemos definido

$$A_{nm}(t) = i \int d^{D-1}x \phi_n^\dagger \partial_t \phi_m. \quad (74)$$

La expresión para Z dada en (73) es exacta y la evaluamos usando la aproximación de B-O, que en nuestro contexto significa despreciar los términos fuera de la diagonal en (73).

Así, en esta aproximación Z llega a ser (tomando el límite $T \rightarrow \infty$)

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \int \prod_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}a_n^\dagger \mathcal{D}a_n \exp \left[i \int_0^T dt a_n^\dagger \{ i\partial_t + A_{nn}(t) - \lambda_n(t) \} a_n \right]. \quad (75)$$

Este resultado es muy interesante dado que nos permite identificar una teoría de campos con un sistema mecánico-cuántico. Aunque este mapeo no siempre es posible [7], aquí lo mostramos como una consecuencia directa de la aproximación de B-O.

La integración sobre las variables a_n en (75) es gaussiana y el resultado formal (normalizado) es

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\det(i\partial_t + A_{nn}(t) - \lambda_n(t))}{\det(i\partial_t - \lambda_n(t))}. \quad (76)$$

Estos determinantes pueden ser calculados explícitamente usando regularización función- ζ [8]. En el Euclídeo, el resultado exacto es

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(\langle \lambda_n \rangle T/2 - i\Phi/2)}{\cosh(\langle \lambda_n \rangle T/2)}, \quad (77)$$

donde Φ está definido como

$$\Phi = \int_0^T dt A_{nn}(t) = i \int_0^T dt \int d^{D-1}x \phi_n^\dagger \partial_t \phi_n, \quad (78)$$

y $\langle \lambda_n \rangle = \int_0^T dt \lambda_n(t)$.

En la derivación de esta última expresión estamos suponiendo que las autofunciones ϕ_n son funcionales de los campos bosónicos $\Psi_n(x, t)$ de modo que Φ puede ser escrito en la forma

$$\Phi = i \int_0^T dt \int d^{D-1}x \phi_n^\dagger \frac{\delta}{\delta \Psi^a} \phi_n \partial_t \Psi^a, \quad (79)$$

$$= \int_0^T dt \int d^{D-1}x \mathcal{A}_a \partial_t \Psi^a, \quad (80)$$

donde $\mathcal{A}_a \equiv i\phi_n^\dagger \frac{\delta}{\delta\Psi^a} \phi_n$ y $a = 1, 2, 3, \dots$ cubre el número de campos bosónicos.

Usando (77), la acción efectiva en el Euclídeo resulta ser

$$\Gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) - i \tanh\left(\frac{\langle \lambda_n \rangle T}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right] \right\}, \quad (81)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn} \langle \lambda_n \rangle \Phi, \quad (82)$$

y

$$\Phi = \int_0^\infty dt \int d^{D-1}x \mathcal{A}_a \partial_t \Psi^a, \quad (83)$$

es la fase de Berry para la teoría cuántica de campos. Observemos aquí que Φ no es una expresión covariante, esto es, la fase de Berry aparentemente rompe la covariancia Lorentz. No obstante, este rompimiento es a nivel del espacio *target* y no a nivel del espaciotiempo mismo. El campo \mathcal{A}_a es una conexión Abeliana $U(1) \times U(1) \times U(1) \times \dots$ y por punto Φ describe también la fase de Berry para mecánica cuántica.

El caso degenerado puede ser generalizado como sigue: en vez de la ecuación (70) podemos escribir

$$H\phi_n^\alpha = \lambda_n(t)\phi_n^\alpha, \quad (84)$$

donde ϕ_n^α representa autoestados N -veces degenerados que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int d^{D-1}x \phi_n^{\dagger\alpha}(x)\phi_m^\beta(x) = \delta_{nm}\delta^{\alpha\beta}. \quad (85)$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_n a_{\alpha n}(t) \phi_n^\alpha(x, t), \\ \psi^\dagger(x, t) &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_n a_{\alpha n}^\dagger(t) \phi_n^{\dagger\alpha}(x, t), \end{aligned} \quad (86)$$

encontramos para la función de partición la expresión

$$Z = \int \prod_{\alpha,\beta=1}^N \prod_{n,m} \mathcal{D}a_{\alpha n}^\dagger \mathcal{D}a_{\beta m} \exp \left[i \int_0^T dt a_{\alpha n}^\dagger \{ \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} (i\partial_t - \lambda_n(t)) + \mathcal{A}_{nm}^{\alpha\beta}(t) \} a_{\beta m} \right], \quad (87)$$

donde

$$\mathcal{A}_{nm}^{\alpha\beta}(t) = i \int d^{D-1}x \phi_n^{\dagger\alpha} \partial_t \phi_m^\beta. \quad (88)$$

Las integrales en los a 's son nuevamente gaussianas, de modo que luego de usar la aproximación de B-O obtenemos

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \prod_{\alpha, \beta=1}^N \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\det [\delta^{\alpha\beta}(i\partial_t - \lambda_n(t)) + \mathcal{A}_{nn}^{\alpha\beta}(t)]}{\det [\delta^{\alpha\beta}(i\partial_t - \lambda_n(t))]} \quad (89)$$

Dado que $\mathcal{A}_{nn}^{\alpha\beta}$ es una matriz hermítica, siempre será posible de diagonalizar por una transformación unitaria y este proceso de diagonalización no afecta la medida funcional de modo que la acción efectiva resulta ser

$$\Gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\cos \left(\frac{\Phi^{\alpha\alpha}}{2} \right) - i \tanh \left(\frac{\langle \lambda_n \rangle T}{2} \right) \sin \left(\frac{\Phi^{\alpha\alpha}}{2} \right) \right], \quad (90)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn} \langle \lambda_n \rangle \Phi^{\alpha\alpha}, \quad (91)$$

donde $\Phi^{\alpha\alpha}$ es definido como

$$\begin{aligned} \Phi^{\alpha\alpha} &= i \int_0^\infty dt \int d^{D-1}x \phi_n^{\dagger\alpha} \partial_t \phi_n^\alpha, \\ &= \int_0^\infty dt \int d^{D-1}x \mathcal{A}_a^{\alpha\alpha} \partial_t \Psi^a, \end{aligned} \quad (92)$$

siendo $\mathcal{A}_a^{\alpha\alpha} = i \phi_n^{\dagger\alpha} \frac{\delta}{\delta \Psi^a} \phi_n^\alpha$, conexiones $U(N)$. La expresión (92) resulta ser la generalización no-Abeliana de la fase de Berry para teoría cuántica de campos.

Una acción efectiva como la expresada en (82) ha sido derivada por Niemi y Semenoff [9] usando argumentos diferentes a los aquí presentados. Nuestro approach no sólo permite obtener directamente una generalización del caso no-Abeliano sino también nos permite conectar la aproximación de B-O con la interpretación de partículas en teoría de campos. En este sentido, esto es equivalente al límite de acoplamiento fuerte sugerido por Halpern y Siegel [7].

