

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Física**



Propagación de onda no lineal en un medio unidimensional con grados de libertad adicionales.

Matías Alonso Vidal Valdés

**Profesor Guía:
Francisco Melo Hurtado**

**Tesis para optar al Título Profesional de,
Ingeniero Físico.**

**Santiago – Chile
2017**

© **Matías Alonso Vidal Valdés, 2017.**

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial Chile 3.0.

“Propagación de onda no lineal en un medio unidimensional con grados de libertad adicionales.”

Matías Alonso Vidal Valdés

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Francisco Melo H., del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato, Belfor Galaz, Guillaume Lagubeau y Francisco Vivanco.

.....
Belfor Galaz

.....
Guillaume Lagubeau

.....
Francisco Vivanco

.....
Enrique Cerda
Director

.....
Francisco Melo
Profesor Guía

Resumen

Se realizó un estudio numérico y experimental del comportamiento de una onda no lineal de compresión localizada, que se propaga por un medio granular unidimensional que presenta grados de libertad internos. El medio se modela a partir de una cadena monodispersa de elementos, que presenta al interior de uno de sus elementos impurezas acopladas elásticamente.

En primera instancia se analizó el comportamiento de una cadena monodispersa homogénea (sin presencia de grados de libertad adicional) de elementos con el fin de determinar los mecanismos de disipación (Roce cinemático y Disipación viscoelástica) involucrados en el modelo estudiado, cuantificando además los parámetros involucrados en estos mecanismos (coeficiente roce cinemático y tiempo de relajación) que fueron útiles para el estudio numérico, para realizar comparaciones con los resultados obtenidos de forma experimental.

Se estudiaron dos modelos: Un modelo que presenta un grado de libertad adicional y otro con dos grados de libertad adicionales al interior de uno de los elementos de la cadena. En ambos modelos se observó que la amplitud de la onda (solitón) que se propaga por la cadena, presenta cierta atenuación en su amplitud, siendo esta atenuación más significativa en el segundo modelo estudiado. Este comportamiento se produce debido a que si la frecuencia angular del solitón que incide sobre el elemento que contiene estos grados de libertad en su interior, tiene un valor cercano a la frecuencia de resonancia de las impurezas acopladas elásticamente, estas oscilarán y su amplitud de oscilación será proporcional a la atenuación de la amplitud de la onda propagada. En cambio si la frecuencia angular del solitón incidente, se aleja de la frecuencia de resonancia de las impurezas, no se producirá atenuación de la onda propagada por la cadena.

Se observó de manera numérica en el segundo modelo el efecto de la resonancia de Fano, la cual provoca que solo el segundo oscilador al interior del elemento oscile, lo que produjo atenuación de la amplitud de la onda propagada, pero menor a la observada cuando los dos osciladores al interior del elemento presentaron movimiento.

Los resultados obtenidos en ambos modelos pueden ser utilizados para el diseño de sistemas de aislación de vibraciones o para el diseño y creación de metamateriales de tipo acústico no lineal.

Palabras Claves: Propagación solitones, cadena monodispersa, grados de libertad adicionales, oscilador forzado, resonancia de Fano.

Tabla de Contenido

Introducción	1
Introducción	2
Ondas No Lineales	2
Medios Granulares	2
Propagación de Ondas en Medios Granulares Unidimensionales	4
Metamateriales	5
Objetivos	7
Objetivo General	7
Objetivos específicos	7
1. Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con grado de libertad extra	8
1.1. Motivación	9
1.2. Propagación de Ondas en Cadena Homogénea de Partículas	10
1.2.1. Simulación Numérica	10
1.2.2. Montaje Experimental	10
1.2.3. Mecanismos de Disipación	11
1.2.4. Resultados	12
1.2.5. Conclusión	16
1.3. Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con grado de libertad extra.	17
1.3.1. Respuesta del sistema masa - resorte.	17
1.3.2. Montaje Experimental	19
1.3.3. Mediciones Experimentales	21
1.3.4. Resultados	22
1.3.5. Conclusión.	29

2. Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con dos grados de libertad extra	31
2.1. Motivación	32
2.2. Propagación de Ondas en Cadena Homogénea de Partículas	33
2.2.1. Simulación Numérica	33
2.2.2. Montaje Experimental	33
2.2.3. Resultados	34
2.2.4. Conclusión	36
2.3. Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con dos grados de libertad extra.	37
2.3.1. Respuesta Osciladores Acoplados.	38
2.3.2. Resonancia de Fano.	40
2.3.3. Montaje Experimental	43
2.3.4. Mediciones Experimentales	44
2.3.5. Resultados	45
2.3.6. Conclusión.	51
Conclusiones	52
Conclusiones	53
Referencias Bibliográficas	54

Índice de cuadros

1.1. Parámetros Mecanismos Disipación.	14
1.2. Polímeros disponibles para la experimentación.	21
1.3. Constantes elásticas y frecuencias propias de cada elemento.	23
2.1. Parámetros ajustados.	35
2.2. Constantes elásticas Sistema Osciladores Acoplados.	45
2.3. Velocidad de impacto para distintas esferas.	45
2.4. Frecuencias angulares para distintos tamaños de esferas de impacto.	46

Índice de Ilustraciones

1.	Ejemplos de medios granulares.	3
2.	Lineas o cadenas de fuerza (negro) producto de una compresión horizontal en un medio granular.	3
3.	Comportamiento no lineal de la fuerza de Hertz (izquierda) y Deformación de dos esferas sometidas a una compresión vertical (derecha).	4
4.	Cadena unidimensional de partículas.	4
5.	Sistema resorte-masa equivalente.	4
1.1.	Montaje Experimental.	10
1.2.	Sensor-Bola. A sensor de fuerza piezoeléctrico, B anillo de hierro, C trozo de esfera en contacto con la superficie sensible del sensor y D semi-esfera de acero.	11
1.3.	Sistema compuesto de 20 esferas de acero con un extremo fijo y otro extremo libre donde la primera esfera de 8 (mm) de diámetro impacta a las demás esferas con una velocidad (V_0).	12
1.4.	Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena.	13
1.5.	A) Gráfica de las señales obtenidas directamente del sensor bola ubicado en la posición 7 y 10. B) Ajuste de las señales obtenidas en los sensores sin ruido.	13
1.6.	A) Velocidad del solitón en función de la amplitud máxima del solitón. Los círculos representan los datos experimentales y la línea continua es un ajuste de la forma $v = CF^{1/6}$. (B) Ajuste para el coeficiente de restitución para la cadena usando la ecuación 1.3	14
1.7.	A) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena. B) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena incluyendo los mecanismos de disipación.	15

1.8. A) Gráfica obtenida experimentalmente en los contactos 7 y 10 de la cadena. B) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena incluyendo los mecanismos de disipación.	15
1.9. Cadena homogénea de N esferas con un sistema resorte - masa al interior de la esfera i y cuya coordenada de posición de la masa es u_j	17
1.10. Gráfica Respuesta de Amplitud del Oscilador.	18
1.11. Montaje Experimental.	19
1.12. A) Esfera de 26 mm de diámetro con perforación. B) Esfera de 26 mm con acelerómetro y silicona (verde) al interior. C) Diagrama de esfera con acelerómetro y silicona al interior.	20
1.13. Escala de dureza Shore.	20
1.14. Montaje experimental para mediciones.	21
1.15. Solitón Incidente al Intruso.	22
1.16. Gráficos de Respuesta de Amplitud del Oscilador para Distintos Elementos.	23
1.17. A) Simulación Numérica Caso Homogéneo. B) Medición Experimental Caso Homogéneo.	24
1.18. Simulación Numérica Aceleración elemento 11 de la cadena.	24
1.19. A) Simulación Numérica Caso intruso con polímero verde. B) Medición Experimental Caso intruso con polímero verde.	25
1.20. A) Aceleración obtenida por el sensor al interior del intruso con polímero verde. B) Comparación aceleración medida experimentalmente con aceleración determinada en simulación numérica con polímero verde.	26
1.21. A) Simulación Numérica Caso intruso con polímero rosa. B) Medición Experimental Caso intruso con polímero rosa.	26
1.22. A) Aceleración obtenida por el sensor al interior del intruso con polímero rosa. B) Comparación aceleración medida experimentalmente con aceleración determinada en simulación numérica con polímero rosa.	27
1.23. A) Simulación Numérica Caso intruso con partículas de vidrio. B) Medición Experimental Caso intruso con partículas de vidrio.	28
1.24. A) Aceleración obtenida por el sensor al interior del intruso con partículas de vidrio. B) Comparación aceleración medida experimentalmente con aceleración determinada en simulación numérica con partículas de vidrio.	29
2.1. Montaje Experimental.	33

2.2. Sensor-Bola. A trozo de esfera en contacto adherida a la superficie sensible del sensor, B Sensor de fuerza piezoeléctrico y C semi-esfera de baquelita.	34
2.3. A) Velocidad del solitón en función de la amplitud máxima del solitón. Los círculos representan los datos experimentales y la línea continua es un ajuste de la forma $v = CF^{1/6}$. (B) Ajuste para el coeficiente de restitución para la cadena usando la ecuación 1.3.	34
2.4. Sistema compuesto de 19 esferas de baquelita con un extremo fijo y otro extremo libre donde una esfera de acero de 10 (mm) de diámetro impacta a la cadena con una velocidad (V_0).	35
2.5. A) Gráfica obtenida experimentalmente en los contactos 7 y 10 de la cadena. B) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena incluyendo los mecanismos de disipación.	35
2.6. Cadena homogénea de N esferas con un sistema de dos osciladores acoplados al interior de la esfera i y cuya coordenada de posición de ambos osciladores es u_j y u_n	37
2.7. Sistema dos osciladores acoplados.	38
2.8. A) Gráfica Respuesta de Amplitud del Oscilador 1. B) Gráfica Respuesta de Amplitud del Oscilador 2.	39
2.9. Modo de vibración sistema dos osciladores acoplados bajo la acción de una fuerza.	40
2.10. Gráfica comparativa espectro Lorentziano - simétrico (azul) y espectro asimétrico - Fano (rojo).	41
2.11. Sistema osciladores acoplados.	42
2.12. A) Respuesta de amplitud del primer oscilador. B) Respuesta de fase del primer oscilador.	42
2.13. Montaje Experimental.	43
2.14. A) Esfera de resina de 38 mm de diámetro con perforación. B) Diagrama de esfera con acelerómetros y silicona (verde) al interior.	44
2.15. Montaje experimental para mediciones.	44
2.16. A) Solitón Incidente al intruso con esfera de impacto de 8 (mm) de diámetro. B) Solitón Incidente al intruso con esfera de impacto de 10 (mm) de diámetro. C) Solitón Incidente al intruso con esfera de impacto de 12 (mm) de diámetro.	46

2.17.A) Simulación aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 8 (mm) de diámetro con la cadena. B) Medición experimental de la aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 8 (mm) de diámetro con la cadena. C) Simulación aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 10 (mm) de diámetro con la cadena. D) Medición experimental de la aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 10 (mm) de diámetro con la cadena. E) Simulación aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 12 (mm) de diámetro con la cadena. F) Medición experimental de la aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 12 (mm) de diámetro con la cadena.	47
2.18.A) Simulación Numérica Caso Homogéneo. B) Simulación Numérica Caso No Homogéneo. C) Medición Experimental Caso Homogéneo. D) Medición Experimental Caso No Homogéneo.	48
2.19.A) Respuesta de amplitud del primer oscilador. B) Respuesta de fase del primer oscilador.	49
2.20.A) Simulación Numérica Caso Homogéneo. B) Simulación Numérica Caso No Homogéneo con efecto de resonancia de Fano.	50
2.21.A) Aceleración del primer oscilador bajo efecto de resonancia de Fano. B) Aceleración del segundo oscilador bajo efecto de resonancia de Fano.	50

Introducción

Introducción

La presente tesis se estructura en 2 capítulos. El primer capítulo está dedicado al estudio numérico y experimental del comportamiento de la propagación de solitones por una cadena homogénea de elementos que presenta un grado de libertad adicional, mientras que en el segundo capítulo se estudiará de la misma forma la propagación de los solitones en una cadena homogénea de elementos que presenta dos grados de libertad adicionales, junto con determinar los efectos de resonancia de Fano.

Ondas No Lineales

El estudio de ondas no lineales ha adquirido cierto interés de parte de la comunidad científica, ya que permite la comprensión de distintos fenómenos como las olas marítimas, la interacción de la luz con la materia, la transmisión en la fibra óptica, terremotos y la formación de galaxias.

Una de las ondas no lineales más conocidas son los solitones, que fueron descritas por primera vez en 1834 por el científico escocés John Scott Russell, que observó como una onda se propagaba a lo largo de un canal sin debilitarse durante varios kilómetros. Surajit Sena et al. (2008)

Por lo tanto un solitón se entiende como una onda solitaria que se propaga sin deformarse sobre un medio no lineal. Son además el resultado de la solución de ecuaciones no lineales.

Medios Granulares

Un medio granular, es el que está compuesto de elementos similares que interactúan entre ellos por fuerzas débiles o simples colisiones. Los elementos que componen este medio son de tamaño superior al micrómetro, tamaño para el cual las fuerzas producidas por las fluctuaciones térmicas comienzan a ser despreciables frente al peso de cada grano.

El estudio de este tipo de medio es de importancia para la industria, ya que las materias primas producidas por nuestro país pasan en algún momento de su línea de producción por una fase granular. Los granos de trigo, las manzanas y los cereales en general, son ejemplos de granulares en la agricultura. A nivel mundial, muchos de los productos más utilizados son procesados en su forma granular y, por esta razón, es fundamental comprender a fondo las propiedades que definen su comportamiento. Santibañez (2010)



Figura 1: Ejemplos de medios granulares.

En un medio granular, la propagación de ondas es esencialmente la propagación de esfuerzos u ondas de presión que son transmitidas a través de los contactos de las partículas del medio granular, a partir de una compresión de este generando líneas de fuerza en el medio.

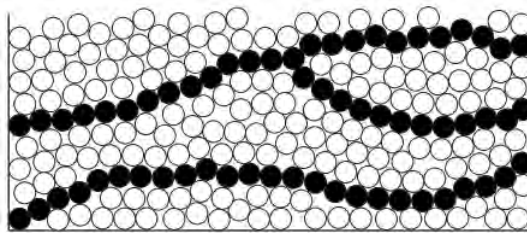


Figura 2: Líneas o cadenas de fuerza (negro) producto de una compresión horizontal en un medio granular.

Un medio granular es considerado un medio no lineal. Esto se obtiene al examinar la interacción de dos partículas en este medio. La fuerza entre dos partículas fue estudiada en 1882 por Heinrich Hertz, la cual es formulada a partir de una ley potencial y que es proporcional a la deformación (δ) entre las partículas (Fuerza de Hertz) cuyo comportamiento es no lineal.

$$F \propto \delta^{3/2} \quad (1)$$

El exponente 3/2 en la ecuación anterior se debe a que se considera que las partículas son perfectamente esféricas.