3.3.2. *Representación integral de camino para un campo fermiónico en presencia de un campo vectorial externo.*

El punto de partida es la densidad Lagrangeana, en el Euclídeo, para un campo fermiónico no masivo [13]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi, \quad (93)$$

donde γ_μ es una representación del álgebra de Dirac Euclideana $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$. La representación que usaremos está dada por

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Usando para el campo fermiónico la descomposición quirral

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix}, \quad (95)$$

se tiene que

$$-i\mathcal{L} = \psi_L^\dagger (\partial_0 + ieA_0) \psi_R + \psi_R^\dagger (\partial_0 + ieA_0) \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma \cdot (i\partial - e\mathbf{A}) \psi_R - \psi_R^\dagger \sigma \cdot (i\partial - e\mathbf{A}) \psi_L. \quad (96)$$

Introducimos ahora las autofunciones $\phi_n(\mathbf{x})$,

$$[\sigma \cdot (i\partial - e\mathbf{A})] \phi_n(\mathbf{x}) = \epsilon_n \phi_n(\mathbf{x}). \quad (97)$$

Estas autofunciones y autovalores son de hecho funcionales de los campos de gauge en un instante dado, esto es, en notación mas precisa $\phi_n[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x})$ y $\epsilon_n[\mathbf{A}(t)]$.

La idea en este nuevo tratamiento es usar la descomposición de los campos fermiónicos en términos de las autofunciones dadas en (97), esto es,

$$\begin{aligned} \psi_R(\mathbf{x}, t) &= \sum_n a_n^R(t) \phi_n[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}) & ; & & \psi_L(\mathbf{x}, t) &= \sum_n a_n^L(t) \phi_n[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}), \\ \psi_R^\dagger(\mathbf{x}, t) &= \sum_n b_n^R(t) \phi_n^\dagger[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}) & ; & & \psi_L^\dagger(\mathbf{x}, t) &= \sum_n b_n^L(t) \phi_n^\dagger[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (98)$$

Usando la ortogonalidad de las autofunciones ϕ_n , el Lagrangeano queda expresado en términos de los coeficientes (Grassman) a y b como

$$\begin{aligned} -iL &= \sum_n [b_n^L(t) \dot{a}_n^R(t) + b_n^L(t) \epsilon_n a_n^R(t) - i b_n^L(t) \mathcal{A}_n a_n^R(t)] \\ &+ \sum_n [b_n^R(t) \dot{a}_n^L(t) - b_n^R(t) \epsilon_n a_n^L(t) - i b_n^R(t) \mathcal{A}_n a_n^L(t)] \\ &- \sum_{n \neq m} i [b_n^L(t) \mathcal{A}_{nm} a_m^R(t) + b_n^R(t) \mathcal{A}_{nm} a_m^L(t)], \end{aligned} \quad (99)$$

donde hemos introducido la conexión \mathcal{A}_n ,

$$\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)] = \int d\mathbf{x} \phi_n^\dagger[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x})(i\partial_0 - eA_0)\phi_n[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}), \quad (100)$$

y para \mathcal{A}_{nm} con $n \neq m$,

$$\mathcal{A}_{nm}[\mathbf{A}(t)] = \int d\mathbf{x} \phi_n^\dagger[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x})(i\partial_0 - eA_0)\phi_m[\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}). \quad (101)$$

La acción efectiva $\Gamma(A)$ es definida por

$$e^{-\Gamma[A]} = \int \prod_n [da_n^L(t) da_n^R(t) db_n^L(t) db_n^R(t)] e^{\int dt L}. \quad (102)$$

Las variables (a^R, b^L) y (a^L, b^R) están desacopladas debido a la ausencia de un término de masa de modo que la acción efectiva resultante es una suma de dos contribuciones independientes $\Gamma[A] = \Gamma^R[A] + \Gamma^L[A]$. El resultado de la integral sobre las variables de Grassman puede escribirse como la razón entre determinantes de matrices infinitas,

$$e^{-(\Gamma^R[A] - \Gamma^R[0])} = \frac{Det[(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])\delta_{nm} - i\mathcal{A}_{nm}[\mathbf{A}(t)]]}{Det[(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{0}])\delta_{nm}]}, \quad (103)$$

$$e^{-(\Gamma^L[A] - \Gamma^L[0])} = \frac{Det[(\partial_t - \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])\delta_{nm} - i\mathcal{A}_{nm}[\mathbf{A}(t)]]}{Det[(\partial_t - \epsilon_n[\mathbf{0}])\delta_{nm}]}, \quad (104)$$

y este resultado formal puede escribirse como el producto de tres factores

$$e^{-(\Gamma^R[A] - \Gamma^R[0])} = \left(\prod_n \frac{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)])}{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{0}])} \right) \left(\prod_n \frac{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])}{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)])} \right) \times \left(\frac{Det[(\partial_t + \epsilon_m[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_m[\mathbf{A}(t)])\delta_{mk} - i\mathcal{A}_{mk}[\mathbf{A}(t)]]}{\prod_n \det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])} \right). \quad (105)$$

Una expresión similar puede escribirse para Γ^L cambiando ϵ_n por $-\epsilon_n$. Los primeros dos factores son un producto infinito de determinantes de mecánica cuántica. El primero corresponde a la fase dinámica y el segundo a la fase geométrica debido a la evolución de un sistema mecánico-cuántico en la presencia de una perturbación dependiente del tiempo. El tercer determinante representa el acoplamiento entre diferentes sistemas.

Evaluamos ahora los dos primeros determinantes en (105). En primer lugar consideramos para t el rango $-T/2 \leq t \leq T/2$ para posteriormente tomar el límite $T \rightarrow \infty$. A continuación, imponemos la condición de borde [10] anti-periódica

$$f_n(T/2) = -f_n(-T/2), \quad (106)$$

en las autofunciones de los operadores para cada nivel- n . Entonces, los autovalores del operador $\partial_t + \epsilon_n - i\mathcal{A}_n$ resultan ser

$$\lambda_n = \bar{\epsilon}_n - i\bar{\mathcal{A}}_n + i\frac{(2n-1)\pi}{T}, \quad n = -\infty, \dots, +\infty \quad (107)$$

donde hemos introducido la notación

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t). \quad (108)$$

De estos autovalores se puede calcular el determinante

$$\det(\partial_t + \epsilon_n - i\mathcal{A}_n) = \mathcal{N} \cosh \left[\frac{T}{2} (\bar{\epsilon}_n - i\bar{\mathcal{A}}_n) \right], \quad (109)$$

donde \mathcal{N} es una constante (infinita) que se cancela en la razón de determinantes dada en (105). Tomando el límite $T \rightarrow \infty$ se encuentra

$$\frac{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])}{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)])} = \exp \left[-\frac{i}{2} \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \mathcal{A}_n(t) \right], \quad (110)$$

y

$$\frac{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)])}{\det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{0}])} = \exp \left[\frac{1}{2} \left| \int dt (\epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - \epsilon_n[\mathbf{0}]) \right| \right]. \quad (111)$$

El resultado para la acción efectiva es entonces

$$\Gamma^R[A] - \Gamma^R[0] = -\frac{1}{2} \sum_n \left| \int dt (\epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - \epsilon_n[\mathbf{0}]) \right| + \frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \mathcal{A}_n(t) + \delta\Gamma_+, \quad (112)$$

la cual es la suma de una contribución (real) dinámica y una contribución (imaginaria) geométrica de cada nivel, más la contribución dada por

$$e^{-\delta\Gamma_+} = \frac{\text{Det} [(\partial_t + \epsilon_m[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_m[\mathbf{A}(t)])\delta_{mk} - i\mathcal{A}_{mk}[\mathbf{A}(t)]]}{\prod_n \det(\partial_t + \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])}, \quad (113)$$

debida al acoplamiento de diferentes niveles. No es claro de esta última expresión si la contribución proveniente de distintos niveles es imaginaria pura (como la contribución geométrica) o si tiene una parte real.

El resultado (112), para la contribución de una quiralidad a la acción efectiva, es la versión integral de camino de la aproximación de B-O incluyendo la corrección geométrica a la aproximación adiabática. Esta descomposición de la acción efectiva no es manifiestamente invariante Lorentz, situación similar a la formulación habitual de la aproximación de B-O.

La contribución de la otra quiralidad se obtiene cambiando ϵ_n por $-\epsilon_n$ en (112). Así se obtiene la misma contribución dinámica, pero la contribución geométrica es de signo opuesto. La contribución de esta quiralidad al acoplamiento de niveles resulta ser

$$e^{-\delta\Gamma_-} = \frac{\text{Det} [(\partial_t - \epsilon_m[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_m[\mathbf{A}(t)])\delta_{mk} - i\mathcal{A}_{mk}[\mathbf{A}(t)]]}{\prod_n \det(\partial_t - \epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - i\mathcal{A}_n[\mathbf{A}(t)])}. \quad (114)$$

El resultado final para la acción efectiva del fermión de Dirac es

$$\Gamma[A] - \Gamma[0] = - \sum_n \left| \int dt (\epsilon_n[\mathbf{A}(t)] - \epsilon_n[\mathbf{0}]) \right| + \delta\Gamma_+ + \delta\Gamma_-, \quad (115)$$

donde observamos que las contribuciones geométricas de ambas quiralidades se han cancelado.

Si consideramos el campo de gauge externo acoplado a sólo una de las quiralidades, entonces se tiene

$$-i\mathcal{L}_+ = \psi_L^\dagger(\partial_0 + ieA_0)\psi_R + \psi_R^\dagger(\partial_0)\psi_L + \psi_L^\dagger\sigma \cdot (i\partial - e\mathbf{A})\psi_R - \psi_R^\dagger\sigma \cdot (i\partial)\psi_L, \quad (116)$$

en vez de (96) y la acción efectiva para el fermión de Weyl resulta ser

$$\Gamma_+[A] - \Gamma_+[0] = \Gamma^R[A] - \Gamma^R[0], \quad (117)$$

con Γ^R dado por (112). De hecho podemos reconocer los dos términos que no acoplan diferentes niveles en Γ^R , como el resultado para el determinante de Dirac usado en [9] en el estudio de la relación de la anomalía de gauge quirral con la holonomía $U(1)$ en el espacio de configuraciones de campos de gauge. Nuestro resultado (112) entrega una derivación más transparente de esos términos, y al mismo tiempo nos permite identificar la contribución remanente debida a las correcciones a la aproximación adiabática la cual no está incluida en el trabajo de Niemi y Semenoff [9]. Discutimos ahora lo concerniente a la anomalía.

Dado que la formulación presentada reproduce el resultado para el determinante fermiónico, seguramente deberá contener la anomalía de gauge quirral. Veamos si esto es así.

Consideremos un nuevo campo externo $\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{A} + \partial\alpha$. Es obvio de (97) que

$$\vec{\sigma} \cdot (i\partial - e\mathbf{A}^\alpha) e^{-ie\alpha} \phi_n(\mathbf{x}) = \epsilon_n e^{-ie\alpha} \phi_n(\mathbf{x}), \quad (118)$$

lo que muestra la invariancia de gauge de las autoenergías ($\epsilon_n[\mathbf{A}^\alpha] = \epsilon_n[\mathbf{A}]$) y luego la invariancia de gauge de lo que hemos identificado como la contribución dinámica a la acción efectiva. Si hubiésemos hecho la identificación

$$\Phi_n [\mathbf{A}^\alpha (t)] (\mathbf{x}) = e^{-ie\alpha(\mathbf{x},t)} \phi_n [\mathbf{A} (t)], \quad (119)$$

para las autofunciones, tendríamos un resultado invariante de gauge para todas las contribuciones a la acción efectiva provenientes de cada quiralidad. Y esto está en contradicción con la anomalía de gauge quiral. Tendría entonces que haber alguna condición de consistencia (¿invariancia Lorentz?) que restrinja la posible elección de la fase en las autofunciones.

Reemplacemos la identificación anterior por

$$\Phi_n [\mathbf{A}^\alpha (t)] (\mathbf{x}) = e^{-i\omega_n[\mathbf{A}(t),\alpha(t)]} e^{-ie\alpha(\mathbf{x},t)} \phi_n [\mathbf{A} (t)] (\mathbf{x}), \quad (120)$$

Si combinamos la transformación de gauge para el campo fermiónico

$$\Psi^\alpha = e^{-ie\alpha} \Psi, \quad (121)$$

la cual contiene una fase adicional ω_n fijada por la condición de consistencia adicional con la expansión (98), obtenemos

$$a_n^\alpha (t) = e^{i\omega_n[\mathbf{A}(t),\alpha(t)]} a_n (t) \quad \text{y} \quad b_n^\alpha (t) = e^{-i\omega_n[\mathbf{A}(t),\alpha(t)]} b_n (t). \quad (122)$$

Si aceptamos la presencia de la fase adicional ω_n en la dependencia de gauge de las autofunciones obtenemos

$$\mathcal{A}_n [\mathbf{A}^\alpha (t)] = \mathcal{A}_n [\mathbf{A} (t)] + \partial_0 \omega_n [\mathbf{A} (t), \alpha (t)], \quad (123)$$

junto a una expresión algo mas complicada para la dependencia de gauge de la contribución de $\delta\Gamma$ (la que acopla diferentes niveles).

Una vez identificada la necesidad de una elección de una fase no-trivial para las autofunciones, es natural esperar que esta fase dependa también de A_0 de modo que tengamos que considerar a las autofunciones como funcionales de todas las componentes del campo externo.

La anomalía quiral para fermiones de Weyl con quiralidad derecha acoplados a un campo de gauge tiene una contribución proveniente del término geométrico dada por

$$\frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt [\mathcal{A}_n [\mathbf{A}^\alpha (t)] - \mathcal{A}_n [\mathbf{A} (t)]] = \quad (124)$$

$$\frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) (\omega_n [\mathbf{A}(T/2), \alpha(T/2)] - \omega_n [\mathbf{A}(-T/2), \alpha(-T/2)]). \quad (125)$$

De acuerdo a [9], esta expresión debería reproducir la anomalía de gauge quirral. Dado que de momento no sabemos como fijar la fase de la autofunción, no podemos rederivar el resultado estándar para la anomalía o verificar que no hay contribución adicional a esta debida a la aproximación adiabática.

Un ingrediente en la discusión acerca del requerimiento para fijar la fase de las Φ_n , a ser usadas en la expansión del campo fermiónico, es el efecto de una redefinición dada por

$$\Phi'_n [\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}) = e^{i\beta_n[\mathbf{A}(t)]} \phi_n [\mathbf{A}(t)](\mathbf{x}), \quad (126)$$

la cual corresponde al cambio de variables [12]

$$a'_n(t) = e^{-i\beta_n[\mathbf{A}(t)]} a_n(t) \quad \text{y} \quad b'_n(t) = e^{i\beta_n[\mathbf{A}(t)]} b_n(t). \quad (127)$$

El efecto de esta redefinición en la contribución geométrica de una quiralidad resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \mathcal{A}'_n(t) &= \frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \mathcal{A}_n(t) \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) (\beta_n [\mathbf{A}(T/2)] - \beta_n [\mathbf{A}(-T/2)]). \end{aligned} \quad (128)$$

Pero la consistencia de la redefinición de la fase con la condición de borde implica que

$$e^{i\beta_n[\mathbf{A}(T/2)]} = e^{i\beta_n[\mathbf{A}(-T/2)]}, \quad (129)$$

y entonces $\beta_n [\mathbf{A}(T/2)] - \beta_n [\mathbf{A}(-T/2)] = 2\pi k_n$ donde k_n es un entero para cada nivel n .