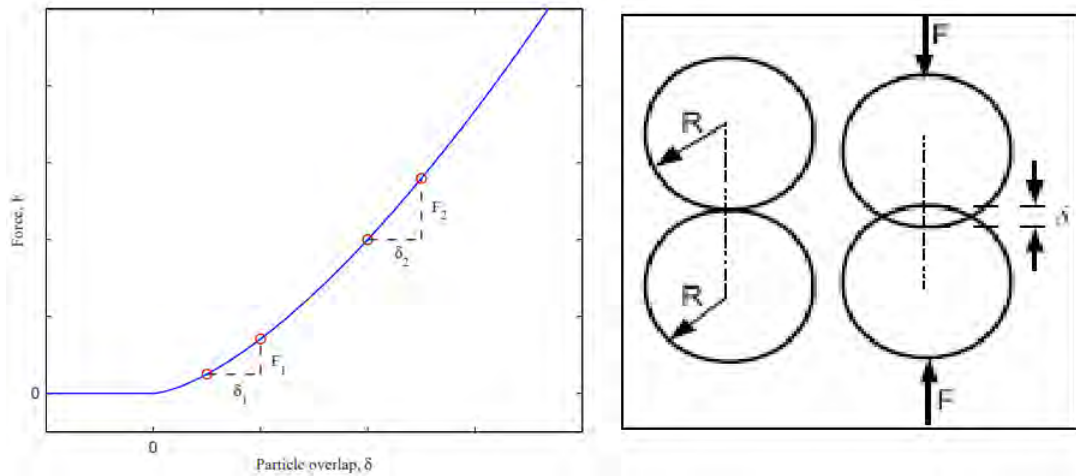


Figura 3: Comportamiento no lineal de la fuerza de Hertz (izquierda) y Deformación de dos esferas sometidas a una compresión vertical (derecha).

Propagación de Ondas en Medios Granulares Unidimensionales

Las ondas no lineales que se propagan en un medio granular, pueden ser estudiadas fácilmente simplificando el sistema que se observa en la figura 2, por el de una cadena unidimensional de partículas, que recibe una compresión en uno de sus extremos como se observa en la figura 4.



Figura 4: Cadena unidimensional de partículas.

A partir de la derivación de *Nesterenko*(2001) la cadena de partículas puede ser descrita por el siguiente sistema:

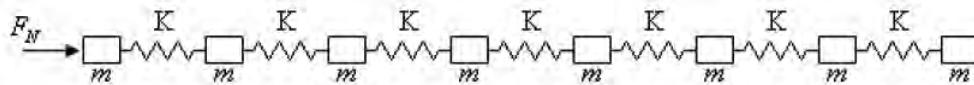


Figura 5: Sistema resorte-masa equivalente.

Cuya ecuación de movimiento que gobierna este sistema es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{K}{m} \left[(\delta_0 - (u_n - u_{n-1}))^{3/2} - (\delta_0 - (u_{n+1} - u_n))^{3/2} \right] \quad (2)$$

En donde u_n es la posición de la partícula n en la cadena, siendo u_{n+1} y u_{n-1} los vecinos cercanos a la partícula, K es la rigidez de contacto de las partículas, m la masa de la partícula y δ_0 la deformación estática de las partículas.

La rigidez de contacto K se determina a partir de la siguiente formula:

$$\frac{1}{K} = (\theta + \theta') \times \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (3)$$

$$\theta = \frac{3(1 - \nu^2)}{4Y} \quad (4)$$

En donde R es el radio de contacto, ν es el coeficiente de Poisson e Y el Módulo de Young de las partículas que interaccionan.

De la ecuación 2 se desprenden dos comportamientos limites:

- 1) Límite Lineal: $\delta_0 \gg |u_{n-1} - u_n|$
- 2) Límite No Lineal: $\delta_0 \ll |u_{n-1} - u_n|$

En este trabajo de tesis solo se considerara el limite no lineal por lo que la deformación estática de las partículas sera despreciable.

Metamateriales

Un Metamaterial se define como cierto material que posee propiedades las que no pueden ser encontradas en la naturaleza. Estos se construyen a partir de la unión o ensamble de distintos elementos como plásticos o metales. Vorotnikov et al. (2017)

El estudio de este tipo de materiales ha adquirido cierta importancia en los últimos años debido a las diversas aplicaciones que estos pueden tener en ámbitos de la medicina, aeroespacial, monitoreo de estructuras, óptica, energía solar, sensores y protección contra terremotos.

Existen distintos tipos de metamateriales:

- Electromagnéticos.
- Elásticos.

- Acústicos.
- Estructurales.
- No lineales.

Los metamateriales de tipo no lineal serán de interés en este trabajo de tesis, ya que estos poseen propiedades que afectan la propagación de ondas a través de estos.

Objetivos

Objetivo General

Estudio del comportamiento de la propagación de la onda no lineal localizada en un medio unidimensional consistente en una cadena de elementos que presenta un grado de libertad adicional. Efecto de resonancias de Fano en la propagación a través del material.

Objetivos específicos

- Estudiar el comportamiento de manera numérica y experimental de la propagación de solitones en una cadena homogénea de elementos.
- Estudiar el comportamiento de manera numérica y experimental de la propagación de solitones en una cadena de elementos que presenta un grado de libertad adicional.
- Estudiar la variación del comportamiento de manera numérica y experimental de la propagación de solitones en una cadena de elementos realizando una variación al número de grados de libertad adicionales en la cadena.

Capítulo 1

Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con grado de libertad extra

1.1. Motivación

En este capítulo se estudio la propagación de ondas en un material granular unidimensional, que presenta un grado de libertad extra al interior de uno de los elementos.

La teoría mostrada en la Introducción, indica si un medio granular que recibe una perturbación, esta se propagara por este en forma de ondas no-lineales, llamadas solitones. Estas ondas, se suelen distinguir del resto, debido a que viajan como un perfil que no pierde su forma durante su propagación. Esto se debe a que en la relación de dispersión, la velocidad depende sólo de la fuerza máxima con que se excita cada modo, por lo tanto, si éstos son excitados con un choque de corta duración (de espectro plano) el impulso producido viajará como un paquete compacto a través del medio.

Este capítulo consistirá en estudiar como se propaga el solitón por una cadena de esferas que representa un medio granular. El estudio constara en la creación de una simulación numérica Chatterjee (1999) que resuelva las ecuaciones de movimiento involucradas en este sistema, y cuyos resultados serán comprobados mediante un montaje experimental. Se discutirán los mecanismos de disipación involucrados en el sistema, cuantificando el efecto de éstos en la propagación de la onda solitaria.

La primera sección del capítulo estará dedicada al análisis numérico y experimental de la propagación del solitón en una cadena unidimensional y homogénea de partículas, tomando como referencia el análisis y los resultados obtenidos en la tesis doctoral de Francisco Santibañez del año 2010 Santibañez (2010) quien realizo una experiencia similar.

La segunda sección, estará dedicada al igual que la primera sección en un análisis numérico y experimental de la propagación del solitón en una cadena unidimensional, solo que en este caso la cadena no sera homogénea, ya que al interior de una de las partículas se agregara un grado de libertad adicional, consistente en un sistema resorte - masa, el cual podría afectar la propagación del solitón por la cadena y cuyos resultados obtenidos serán contrastados con los obtenidos en la primera sección.

1.2. Propagación de Ondas en Cadena Homogénea de Partículas

1.2.1. Simulación Numérica

La simulación numérica fue realizada en el software MATLAB, con el cual se resolvió la ecuación de movimiento 2, utilizando el paquete *ode45*, para cada partícula de la cadena. Como resultado de la simulación se obtiene un vector de 2 columnas, donde una columna es la posición y la otra la velocidad de cada partícula. A partir de estos resultados se obtuvieron las deformaciones en cada contacto de la cadena para determinar así la fuerza de compresión o contacto a partir de la ley de Hertz (1).

La simulación requiere como parámetros de entrada: El número de partículas de la cadena (N), la velocidad de impacto de la primera partícula con las demás partículas de la cadena (V_0) y por último el tamaño (R) y propiedades físicas (ρ , ν e Y) de las partículas.

1.2.2. Montaje Experimental

El montaje experimental de la figura 1.1, esta compuesto principalmente por una cadena monodispersa de bolas de acero ($Y = 203$ (GPa), $\nu = 0,3$) de 26 (mm) de diámetro, con un extremo libre y el otro fijo. La excitación es introducida desde el lado libre utilizando un carril de acrílico, por el cual caerá una esfera a cierta velocidad (V_0) según la altura que se deje caer, el solitón producido por el choque viaja hacia el extremo fijo donde esta ubicado un sensor de fuerza piezoeléctrico (PCB piezo, modelo M208A11 de sensibilidad 112,404 (mV/N)) PCB PIEZOTRONICS (2008), este sensor esta fijo a un fierro de masa suficientemente grande que actúa como una pared rígida. El solitón se refleja al interactuar con la pared y se propaga en el sentido contrario, hacia el extremo libre.

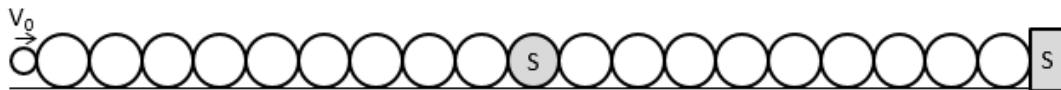


Figura 1.1: Montaje Experimental.

Dentro de la cadena se coloca un sensor, de geometría y material similar a las demás bolas de acero para no perturbar la propagación del solitón. El sensor se construyó a partir de una esfera de acero de 26 (mm) de diámetro cortada por la mitad, en una de estas mitades se

atornilla un sensor de fuerza piezoeléctrico (PCB piezo, modelo 200B02 de sensibilidad 11,45 (mV/N)) PCB PIEZOTRONICS (2008). Sobre la superficie sensible de la cerámica piezoeléctrica, se adhiere un trozo de esfera del mismo material extraída de la otra mitad de la esfera cortada, ésta reemplaza el contacto con la bola del contacto que se quiere medir, manteniendo así las propiedades de superficie, elasticidad y curvatura del contacto original. Finalmente, se añade un anillo de fierro alrededor del sensor para compensar la masa retirada en el proceso de corte.

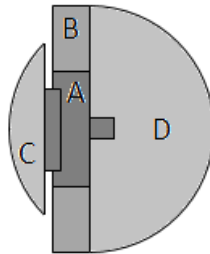


Figura 1.2: Sensor-Bola. A sensor de fuerza piezoeléctrico, B anillo de fierro, C trozo de esfera en contacto con la superficie sensible del sensor y D semi-esfera de acero.

Las señales eléctricas provenientes de ambos sensores al ser impactada la cadena son monitoreadas por un osciloscopio de 2 canales estando como intermediario un amplificador PCB 482A16. Para la adquisición de los datos de las señales monitoreadas, se utiliza un computador el cual se conecta mediante un puerto serial al osciloscopio, y con el software MATLAB se extraen vectores de amplitud y tiempo para cada canal. Esto además posibilita convertir los datos de amplitud en datos de fuerza, según la sensibilidad de cada sensor.

1.2.3. Mecanismos de Disipación

La disipación de la energía en la cadena, se manifiesta a través de la disminución de la amplitud de la onda al pasar de contacto en contacto. Para tomar en cuenta la disipación de energía se proponen dos mecanismos: el roce de la esfera con el riel que la soporta, y la disipación viscoelástica en la deformación de cada esfera. Santibañez (2010)

- Roce Cinemático: $F_s = \mu_s mg$, donde μ_s es el coeficiente de roce cinético, m es la masa de la esfera y g es la aceleración de gravedad
- Disipación Viscoelástica: $F_v = \eta \partial_t F$, donde η es un tiempo de relajación propio del material y F es la fuerza elástica (Fuerza de Hertz).

Para cuantificar la energía disipada se utilizará el coeficiente de restitución, éste puede ser definido como:

$$\epsilon = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)^{5/6} = \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{U_{n+1} - U_n}{U_n} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

Donde U_n es el trabajo realizado por la fuerza de Hertz, $U_{n+1} - U_n$ es el trabajo realizado por las fuerzas disipativas $W_d = \int F_d d\delta$, con $F_d = -\mu_s mg + \eta \partial_t F$.

Usando estas relaciones, se puede calcular el trabajo W_d :

$$W_d \approx F_d \delta \approx -\mu mg \delta - \eta \frac{v}{R\sqrt{10}} \kappa \delta^{5/2} \quad (1.2)$$

Utilizando el desarrollo de: $(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \dots$ para re-escribir (1.1) en términos del trabajo dado por (1.2):

$$\epsilon \approx 1 - C_s F^{-1} - C_\nu F^{1/6} \quad (1.3)$$

En esta última ecuación se han definido las constantes $C_s = \frac{5}{4} \mu_s mg$ y $C_\nu = \eta \frac{C}{R\sqrt{10}}$, la constante C se introduce al efectuar el reemplazo $v = CF^{1/6}$.

En base a lo anterior se cuantifican los mecanismos de disipación que afectan el sistema, para que puedan ser incluidos en la simulación numérica, al modificar la ecuación de movimiento (2) y poder así contrastar los resultados obtenidos en la simulación con los extraídos del montaje experimental.

1.2.4. Resultados

Numéricamente simulamos una cadena unidimensional de 19 bolas de acero de 26 (mm) de diámetro, que uno de sus extremos esta fijo mientras que el otro extremo esta libre y recibe el impacto de una esfera de 8 (mm) de diámetro con una velocidad de 0,4559 (m/s), como se muestra en la siguiente figura:



Figura 1.3: Sistema compuesto de 20 esferas de acero con un extremo fijo y otro extremo libre donde la primera esfera de 8 (mm) de diámetro impacta a las demás esferas con una velocidad (V_0).

Se gráfica el solitón en los contactos 7 y 10 obtenidos de la simulación numérica se observando lo siguiente:

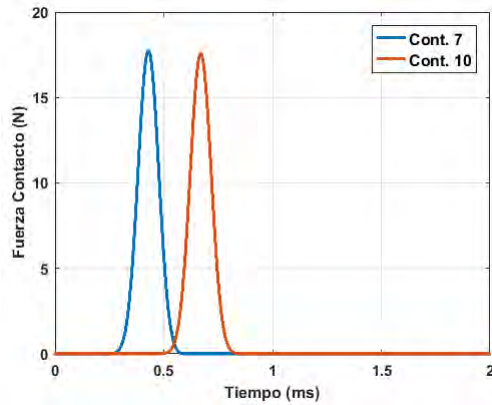


Figura 1.4: Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena.

En la gráfica de la figura 1.4, se observan dos solitones en dos contactos distintos consecutivos, donde se puede notar que al no incluir los mecanismos de disipación propios del sistema, la amplitud del solitón en el contacto 10 no se reduce lo esperado al irse propagando por la cadena.