Entonces

$$\frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \mathcal{A}'_n(t) = \frac{i}{2} \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \mathcal{A}_n(t) - i\pi \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) k_n, \quad (130)$$

y este resultado parece estar en contradicción, cuando k_n es impar, con la independencia de la formulación integral de camino de la elección de fases en las autofunciones usadas para expandir el campo fermiónico.

Para terminar la discusión de la anomalía consideremos la anomalía axial $U(1)$ en una teoría con un fermión de Dirac acoplado a un campo de gauge. En este caso podemos considerar un Lagrangeano dado por

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = & \Psi_L^\dagger (\partial_0 + ieA_0 + ieV_0) \Psi_R + \Psi_R^\dagger (\partial_0 + ieA_0 - ieV_0) \Psi_L \\
& + \Psi_L^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\partial - e\mathbf{A} - e\mathbf{V}) \Psi_R - \Psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\partial - e\mathbf{A} + e\mathbf{V}) \Psi_L,
\end{aligned} \tag{131}$$

donde hemos incluido un campo de gauge A y una fuente V acoplada a la corriente axial. El resultado para la acción fermiónica efectiva resulta ser

$$\begin{aligned}
\Gamma[A, V] - \Gamma[0, 0] = & -\frac{1}{2} \sum_n \left| \int dt (\epsilon_n [\mathbf{A}(t) + \mathbf{V}(t) - \epsilon_n [0]]) \right| \\
& -\frac{1}{2} \sum_n \left| \int dt (\epsilon_n [\mathbf{A}(t) - \mathbf{V}(t) - \epsilon_n [0]]) \right| \\
& + \frac{i}{2} \sum_n \frac{\bar{\epsilon}_n [A + V]}{|\bar{\epsilon}_n [A + V]|} \int dt \mathcal{A}_n [A(t) + V(t)] \\
& - \frac{i}{2} \sum_n \frac{\bar{\epsilon}_n [A - V]}{|\bar{\epsilon}_n [A - V]|} \int dt \mathcal{A}_n [A(t) - V(t)] \\
& + \delta\Gamma_+ [A + V] + \delta\Gamma_- [A - V].
\end{aligned} \tag{132}$$

Con el fin de obtener la divergencia de la corriente axial, aplicamos el operador $\partial_\mu \delta / \delta V_\mu$ a la expresión anterior

$$\partial_\mu \frac{\delta \Gamma[A, V]}{\delta V_\mu(x)} \Big|_{V=0} = i \sum_n \text{sgn}(\bar{\epsilon}_n) \int dt \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{A}_n[A(t)]}{\delta A_\mu(x)} + \partial_\mu \frac{\delta(\delta\Gamma_+[A])}{\delta A_\mu(x)} - \partial_\mu \frac{\delta(\delta\Gamma_-[A])}{\delta A_\mu(x)}, \tag{133}$$

donde hemos usado la independencia de gauge de los autovalores para eliminar todos los términos donde el operador $\delta / \delta A_\mu$ actúa sobre ϵ_n . Deberíamos esperar entonces que los dos últimos términos del miembro derecho se cancelen y el restante reproduzca la anomalía.

Así, un test real de validez de la presente formulación pasa por identificar el criterio que permita fijar las fases de las autofunciones.

3.3.3. Representación integral de camino para un campo escalar complejo.

En la sección 3.3.2 mostramos una nueva formulación de la integral de camino para un campo fermiónico no-masivo en presencia de un campo vectorial externo. Esta formulación

se basó en la implementación de la aproximación adiabática a nivel de la integral de camino. El determinante fermiónico fué expresado como una superposición de sistemas mecánico-cuánticos débilmente acoplados en el entendido que el campo externo variaba lentamente con el tiempo, y una fase geométrica (una realización de la fase de Berry a nivel de teoría cuántica de campos) fué identificada como una contribución a la acción efectiva.

Una inquietud natural surge de lo anterior, ¿ es posible implementar la aproximación adiabática a nivel de la integral de camino para cualquier teoría de campos, o esto es algo peculiar de la representación integral de camino para campos fermiónicos ? En la representación que usamos en la sección 3.3.2, dos propiedades específicas de la acción fermiónica fueron usadas: la acción es un bilineal en el campo fermiónico y de primer orden en las derivadas temporales, siendo esta segunda propiedad crucial a la hora de descomponer la acción efectiva como una superposición de sistemas mecánico-cuánticos.

Entonces, exploramos la posibilidad de una reformulación de la teoría de campos para un campo escalar complejo haciendo una derivación similar a la hecha para el campo fermiónico.

El punto de partida es la densidad Lagrangeana en el Euclídeo [13]

$$\mathcal{L}(\Phi) = -\partial_\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2, \quad (134)$$

la cual no es cuadrática ni de primer orden en la derivada temporal. A fin de evitar el primer problema introducimos un campo escalar auxiliar y real A , y consideramos una nueva densidad Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L}(\Phi, A) + \frac{A^2}{2\lambda} = -\partial_\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - A \Phi^* \Phi + \frac{A^2}{2\lambda}, \quad (135)$$

la que se reduce a la anterior cuando el campo auxiliar es reemplazado por su expresión en términos del campo escalar complejo

$$A = \frac{\lambda}{2} \Phi^* \Phi. \quad (136)$$

A fin de tener una acción de primer orden en la derivada temporal, consideramos la densidad Lagrangeana en el espacio de fase

$$\mathcal{L}(\Phi, \Pi, A) = \Pi^* \partial_t \Phi + \Pi \partial_t \Phi^* + \Pi^* \Pi - \partial \Phi^* \cdot \partial \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - A \Phi^* \Phi, \quad (137)$$

la cual tiene una estructura similar a la densidad Lagrangeana para un fermión en presencia de un campo externo. Entonces podemos repetir paso a paso la derivación de la aproximación

adiabática hecha en la sección 3.3.2. Introducimos primeramente las autofunciones

$$(-\partial^2 + m^2 + A) \varphi_n[A](\mathbf{x}, t) = E_n[A] \varphi_n[A](\mathbf{x}, t), \quad (138)$$

y las expansiones

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n(t) \varphi_n[A](\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \Pi(\mathbf{x}, t) = \sum_n b_n(t) \varphi_n[A](\mathbf{x}, t). \quad (139)$$

Usando la ortogonalidad de las autofunciones

$$\int d\mathbf{x} \varphi_n^*[A](\mathbf{x}, t) \varphi_m[A](\mathbf{x}, t) = \delta_{nm}, \quad (140)$$

el Lagrangeano puede ser reexpresado en términos de coeficientes a_n y b_n definidos en (139),

$$\begin{aligned} L = & \sum_n [b_n^*(t) \dot{a}_n(t) - a_n^*(t) \dot{b}_n(t) + b_n^*(t) b_n(t) - E_n a_n^*(t) a_n(t)] \\ & - i \sum_n [b_n^*(t) \mathcal{A}_n a_n(t) - a_n^*(t) \mathcal{A}_n b_n(t)] \\ & - i \sum_{n \neq m} [b_n^*(t) \mathcal{A}_{nm} a_m(t) - a_n^*(t) \mathcal{A}_{nm} b_m(t)], \end{aligned} \quad (141)$$

donde hemos introducido la conexión \mathcal{A}_n ,

$$\mathcal{A}_n[A] = \int d\mathbf{x} \varphi_n^*[A](\mathbf{x}, t) i \partial_t \varphi_n[A](\mathbf{x}, t), \quad (142)$$

y \mathcal{A}_{nm} para $n \neq m$,

$$\mathcal{A}_{nm} = \int d\mathbf{x} \varphi_n^*[A](\mathbf{x}, t) i \partial_t \varphi_m[A](\mathbf{x}, t). \quad (143)$$

Es conveniente introducir un reescalamiento de variables $a_n \rightarrow \bar{E}_n^{-1/4} a_n$ y $b_n \rightarrow \bar{E}_n^{1/4} b_n$ con el fin de tener a las variables a_n y b_n con la misma dimensión. \bar{E}_n es el valor promedio de la autoenergía definido por

$$\bar{E}_n[A] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt E_n[A(t)]. \quad (144)$$

Entonces podemos definir la acción efectiva $\Gamma[A]$ en la forma

$$e^{-\Gamma[A]} = \int \prod_n [da_n(t) da_n^*(t) db_n(t) db_n^*(t)] e^{\int dt L}, \quad (145)$$

la cual puede ser interpretada como la acción efectiva que toma en cuenta el efecto de las fluctuaciones en la fase del campo escalar complejo.

Esta acción efectiva puede ser escrita como una razón de determinantes de matrices de dimensión infinita

$$e^{-(\Gamma[A]-\Gamma[0])} = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} -E_n^{1/2}[0]\delta_{nm} & -\delta_{nm}\partial_t \\ \delta_{nm}\partial_t & E_n^{1/2}[0]\delta_{nm} \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} & -\delta_{nm}D_t + i\mathcal{A}_{nm}[A(t)] \\ \delta_{nm}D_t - i\mathcal{A}_{nm}[A(t)] & \bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} \end{pmatrix}}, \quad (146)$$

donde hemos introducido la derivada covariante $\delta_{nm}D_t = \delta_{nm}(\partial_t - i\mathcal{A}_n(t))$.

Reescribamos ahora el determinante en la forma (luego de intercambiar columnas)

$$e^{-(\Gamma[A]-\Gamma[0])} = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}\partial_t & -E_n^{1/2}[0]\delta_{nm} \\ -E_n^{1/2}[0]\delta_{nm} & \delta_{nm}\partial_t \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}D_t - i\mathcal{A}_{nm}[A(t)] & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm}D_t + i\mathcal{A}_{nm}[A(t)] \end{pmatrix}}. \quad (147)$$

Esta razón de determinantes puede ser descompuesta en la misma forma como se hizo para el caso fermiónico, esto es,

$$e^{-(\Gamma[A]-\Gamma[0])} = \left[\frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}\partial_t & -E_n^{1/2}[0]\delta_{nm} \\ -E_n^{1/2}[0]\delta_{nm} & \delta_{nm}\partial_t \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}\partial_t & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm}\partial_t \end{pmatrix}} \right] \times \\ \times \left[\frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}\partial_t & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm}\partial_t \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}D_t & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm}D_t \end{pmatrix}} \right] \times \\ \times \left[\frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}D_t & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm}D_t \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm}D_t - i\mathcal{A}_{nm}[A(t)] & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm}D_t + i\mathcal{A}_{nm}[A(t)] \end{pmatrix}} \right]. \quad (148)$$

Esta descomposición de la acción efectiva nos dá una representación integral de camino de la aproximación de B-O. La primera razón nos dá una suma de contribuciones dinámicas de cada nivel n , la segunda razón corresponde a la suma de fases geométricas y la última dá cuenta de las correcciones debido al acoplamiento de diferentes niveles.

Concentrémonos en la segunda razón de determinantes, es decir, la fase geométrica. Con el fin de calcular cualquiera de los determinantes allí presentes, imponemos condiciones de borde periódicas de modo que la acción efectiva resulta ser

$$e^{-(\Gamma_{geo}[A]-\Gamma_{geo}[0])} = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm} \partial_t & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm} \partial_t \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} \delta_{nm} D_t & -(E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A])\delta_{nm} \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A]\delta_{nm} & \delta_{nm} D_t \end{pmatrix}}, \quad (149)$$

donde ha sido usada la identidad

$$D_t f_n = e^{i \int_{-T/2}^t dt' \mathcal{A}_n(t')} \partial_t \bar{f}_n \quad \text{cuando} \quad f_n = e^{i \int_{-T/2}^t dt' \mathcal{A}_n(t')} \bar{f}_n(t), \quad (150)$$

la cual nos dice que el determinante del operador en el denominador de (149) es el determinante del operador en el numerador

$$O_n = \begin{pmatrix} \partial_t & -E_n[A(t)]/\bar{E}_n^{1/2}[A] \\ -\bar{E}_n^{1/2}[A] & \partial_t \end{pmatrix}, \quad (151)$$

actuando sobre funciones que satisfacen la condición de borde

$$\bar{f}_n(T/2) = e^{i\alpha_n} \bar{f}_n(-T/2) \quad \text{con} \quad \alpha_n = \int_{-T/2}^{T/2} dt \mathcal{A}_n(t) = T\bar{\mathcal{A}}_n. \quad (152)$$

Ahora, para cada autovalor del operador O_n actuando sobre funciones periódicas, hay un autovalor $\lambda_n - i\bar{\mathcal{A}}_n$ del mismo operador actuando en funciones que satisfacen la condición de borde (152)[11].

La periodicidad en α del espectro de O_n fija completamente sus autovalores λ_n cuando actúa sobre funciones periódicas. Así tenemos dos torres de autovalores

$$\lambda_{n,k}^\pm = \lambda_{n,0}^\pm + i \frac{2\pi k}{T} \quad , \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (153)$$

con $\lambda_{n,0}^\pm$ funcionales de A .

Con estos autovalores podemos evaluar la razón de determinantes mecánico-cuánticos dados en (149). Usando métodos estándar, la contribución geométrica a la acción efectiva resulta ser

$$\Gamma_{geo}[A] - \Gamma_{geo}[0] = \sum_n \frac{i}{2} (sgn(\lambda_{n,0}^+) + sgn(\lambda_{n,0}^-)) \int_{-T/2}^{T/2} dt \mathcal{A}_n(t). \quad (154)$$

Notamos de este resultado que habrá contribución geométrica sólo desde aquellos niveles para los cuales $\lambda_{n,0}^+ \lambda_{n,0}^- > 0$.

Junto a la determinación del *signo* de los autovalores $\lambda_{n,0}^\pm$, la determinación de la contribución geométrica requiere evaluar la conexión \mathcal{A}_n dada en (142). Si introducimos las autofunciones

$$\varphi_n[A](\mathbf{x}, t) = \widehat{\varphi}_n[A](\mathbf{x}, t) e^{i\theta_n[A](t)}, \quad (155)$$

donde la arbitrariedad en la elección de una fase independiente de \mathbf{x} en las autofunciones ha sido puesta de manifiesto, y si se hace la elección

$$\theta_n[A](t) = \int_{-T/2}^t dt \gamma_n[A(t)], \quad (156)$$

se encuentra que

$$\mathcal{A}_n(t) = \widehat{\mathcal{A}}_n(t) + \gamma_n[A(t)], \quad (157)$$

la cual es una suma de una contribución $\gamma_n(A(t))$ debido a la posible dependencia de la fase de las autofunciones de la historia del campo A , y una contribución

$$\widehat{\mathcal{A}}_n[A(t)] = \int d\mathbf{x} \widehat{\varphi}_n^*[A(t)](\mathbf{x}) i \partial_i \widehat{\varphi}_n[A(t)](\mathbf{x}), \quad (158)$$

3.4. Discusión.

Nos preguntamos por el criterio a usar para fijar las fases $\theta_n(t)$ en (155). La expansión para el campo escalar complejo en los extremos del intervalo de tiempo está dada por

$$\Phi(\mathbf{x}, T/2) = \sum_n a_n \widehat{\varphi}_n[A](\mathbf{x}) e^{i\theta_n[A](T/2)} \quad \text{y} \quad \Phi(\mathbf{x}, -T/2) = \sum_n a_n \widehat{\varphi}_n[A](\mathbf{x}) e^{i\theta_n[A](-T/2)}, \quad (159)$$

donde $a_n(T/2) = a_n(-T/2) = a_n$ y $A(T/2) = A(-T/2) = A$. Podemos ver que la fases θ_n están relacionadas con la posibilidad de tener condiciones de borde no-triviales para la

fase del campo escalar complejo. Y nos preguntamos por las restricciones que puedan existir para dichas condiciones de borde.