Para contrastar el resultado anterior de la simulación, se realiza una medición experimental del solitón en los mismos contactos usando los sensores en el montaje experimental, replicando las mismas condiciones de la cadena de la figura 1.3 obteniendo las siguientes señales:

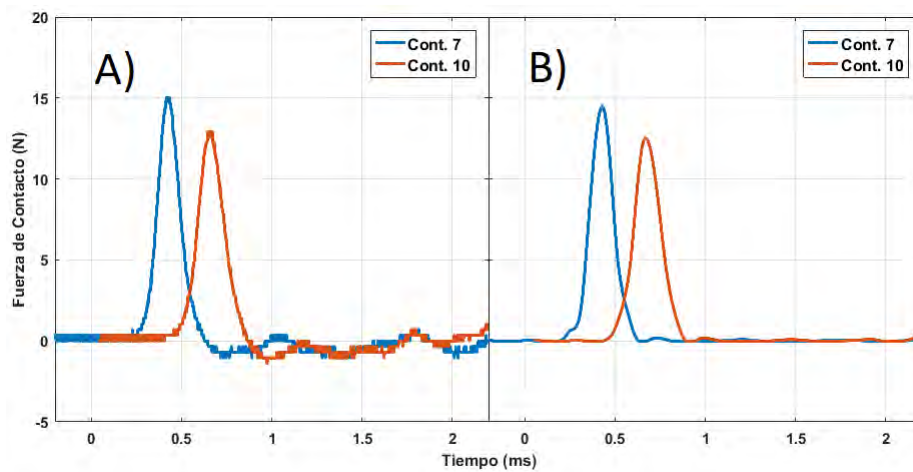


Figura 1.5: A) Gráfica de las señales obtenidas directamente del sensor bola ubicado en la posición 7 y 10. B) Ajuste de las señales obtenidas en los sensores sin ruido.

De la gráfica de la figura 1.5.B se puede notar que la forma de los solitones es similar a la obtenida en la simulación numérica en los mismos contactos, pero en este caso se nota la disipación propia del sistema en la amplitud del solitón al irse propagando por la cadena en comparación a los obtenidos en la simulación numérica (1.4). Como las señales de la figura 1.5.A. presentaban demasiado ruido producto de la conversión análoga - digital en la adquisición de datos, se procedió a disminuir los efectos de esto utilizando la Toolbox de MATLAB llamada *Wavelet*, con la cual se obtuvo una señal mejor definida como se ve en la figura 1.5.B.

A partir del análisis de la sección 1.2.3 (Mecanismos de Disipación), se determinan experimentalmente las constantes C_v y C_s para ser incluidas en la simulación numérica. Para esto se mide con el sensor-bola la amplitud máxima del solitón en dos contactos diferentes de la cadena, y se calcula el coeficiente de restitución usando la ecuación 1.1. Estudiando la variación del coeficiente en función de la amplitud máxima del solitón se pueden obtener las constantes C_s y C_v mediante un ajuste de los datos, como se observan en las siguientes gráficas:

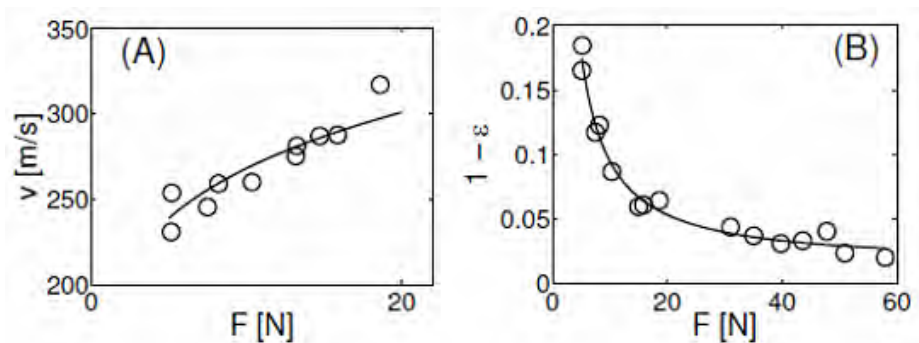


Figura 1.6: A) Velocidad del solitón en función de la amplitud máxima del solitón. Los círculos representan los datos experimentales y la línea continua es un ajuste de la forma $v = CF^{1/6}$. (B) Ajuste para el coeficiente de restitución para la cadena usando la ecuación 1.3

Mediante los ajustes de las gráficas se obtiene lo siguiente:

C	C_s	C_v	μ_s	$\eta[\mu s]$
182,60	0,85	$6,40 \times 10^{-3}$	0,19	0,58

Cuadro 1.1: Parámetros Mecanismos Disipación.

Los parámetros μ_s y η de la tabla 1.1, se ingresan en la simulación numérica para poder incluir los mecanismos de disipación de roce cinemático y disipación viscoelástica

respectivamente, obteniendo para los mismos contactos la siguiente gráfica:

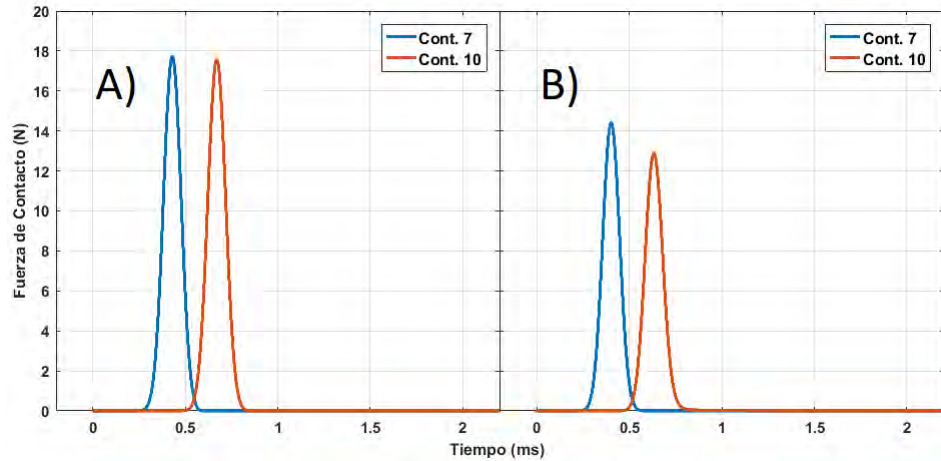


Figura 1.7: A) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena. B) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena incluyendo los mecanismos de disipación.

De la figura 1.7 se puede notar la diferencia entre amplitudes del solitón, cuando se incluyen los mecanismos de disipación en la simulación numérica que es lo esperado.

Finalmente comparando los solitones obtenidos experimentalmente, con los de la simulación numérica que incluyen los mecanismos de disipación obtenemos lo siguiente:

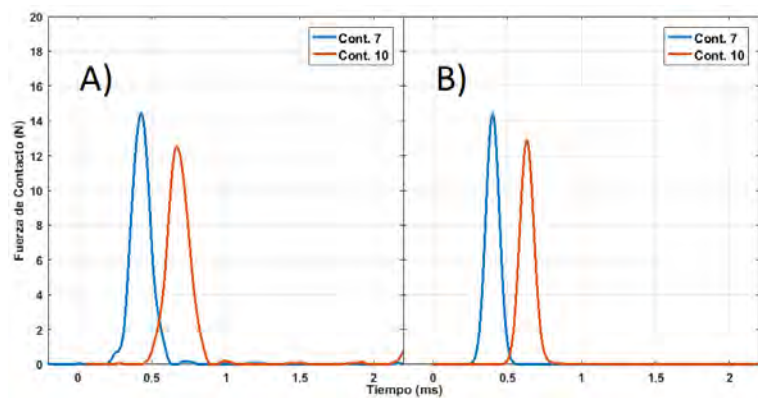


Figura 1.8: A) Gráfica obtenida experimentalmente en los contactos 7 y 10 de la cadena. B) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena incluyendo los mecanismos de disipación.

De las gráficas de la figuras 1.8, tenemos que las amplitudes y formas de los solitones son similares, tanto para las señales medidas experimentalmente como las obtenidas mediante la simulación numérica.

1.2.5. Conclusión

En esta sección se ha verificado el buen comportamiento de la simulación numérica hecha respecto de lo observado en la experimentación. Lo anterior posibilitara en la siguiente sección un estudio numérico previo, para determinar los parámetros necesarios para observar ciertos comportamientos de importancia para el estudio.

Se determinan los mecanismos de la disipación en la cadena de esferas, comprobando que el roce con el riel y la viscoelasticidad del material, son suficientes para dar cuenta de la disipación. Analizando los parámetros obtenidos del coeficiente de restitución, se determina el coeficiente de roce $\mu_s = 0,19$ y el tiempo de relajación viscoelástico, $\eta = 0,58$ (μs).

Del análisis de la gráfica 1.6.B, es posible ver que la disipación decae rápidamente con el aumento de la fuerza y por lo tanto, hace que el sistema sea estable y permita realizar mediciones en un amplio rango de fuerzas.

1.3. Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con grado de libertad extra.

En esta sección, se agregara un grado de libertad adicional a la cadena homogénea estudiada en la sección anterior. Esto se realizo acoplado al interior de un elemento de la cadena un sistema resorte - masa. Se estudio el siguiente sistema:

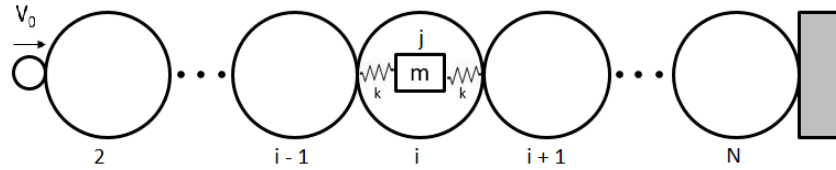


Figura 1.9: Cadena homogénea de N esferas con un sistema resorte - masa al interior de la esfera i y cuya coordenada de posición de la masa es u_j .

Las ecuaciones de movimiento para la esfera i y de la masa (j) en su interior, de acuerdo a la figura 1.9, son:

$$\ddot{u}_i = \omega_{i,i-1} (u_{i-1} - u_i)^{3/2} - \omega_{i,i+1} (u_i - u_{i+1})^{3/2} + \frac{k}{m} (u_j - u_i) + \frac{\lambda}{m} (\dot{u}_j - \dot{u}_i) \quad (1.4)$$

$$\ddot{u}_j = -\frac{k}{m} (u_j - u_i) - \frac{\lambda}{m} (\dot{u}_j - \dot{u}_i) \quad (1.5)$$

En donde m es la masa, k la constante elástica y λ la constante de amortiguamiento del sistema resorte - masa ubicado al interior del intruso.

Las ecuaciones 1.4 y 1.5 son incluidas en el algoritmo de la simulación utilizada en el capítulo anterior, para luego realizar una comparación con los resultados obtenidos en las mediciones experimentales.

1.3.1. Respuesta del sistema masa - resorte.

La ecuación de movimiento que describe a la masa dentro del intruso del sistema, corresponde a la de un oscilador amortiguado y forzado, cuya ecuación general es de la forma Yong S Joe & Kim (2006):

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (1.6)$$

En donde γ es el coeficiente de rozamiento ($\gamma = \frac{\lambda}{m}$), ω_0 es la frecuencia propia del sistema ($\omega_0 = \frac{k}{m}$) y $F(t)$ la fuerza ejercida sobre el sistema.

Ordenando la ecuación 1.5 para que coincida con esta ultima expresión obtenemos:

$$\ddot{u}_j + \gamma\dot{u}_j + \omega_0^2 u_j = \frac{F(t)}{m} \quad (1.7)$$

En donde tenemos que la fuerza sobre el sistema resorte - masa vendrá dada por el desplazamiento del elemento intruso.

$$F(t) = \frac{k}{m} u_i(t). \quad (1.8)$$

El desplazamiento del elemento intruso (u_i) en la cadena, se debe a la fuerza propagada que incide sobre sus contactos, esta fuerza como hemos visto en la sección anterior se propaga en forma de solitón.

Para determinar la respuesta de amplitud del oscilador utilizamos la 'Técnica de Fasores'. Suponemos que la fuerza ejercida sobre el oscilador (1.8) tiene la forma $F(t) = \omega_0 u_0 e^{i\omega t}$, siendo u_0 el desplazamiento máximo del intruso y ω sera la frecuencia de la fuerza ejercida sobre el oscilador. Para determinar la frecuencia de la fuerza ejercida sobre el intruso producto del solitón incidente, se tendrá que analizar su espectro de frecuencias.

Ahora aplicamos la misma suposición para la solución buscada ($u_j(t) = \tilde{u}_j(\omega) e^{i\omega t}$) y reemplazamos en la ecuación 1.7 y determinamos el módulo de \tilde{u}_j ($A(\omega)$).

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2 u_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}. \quad (1.9)$$

Usando la ecuación 1.9 obtenemos la siguiente gráfica:

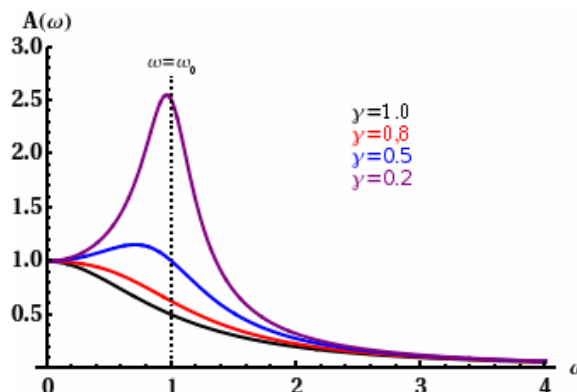


Figura 1.10: Gráfica Respuesta de Amplitud del Oscilador.

La gráfica anterior representa $A(\omega)$ para diferentes valores del coeficiente de rozamiento γ . Cuanto menor es el rozamiento, menor es la amplitud en general. Pero lo más significativo es ver como varía la amplitud con la frecuencia para un mismo valor de γ . Cuando $\omega \ll \omega_0$ la amplitud es la misma para todos los valores del rozamiento. Cuando $\omega \gg \omega_0$, la amplitud tiende a cero también para todos los rozamientos. Sin embargo, para rozamientos menores, la amplitud tiene un máximo. La posición de este máximo es más cercana a la frecuencia propia ω_0 cuanto menor es γ . Y también, cuanto menor es el rozamiento mayor es el valor del máximo. De hecho, para $\gamma = 0$ el máximo se sitúa exactamente en $\omega = \omega_0$ y la amplitud se hace infinita.

Con base a lo anterior, es que sera necesario realizar un análisis numérico y experimental del sistema, cambiando la frecuencia propia del oscilador y observar como responde al ancho del solitón incidente.

1.3.2. Montaje Experimental

Utilizando como base el montaje experimental ocupado en la experimentación anterior (esferas de acero y sensores), se procederá a agregar un intruso consistente en una esfera que en su interior tiene acoplado un sistema resorte - masa, como se observa en la siguiente figura:



Figura 1.11: Montaje Experimental.

Para acoplar un sistema resorte - masa dentro de una esfera, se realiza una perforación circular de 10 mm diámetro en el centro de una esfera de acero de 26 mm de diámetro, en donde se colocara un acelerómetro piezoeléctrico (PCB Piezo, modelo 352A24 de sensibilidad 10,2 mV/(m/s²)) de masa 0,8 gr. que actuara como la masa del sistema.

El acelerómetro se fija al centro de la esfera rellenando el espacio vacío que queda al colocar el acelerómetro en la perforación con una silicona por adición (Polivinilsiloxanos), perteneciente al grupo de elastómeros consistente en 2 soluciones que al mezclarse y dejarse reposar genera un material sólido parecido a la goma que actuara como el resorte del sistema.