Acerca de las implicaciones de la contribución geométrica en la teoría de un campo escalar complejo:

- La aproximación adiabática, la cual está implícita en el tratamiento del acoplamiento de diferentes niveles como una perturbación, corresponde a una situación donde las fluctuaciones del módulo del campo escalar complejo son muy suaves respecto a la escala de las fluctuaciones de la fase de este campo. ¿ Bajo qué circunstancias puede ocurrir este caso ? Una respuesta posible podría encontrarse si aplicamos esta aproximación al acoplamiento de dicho campo a otros sistemas, como por ejemplo, campos de gauge o campos fermiónicos. Al final del capítulo retomaremos esta inquietud.

- Mirando (134) puede resultar interesante estudiar las diferencias, a nivel de la aproximación de B-O, de los casos $m^2 > 0$ (teoría simétrica $U(1)$) y $m^2 < 0$ (quiebre espontáneo de simetría). Se puede explorar la posibilidad, a nivel de la integral de camino, de implementar dicha aproximación en el caso de tener un campo escalar real, o dos campos escalares reales pero con masas muy diferentes. Este último resulta importante si deseamos explorar una posible relación entre una contribución geométrica y una violación al teorema de desacoplamiento de Appelquist-Carrazone.

3.4.1. *Acción efectiva para un campo fermiónico acoplado a uno escalar.*

En el caso de mecánica cuántica está clara, de acuerdo a lo visto en la sección 3.3.2, la formulación de la aproximación adiabática y la aparición de una fase geométrica en el caso de un sistema fermiónico en la formulación integral de camino. El punto clave está en identificar una representación apropiada de la variable fermiónica basada en el uso de las funciones propias de un operador que depende de un campo externo dependiente del tiempo.

La propuesta presentada considera las funciones propias de la densidad Hamiltoniana la cual define una representación de la variable fermiónica en cada punto del espacio, y que depende de la elección en otros puntos pues dicha densidad es un operador diferencial en las coordenadas espaciales. Como consecuencia de esta correlación, no es posible determinar las funciones propias y por tanto la formulación basada en esta representación es meramente formal, y no es claro qué propiedades del sistema fermiónico será posible de estudiar en este

marco. Otra dificultad adicional es que tampoco puede determinarse el espectro del operador cuyas funciones propias definen la nueva representación y por tanto el control sobre la validéz de la aproximación adiabática, basado en las diferencias de energía de los diferentes niveles, se pierde.

Una alternativa es introducir una nueva formulación basada en el uso de las funciones propias de operadores independientes en cada punto del espacio de modo que el problema de identificar funciones y valores propios, junto con la descomposición de la variable fermiónica en cada punto del espacio, se reduzca al caso de mecánica cuántica. En este caso será necesario buscar una aproximación a los términos en la acción que envuelvan derivadas espaciales.

En el caso de un sistema fermiónico libre y despreciando las derivadas espaciales, se tiene en cada punto del espacio un espectro discreto con una separación de energía, entre niveles, igual a la masa del fermión. Esto sugiere utilizar esta masa como parámetro para justificar la aproximación adiabática. El modo mas directo de implementar esta idea es utilizar las funciones propias del operador correspondiente al término de masa ($m\gamma^0$) para definir la nueva representación de la variable fermiónica. Pero esta representación resulta ser demasiado trivial pues el operador no contiene ningún campo externo dependiente del tiempo y por tanto no sirve como punto de partida para una implementación de la aproximación adiabática a nivel de teoría cuántica de campos. De hecho esta representación se reduciría al desarrollo en potencias del inverso de la masa del fermión para la acción efectiva debido a la descomposición del espinor de Dirac en dos espinores de Pauli.

Para poder implementar la aproximación adiabática es preciso utilizar funciones propias de un operador que contenga un campo externo (al fermiónico) dependiente del tiempo.

Consideremos un sistema fermiónico acoplado a un campo escalar. El Lagrangeano a considerar está dado por [13]

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - y\bar{\Psi}\phi^a T_a\Psi, \quad (160)$$

donde T_a son los generadores de un grupo actuando sobre los campos fermiónicos en una representación de dicho grupo. Resulta conveniente utilizar la representación de Dirac para las matrices γ donde γ^0 es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (161)$$

y la descomposición para Ψ

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (162)$$

Para definir la nueva representación de la variable fermiónica es preciso utilizar la parametrización $\phi^a = \hat{\phi}^a \hat{\phi}^a$ para el campo escalar donde $\sum_{\alpha} \hat{\phi}^{\alpha} \hat{\phi}^{\alpha} = 1$ e introducir las funciones propias f_n

$$(\hat{\phi}^a T_a) f_n = \lambda_n f_n, \quad (163)$$

donde los valores propios dependen de la representación del sistema fermiónico y las funciones propias dependen de la dirección (en el espacio interno obviamente) del campo escalar. En el caso de $SU(2)$, la representación fermiónica se puede caracterizar por un (semi) entero j y los autovalores vienen dados por $\lambda_n = -j + n$ donde $n = 0, 1, 2, \dots, 2j$. En el caso de $SU(N)$ siempre será posible elegir la representación de los generadores de manera tal que $\hat{\phi}^a T_a$ coincida con uno de los generadores de un subgrupo $SU(2)$ de $SU(N)$. En este caso, $\lambda_{n_a, a} = -j_a + n_a$ donde el índice adicional a caracteriza las diferentes representaciones del subgrupo $SU(2)$ contenidas en la representación fermiónica de $SU(N)$. En lo que sigue consideramos el caso $SU(2)$.

Con estas funciones propias se introducen las variables fermiónicas φ_{ni} y χ_{ni}

$$\varphi = \sum_n \sum_{i=1,2} \varphi_{ni} f_{ni}, \quad (164)$$

$$\chi = \sum_n \sum_{i=1,2} \chi_{ni} f_{ni}, \quad (165)$$

donde se han introducido los espinores

$$f_{n1} = \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{n2} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (166)$$

Notemos que esta representación de la variable fermiónica se introduce de modo independiente en cada punto del espacio y a cada instante. Se tiene por tanto variables de Grassman φ_{ni} y χ_{ni} en cada punto del espacio-tiempo.

Al introducir la nueva representación, obtenemos

$$\Psi^\dagger i\partial_t \Psi = \sum_{n,i} \left[\varphi_{ni}^\dagger i\partial_t \varphi_{ni} + \chi_{ni}^\dagger i\partial_t \chi_{ni} \right] - \sum_{n,m,i} \left[\varphi_{ni}^\dagger \varphi_{mi} + \chi_{ni}^\dagger \chi_{mi} \right] \mathcal{A}_{nm}, \quad (167)$$

donde $\mathcal{A}_{nm} = f_n^\dagger(-i\partial_t)f_m$.