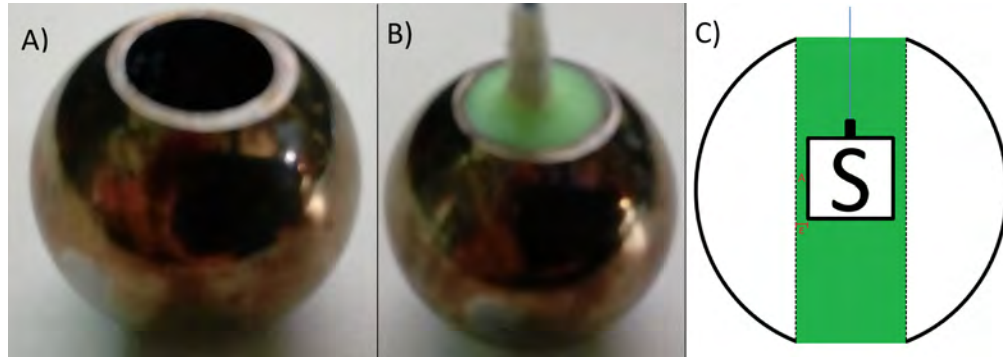


Figura 1.12: A) Esfera de 26 mm de diámetro con perforación. B) Esfera de 26 mm con acelerómetro y silicona (verde) al interior. C) Diagrama de esfera con acelerómetro y silicona al interior.

Se disponen de 2 tipos de polímeros (siliconas de adición) de la marca *Elite Double*, clasificadas según su dureza Shore A. La dureza Shore es una escala de medida de la dureza elástica de los materiales, al igual que el Módulo de Young, determinada a partir de la reacción elástica del material cuando se deja caer sobre él un aparato llamado escleroscopio del cual existen 12 modelos y dependiendo del uso para las mediciones se le da el nombre a la escala, siendo una de estas la A que principalmente es usada para los materiales blandos. Vander Voort (1984)



Figura 1.13: Escala de dureza Shore.

La adquisición de datos provenientes del acelerómetro, se realizara de la misma manera que los otros sensores presentes en la cadena (sensor - bola y pared).

- Determinación Constante Elástica.

Es de importancia para realizar el análisis de este sistema, conocer el valor de la constante elástica de los polímeros disponibles, ya que al ingresar este valor nos servirá para determinar la frecuencia de oscilación de la partícula y estimar así la respuesta de esta al interior del intruso.

Los Polímeros disponibles son:

Color Polímero	Verde	Rosa
Shore A	32	8
Módulo de Young (E)	1,11 MPa	0,23 MPa

Cuadro 1.2: Polímeros disponibles para la experimentación.

Según lo mostrado en la tabla 1.3 se tienen 2 tipos de polímeros que presentan cierto color distintivo y dureza expresada en Shore A la cual para trabajar con mayor facilidad expresamos el Módulo de Young equivalente para cada una de ellas.

A partir de estos datos de cada polímero la constante elástica (k) se obtiene usando la siguiente expresión:

$$k_{polimero} = \frac{E \cdot A}{\epsilon} \quad (1.10)$$

En donde E es el Módulo de Young del polímero, A el área de la cara del acelerómetro por donde recibirá la perturbación y ϵ la distancia entre el acelerómetro y la pared de la perforación.

1.3.3. Mediciones Experimentales

Las mediciones experimentales en esta sección se realizaron de la siguiente manera:

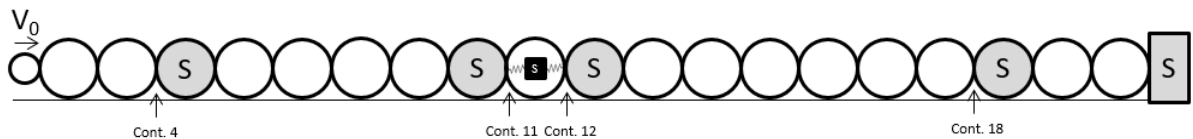


Figura 1.14: Montaje experimental para mediciones.

Como se observa en la figura 1.13, se colocó la esfera con el polímero y acelerómetro en su interior (intruso) en una posición fija ($N = 11$) y para observar la propagación del solitón en la

cadena, se vario la posición del sensor - bola en los contactos 4, 11, 12 y 18, además del solitón que resulta al final de la cadena con el sensor ubicado en la pared (contacto 21). La cadena sera impactada al igual que en la sección anterior por una esfera de acero de 8 (mm) de diámetro a la misma velocidad (0.4559 m/s).

Se realizaron 4 mediciones: La primera medición se hizo sin la presencia del intruso y las otras 3 mediciones restantes se hicieron con la presencia del intruso, pero utilizando en una el polímero verde y en otra el polímero rosa. Se realizo una última medición rellenando el espacio vacío entre el acelerómetro y la perforación con partículas de vidrio de 1 (mm) de tamaño, ya que con esto se obtendrá una frecuencia de oscilación propia del sistema (ω_0) muy elevada, respecto a la de los polímeros. En estas 3 mediciones se adquirió la señal del acelerómetro.

1.3.4. Resultados

El solitón incidente en el intruso tiene la forma:

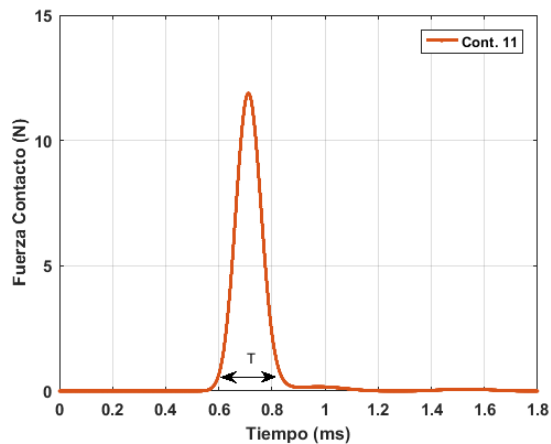


Figura 1.15: Solitón Incidente al Intruso.

Realizando un análisis espectral del solitón, mediante Transformada de Fourier, obtenemos que la frecuencia angular es $\omega_f = 1,7 \cdot 10^4$ (rad/s).

Las constantes elásticas (k) obtenidas a partir de la ecuación 1.7 y las frecuencias propias ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$) correspondientes para cada elemento teniendo en cuenta que la masa del acelerómetro (m) es 0,8 gr. son las siguientes:

Elemento	Polímero Verde	Polímero Rosa	Partículas de Vidrio
Shore A	32	8	-
k (N/m)	$2,0214 \cdot 10^5$	$1,1924 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^9$
ω_0 (rad/s)	$2,1745 \cdot 10^4$	$1,6701 \cdot 10^4$	$2,6045 \cdot 10^6$

Cuadro 1.3: Constantes elásticas y frecuencias propias de cada elemento.

Los datos contenidos en la tabla 1.3, se reemplazaron en la ecuación 1.8 para obtener los siguientes gráficos de respuesta de amplitud del oscilador para cada distinto elemento:

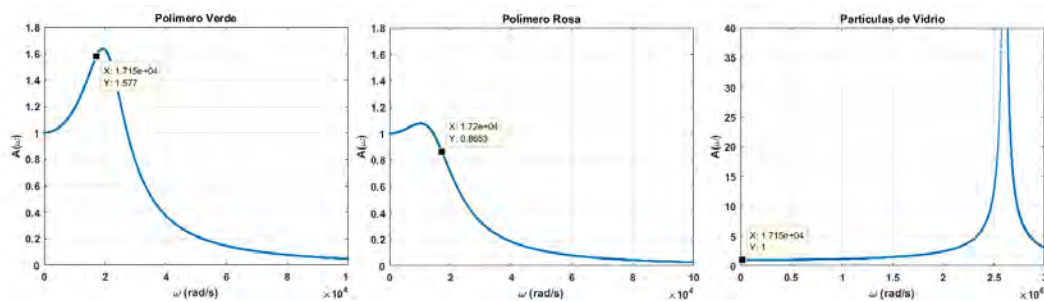


Figura 1.16: Gráficos de Respuesta de Amplitud del Oscilador para Distintos Elementos.

A partir de las gráficas anteriores, podemos determinar la respuesta de amplitud de los tres sistemas resorte - masa con su respectiva constante elástica producto del solitón incidente al intruso cuya frecuencia es $\omega_f = 1,7 \cdot 10^4$ (rad/s).

Para el sistema resorte - masa con el polímero verde, la masa al interior del intruso oscila, pero no alcanza su máxima amplitud, por lo cual sustrae solamente una pequeña parte de la energía del sistema. En el caso del polímero rosa se observa una amplitud de oscilación menor a la observada para el polímero verde, por lo que la sustracción de energía aun menor. Por último cuando las partículas de vidrio están presentes la respuesta de amplitud de oscilación es igual a 1 por lo que tenemos que la masa realizara un desplazamiento igual al del elemento intruso (u_i) no sustrayendo nada de energía del sistema.

De las mediciones experimentales se obtienen los siguiente resultados:

1) Sin Presencia de Intruso.

Se obtuvieron los siguientes solitones en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 de una cadena homogénea de esferas:

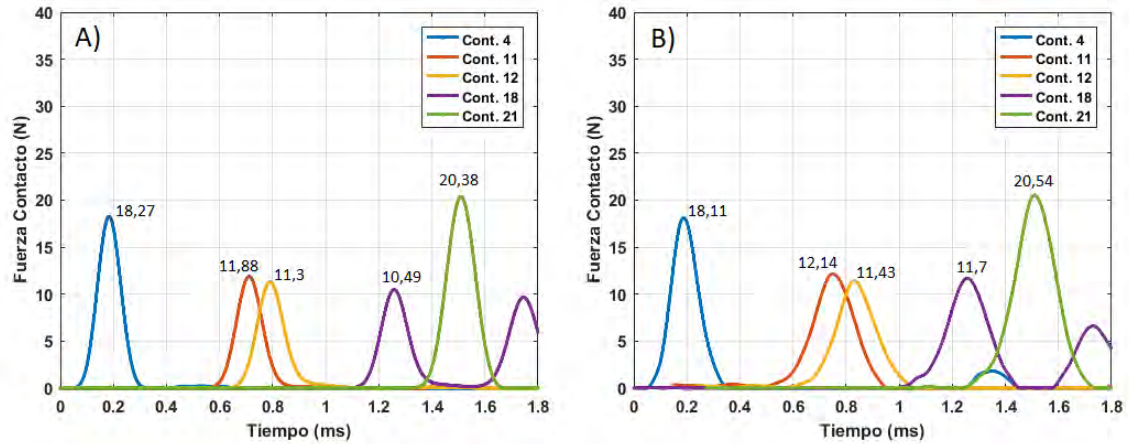


Figura 1.17: A) Simulación Numérica Caso Homogéneo. B) Medición Experimental Caso Homogéneo.

En ambas gráficas se observan curvas de forma y amplitud similar. Estas curvas servirán para contrastar las curvas obtenidas al colocar los tres tipos de intruso en la cadena. Al no poder medir experimentalmente la aceleración de una de las esferas de la cadena, se presenta a continuación la obtenida mediante simulación numérica para luego ser comparada con las gráficas obtenidas en las mediciones experimentales restantes con los intrusos.

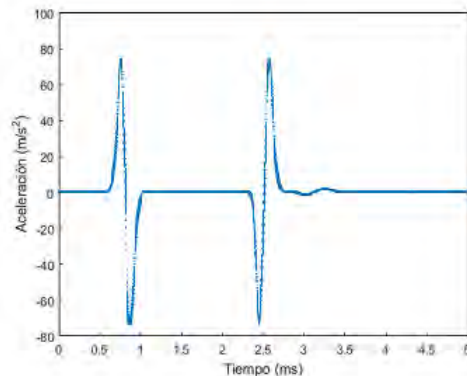


Figura 1.18: Simulación Numérica Aceleración elemento 11 de la cadena.

En la gráfica anterior, solo se observa la aceleración del elemento 11 producto del impacto recibido en la cadena.

2) Intruso con Polímero Verde.

Se obtuvieron los siguientes solitones en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 estando presente en la cadena el intruso con el polímero verde en su interior:

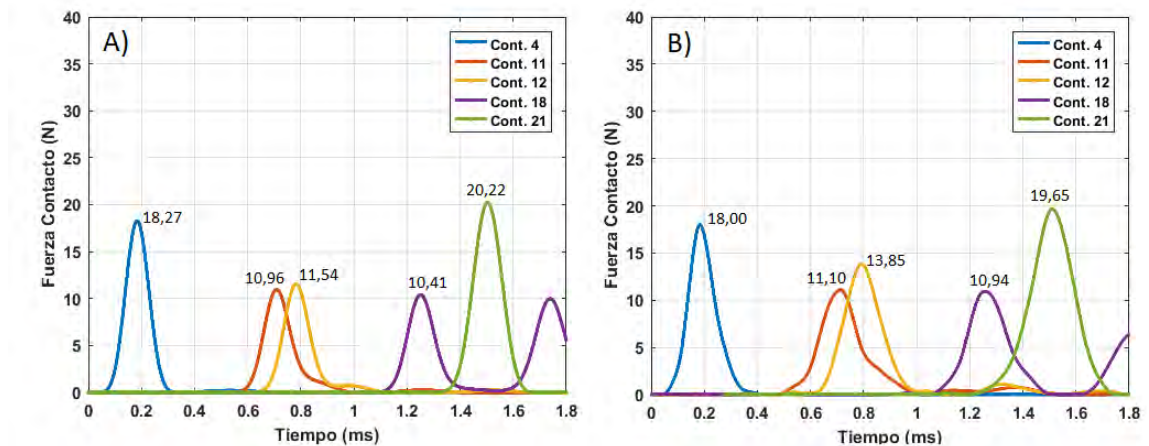


Figura 1.19: A) Simulación Numérica Caso intruso con polímero verde. B) Medición Experimental Caso intruso con polímero verde.

Los solitones obtenidos de la simulación numérica y la medición experimental presentan un comportamiento y amplitud similar. En comparación a los solitones obtenidos en la cadena homogénea (Figura 1.17), se tiene que el solitón del Contacto 4 tiene amplitud y forma similar, mientras que los solitones de los contactos 11 y 12 cambian de forma y amplitud, este cambio se debe a que la masa del intruso es menor a la de una esfera de la cadena y además a la oscilación de la masa al interior del intruso ya que estos dos factores producen un cambio en el desplazamiento del intruso provocando ciertos impactos adicionales con las esferas vecinas. Por último el solitón del contacto 21 presenta una forma similar a la observada en la cadena homogénea, pero se nota cierta disminución en la amplitud tanto en la simulación como en la medición lo que se atribuye a la presencia del grado adicional al interior del intruso que provoca sustracción de la energía total del sistema.

La aceleración medida por el sensor al interior del intruso es la siguiente:

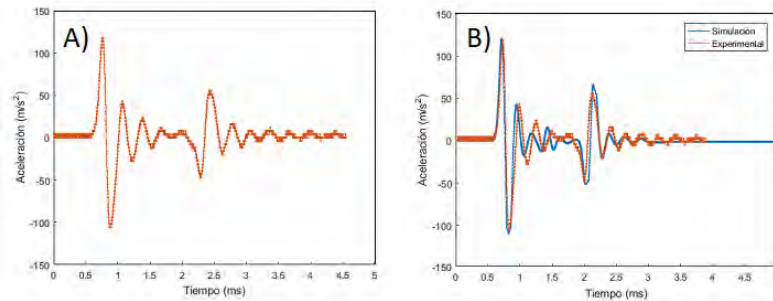


Figura 1.20: A) Aceleración obtenida por el sensor al interior del intruso con polímero verde. B) Comparación aceleración medida experimentalmente con aceleración determinada en simulación numérica con polímero verde.

Como se observa en la gráfica A) de la figura 1.20, el sensor además de medir la aceleración propia debido al desplazamiento del intruso, mide oscilaciones amortiguadas de baja amplitud y cuya forma concuerda con la aceleración obtenida en la simulación (Figura 1.20.B) y finalmente la forma de la aceleración concuerda con lo determinado en el gráfico de respuesta de amplitud de oscilación del polímero verde.

3) Intruso con Polímero Rosa.

Se obtuvieron los siguientes solitones en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 estando presente en la cadena el intruso con el polímero rosa en su interior:

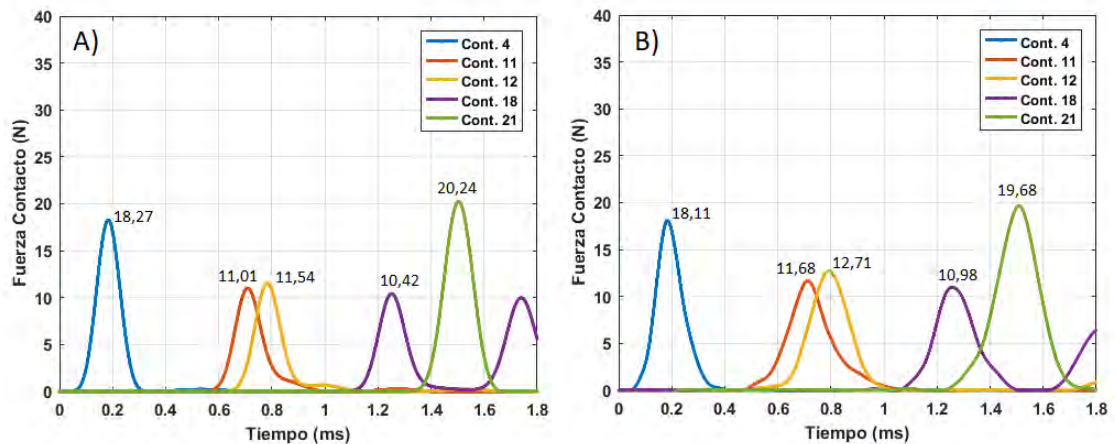


Figura 1.21: A) Simulación Numérica Caso intruso con polímero rosa. B) Medición Experimental Caso intruso con polímero rosa.

Se observa tanto en la simulación numérica como en la medición experimental un comportamiento y amplitud similar de los solitones. Se observa el mismo comportamiento de los resultados obtenidos para el polímero verde de los contactos 11 y 12, ya que las masas de los intrusos son similares. Llama la atención también la disminución de la amplitud del solitón en el contacto 21, solo que presenta un poco más de amplitud debido a que la masa no oscila de la misma manera que para el polímero verde.

La aceleración medida por el sensor al interior del intruso es la siguiente:

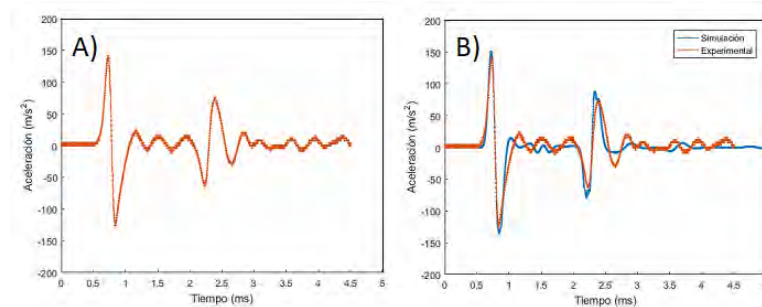


Figura 1.22: A) Aceleración obtenida por el sensor al interior del intruso con polímero rosa. B) Comparación aceleración medida experimentalmente con aceleración determinada en simulación numérica con polímero rosa.

Como se observa en la gráfica A) de la figura 1.22, el sensor además de medir la aceleración propia debido al desplazamiento del intruso mide oscilaciones que en comparación a las obtenidas con el polímero verde son de menor amplitud y amortiguamiento mayor. La aceleración medida concuerda con la aceleración obtenida en la simulación (Figura 1.22.B) y responde también a lo determinado en el gráfico de respuesta de amplitud de oscilación del polímero rosa.

4) Intruso con Partículas de Vidrio.

Por último los solitones obtenidos en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 estando presente en la cadena el intruso con las partículas de vidrio en su interior son los siguientes:

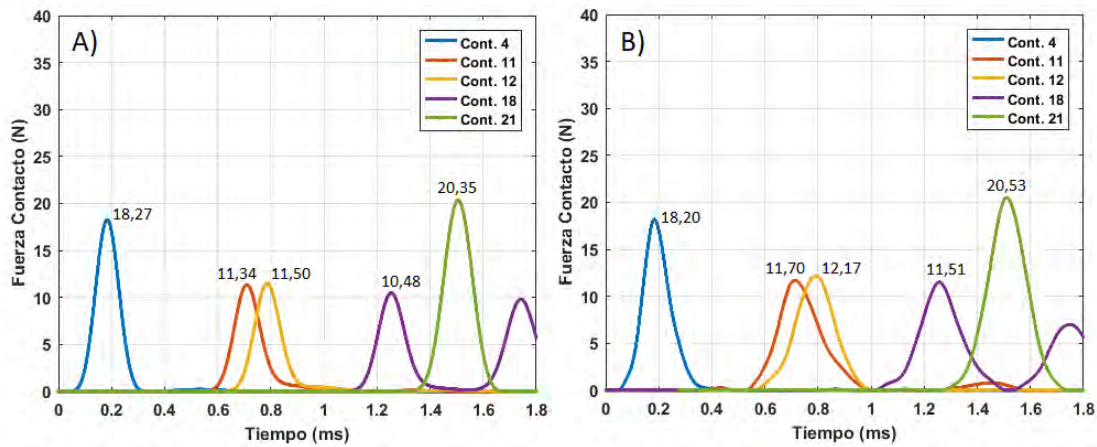


Figura 1.23: A) Simulación Numérica Caso intruso con partículas de vidrio. B) Medición Experimental Caso intruso con partículas de vidrio.

Se observa tanto en la simulación numérica como en la medición experimental un comportamiento y amplitud similar de los solitones. En este caso se tiene en los contactos 11 y 12 tienen una forma y amplitud similar a los resultados obtenidos en la cadena homogénea (Figura 1.17) esto se debe a que la masa del intruso con las partículas de vidrio en su interior, tiene una masa similar a la de una esfera de acero, por lo que esas colisiones extras del intruso con sus vecinos no se producen. Se observó además que la amplitud del solitón en el contacto 21, presenta un valor similar a la observada sin presencia de intruso, lo que se atribuye a que la masa al interior del intruso no oscila, por lo cual no se produce sustracción de la energía total del sistema por parte de la masa.

La aceleración medida por el sensor al interior del intruso es la siguiente:

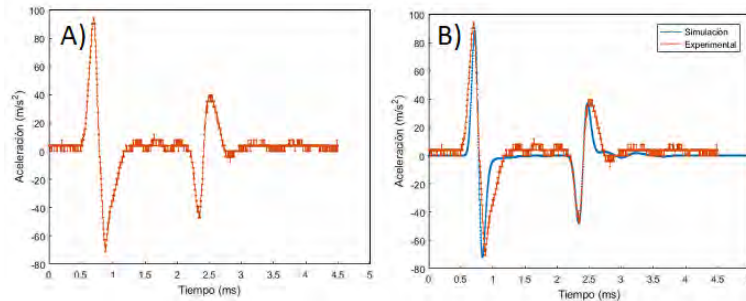


Figura 1.24: A) Aceleración obtenida por el sensor al interior del intruso con partículas de vidrio. B) Comparación aceleración medida experimentalmente con aceleración determinada en simulación numérica con partículas de vidrio.

Como se observa en la gráfica A) de la figura 1.24, el sensor solamente mide la aceleración debido al desplazamiento del intruso lo que también se observa en el caso de la cadena homogénea (Figura 1.18). La aceleración medida concuerda con la aceleración obtenida en la simulación (Figura 1.24.B) y responde también a lo determinado en el gráfico de respuesta de amplitud de oscilación para las partículas de vidrio.

1.3.5. Conclusión.

En primer lugar, se puede concluir un buen comportamiento de la simulación numérica hecha para esta sección, ya que presentaba grandes similitudes a lo observado en la experimentación. Esto posibilita encontrar comportamientos interesantes del sistema, y que además abren la posibilidad de extender el estudio a sistemas similares.

La oscilación del sistema resorte - masa al interior del intruso, depende del solitón que incide sobre este, ya que si el ancho del solitón tiene un valor cercano al del periodo de oscilación propio del sistema resorte - masa, la amplitud de oscilación del sistema será considerable, mientras que si el ancho del solitón tiene un valor demasiado grande o bajo, en comparación al periodo de oscilación del sistema, la respuesta del oscilador será igual al desplazamiento del intruso. Esto puede ser observado en las gráficas de respuesta de amplitud del oscilador, para los distintos elementos que constituyeron el resorte del sistema especialmente en el caso del polímero verde y las partículas de vidrio.

A partir de lo anterior se observó un comportamiento especial del solitón que se propaga en la cadena, ya que dependiendo del elemento contenido al interior del intruso, la amplitud de

oscilación producto del impacto, producirá cierta atenuación en la amplitud del solitón propagado después del intruso. Lo anterior fue asociado a que como el sistema resorte - masa al interior del intruso oscila producto del solitón incidente, se agrega a la cadena de elementos un grado de libertad adicional, cuya amplitud de desplazamiento es proporcional a la sustracción de la energía total del sistema, provocando la atenuación del solitón que se propaga luego del intruso (Intruso con el polímero verde en su interior). Por otro lado si el solitón incidente no produce oscilación en el sistema, no se producirá atenuación del solitón que se propaga luego del intruso (Intruso con partículas de vidrio en su interior).

Capítulo 2

Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con dos grados de libertad extra

2.1. Motivación

En este capítulo se estudiará la propagación de ondas en un material granular unidimensional, que presenta dos grados de libertad extra al interior de uno de los elementos.

En la sección anterior se estudio el comportamiento de una onda propagada en un material granular unidimensional que contiene un grado de libertad extra al interior de uno de sus elementos, observando ciertas características especiales en la propagación de la onda en comparación al esperado en una cadena de elementos sin presencia de este grado de libertad extra. A partir de lo anterior es que nace el interés de agregar al sistema anterior otro grado de libertad adicional en el mismo elemento.

Si tenemos un elemento de la cadena que contiene en su interior dos grados de libertad, se tiene la posibilidad que este elemento al ser impactado se produzcan efectos de resonancias especiales en su interior (Resonancia de Fano) que afecten la propagación de la onda por la cadena de manera distinta a la observada en el capítulo anterior.

La primera sección del capítulo estará dedicada al análisis numérico y experimental de la propagación del solitón en una cadena unidimensional y homogénea de esferas al igual que en capítulo anterior, pero solo que en esta experimentación se cambiaron las esferas de acero utilizadas anteriormente por esferas de resina fenólica (Baquelita) por lo cual se cuantificaron los efectos de disipación para este tipo de esferas.

La segunda sección, estará dedicada al igual que la primera sección en un análisis numérico y experimental de la propagación del solitón en una cadena unidimensional que presenta dos grados de libertad adicionales al acoplar al interior de una elemento un sistema de dos osciladores acoplados.

2.2. Propagación de Ondas en Cadena Homogénea de Partículas

2.2.1. Simulación Numérica

La simulación numérica para esta sección será la misma utilizada en la primera sección del capítulo anterior (Ver 1.2.1), a la cual para este caso se le ingresaron las propiedades físicas del material que componen las esferas a utilizar.

2.2.2. Montaje Experimental

El montaje experimental usado en esta experimentación fue igual al utilizado en la sección 1.2.2 del capítulo anterior, solo que para este se utilizaron esferas de baquelita ($Y = 5,84$ (GPa), $\nu = 0,34$) Crown (2006) de 38 (mm) de diámetro. En el extremo fijo se ubicó un sensor de fuerza piezoeléctrico (PCB piezo, modelo M208A11 de sensibilidad 112,404 (mV/N)) PCB PIEZOTRONICS (2008).

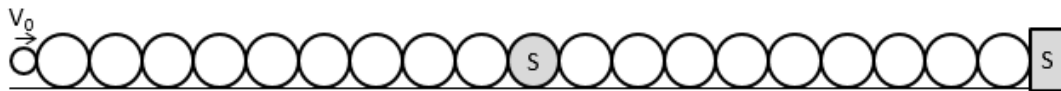


Figura 2.1: Montaje Experimental.

Se construyó un sensor - bola al igual que en la sección anterior utilizando en esta ocasión una esfera de baquelita de 38 (mm) de diámetro la cual se cortó por la mitad y se atornilló en una mitad un sensor de fuerza piezoeléctrico (PCB piezo, modelo 200B02 de sensibilidad 11,45 (mV/N)) PCB PIEZOTRONICS (2008). Sobre la superficie sensible de la cerámica piezoeléctrica del sensor, se adhirió un trozo de esfera de la otra mitad de la esfera cortada, para mantener las propiedades de superficie, elasticidad y curvatura de las demás esferas de la cadena.

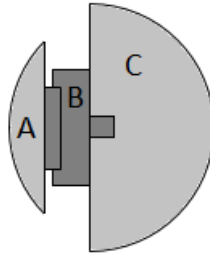


Figura 2.2: Sensor-Bola. A trozo de esfera en contacto adherida a la superficie sensible del sensor, B Sensor de fuerza piezoeléctrico y C semi-esfera de baquelita.

La adquisición de datos se realizo de la misma manera que el capítulo anterior.

2.2.3. Resultados

En un principio se cuantificaron los parámetros μ_s y η a partir del análisis de los mecanismos de disipación especificados en la sección 1.2.3 del capítulo anterior. Esto se realizo midiendo con el sensor-bola la amplitud máxima del solitón en dos contactos diferentes de la cadena y con cuyo resultado se determino el coeficiente de restitución usando la ecuación 1.1. Estudiando la variación del coeficiente en función de la amplitud máxima del solitón se obtuvieron los parámetros C_s y C_v mediante un ajuste de los datos, obteniendo las siguientes gráficas:

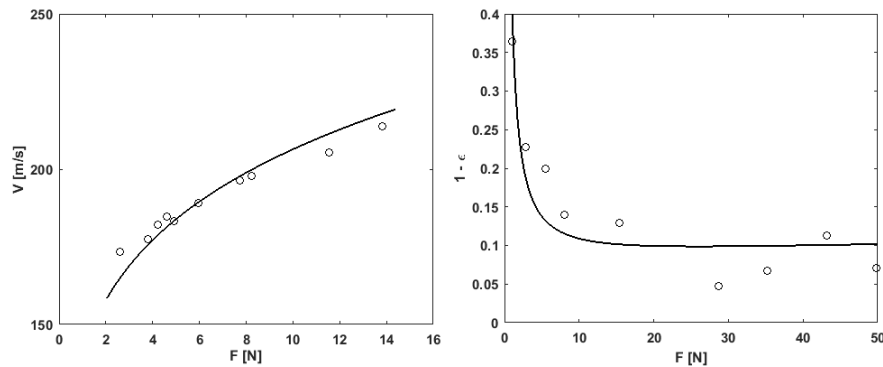


Figura 2.3: A) Velocidad del solitón en función de la amplitud máxima del solitón. Los círculos representan los datos experimentales y la línea continua es un ajuste de la forma $v = CF^{1/6}$. (B) Ajuste para el coeficiente de restitución para la cadena usando la ecuación 1.3.