Para el término de interacción se tiene

$$-y\bar{\Psi}\phi^a T_a \Psi = -\sum_n y_n \phi \sum_i \left[\varphi_{ni}^\dagger \varphi_{ni} - \chi_{ni}^\dagger \chi_{ni} \right], \quad (168)$$

con $y_n = y\lambda_n$.

Si olvidamos en una primera aproximación el término con derivadas espaciales, se tiene una suma de contribuciones independientes en cada punto del espacio-tiempo. Para \vec{x} fijo y para cada valor de i se tienen dos sistemas idénticos al sistema de mecánica cuántica fermiónico donde hemos introducido la nueva representación. En un sistema, las variables φ_{ni} juegan el papel de la variable c_n de mecánica cuántica y la energía de cada nivel es $y_n\phi$. En el segundo sistema, se tienen variables χ_{ni} y la energía de cada nivel es $-y_n\phi$, donde el cambio de signo en la energía se debe a la matriz γ^0 que aparece en el término de interacción al expresarlo como función de Ψ y Ψ^\dagger . Si suponemos que el módulo del campo escalar (ϕ) es lo suficientemente grande para que las diferencias de energía de los niveles sean lo suficientemente grandes para justificar el despreciar en una primera aproximación (adiabática) los términos no-diagonales proporcionales a \mathcal{A}_{nm} con $n \neq m$, entonces se tiene

$$\int \mathcal{D}\varphi_{ni}^\dagger \mathcal{D}\varphi_{ni} e^{i \int dt \mathcal{L}(\varphi)} \approx e^{\frac{i}{2} \text{sgn}(y_n) \int dt [\mathcal{A}_n + y_n \phi]}, \quad (169)$$

$$\int \mathcal{D}\chi_{ni}^\dagger \mathcal{D}\chi_{ni} e^{i \int dt \mathcal{L}(\chi)} \approx e^{\frac{i}{2} \text{sgn}(-y_n) \int dt [\mathcal{A}_n - y_n \phi]}, \quad (170)$$

donde $\mathcal{A}_n = f_n^\dagger(-i\partial_t)f_n$.

El cambio de signo en los niveles de energía hace que las fases geométricas de los dos sistemas mecánico-cuánticos se cancelen en cada punto del espacio-tiempo y por tanto se pierde la señal de identidad de la nueva aproximación en este ejemplo. A pesar de que no aparezca una fase geométrica en el resultado final, la nueva representación de la integral fermiónica puede servir como una nueva aproximación que ponga de manifiesto propiedades de la teoría a nivel no-perturbativo. Para poder identificar dichas propiedades habría que estudiar los primeros términos del desarrollo y ver si son lo suficientemente simples.

Respecto a la consistencia de haber despreciado, en una primera aproximación, el término con derivadas espaciales. Se puede expresar dicho término en la forma

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger \alpha \cdot (-i\partial) \Psi &= \sum_{n,i,j} \left[\varphi_{ni}^\dagger (-i\partial) \chi_{nj} + \chi_{ni}^\dagger (-i\partial) \varphi_{nj} \right] \cdot (f_{ni}^\dagger \sigma f_{nj}) \\ &+ \sum_{n,m,i,j} \left[\varphi_{ni}^\dagger \chi_{mj} + \chi_{ni}^\dagger \varphi_{mj} \right] (f_{ni}^\dagger \sigma \cdot (-i\partial) f_{mj}). \end{aligned} \quad (171)$$

Aquí hay dos sumandos: el primero envuelve términos no-diagonales que mezclan variables correspondientes a niveles de energía $y_n \phi$ y $-y_n \phi$ y por tanto serán una pequeña corrección a incorporar junto con las correcciones a la aproximación adiabática. El segundo sumando mezcla las variables de los niveles de energía $y_n \phi$ y $-y_m \phi$ lo cual presenta un problema cuando se considera $m = 2j - n$ pues en este caso las variables fermiónicas corresponden a niveles de una misma energía y por tanto no hay ningún motivo para tratar los términos que mezclan las cuatro variables fermiónicas, correspondiendo a niveles degenerados, como una perturbación. A falta de una expresión compacta para la integral fermiónica que incorpore de modo exacto los términos no-diagonales entre variables correspondiendo a niveles degenerados, quedaría la alternativa de introducir un término de masa $-m \bar{\Psi} \Psi$ para el campo fermiónico que lleva a

$$-m \bar{\Psi} \Psi = -m \sum_{n,i} \left[\varphi_{ni}^\dagger \varphi_{ni} - \chi_{ni}^\dagger \chi_{ni} \right], \quad (172)$$

lo cual rompe la degeneración de niveles y para cierto rango de m y ϕ se puede justificar el tratar las correcciones a la aproximación adiabática como una perturbación.

Volviendo a la cancelación de fases geométricas. Se puede intentar ver si queda una fase geométrica al considerar el acoplo del sistema fermiónico al campo escalar mas general invariante relativista

$$-y \bar{\Psi} e^{i\alpha\gamma^5} \phi^a T_a \Psi. \quad (173)$$

Este nuevo término de interacción lleva a modificar la introducción de nuevas variables fermiónicas pues la descomposición del campo de Dirac en espinores (162) no es compatible con la diagonalización de la interacción. Las variables fermiónicas que diagonalizan la interacción son en este caso $\varphi_{ni}^{(\alpha)}$ y $\chi_{ni}^{(\alpha)}$ definidas por

$$\varphi = \sum_n \sum_{i=1,2} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \varphi_{ni}^{(\alpha)} - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \chi_{ni}^{(\alpha)} \right] f_{ni}, \quad (174)$$

$$\chi = \sum_n \sum_{i=1,2} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \chi_{ni}^{(\alpha)} - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \varphi_{ni}^{(\alpha)} \right] f_{ni}. \quad (175)$$

Al llevar las nuevas variables a la acción del sistema fermiónico, se observa que sigue habiendo una cancelación de fases geométricas por lo que la generalización del acoplamiento de sistema al escalar no aporta nada nuevo.

Una forma de evitar las cancelaciones de fases geométricas que aparecen en el caso de un sistema fermiónico acoplado a un campo escalar, es considerar un campo vectorial. Como punto de partida consideramos un caso particular donde $\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{0}$ de modo que el campo vectorial se reduce a su componente temporal. Podemos trasladar toda la discusión del campo escalar con los siguientes cambios: en lugar del término de interacción (168) se tendrá

$$-g\Psi^\dagger A_0^a T_a \Psi = - \sum_n g\lambda_n A_0 \sum_i \left[\varphi_{ni}^\dagger \varphi_{ni} + \chi_{ni}^\dagger \chi_{ni} \right], \quad (176)$$

donde se ha utilizado la parametrización $A_0^a = A_0 \widehat{A}_0^a$ análoga a la del caso escalar. La matriz γ^0 adicional del término de interacción con el campo A_0^a hace que las variables φ_{ni} y χ_{ni} correspondan a niveles de la misma energía y que las fases geométricas asociadas a la integración sobre dichas variables en la aproximación adiabática sean iguales (en lugar de la cancelación del caso escalar).