Mediante los ajustes de las gráficas se obtiene los siguientes parámetros de los mecanismos de disipación:

C	C_s	C_v	μ_s	$\eta[\mu s]$
140,60	0,37	0,05	0,59	8,36

Cuadro 2.1: Parámetros ajustados.

Con los parámetros obtenidos anteriormente procedemos a simular una cadena unidimensional de 19 bolas de baquelita de 38 (mm) de diámetro, que uno de sus extremos esta fijo mientras que el otro extremo esta libre y recibe el impacto de una esfera de acero de 10 (mm) de diámetro con una velocidad de 0,5278 (m/s), como se muestra en la siguiente figura:



Figura 2.4: Sistema compuesto de 19 esferas de baquelita con un extremo fijo y otro extremo libre donde una esfera de acero de 10 (mm) de diámetro impacta a la cadena con una velocidad (V_0).

Obteniendo para los contactos 7 y 10 una gráfica que comparada con la obtenida experimentalmente en los mismos contactos se observa de la siguiente forma:

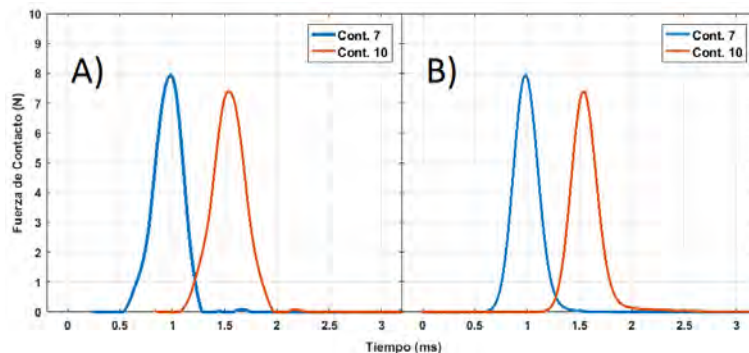


Figura 2.5: A) Gráfica obtenida experimentalmente en los contactos 7 y 10 de la cadena. B) Gráfica obtenida de la simulación numérica en los contactos 7 y 10 de la cadena incluyendo los mecanismos de disipación.

De las gráficas de la figura 2.5, tenemos que las amplitudes y formas de los solitones

son similares, tanto para las señales medidas experimentalmente como las obtenidas mediante la simulación numérica.

2.2.4. Conclusión

En esta sección se ha verificado el buen comportamiento de la simulación numérica hecha respecto de lo observado en la experimentación. Lo anterior posibilitara en la siguiente sección un estudio numérico previo, para determinar los parámetros necesarios para observar ciertos comportamientos de importancia para el estudio.

Se determinan los mecanismos de la disipación en la cadena de esferas de baquelita, comprobando que el roce con el riel y la viscoelasticidad del material, son suficientes para dar cuenta de la disipación. Analizando los parámetros obtenidos del coeficiente de restitución, se determina el coeficiente de roce $\mu_s = 0,59$ y el tiempo de relajación viscoelástico, $\eta = 8,36 (\mu s)$.

2.3. Propagación de Ondas en Cadena de Partículas con dos grados de libertad extra.

En esta sección, se agregaran dos grados de libertad adicional a la cadena homogénea estudiada en la sección anterior. Esto se realizo acoplado al interior de un elemento de la cadena un sistema de dos osciladores acoplados como se muestra en la siguiente figura:

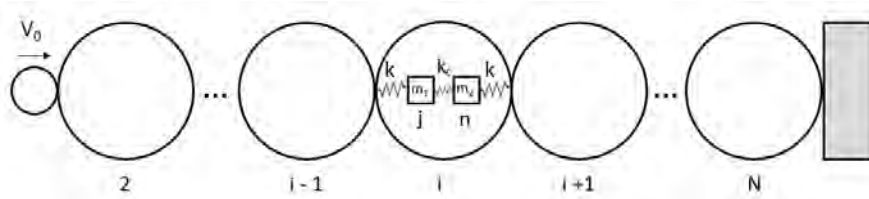


Figura 2.6: Cadena homogénea de N esferas con un sistema de dos osciladores acoplados al interior de la esfera i y cuya coordenada de posición de ambos osciladores es u_j y u_n .

Las ecuaciones de movimiento para la esfera i y de los osciladores (j y n) en su interior, de acuerdo a la figura 2.6, son:

$$\ddot{u}_i = \omega_{i,i-1} (u_{i-1} - u_i)^{3/2} - \omega_{i,i+1} (u_i - u_{i+1})^{3/2} - \ddot{u}_j - \ddot{u}_n \quad (2.1)$$

$$\ddot{u}_j = -\frac{\lambda}{m_1} (\dot{u}_j - \dot{u}_i) - \frac{k}{m_1} (u_j - u_i) + \frac{k_c}{m_1} (u_n - u_j) \quad (2.2)$$

$$\ddot{u}_n = -\frac{\lambda}{m_2} (\dot{u}_n - \dot{u}_i) - \frac{k}{m_2} (u_n - u_i) - \frac{k_c}{m_2} (u_n - u_j) \quad (2.3)$$

En donde m_1 y m_2 son las masas, k la constante elástica de los resortes presentes entre los osciladores y la pared del intruso, k_c la constante elástica del resorte entre los dos osciladores y λ la constante de amortiguamiento de los resortes k .

A partir de las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 se modifico el algoritmo usado en capítulos anteriores para observar el comportamiento de este sistema.

2.3.1. Respuesta Osciladores Acoplados.

Las ecuaciones de movimiento que describen un sistema compuesto por dos osciladores acoplados bajo la acción de una fuerza como se observa en la figura 2.7 son:

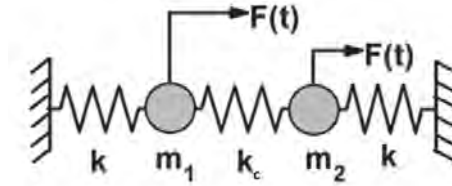


Figura 2.7: Sistema dos osciladores acoplados.

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 (x_2 - x_1) = \frac{F(t)}{m_1} \quad (2.4)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 + \omega_4^2 (x_2 - x_1) = \frac{F(t)}{m_2} \quad (2.5)$$

En donde γ_i es el coeficiente de rozamiento de cada oscilador ($\gamma_{1,2} = \frac{\lambda}{m_{1,2}}$), ω_i son frecuencias de oscilación del sistema ($\omega_{1,3} = \frac{k}{m_{1,2}}$; $\omega_{2,4} = \frac{k_c}{m_{1,2}}$) y $F(t)$ la fuerza ejercida sobre los osciladores.

Ordenando las ecuaciones 2.2 y 2.3 para que coincidan con las ecuaciones 2.4 y 2.5 tenemos:

$$\ddot{u}_j + \gamma_1 \dot{u}_j + \omega_1^2 u_j - \omega_2^2 (u_n - u_j) = \frac{F(t)}{m_1} \quad (2.6)$$

$$\ddot{u}_n + \gamma_2 \dot{u}_n + \omega_3^2 u_n + \omega_4^2 (u_n - u_j) = \frac{F(t)}{m_2} \quad (2.7)$$

En donde al igual que en el sistema estudiado en el capítulo anterior la fuerza que se ejerce sobre los osciladores depende principalmente del desplazamiento del elemento intruso (u_i).

$$F(t) = k u_i(t). \quad (2.8)$$

La respuesta de amplitud del oscilador se determina al igual que en el capítulo anterior utilizando la 'Técnica de Fasores'. Suponiendo que la fuerza total ejercida sobre el primer y segundo oscilador tienen la forma:

$$F_1(t) = \frac{F(t)}{m_1} = \omega_1 u_0 e^{i\omega t} \quad ; \quad F_2(t) = \frac{F(t)}{m_2} = \omega_2 u_0 e^{i\omega t} \quad (2.9)$$

Siendo u_0 el desplazamiento máximo del intruso y ω la frecuencia de la fuerza ejercida sobre el oscilador. La frecuencia de la fuerza ejercida sobre el intruso producto del solitón incidente, se obtiene analizando el espectro de frecuencias de este.

Aplicando la misma suposición hecha para las fuerzas, pero para las soluciones buscadas tenemos:

$$u_j(t) = \tilde{u}_j(\omega)e^{i\omega t} \quad ; \quad u_n(t) = \tilde{u}_n(\omega)e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

Reemplazando entonces las expresiones 2.9 y 2.10 en las ecuaciones 2.6 y 2.7, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \tilde{u}_j + i\omega\gamma_1 \tilde{u}_j + \omega_1^2 \tilde{u}_j - \omega_2^2 (\tilde{u}_n - \tilde{u}_j) &= \omega_1^2 u_0 \\ -\omega^2 \tilde{u}_n + i\omega\gamma_2 \tilde{u}_n + \omega_3^2 \tilde{u}_n + \omega_4^2 (\tilde{u}_n - \tilde{u}_j) &= \omega_3^2 u_0 \end{aligned}$$

Del cual determinamos los módulos A_1 y A_2 para cada oscilador ($A_{1,2} = \sqrt{\tilde{u}_{j,n} \cdot \tilde{u}_{j,n}^*}$) obteniendo las siguientes expresiones:

$$A_1(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 \gamma_2^2 \omega_1^4 u_0^2 + (\omega_2^2 \omega_3^2 u_0 - \omega_1^2 u_0 (\omega^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2))^2}}{\sqrt{(-\omega \gamma_1 (\omega^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2) - \omega \gamma_2 (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2))^2 - (\omega^2 \gamma_1 \gamma_2 + (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2) - \omega_2^2 \omega_4^2)^2}} \quad (2.11)$$

$$A_2(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 \gamma_1^2 \omega_3^4 u_0^2 + (\omega_1^2 \omega_4^2 u_0 - \omega_3^2 u_0 (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2))^2}}{\sqrt{(\omega \gamma_1 (-\omega^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) + \omega \gamma_2 (-\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2))^2 - (\omega^2 \gamma_1 \gamma_2 + (-\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)(-\omega^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \omega_2^2 \omega_4^2)^2}} \quad (2.12)$$

Estas dos expresiones nos indicaran la respuesta de amplitud de los dos osciladores frente a la acción de una fuerza de frecuencia ω .

Si tenemos que las masas de los dos osciladores son iguales ($m_1 = m_2$) y que la constante elástica del acoplamiento entre los osciladores, es demasiado pequeña en comparación a la constante elástica del acoplamiento de los osciladores con la pared del intruso ($k \gg k_c$), la respuesta de amplitud de los osciladores sera:

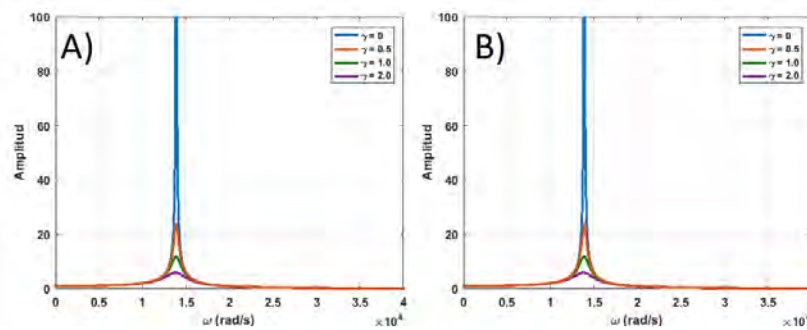


Figura 2.8: A) Gráfica Respuesta de Amplitud del Oscilador 1. B) Gráfica Respuesta de Amplitud del Oscilador 2.

A partir de las gráficas anteriores se establece que la respuesta de amplitud para este sistema, es igual en ambos osciladores y que el sistema manifiesta solo un modo de vibración, el cual corresponde al movimiento en fase de ambos osciladores (2.9), por lo que el resorte entre los dos osciladores se comporta como una barra rígida debido a que no presenta deformación y por lo tanto no ejerce fuerza sobre los osciladores.

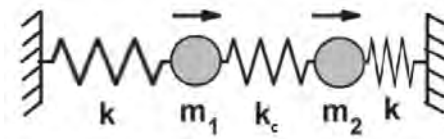


Figura 2.9: Modo de vibración sistema dos osciladores acoplados bajo la acción de una fuerza.

Las frecuencias propias de este modo de vibración se determinan resolviendo lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k + k_c & -k_c \\ -k_c & -m_2\omega^2 + k + k_c \end{vmatrix} = 0$$

$$(-m_1\omega^2 + k + k_c)(-m_2\omega^2 + k + k_c) - k_c^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$\omega_{0\pm} = \frac{\sqrt{\pm \sqrt{\frac{(-m_1k - m_1k_c - m_2k - m_2k_c)^2 - 4m_1m_2(k^2 + 2kk_c)}{m_1m_2}} + \frac{k}{m_1} + \frac{k_c}{m_1} + \frac{k}{m_2} + \frac{k_c}{m_2}}}{\sqrt{2}} \quad (2.14)$$

A partir de esta última ecuación 2.14, obtenemos dos frecuencias propias ω_{0+} y ω_{0-} , siendo ω_{0+} la frecuencia propia del modo de vibración observado en la figura 2.9, y ω_{0-} la frecuencia propia de otro modo de vibración que puede ser observado en un caso particular.

2.3.2. Resonancia de Fano.

Las resonancias han sido estudiadas durante muchos años por científicos de manera teórica y experimental. La búsqueda de nuevos efectos relacionados a la interferencia de ondas y de diferentes tipos de resonancias en varios sistemas físicos han sido de interés general.

Las resonancias de Fano es un fenómeno que se puede observar en numerosos campos de la física como la acústica, el electromagnetismo o la cuántica. Durante muchos años, el

espectro de todas las resonancias se creía que seguía la forma Lorentziana (2.10). Sin embargo, en 1935 H. Beutler observó formas asimétricas en los espectros atómicos, que luego Ugo Fano las describió como la interferencia coherente de amplitudes cuánticas entre diferentes condiciones de excitación. En 1961 Fano elaboró su teoría con una completa y elaborada descripción teórica para dichas resonancias, creando el concepto de interferencia coherente de formas de onda cuánticas para la física convencional. Cortijo (2015)

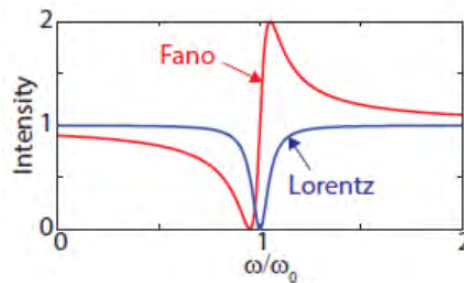


Figura 2.10: Gráfica comparativa espectro Lorentziano - simétrico (azul) y espectro asimétrico - Fano (rojo).

Más tarde se demostró que la resonancia Fano puede ocurrir en la física clásica en cualquier sitio donde exista el fenómeno de interferencia de onda. La resonancia Fano aparece cuando un estado discreto interfiere con un estado continuo. Por lo tanto el modelo simple de Fano explica un fenómeno universal que aparece en varios sistemas físicos como en los osciladores clásicos.