La densidad Lagrangeana del sistema fermiónico como función de las nuevas variables fermiónicas viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_0^a) = & \sum_{n,i} \left[\varphi_{ni}^\dagger (i\partial_t - g\lambda_n A_0 - m - \mathcal{A}_n) \varphi_{ni} + \chi_{ni}^\dagger (i\partial_t - g\lambda_n A_0 + m - \mathcal{A}_n) \chi_{ni} \right], \\ & - \sum_{n \neq m, i} \left[\varphi_{ni}^\dagger \varphi_{mi} + \chi_{ni}^\dagger \chi_{mi} \right] \mathcal{A}_{nm} \end{aligned} \quad (177)$$

más el término con variables espaciales (171) donde ahora las variables φ_{ni} corresponden a niveles de energía $g\lambda_n A_0 + m$ y las variables χ_{ni} a $g\lambda_n A_0 - m$. De nuevo se tiene que en un rango de valores de m y A_0 los niveles de energía estarán lo suficientemente alejados para que la aproximación adiabática sea consistente.

El resultado para la acción efectiva fermiónica en la aproximación adiabática es

$$\begin{aligned} \Gamma_{ad} = & \int d\mathbf{x} \sum_n \text{sgn}(g\lambda_n A_0 + m) \left[\int dt (g\lambda_n A_0 + m) + \lambda_n \Omega \left[\widehat{A}_0^a \right] \right] \\ & + \int d\mathbf{x} \sum_n \text{sgn}(g\lambda_n A_0 - m) \left[\int dt (g\lambda_n A_0 - m) + \lambda_n \Omega \left[\widehat{A}_0^a \right] \right], \end{aligned} \quad (178)$$

donde hemos utilizado la forma explícita de la fase de Berry de mecánica cuántica

$$\int dt f_n^\dagger (-i\partial_t) f_n = \lambda_n \Omega, \quad (179)$$

siendo Ω el ángulo sólido barrido por la dirección de la componente temporal del campo de gauge en su evolución temporal. Teniendo en cuenta que $\lambda_{2j-n} = -\lambda_n$ se puede ver que las dos contribuciones en Γ_{ad} debidas a las variables φ y χ son iguales.

Podemos definir una región de acoplamiento débil

$$g < \left(\frac{m}{A_0}\right) \frac{1}{\text{máx}|\lambda_n|}, \quad (180)$$

donde se tiene $g\lambda_n A_0 + m > 0$. En este caso se tiene (recordando que $n = 0, 1, \dots, 2j$)

$$\Gamma_{ad}^{(w)} = 2 \sum_n \int d^4x (g\lambda_n A_0 + m) = 2m(2j+1)VT, \quad (181)$$

donde VT es el volumen espacio-temporal. Notemos que ha habido una cancelación entre las contribuciones con λ_n positivo y negativo en la fase dinámica y geométrica.

En el momento en que el acoplamiento es suficientemente fuerte

$$g > \left(\frac{m}{A_0}\right) \frac{1}{\text{máx}|\lambda_n|}, \quad (182)$$

vamos a suponer que A_0 es tal que se puede separar la suma en n en dos regiones

$$n \in I_> \quad g|\lambda_n|A_0 > m \quad (183)$$

donde $\text{sgn}(g\lambda_n A_0 + m) = \text{sgn}(\lambda_n)$, y

$$n \in I_< \quad g|\lambda_n|A_0 < m \quad (184)$$

donde $\text{sgn}(g\lambda_n A_0 + m) = 1$. En este caso se tiene

$$\Gamma_{ad}^{(s)} = 2mVT \sum_{n \in I_<} 1 + 2 \sum_{n \in I_>} g|\lambda_n| \int d^4x A_0 + 2 \sum_{n \in I_>} |\lambda_n| \int d\mathbf{x} \Omega \left[\widehat{A}_0^a \right]. \quad (185)$$

El resultado del régimen de acoplamiento fuerte contiene como caso particular ($I_> = \emptyset$) el caso de acoplamiento débil.

Comentarios finales acerca de la fase geométrica en la acción efectiva fermiónica:

- Depende de los parámetros de la teoría únicamente a través de la definición de $I_{>}$ que fija los sumandos donde no hay cancelación de contribuciones geométricas. Depende de la representación del sistema fermiónico a través del factor $|\lambda_n|$ y de la evolución en el tiempo de la dirección (en el espacio interno) de la componente temporal del campo externo a través del factor $\Omega \left[\widehat{A}_0^a \right]$.

- Es una contribución característica de la teoría no-Abeliana.

- Es una contribución no-perturbativa. En un desarrollo de la acción efectiva en potencias del acoplo g sólo se reproducirá el resultado del regimen de acoplo débil que no contiene la fase geométrica.

-
- [1] M. V. Berry, *Proc. R. London A* **392**, 457 (1984); C. A. Mead and D. G. Truhlar, *J. Chem. Phys.* **70**, 2284 (1974); R. Tycko, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2281 (1987) : Observación experimental de la fase de Berry en el espectro de resonancia magnética de una muestra magnética resonante usando resonancia cuadrupolar nuclear pura.
- [2] J. E. R. Seiler and B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 51 (1983); J. E. Avron and R. Seiler, *ibid.* **54** 259 (1985).
- [3] J. Moody, A. Shapere and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 893 (1986).
- [4] J. H. Hannay, *J. Phys.* **A18**, 221 (1985), F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2111 (1984); A. Tomita and R. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 937 (1986): Medición del ángulo de Hannay en un experimento óptico.
- [5] E. Gozzi and W. D. Thacker, *Phys. Rev.* **D35**, 2388 (1987) ; *Phys. Rev.* **D35**, 2398 (1987).
- [6] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1980); *Phys. Rev.* **D21**, 2848 (1980).
- [7] M. B. Halpern and W. Siegel, *Phys. Rev.* **D16**, 2486 (1977).
- [8] G. Dunne, K. Lee and C. Lu, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3434 (1997).
- [9] A. Niemi and G. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 927 (1985).
- [10] Condiciones de borde mas generales cambian los autovalores de los operadores mecánico-cuánticos, pero la razón de determinantes en Γ es independiente de la elección de dichas condiciones.
- [11] La prueba está basada en la identidad

$$\partial_t \bar{f}_n = e^{i\alpha t/T} (\partial_t + i \frac{\alpha}{T}) f_n^\alpha \quad \text{para} \quad \bar{f}_n(t) = e^{i\alpha t/T} f_n^\alpha(t)$$

- [12] Si el n -ésimo nivel es degenerado, entonces tendremos una matriz U_n en lugar de una redefinición de fase.
- [13] J. L. Cortés, J. Gamboa, S. Lepe and J. López Sarrión; Berry's Phase in QFT, en preparación.

4. CONCLUSIONES

En el marco de la QFT y del formalismo de la integral de camino, hemos calculado acciones efectivas para distintos casos: quarks pesados no-relativistas, fermiones no-relativistas en un campo magnético constante (el problema de Landau) y campos fermiónicos acoplados a otros campos (de gauge y escalares). En el primer caso, luego de diagonalizar el sector pesado del Lagrangeano de QCD, se obtuvo un operador no-local cuya expansión binomial contiene todas las contribuciones relativistas dadas por la expansión usual de Foldy-Wouthuysen. En el segundo caso, se calculó explícitamente el determinante fermiónico usando un procedimiento general de regularización y se estudió la mecánica estadística de los fermiones en 2+1 y 3+1 dimensiones. Las expresiones estándar para el gran potencial fueron limpiamente recuperadas en el límite de temperatura y potencial químico nulos.

En el caso de campos fermiónicos acoplados a otros campos, hemos desarrollado un nuevo tratamiento para extender a QFT las aproximaciones adiabática y de Born-Oppenheimer de la mecánica cuántica. Esta idea nos ha permitido calcular acciones efectivas incorporando de un modo muy natural sus aspectos geométricos, y la fase de Berry (fase geométrica que surge en sistemas que experimentan evolución adiabática) emerge como una contribución de naturaleza netamente no-perturbativa.