Consideremos el siguiente sistema de osciladores Yong S Joe & Kim (2006):

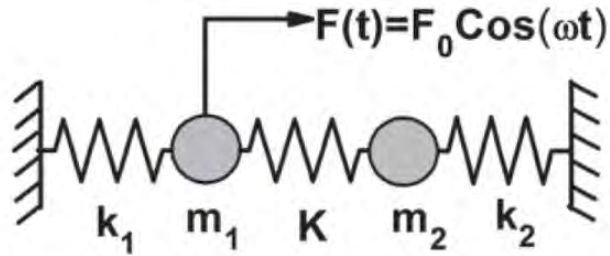


Figura 2.11: Sistema osciladores acoplados.

Donde las ecuaciones de movimiento de ambos osciladores son:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + v_{12}^2 x_2 = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + v_{21}^2 x_1 = 0 \quad (2.16)$$

Usando el mismo procedimiento ocupado en la sección anterior determinamos la respuesta de amplitud del primer oscilador (A_1) para este sistema y considerando los parámetros $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1,21$, $\gamma_1 = 0,025$, $\gamma_2 = 0$ y $v_{12} = v_{21} = 0,1$ obtenemos la siguiente gráfica:

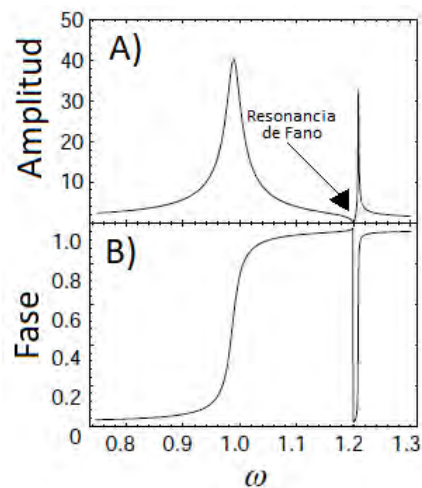


Figura 2.12: A) Respuesta de amplitud del primer oscilador. B) Respuesta de fase del primer oscilador.

En la gráfica anterior se observan dos tipos de curvas en el espectro: primero una con comportamiento simétrico en torno a la frecuencia propia del primer oscilador (ω_1) y luego una curva con comportamiento asimétrico en torno a valores de frecuencias cercanas a 1,21 que

corresponde a la frecuencia propia del segundo oscilador (ω_2).

En el intervalo de frecuencias $0 < \omega < \omega_2$ la respuesta del oscilador corresponde a la de un sistema resorte - masa con frecuencia propia ω_1 , pero si $\omega = \omega_2$ el oscilador tiene una respuesta particular, ya que en la gráfica se observa una respuesta de amplitud nula ($A_1 \approx 0$) por lo que el oscilador no oscila, esta respuesta nula se asocia a un efecto de anti - resonancia debido a la resonancia de Fano. Ahora bien para el caso de que $\omega > \omega_2$ el oscilador vuelve a comportarse como un sistema resorte - masa, pero ahora con frecuencia propia igual a ω_2 .

Tomando como base este análisis se estudiara el comportamiento del sistema planteado en la sección anterior y determinar la posibilidad de encontrar resonancias de Fano al modificar los parámetros ($\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2$, etc.) de aquel sistema.

2.3.3. Montaje Experimental

Utilizando como base el montaje experimental ocupado en la sección 1.3.2, se procedió a agregar a la cadena utilizada en la experimentación al principio de este capítulo un intruso consistente en una esfera que en su interior tiene acoplado un sistema de dos osciladores acoplados, como se observa en la siguiente figura:

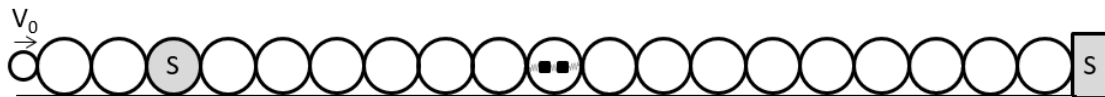


Figura 2.13: Montaje Experimental.

Para acoplar el sistema de dos osciladores acoplados dentro de una esfera, se realizó una perforación de 23 mm de profundidad, 19 mm de largo y 10 mm de ancho en el centro de una esfera de resina de 38 mm de diámetro, en donde se colocaron dos acelerómetros piezoeléctricos (PCB Piezo, modelo 352A24 de sensibilidad $10,2 \text{ mV}/(\text{m}/\text{s}^2)$) PCB PIEZOTRONICS (2008) de masa 0,8 gr. que actúan como las masas del sistema.

Los acelerómetros al igual que en el capítulo anterior se fijaron dentro de la esfera rellenando el espacio vacío con las mismas siliconas por adición (Polivinilsiloxanos) que actuaran como los resortes del sistema.

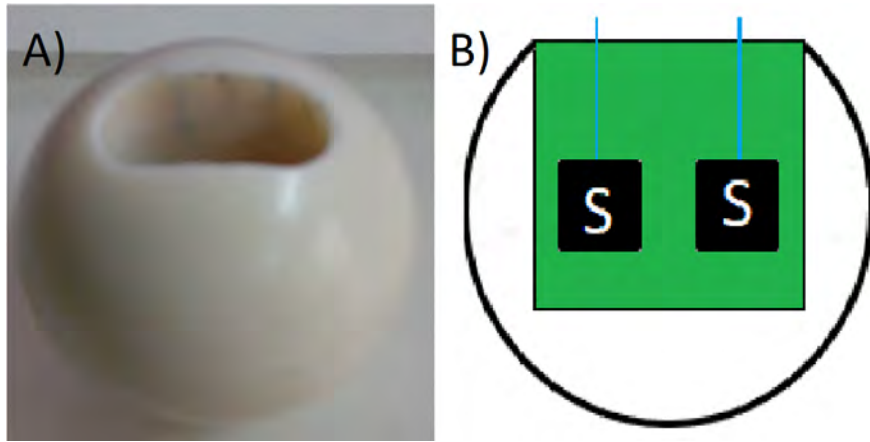


Figura 2.14: A) Esfera de resina de 38 mm de diámetro con perforación. B) Diagrama de esfera con acelerómetros y silicona (verde) al interior.

La adquisición de datos provenientes de los acelerómetros, se realizó de la misma manera a los otros sensores presentes en la cadena (sensor - bola y pared).

2.3.4. Mediciones Experimentales

Las mediciones experimentales en esta sección se realizaron de la siguiente manera:

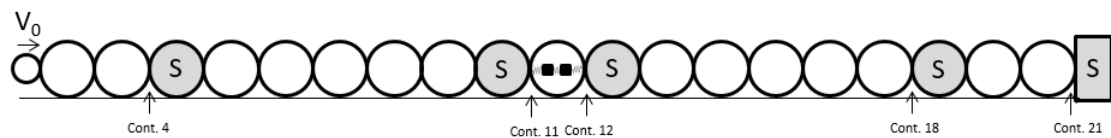


Figura 2.15: Montaje experimental para mediciones.

Como se observa en la figura 2.16, se colocó la esfera con el polímero y los acelerómetros en su interior (intruso) en una posición fija ($N = 11$) y para observar la propagación del solitón en la cadena, se varió la posición del sensor - bola en los contactos 4, 11, 12 y 18, además del solitón que resulta al final de la cadena con el sensor ubicado en la pared (contacto 21). La cadena será impactada al igual que en la sección anterior por una esfera de acero a cierta velocidad (V_0).

Se realizaron 4 mediciones: La primera medición se hizo sin la presencia del intruso y se impactó la cadena con una esfera de acero de 10 mm de diámetro. Las otras 3 mediciones se hicieron con la presencia del intruso, que en su interior tiene el polímero verde y se impactó la cadena con 3 esferas de acero de distinto diámetro (8 mm, 10 mm y 12 mm).

Se midió la aceleración de los sensores al interior del intruso en las 3 últimas mediciones, pero solo se midieron los solitones en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 de la cadena al ser impactada esta por una esfera de 10 mm de diámetro para estudiar la diferencia en el comportamiento de estos si esta o no esta presente el intruso para cada medición. Los resultados experimentales fueron comparados con los obtenidos en la simulación numérica.

2.3.5. Resultados

Para determinar las constantes elásticas k y k_c del sistema de osciladores acoplado al interior del intruso se utilizó la ecuación 1.7 expresada en el capítulo anterior, teniendo en cuenta que se utilizó el polímero verde. Se obtuvieron los siguientes valores:

Polímero	k (N/m)	k_c (N/m)
Verde	$1,65 \cdot 10^5$	$2,94 \cdot 10^5$

Cuadro 2.2: Constantes elásticas Sistema Osciladores Acoplados.

Las velocidades de impacto (V_0) de las 3 esferas de 8 (mm), 10 (mm) y 12 (mm) de diámetro con la cadena son:

Diámetro Esfera de Impacto (mm)	V_0 (m/s)
8	0,51
10	0,53
12	0,59

Cuadro 2.3: Velocidad de impacto para distintas esferas.

A partir de los datos obtenidos en las tablas 2.2 y 2.3, se calcularon numéricamente los 3 solitones incidentes al intruso en cada impacto.

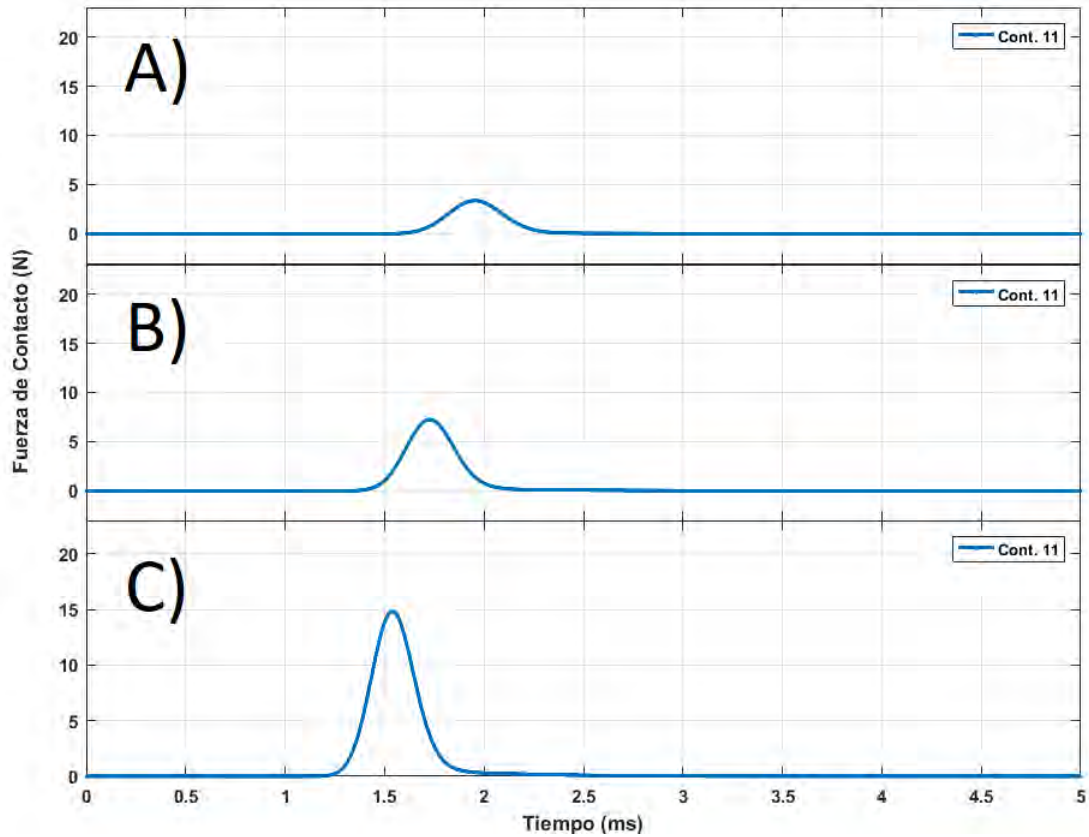


Figura 2.16: A) Solitón Incidente al intruso con esfera de impacto de 8 (mm) de diámetro. B) Solitón Incidente al intruso con esfera de impacto de 10 (mm) de diámetro. C) Solitón Incidente al intruso con esfera de impacto de 12 (mm) de diámetro.

Realizando un análisis espectral a cada solitón de la figura anterior, mediante Transformada de Fourier, se obtuvieron las siguientes frecuencias angulares:

Diámetro Esfera de Impacto (mm)	ω (rad/s)
8	7570
10	7933
12	8422

Cuadro 2.4: Frecuencias angulares para distintos tamaños de esferas de impacto.

Con lo anterior, se procedió a comparar las mediciones experimentales de la aceleración de los osciladores al interior del intruso, con las obtenidas numéricamente resultando lo siguiente:

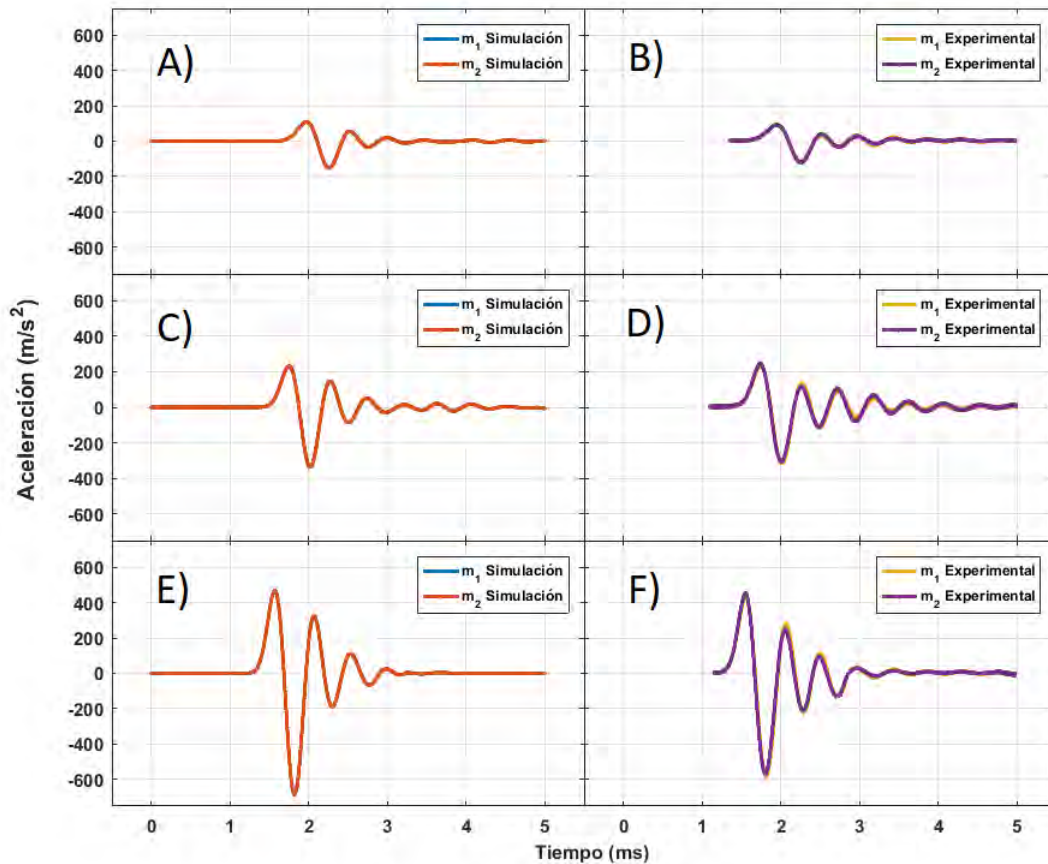


Figura 2.17: A) Simulación aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 8 (mm) de diámetro con la cadena. B) Medición experimental de la aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 8 (mm) de diámetro con la cadena. C) Simulación aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 10 (mm) de diámetro con la cadena. D) Medición experimental de la aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 10 (mm) de diámetro con la cadena. E) Simulación aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 12 (mm) de diámetro con la cadena. F) Medición experimental de la aceleración de los osciladores debido al impacto de una esfera de 12 (mm) de diámetro con la cadena.

Como se puede notar en la figura anterior, tanto en la medición experimental como en las obtenidas de forma numérica, los osciladores al interior del intruso se mueven en fase, lo cual corresponde al análisis realizado al sistema (Ver sección 2.3.1) en la figura 2.8.

Para estudiar el comportamiento del solitón al propagarse por la cadena, estando presente el intruso en la cadena, se procedió a comparar los solitones medidos en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 de una cadena homogénea de esferas, con los obtenidos en los mismos contactos en una cadena de esferas con la presencia del intruso (Caso no homogéneo). Las dos cadenas fueron impactadas por una esfera de acero de 10 mm de diámetro a una velocidad de 0,59 m/s.

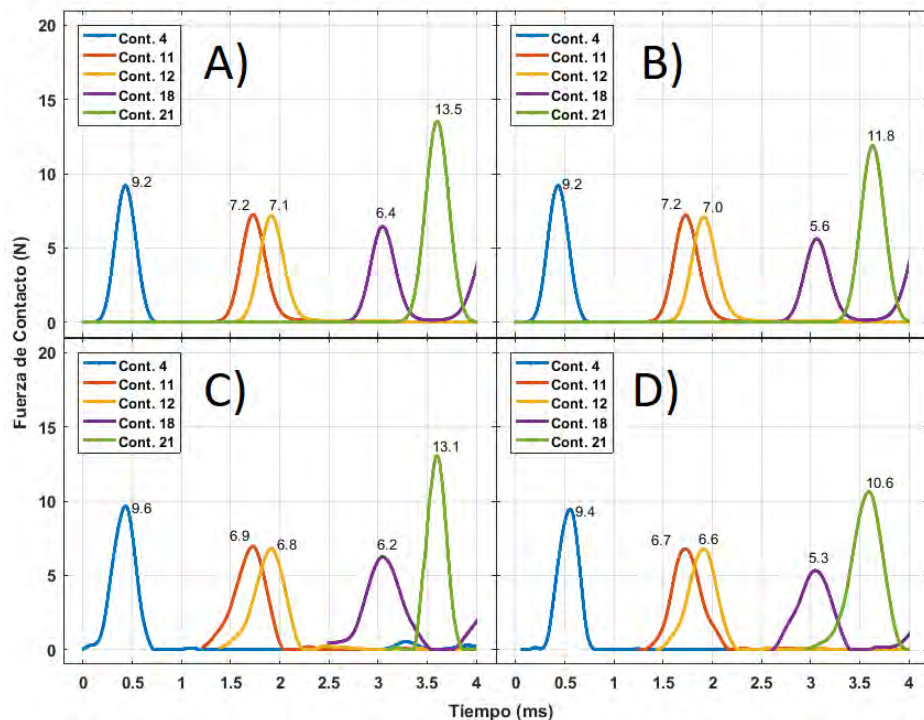


Figura 2.18: A) Simulación Numérica Caso Homogéneo. B) Simulación Numérica Caso No Homogéneo. C) Medición Experimental Caso Homogéneo. D) Medición Experimental Caso No Homogéneo.

En las gráficas de la figura anterior, tenemos que las curvas son de forma y amplitud similar tanto en la simulación numérica, como las mediciones experimentales para cada caso. Si bien las formas de cada solitón son iguales en ambos casos, existe una diferencia notable en las amplitudes de estos, en los contactos ubicados después del intruso. Esta diferencia de amplitud se asocia al igual que en capítulo anterior, a la presencia de los osciladores al interior del intruso, los cuales al oscilar quitan energía al sistema, lo que produce una baja en la amplitud del solitón que se propaga por la cadena. Este sistema a diferencia del estudiado en el capítulo anterior, presenta una atenuación más significativa, esto se debe a que hay dos osciladores al interior del intruso, los que en este caso al ser de masas iguales se comportan como un sistema masa -

resorte, pero que este caso a diferencia del capitulo anterior la masa que oscila en este sistema es de doble magnitud a la que se tiene en el sistema del capitulo anterior quitando por lo tanto energía proporcional a esta masa.

Para estudiar el efecto de la resonancia de Fano en este sistema, se procedió a analizar la ecuación de respuesta de amplitud de los osciladores al interior del intruso (2.11 y 2.12), modificando principalmente los parámetros del sistema ($\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2$), para obtener una curva de respuesta donde este presente una resonancia de Fano como la figura 2.12. Con los parámetros $\omega_1 = 9500(rad/s)$ $\omega_2 = 11000(rad/s)$, $\gamma_1 = 200$ y $\gamma_2 = 0$ se obtuvo la siguiente gráfica:

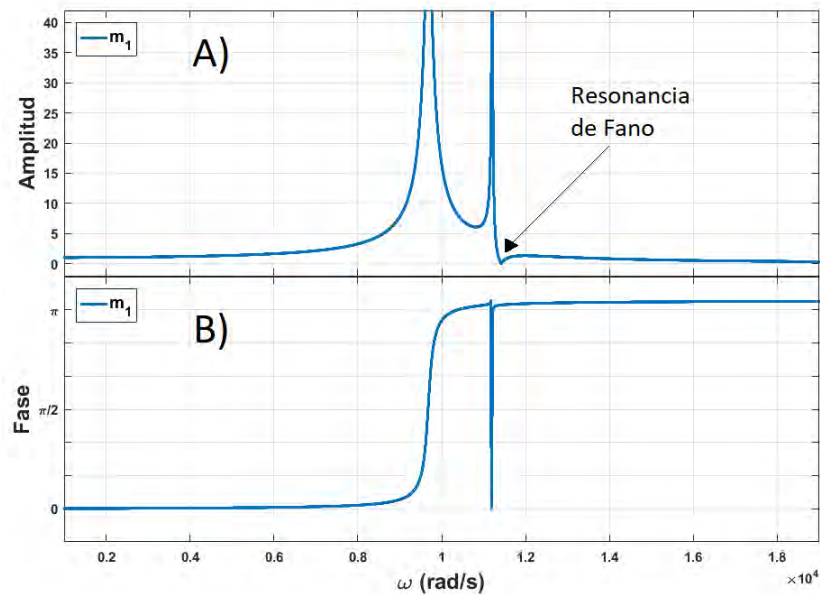


Figura 2.19: A) Respuesta de amplitud del primer oscilador. B) Respuesta de fase del primer oscilador.

En la cual observamos la presencia de la resonancia de Fano en la que la respuesta del primer oscilador (m_1), para valores cercanos a la frecuencia de oscilación del segundo oscilador (ω_2) se vuelve aproximadamente cero y también en la gráfica 2.19.B podemos observar que la fase del primer oscilador varía de π a cero en un valor igual a la frecuencia de propia del segundo oscilador.

Para observar el comportamiento de la propagación del solitón bajo el efecto de esta resonancia, se ingresaron los parámetros del sistema de osciladores acoplados determinados anteriormente a la simulación numérica y considerando además que el valor de la frecuencia angular del solitón incidente debe ser cercana a frecuencia donde se ubica la resonancia de

Fano, para esto se modifico el tamaño y velocidad de la esfera que impacta a la cadena. Se compararon los solitones en los contactos 4, 11, 12, 18 y 21 de la cadena sin presencia de intruso con los obtenidos con la presencia del intruso bajo los efectos de resonancia de Fano obteniendo lo siguiente:

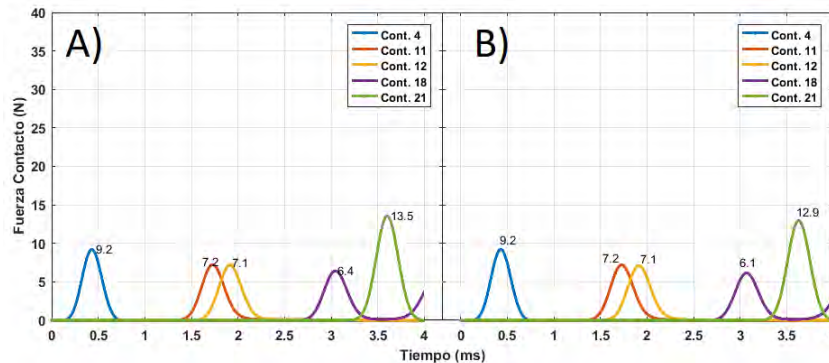


Figura 2.20: A) Simulación Numérica Caso Homogéneo. B) Simulación Numérica Caso No Homogéneo con efecto de resonancia de Fano.

En la comparación de gráficas de la figura anterior, volvemos a observar cierta atenuación en la amplitud del solitón propagado en los contactos de la cadena luego del intruso, solo que esta atenuación es menor a la observada en la figura 2.18, lo cual se asocia a que el sistema al estar en resonancia de Fano, la respuesta en amplitud del primer oscilador es nula y por lo tanto solo hay oscilación en el segundo como se determina en la figura 2.19. La aceleración de los osciladores en este caso es:

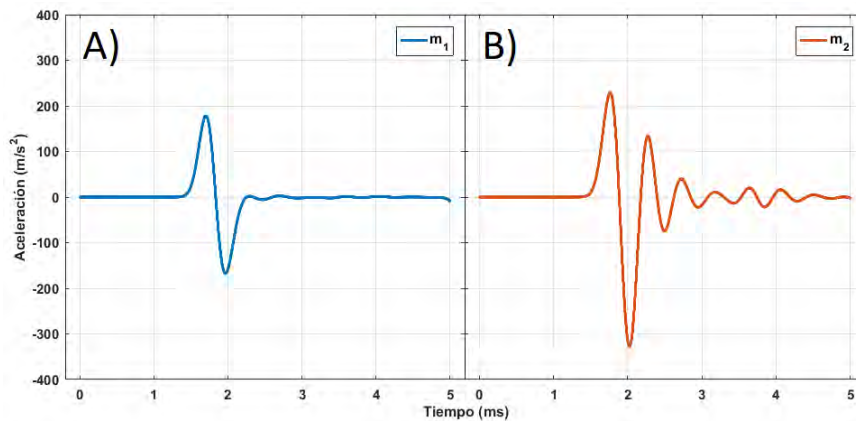


Figura 2.21: A) Aceleración del primer oscilador bajo efecto de resonancia de Fano. B) Aceleración del segundo oscilador bajo efecto de resonancia de Fano.

Como se observa en la figura anterior la oscilación del primer oscilador (m_1) es casi nula y solo hay oscilación producto del solitón incidente sobre el intruso en el segundo oscilador comprobando lo observado en la figura 2.19.

2.3.6. Conclusión.

En primer lugar, se puede concluir un buen comportamiento de la simulación numérica hecha para esta sección, ya que presento grandes similitudes a lo observado en la experimentación.

La oscilación de este sistema de dos osciladores acoplados al interior del intruso, depende al igual que en el capítulo anterior del solitón que incide sobre este, resultando variados comportamientos producto de la frecuencia angular de este como también de los parámetros propios de este sistema de osciladores.

Se observaron dos comportamientos: El primer comportamiento es el movimiento en fase de ambos osciladores al interior del intruso, el cual se debe a que las masas de los osciladores son iguales, lo que produce que la respuesta de los osciladores sea la misma y que corresponde a la de un sistema resorte - masa, haciendo que el resorte de acoplamiento entre los osciladores, independiente de su valor, se comporte como una barra rígida que no ejercerá fuerza sobre los osciladores. En este comportamiento al igual que en el capítulo anterior, se produce una atenuación de la amplitud de los solitones, en contactos de la cadena después del intruso, lo cual es debido a la acción de los osciladores al interior del intruso, ya que su movimiento quita energía al sistema. Esta atenuación a diferencia del capítulo anterior es mas significativa debido a que el sistema presenta un grado de libertad adicional por lo que este intruso es capaz de restar energía al sistema.

El segundo comportamiento observado, es debido a la presencia de la resonancia de Fano en el sistema, la cual se produce al incidir sobre el intruso un solitón con frecuencia angular similar a la frecuencia propia del segundo oscilador, lo que provoca una nula respuesta del primer oscilador debido a un efecto de anti-resonancia producto del segundo oscilador el cual es el único que oscila provocando al igual que en el comportamiento anterior la atenuación en la amplitud del solitón propagado por la cadena luego del intruso, pero esta vez es menor a la observada en el primer comportamiento, ya que solo existe un oscilador que quite energía al sistema.

Conclusiones

Conclusiones

El algoritmo utilizado en ambos capítulos, tuvo resultados similares a lo observado de manera experimental, lo que abre la posibilidad de utilizar este algoritmo en casos futuros a investigar, como también para diseñar un metamaterial no lineal acústico, con la capacidad de eliminar ruido mecánico, usando como base los sistemas estudiados en los dos capítulos.

En el sistema estudiado en el primer capítulo, al agregar un grado de libertad, se obtuvo una atenuación en torno al 1 %, ya que no se alcanzó una frecuencia de resonancia igual, a la frecuencia angular del solitón incidente al elemento intruso. Para obtener una atenuación mayor del solitón, se podría aumentar la masa del sistema masa - resorte, o bien colocar más intrusos en la cadena con lo cual se podría abarcar un rango mayor de frecuencias para el solitón incidente.

En comparación a lo anterior, el sistema estudiado en el segundo capítulo donde se agregaron dos grados de libertad, se obtuvo una atenuación en torno al 10 %, ya que estos dos grados quitan energía al sistema en comparación al sistema del primer capítulo, donde se tiene uno. En este sistema se observaron los efectos de la resonancia de Fano, donde se observó una atenuación del 6 %, ya que para este caso solo un oscilador de los dos presenta movimiento. Para obtener una atenuación mayor del solitón, se podría al igual que en el primer sistema aumentar la masa del sistema de dos osciladores acoplados, o bien colocar más intrusos en la cadena con lo cual se podría abarcar un rango mayor de frecuencias para el solitón incidente.

Referencias Bibliográficas

- Chatterjee, A. (1999). Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres. *Physical Review*.
- Cortijo, M. (2015). Resonancias fano en nanopartículas metálicas sobre guía de silicio.
- Crown, S. (2006). Emodeling the effects of velocity, spin, frictional coefficient, and impact angle on deflection angle in near-elastic collisions of phenolic resin spheres.
- PCB PIEZOTRONICS, I. (2008). Test measurement, sensors instrumentation.
- Santibañez, F. J. (2010). Propagación de impulsiones no lineales en materiales granulares.
- Surajit Sena, J. H., Jonghun Bangb, E. A., & Doneyd, R. (2008). Solitary waves in the granular chain. *Elsevier*.
- Vander Voort, G. F. (1984). Metallography, principles and practice. *Tumbaga*.
- Vorotnikov, K., Starosvetsky, Y., Theocharis, G., & Kevrekidis, P. (2017). Wave propagation in a strongly nonlinear locally resonant granular crystal.
- Yong S Joe, A. M. S. & Kim, C. S. (2006). Classical analogy of fano resonances. *Physica Scripta*.